

GEOMAGNETISMO

Notas de aulas — Curso FIS- 272 Astrofísica I

- I. M. Martin
- J. S. Lourenço
- J. Marques da Costa
- J. Amarante
- F. de Mendonça

RELATORIO CIENTÍFICO LAFE- 65

Conselho Nacional de Pesquisas Comissão Nacional de Atividades Espaciais Laboratório de Física Espacial

São José dos Campos São Paulo

GEOMAGNETISMO

Notas de aulas - Curso FIS-272

Astrofísica

- I. M. Martin
- J.S. Lourenço
- J. Marques da Costa
- J. Amarante
- F. de Mendonça

RELATÔRIO CIENTÍFICO LAFE-65

Conselho Nacional de Pesquisas Comissão Nacional de Atividades Espaciais Laboratório de Física Espacial

São José dos Campos São Paulo

INDICE

CAPÍTULO I - GENERALIDADES

1.	Resumo Histórico sobre Magnetismo	1
	Unidades	2
	Elementos Magnéticos	2
	Origem do Campo	4
	Análise por Harmônicas Esféricas	8
	Campo de um Dipolo Magnético	13
	Expansão em Multipolos	16
	Expansão do Campo Terrestre em Multipolos	16
	Campo Geomagnético	16
	Analise por Série de Taylor	19
	Aparelhos para Medidas	19
	Îndices de Atividade Magnética	19
	Variação Secular	19
CAPÍTU	LO II - INTRODUÇÃO À FÍSICA DOS PLASMAS	
1.	Órbitas de Partículas Carregadas em Campos Estáticos	20
2.	Deriva de Particulas	21
	2.2 - Presença de Campo Gravitacional Uniforme	21
	2.3 - Presença de um Campo de força qualquer	22
	2.4 - Presença de Não-Uniformidades no Campo Magnético	22
	A - Campo com Direção Constante mas Módulo Transversal-	
	mente Variavel	22
	B - Efeito do Encurvamento das Linhas de Fôrça	23
	C - Efeito da Convergência das L.F	23
	D - Efeito Total Resultante dos Desvios da Uniformidade	23
3.	Conclusões Importantes	24
4.	Algumas Expressões Úteis	25

5.	Confinamento em Campos Axiais	26
6.	Invariantes Adiabaticas	28
	A - Primeiro Invariante Adiabático	28
	B - Segundo Invariante Adiabático	31
	C - Terceiro Invariante Adiabático	35
7.	Comportamento Macroscópico de um Plasma	38
	7.1 - Conceito de Plasma - Distância de Debye	38
	a - Conceito de Plasma	38
	b - Distâncias de Debye	39
	7.2 - Fundamentos da Magnetohidrodinâmica	42
	A - Introdução	42
	B - Equação de Boltzmann	43
	C - Equação de Transferência de Momentum para uma	
	Espécie de Particulas	45
	D - Equação Macroscópica de Movimento para o Plasma	49
	E - Lei Ohm Generalizada	51
	F - Equações Fundamentais da Magnetohidrodinâmica	55
	7.3 - Movimento do Fluído Ionizado através das Linhas de	
	Fôrça Magnéticas	57
8.	Ondas em Plasma	62
	8.1 - Introdução	62
	8.2 - Ondas Hidromagnéticas - Equações Gerais	64
	8.3 - Ondas HM em Fluidos Incompressiveis	67
	8,4 - Ondas HM em Fluidos Compressiveis	73
	8.4.1 - Obtenção da Equação CaracterÍstica de Velocidade	73
	8,4.2 - Discussão dos Possíveis Tipos de Ondas	79
	8,4.3 - Resumo dos Tipos de Ondas	84
	8.4.4 - Perturbação no Campo Magnético	89
	8.4.5 - Efeitos Dissipativos	91
Capítu	ULO III	
1.	. O Sol	97
	1.1 - Introdução	97

	2.	Fotosfera	99
		2.1 - Introdução	99
		2.2 - A Equação de Transporte	104
		2.3 - Teoria Simplificada de Transporte Convectivo	112
		2.4 - Energia Transportada por Convecção	113
		2.5 - Campos Magnéticos Associados com Elementos Convectivos	114
	3.	Cromosfera	119
	4.	A Coroa Solar	124
		4.1 - Descrição Geral	124
		4.2 - A Concentração Eletrônica	124
	5.	As Manchas Solares	126
		5.1 - Grupo de Manchas	128
		5.2 - Historia de uma Mancha	128
		5.3 - As Fáculas	129
	6.	Radiação Solar	130
		6.1 - Sol Calmo	130
		6.2 - Sol Ativo	131
	7 .	Ionização na Atmosfera	135
CAP:	ÍTUI	LO IV - ELETRODINÂMICA DA MAGNETOSFERA	
		Penetração de Particulas no Campo Terrestre	136
	2.	Formação da Cavidade Magnetosférica	142
		2.1 - Modelos Sugeridos	142
		A - Resumo de Evidências Experimentais	143
		2.2 - Calculo da Superficie Limite da Magnetosfera (Forma	
		da Cavidade)	148
		A - Delineamento do Método	148
		B - Obtenção da Primeira Aproximação	155
		C - Obtenção da Segunda Aproximação	157
	_	D - Resultados	159
	3.	Deformação do Campo Geomagnético pelo Vento Solar	163
		3.1 - Propriedades Geomagnéticas de um Campo Dipolar Puro	168
		- iii -	

4.	Aprisionamento de Partículas num Campo Estacionário	170
	4.1.a - Espelhamento e Deriva num Campo Dipolar Puro	170
	4.2 - Relações de Fluxo para Partículas Aprisionadas	
_		174
5.	Coordenadas B-L	179
	5.1 - Conchas Magnéticas	179
	5.2 - Definição do Parâmetro da Concha Magnética (L)	181
	5.3 - Calculo de L E Transformação para Coordenadas Polares	
	Invariantes	185
	5.4 - Sistema de Coordenadas B-L	186
6.	Cinturões de Radiação de Van Allen	187
	a - Zona Interna	188
	b - Zona Externa	189
	c - Fontes de Particulas	190
	d - Sumidouros de Partículas	190
7.	Teoria Dinamo	192
	7.1 - Introdução	192
	7.2 - Oscilações Atmosféricas	194
	7.3 - Condutividades	197
	7.3.1 - Obtenção das Condutividades	202
	7.3.2 - Camada Dinamo	206
	7.3.3 - Métodos de Obtenção das Condutividades Ionos-	
	féricas	210
8.	Eletrojato Equatorial	212

SUMÁRIO

Êste trabalho consiste de notas de aulas tomadas do curso de pos-graduação, Introdução à Astrofísica I, ministrado na CNAE no primeiro semestre de 1965.

Queremos com isto procurar facilitar o estudo e a pesquisa bibliográfica em futuros cursos a serem ministrados.

CAPÍTULO I

GENERALIDADES

1. Resumo Histórico sobre Magnetismo

Apresentaremos aqui uma cronologia sobre magnetismo e em seguida discorreremos suscintamente sobre outras generalidades.

- Sec 11 Chines Shon Kua descobriu ima.
- Em 1269 Petrus Pelegrinus através de uma pedra esférica e limalha de ferro viu que as limalhas se orientavam para dois pontos que êle chamou de polos.
- Em 1576 Robert London descobriu a declinação de Londres com bússola (70°).

 No final do século 16 William Gilbert notou que a terra era uma esfera magnetizada.
- Em 1635 Gellibrand fêz medidas da variação secular do campo magnético
- Em 1698 Halley confeccionou a primeira carta magnética.
- Em 1702 Apareceu a primeira carta magnética mundial.
- Em 1722 Graham notou as variações transitórias surgindo o conceito de atividades magnéticas (Londres).
- Em 1740 Celsius na Suécia conseguiu notar os distúrbios magnéticos e observou através de correspondência com Graham em Londres que o fenômeno era global.
- Em 1741 Auroras como consequência do campo magnético.
- Em 1770 Wielke notou que os raios das auroras se dispunham ao longo de uma linha de campo.
- Em 1840 Surgiu o magnetismo quantitativo através de estudos teóricos de Poisson com a teoria do potencial, e Gauss com medida absoluta do campo terrestre. Aínda Gauss desenvolveu a análise har

mônica e comparando com dados experimentais, concluiu que o cam po da terra é de origem interna.

Em 1882 - Balfour Stewart levantou a hipótese de que os distúrbios magnéticos são provocados por sistemas de correntes na atmosfera devido às atividades solares.

2. Unidades

$$MKS CGS$$

$$F - Amp/m - oersted$$

$$B - Webber/m^2 - Gauss$$

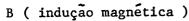
$$Gauss = \frac{Maxwell}{cm^2}$$

$$Webber = 10^8 maxwell$$

$$\frac{Webber}{m^2} = 10^4 Gauss$$

3. Elementos Magnéticos

F (campo magnético)



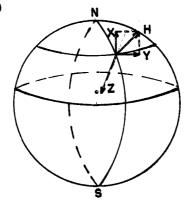


Fig. I-1 - Componentes do Campo Magnético Terrestre

Isomagnéticas

Isodinâmicas - linhas de iguais valores de campo total F Isogônicas - linhas de iguais valores da declinação (D) Isoclínicas - linhas de iguais valores de I Isopóricas - linhas de iguais valores de variação secular

X - Componente N-S

Y - Componente E-W

Z - Componente radial

H - Componente horizontal, onde

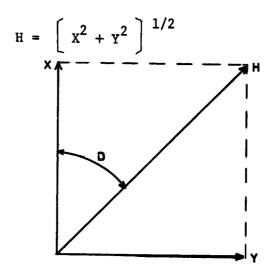


Fig. I-2 - Declinação Magnética

Declinação magnética é o azimute da componente horizontal do campo. Ela po de ser contada de 0° a 360° ou 0° a 180° E, e 0° a 180° W. Inclinação ou dip é o ângulo entre H e F.

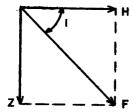


Fig. I-3a - Inclinação Magnética

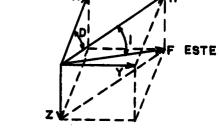


Fig. I-3b - Elementos
Magnéticos

4. Origem do Campo

Antes de entrarmos nos detalhes de origem do campo terrestre, façamos uma breve exposição sobre a constituição macroscópica de nosso planeta.

Adotaremos aquela divisão baseada principalmente em evidências sísmicas, como mostra a figura I-4.

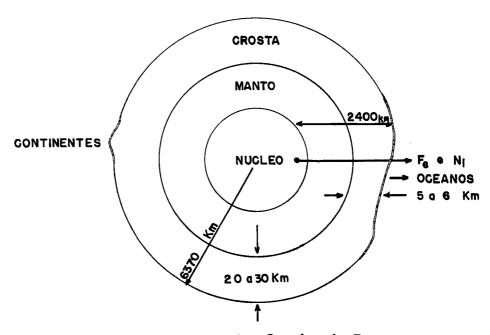


Fig. I - 4 - Camadas da Terra

a) Crosta - é a parte silicosa da Terra.

A existência desta descontinuidade tem sido estabelecido por reflexão e refrações sísmicas, mostrando um aumento brusco na velocidade das ondas sísmicas para um valor que parece ser o mesmo para todo o globo. Constituida por uma fina camada de Sedimentos, seguida de uma espêssa secção de rocha silicosa cristalina de composição média entre o granito e o basalto. O gradual aumento da velocidade de propagação das ondas sísmicas pode ser devido ao efeito de pressão, ou a uma varia - ção de composição basáltica.

b) Manto

Ainda não há uma imagem muito clara sobre sua constituição, mas imagine-se ela apresentada em 3 camadas:

- 1) camada superior (300 400 km espessura)
- 2) região de transição (até cêrca de 900 km de profundidade) -propried dades elásticas variam muito com a profundidade.
- 3) região inferior (apresenta-se homogêneo em composição e propriedades elásticas, encontradas em certos óxidos como curudum e rutile.

c) Núcleo

Supõe-se ser constituído de F_e ou liga F_e - N_i , e as principais razões que apoiam tal suposição são:

- 1) A densidade média da Terra é consideravelmente maior do que seria de esperar dos materiais encontrados na superfície ou próximo dela. Assim, o núcleo deve ser composto de um material pesado e o F_e é o ún<u>i</u> co material pesado abundante.
- 2) Um tal núcleo ferromagnético permitiria explicar o magnetismo terres tre (duvidoso).
- 3) A existência de meteorito de F_e.

A melhor explicação que se dispõe no momento sobre as origens do campo mag nético terrestre é aquela que se supõe ser o mesmo devido à correntes elétricas que fluem no núcleo fundido da Terra. Devido à lenta convecção, provocada por aquecimento não uniforme do núcleo, massas de material fundido e ionizado mover-se-iam e, por ação dinamo, induziriam força eletro-motriz que excitariam e manteriam correntes elétricas.

Vejamos com um pouco mais de detalhes como isto ocorreria.

Materiais radioativos na parte sólida do núcleo interno proveriam, com seu decaimento, a fonte de calor que, por aquecimento não simétrico, daria ori-

gem a movimentos de convecção da massa fluida na direção do núcleo para o manto.

Um modêlo simples para isto seria aquêle em que o material do núcleo fluiria para fora em direção a dois ou mais pontos no equador e retornaria para dentro pelos polos, conforme mostra a figura I-5.

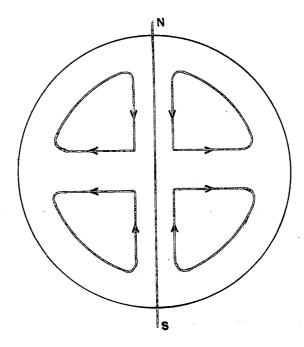


Fig. I-5 - Sentido de Movimento do Material do Núcleo

As fontes radioativas de calor estariam distribuidos aleatoriamente na parte externa do núcleo. Os fortes valores da força de Coriolis porem for çariam o material a fluir em planos perpendiculares ao eixo de rotação da Terra. Alguns estudos matemáticos e experiências feitas por H. Hide envolvendo convecção térmica de um fluído num receptáculo cilíndrico em movimento rotativo sugerem a hipótese de uma distribuição hidrodinâmica na qual se notaria a formação de um jato que oscilaria próximo no plano equatorial produzido por duas fontes e dois sumidouros.

Esta imagem não é de modo algum irreal, pois algumas observações experimentais, comportamento da variação do campo em várias estações e conclusões sobre a assimetria na distribuição das massas na Terra-conforme deduzido da observação na posição de satélites - indicam a existência de uma fonte próximo às Ilhas Marshall e um sumidouro próximo ao Pakistão.

Este sistema de correntes daria então origem a um campo semelhante ao de um dipolo, e com o momento magnético alinhado com o eixo da rotação. Para explicar a inclinação de cêrca de 11º existente, procura-se lançar mão das correntes convectivas no manto.

Tais correntes são supostas estarem relacionadas com as posições dos continentes e oceanos, sendo ascendentes principalmente sob o fundo dos oceanos; isto levaria a uma assimetria na distribuição de temperaturas, e portanto na de condutividade elétrica, o que introduziria ligeiras assimetrias na ação dínamo.

O campo real diferente daquele regular que seria produzido por um tal processo, resultaria de efeitos perturbadores, onde teríamos:

- 1) Anomalias locais: devidas, a depositos de materiais magnéticos.
- 2) Anomalias regionais: devidas a redemoinhos localizados provocados por assimetrias em distribuições de temperatura.

Observações paleomagnéticas deram origem ao conceito de deriva dos continentes. Parece ser claro agora que a convecção térmica no manto originalmente ascendente no meio de uma aparentemente única massa continental original, fornece a energia necessária para separar os constituintes e girar algumas de suas partes. Com o correr do processo, agora tais correntes ascendentes ocorrem no meio dos oceanos, conforme já dissemos acima. Alta mente relacionado à deriva dos constituintes, ocorre a mudança de posição dos polos de rotação.

Uma das belezas de teoria dinamo é que ela sugere, e em parte explica, a produção de um campo predominantemente de dipolo e seguindo razoavelmente os polos geográficos através das idades.

Passemos agora a tentativa de exprimir matematicamente o campo terrestre.

Dois são os métodos básicos de análise:

a) quando se deseja analizar dados sobre toda superfície da Terra, pro

cura-se usar a expressão analítica em têrmos de <u>harmônicas esféri-</u>
cas.

b) quando se deseja analizar dados mais detalhados, e cobrindo uma área limitada da Terra, prefere-se o método da <u>série de Taylor</u>.

5. Análise por Harmônicas Esféricas

A análise por harmônicas esféricas foi introduzida por Legendre e Laplace em pesquisas sôbre gravitação, porém, foi Gauss o primeiro a aplicá-la ao magnetismo em 1839.

Partiremos das equações de Maxwell:

$$\nabla . \vec{B} = 0$$

$$\nabla \mathbf{x} \ \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{t}}$$

como estamos tratando de situações estáticas façamos aD/at = 0.

Através das observações atmosféricas de gradientes de potencial e da condu tividade elétrica do ar, infere-se a existência de correntes ar ÷terra. Estas correntes, porém, são pequeníssimas, sendo a densidade da ordem de Ampère/km² e a direção geral ar *terra nos trópicos e terra *ar nos polos.

Portanto, nas vizinhanças da superfície da Terra a aproximação J = 0 excelente, com isto ficamos com

$$\nabla_{a} \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = 0$$

assim, o campo deve satisfazer a equação de Laplace.

$$\nabla^2 V = 0$$

Usaremos para solução dessa equação coordenadas esféricas

 θ = colatitude

 ϕ = longitude

Suporemos Terra esférica, então

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Vamos procurar uma solução em variáveis separáveis da forma

$$V = R(r) \qquad U(\theta, \phi) \qquad .$$

$$U \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{r^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right) = 0$$

Para pontos em que V ≠ 0 teremos:

$$\frac{r^{2}}{R} (R_{rr} + \frac{2}{r} R_{r}) = -\frac{1}{U} (U_{\theta\theta} + \cot \theta U_{\theta} + \frac{1}{\sin^{2}\theta} U_{\phi\phi}) = k$$

$$\cdot \cdot \cdot r^{2}R_{rr} + 2 r R_{r} - kR = 0$$

$$\frac{1}{U} \left[U_{\theta\theta} + \cot \theta U_{\theta} + \frac{1}{\sin^{2}\theta} U_{\phi\phi} \right] = -k$$
(1)

a) Resolução da equação (1)

Supondo $R = r^n$ como solução temos:

$$n(n-1) r^{n} + 2nr^{n} - kr^{n} = 0$$

 $n \cdot n^{2} + n - k = 0$ Equação indicial

cujas raizes são

$$n_1 = n$$
 e $n_2 = -(n+1)$

Portanto, a solução de (1) será da forma

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} (D_n^i r^n + E_n^i r^{-(n+1)}), \text{ onde posso alterar as constants}$$

$$D_n^i e E_n^i$$

obtendo:

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left(\frac{-r}{a}\right)^n + E_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$$
 logo

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left(\frac{r}{a}\right)^n U(\theta,\phi) + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} U(\theta,\phi) = V_e + V_1$$

onde V_e é o potencial devido à fontes externas e V_i o potencial devido à fontes internas da Terra.

b) Resolução da equação (2)

Procuremos uma solução da forma:

$$U (\theta, \phi) = M (\theta) \Phi(\phi)$$

fazendo K = n (n + 1) e considerando pontos onde $U \neq 0$, teremos

$$\frac{\Phi \phi \phi}{\phi} = -\frac{\sin^2 \theta}{M} \left[M_{\theta \theta} + \cot \theta M_{\theta} + n (n+1) M \right] = -m^2$$

$$\therefore \Phi_{\phi \phi} + m^2 \Phi = 0$$
 (3)

fazendo $cos\theta = \mu$, escrevemos

$$(1 - \mu^2)M_{\mu\mu} = 2\mu M_{\mu} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2}\right)M = 0 \quad (4)$$

A solução de (3) será da forma

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} (G_m \cos m\phi + I_m \operatorname{sen} m\phi)$$

com m inteiro, pois o deve ser periodico, isto é:

$$\Phi(2\pi) = \Phi(\phi + 2\pi)$$

A segunda equação é denominada de equação associada à equação de Legendre, reduzindo-se a equação de Legendre quando há simetria em ϕ , ou m = 0, ou seja

$$(1 - \mu^2)M_{\mu\mu} - 2\mu M_{\mu} + n (n + 1) M = 0$$

Fazendo uma transformação na variável dependente, obtemos a equação associada de Legendre, a qual tem por solução o polinômio associado de Legendre P_n^m (μ) e a função associada de Legendre de segunda espécie: Q_n^m (μ).

A solução geral seria pois

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} m m m m m$$

$$n=0 m=0 \alpha_{n} P_{n} (\mu) + B_{n} Q_{n} (\mu)$$

Como Q_n^m (μ) tende para ∞ para $u \to \pm 1$ ($\theta \to 0$ ou π) e como fisicamente o cam po é finito em tais pontos, as condições de contôrno impõe que $B_n = 0$. E fazendo $\alpha_n = a \delta_n$ nossa solução final será dada por:

$$V = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \delta_{n}^{m} \quad P_{n}^{m} \quad (\mu) \left\{ \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] G_{m} \cos m\phi + \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \right\} \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n} + E_{n} \left(\frac{a}{r} \right)^{n} \right] \left[D_{n$$

Achemos agora dois valores K_{1n} e K_{2n} tais que:

$$\frac{D_n + E_n}{K_{1n}^m} = 1 \qquad e \qquad \frac{(D_n + E_n)I_m}{K_{2n}^m} = 1$$

façamos a seguir

$$\frac{D_{n} G_{m}}{K_{1n}^{m}} = C_{n}^{m}, \frac{D_{n} I_{m}}{K_{2n}^{m}} = S_{n}^{m}, K_{1n}^{m} \delta_{n}^{m} = g_{n}^{m} e K_{2n}^{m} \delta_{n}^{m} = h_{n}^{m}$$

onde g_n^m e h_n^m são coeficientes de Gauss, e daí sai a forma conveniente:

$$V = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P_n^m (\cos \theta) \left\{ \left[c_n^m \left(\frac{r}{a} \right)^n + (1 - c_n^m) \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right] g_n^m \cos m\phi + \left[s_m^n \left(\frac{r}{a} \right)^n + (1 - s_n^m) \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right] h_n^m \sin m\phi \right\}$$

Este potencial não pode ser medido diretamente; entretanto podemos medir as 3 componentes do campo X,Y,Z.

$$X = -\left(-\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$Y = -\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad \operatorname{com} V = C + a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \operatorname{etc}$$

$$Z = -\left(-\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{\partial V}{\partial r}$$

Vamos obter agora o valor de \overrightarrow{F} na superfície da Terra então $\underline{r} = \underline{a}$. Logo

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (g_{n}^{m} \cos m\phi + h_{n}^{m} \sin m\phi) \frac{d P_{n}^{m} (\cos \theta)}{d\theta}$$

$$Y = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} m (g_{n}^{m} \cos m\phi - h_{n}^{m} \sin m\phi) P_{n}^{m} (\cos \theta)$$

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} P_{n}^{m} (\cos \theta) \left\{ \left[n C_{n}^{m} - (1 - C_{n}^{M}) (n + 1) \right] g_{n}^{m} \cos m\phi + \left[n s_{n}^{m} - (n + 1) (1 - s_{n}^{m}) \right] h_{n}^{m} \sin m\phi \right\} \text{ onde } \frac{dP_{n}(x)}{dx} = \frac{1}{(1 - x^{2})^{1/2}}$$

$$\left[P_{n}^{m+1} (x) - \frac{mx}{(1 - x^{2})^{1/2}} P_{n}^{m} (x) \right]$$

- l Qualquer diferença nos valores de g_n^m e h_n^m , usando X e Y \tilde{e} atribu \underline{i} da a influência de correntes elétricas ar \tilde{z} terra.
- 2 Conhecidos g_n^m e h_n^m e os valores de Z, pode-se calcular C_n^m e s_n^m .

Gauss verificou que os coeficientes C_n^m e s_n^m eram aproximadamente nulos, confirmando a hipótese de Gilbert de que o campo é quase totalmente de <u>o</u> rigem interna.

Após concluir a origem interna do campo, a expressão para o potencial f \underline{i} ca:

$$V = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^m \left(\cos\theta\right) \left(g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi\right)$$

n = 1 porque V é definido a menos de uma constante.

É facil verificar que os coeficientes de Gauss têm a mesma dimensão que o campo magnético, daí serem expressos em γ.

6. Campo de um dipolo Magnético

As relações macroscópicas para as forças de atração magnética podem ser da das muito mais convenientemente, usando-se o conceito de "polos magnéticos",

por:

$$f_{12} = K \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

A constante K é feita igual a 1 no sistema C.G.S. eletromagnético e a $4\pi/\mu_{0}$ no MKS. Usaremos o sistema C.G.S.

De modo análogo à eletrostática, o campo magnético (\vec{F}) é definido pela relação \vec{F} $\vec{F} = \lim_{M \to 0} \frac{\vec{F}}{M} \quad \text{ou } \vec{F} = \frac{m}{r^2} \quad \hat{\vec{r}} \quad (\vec{m} \text{ pode ser} + \text{ou} -)$

Vejamos agora as expressões do campo e do momento devido a um dipolo magnético.

Definimos dipolo magnético, Figura I-6, como o conjunto formado por dois "polos" espaçados de uma distância \underline{d} . O momento magnético do dipolo \underline{e} da do pela expressão $\underline{M} = \underline{m}\underline{l}$

Por convenção, ao polo positivo (de onde "saem" as linhas de forças) cha mamos de Norte magnético e ao negativo de Sul. Portanto, o polo Norte da Terra é na realidade um Sul magnético.

Vejamos qual a expressão do potencial de um dipolo infinitezimal.

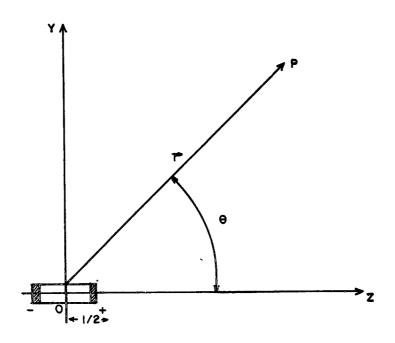


Fig. I-6 - Dipolo Magnético

Orientamos o sistema de eixos como na figura I-6. Consideraremos o problema em duas dimensões, devido \tilde{a} simetria existente na terceira. Deseja mos o potencial num ponto P tal que r >> 1.

Como o campo é dado por: $F = \frac{m}{r^2}$ \hat{r} o potencial de um "polo" será $V = \frac{m}{r}$. Usando o princípio da superposição, teremos:

$$V = V_+ + V_-$$

$$V_{+} = \frac{m}{r - 1/2 \cos \theta} \quad \text{e} \quad V_{-} = -\frac{m}{r + 1/2 \cos \theta} \quad \text{onde}$$

$$V = \frac{m(r + 1/2 \cos \theta - r + 1/2 \cos \theta)}{r^2 - 1^2/4 \cos^2 \theta} = \frac{m \cdot 1 \cos \theta}{r^2 - 1^2/4 \cos^2 \theta}$$

como r >>1, então r^2 >>> $\frac{1}{4}^2\cos^2\theta$ e $V=\frac{M\cos\theta}{r^2}$, \tilde{e} expressão de potencial de um dipolo axial.

As componentes do campo em P, serão

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2 M \cos \theta}{r^3}$$

$$F = -\frac{I}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{M \operatorname{sen}\theta}{r^3}$$

A equação das linhas de força pode ser obtida de:

$$\frac{d\mathbf{r}}{\mathbf{r}d\theta} = \frac{\mathbf{F}_{\mathbf{r}}}{\mathbf{F}_{\theta}} = 2 \cot \theta \quad \text{...} \quad \frac{\mathbf{r}}{\sec^2 \theta} = \cot \theta$$

Considerando agora um dipolo com polos fora da origem, poderiamos escrever $\vec{M} = \frac{\Sigma}{i} m \vec{r}_i$. Para um conglomerado de "dipolo" magnético, teríamos $\vec{M} = \frac{\Sigma}{i} m \vec{r}_i$ e para uma distribuição continua $\vec{M} = \int \rho \vec{r} d\zeta$. Alguns resultados interessantes:

- a) $\frac{F\theta}{F_r} = \frac{1}{2} tg\theta$ logo a direção do campo independe de r.
- b) o potencial cai com $1/r^2$, mas o campo com $1/r^3$.
- c) o valor do campo nos polos e o dobro do valor no equador.

7. Expansão em multipolos

Esta parte está muito bem apresentada em J.D. Jackson (1966).

8. Expansão do Campo Terrestre em multipolos

Esta parte está muito bem apresentada em Valley, S.L. (ed), 1965 e Rishbeth and Garriott (1964).

9. Campo Geomagnético

O campo da Terra, pode ser aproximado com razoável precisão pelo de um dipolo. Os vários estágios de tal transformação são:

- a) Dipolo alinhado ao longo do eixo rotação
- b) Introdução da obliquidade no eixo magnético do dipolo.
- c) Remoção do dipolo, quase perpendicularmente a seu eixo, para uma po sição excêntrica.

Destas três aproximações a que dá melhores resultados é a última, mas a mais usada, por sua singularidade e razoável precisão, é a segunda.

Denomina-se assim campo geomagnético ao campo devido ao dipolo centrado, o qual apresenta as seguintes características:

Momento magnético:
$$8,1 \times 10^{-25}$$
 r cm³
Inclinação: 11.5°
Polos geomagnéticos - $N_{\rm G}$: 78.5° N - 69° W $S_{\rm G}$: 78.5° S - 11° E

O campo real tem seus polos de inclinação (dip. polos) em:

Norte: 74°N - 101°W (extremidade norte da Ilha Prince of Wales norte do Canada) 1965

Sul: 72°S - 144°E (Antártica - Sul da Austrália)

A linha N-S passa cêrca de 1.300 km do centro da Terra.

O campo da Terra apresenta alguns valores típicos:

Polo Sul: 0.72 r

Sibéria e Norte do Canadá: 0,60 r

Brasil: 0.24 Γ

A precisão do modêlo dipolar se verifica com boa aproximação, sendo o campo nos polos (0.701), cêrca do dôbro daquele no equador (0.401).

Vejamos agora algumas peculiaridades ou anomalias do campo terrestre.

- 1) Equador magnético: máximo afastamento geográfico (~ 15°S) perto de Cuiabá daí passando próximo a Natal até atingir 10°N na África, começan do a descer novamente na Austrália.
- 2) Intensidade Horizontal: Anomalia Sul-Africana: 0.124 [(minimo em H)
- 3) <u>Intensidade Vertical</u>: Anomalia local de Kursh, Sul de Moscou, ao longo de faixas de 250 km de extensão o valor de Z é maior que o normal atingido 1.97.
- 4) Ângulo de Inclinação:
 - a) anomalia do Atlântico Sul: ângulo de inclinação menores no Hemis fério Sul que no Hemisfério Norte na mesma latitude (Ex. América do Sul, inclinação menor na América do Norte).
 - b) Fora daí, no Hemisfério Norte é um pouco maior.

O campo relativo ao dipolo centrado é chamado de campo geomagnético, e já vimos que os polos geomagnéticos diferem dos polos de inclinação . Baseando no campo do dipolo introduz-se as coordenadas geomagnéticas.

a) <u>Latitude Geomagnética</u>: medida de 0 à <u>+</u> 90° (+ para o norte geomagnético)

b) Longitude Geomagnética: medida para leste no meridiano base, que é aquêle baseado no dipolo, que passa pelo polo norte geográfico.

Além disto, institui-se também a hora geomagnética, determinado pela longitude geomagnética, onde, meio-dia geomagnético é o instante em que o Sol cruza o meridiano geomagnético local.

Os elementos magnéticos quando dados em coordenadas geomagnéticas são escritos com "linha", ex.: X',Y',Z'.

Interessa-nos agora obter as coordenadas geomagnéticas θ , Λ de um ponto P cujas coordenadas geográficas são θ , ϕ , como mostra figura I-7 (a) e (b)

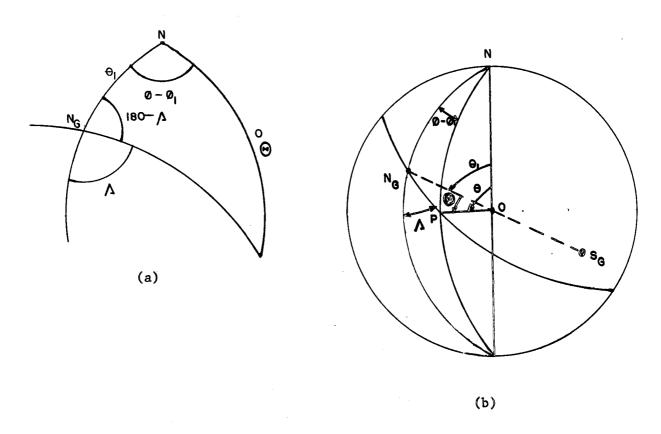


Fig. I-7 - Coordenadas Geomagneticas

Pelas relações do triângulo esférico, tiramos:

$$\frac{\cos\theta = \cos\theta}{1} \quad \frac{\cos\theta + \sin\theta}{1} \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \cos\theta \quad (\phi - \phi_1)$$

$$\frac{\sin(180 - \Lambda)}{\sin\theta} = \frac{\sin(\phi - \phi_1)}{\sin\theta}$$

isto é:

$$\cos^{\theta} = \cos^{\theta}_{1} \cos^{\theta} + \sin^{\theta}_{1} \sin^{\theta} \cos^{\theta} \cos^{(\phi-\phi_{1})}$$

$$\sin^{\theta} = \frac{\sin^{\theta} \sin^{\theta}(\phi-\phi_{1})}{\sin^{\theta}}$$

sendo
$$\theta_1 = 11.5^{\circ}$$

$$\phi_1 = 69^{\circ}.W$$

10. Análise por série de Taylor

Consultar o desenvolvimento desta parte em Valley, S.L. (ed),1965.

11. Aparelhos para medidas

Consultar Chapman and Bartels (1940) Volume I.

12. Índices de atividade magnética

Consultar Valley, S.L. (ed), 1965.

13. <u>Variação Secular</u>

Consultar V.P. Orlov, 1965.

CAPITULO II

INTRODUÇÃO A FÍSICA DOS PLASMAS

1. Órbitas de Partículas Carregadas em Campos Estáticos

Apresentaremos aquí um resumo dos conceitos e resultados básicos sobre órbitas de partículas carregadas, na presença de campos estáticos.

Para um melhor entendimento do assunto recomendamos as referências: Spitzer L., Longmire C.L., Pikel'ner S.B., contudo, lembramos que a matéria encontra-se bem explanada na maioria dos livros de introdução a física dos plasmas.

Na expressão da equação geral de movimento escrita abaixo, \vec{F} significa uma força qualquer, agindo na particula que se desloca com velocidade \vec{u} ; \vec{E} e \vec{B} são os campos elétrico e magnético respectivamente.

Equação do Movimento:
$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} + q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Particula em Campos Isolados Uniformes

Somente campo Elétrico

Movimento uniformemente acelerado, com aceleração: $\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{m}}$ $\stackrel{\triangleright}{\mathbf{E}}$

Somente campo Magnético

Movimento Helicoidal com seu eixo coincidente com uma Linha de Fôrça

- a Movimento de Centro de Giro (C.G.): velocidade u constante
- b Movimento giratório: Giro-frequência: $\vec{w}_c = -\frac{q}{m}\vec{B}$

Raio de Giro:
$$a = \frac{mu_{\perp}}{|q| \cdot B}$$

2. Deriva de Particulas

A superposição de outras forças à força de natureza magnética dá origem deriva do C.G.. O movimento resultante será pois uma hélice com deriva.

Em todos os casos o movimento giratório terá:

Girofrequência: $\overrightarrow{w}_{c} = -\frac{q}{m}\overrightarrow{B}$

Raio de Giro: $a = \frac{mu'}{|q| \cdot B}$

Vejamos qual a trajetória do movimento: $\vec{u} = \vec{u}' + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$

O C.G. apresentará:

- Aceleração paralela à Linha de Fôrça, dada por: $\frac{q}{m}$ E,
- Deriva perpendicular à L.F. dada por: $u = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$; $u_D = \frac{E_{\perp}}{B}$

2.2 Presença de Campo Gravitacional Uniforme

Introduz-se na equação do movimento: $\vec{u} = \vec{u}' + \frac{m}{q} = \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}$

O C.G. apresentará:

- Aceleração paralelamente à L.F. dada por: gu

- Deriva perpendicular à L.F. dada por:
$$\vec{u}_D = \frac{m}{q} = \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2}$$

$$\vec{u}_D = \frac{mg | g|}{|q| B} = \frac{g | g|}{|w_C|}$$

2.3 Presença de um Campo de Força qualquer

Introduz-se na equação do movimento: $\vec{u} = \vec{u}' + \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{qB^2}$ e obtêm-se:

- Aceleração do C.G. paralelamento à L.F.:
$$\frac{du_{ij}}{dt} = \frac{F_{ij}}{m}$$

- Deriva do C.G.:
$$\vec{u}_D = \frac{\vec{f} \times \vec{B}}{qB^2}$$
 : $u_D = \frac{\vec{f} \cdot \vec{B}}{qB}$

2.4 Presença de Não-Uniformidades no Campo Magnético

A - Campo com direção constante mas módulo transversalmente variável

Nêste estudo usa-se a Teoria Adiabática e leva-se em conta só os efeitos
de primeira ordem (proporcionais à primeira potência de VB) introduzidos
pelos desvios da uniformidade (perturbações), resultantes de uma variação
suficientemente lenta do campo, isto é:

Resulta uma deriva no C.G., dada por:

$$\mathbf{u'}_{\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{m}\mathbf{u} \perp^{2}}{2\mathbf{q}\mathbf{B}^{3}} \quad (\vec{\mathbf{B}} \times \nabla \mathbf{B})$$

B - Efeito do encurvamento das linhas de força

O encurvamento faz aparecer uma força centrifuga que da origem à uma deriva do C.G. perpendicularmente à L.F.:

$$u''_{D} = \frac{mu^{2}_{H}}{q \cdot B^{3}} \quad (\vec{B} \times \nabla B)$$

considerando-se desprezível as correntes que porventura existam

$$(\nabla \times \vec{B} = 0)$$

C - Efeito da convergência das L.F.

Este efeito se traduz numa aceleração do C.G. paralelamente à L.F.

$$\frac{d\mathbf{u}_{11}}{dt} = -\frac{\mathbf{K} \perp}{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{s}} \text{ onde } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{s}} = \nabla_{11} \mathbf{B} \mathbf{e} \mathbf{K} \perp = \frac{1}{2} \mathbf{m} \mathbf{u} \perp^{2}$$

D - Efeito total resultante dos desvios da uniformidade
- Aceleração do C.G. paralelamente à L.F.:
$$\frac{du_{11}}{dt} = -\frac{K}{B}$$
 ∇_{11} B

- Deriva do C.G.:
$$\overrightarrow{u}_D = \overrightarrow{u}_D' + u_D'' = \frac{K(1 + \cos^2 \alpha)}{qB^3}$$
 ($\overrightarrow{B} \times \nabla B$)

Sendo $K = \frac{1}{2} m (u_{11}^2 + u_{12}^2) = energia cinética da partícula$

$$\cos \alpha = \frac{u_{ii}}{u}$$
 onde $\alpha = \text{ angulo entre a trajetoria de partícula e a direção da L.F. (pitch angle)$

and the comparison of the contraction of the contra

3. Conclusões importantes

- 3.1 O gradiente de pressão pode dar origem à deriva, usando-se: $\vec{F} = \frac{1}{N} \nabla p$, onde $N = n \hat{u} m e ro$ total de partículas no plasma. Acredita-se ser êste o fenômemo responsável pelos campos magnéticos cósmicos.
- 3.2 Não considerando os efeitos de pressão, o movimento mais geral do C.G., válido para o caso de correntes desprezíveis (∇ x B = 0) e para E, suficientemente pequeno de modo a não invalidar a Teoria Adiabática, será dado por:

- Aceleração ao longo da L.F.:
$$\frac{du_{"}}{dt} = \frac{q}{m} E_{"} + g_{"} - \frac{K \perp}{B} \frac{\partial B}{\partial s}$$

- Deriva do C.G.:
$$\vec{u}_D = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{m}{q} \frac{\vec{g} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{K(1 + \cos^2 \alpha)}{qB^3}$$
 ($\vec{B} \times \nabla B$)

- 3.3 As expressões acima para o movimento do C.G. são válidas apenas para valores suficientemente pequenos de El, tais que permitam à trajetória da partícula formar anéis. Isto ocorrerá se a velocidade térmica das mesmas fôr muito maior que a velocidade de deriva devida ao campo elétrico (El/B); caso contrátio, a trajetória será uma ciclóide aberta (se não considerarmos a existência de En e dos outros efeitos paralelos à L.F.) e serão necessárias expressões mais complicadas.
- 3.4 A presença de uma deriva invalida, em geral, a suposição de que as partículas espiralem ao longo de uma Linha de força. Entretanto, ainda se pode supor que isto ocorra <u>a cada instante</u>.
- 3.5 A análise da expressão que dá a deriva do C.G. mostra que:
 - a Forças externas de origem não elétrica produzem uma separação de

cargas, quando atuando sobre uma nuvem de partículas macroscopicamente neutra. Isto é, elas darão origem a correntes elétricas.

- b-Forças de natureza eletrostática não produzirão separação de cargas; tendem a deslocar o plasma como um todo, produzindo tensões internas no mesmo, mas não correntes.
- 3.6 Efeitos da convergência das L.F. no raio de giro e no espelhamento das partículas serão estudados mais adiante.

4. Algumas Expressões úteis

Raios de Giro:
$$a = 3,37 \frac{K \mid}{B} \quad \text{(eletrons)}$$

$$a = 145 \frac{K \mid}{B} \quad \text{(protons)}$$
Girofrequências
$$w_{c} = 1,76 \times 10^{7} \text{ B (eletrons)}$$

$$w_{c} = 0,96 \times 10^{4} \text{ B (protons)}$$

Unidades:
$$K \perp = \frac{1}{2} \text{ mu} \perp^2$$
 em eV
a em cm

B em gauss

w em rad/seg

5. Confinamento em Campos Axiais

O estudo que se segue pode ser feito lembrando que temos uma velocidade de C.G. dada por:

$$\vec{u}_{D} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^{2}} + \frac{2k_{II}}{gB^{2}} \vec{B} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial S} + \frac{K \perp}{gB^{3}} \vec{B} \times \nabla B$$

Como os campos podem ser supostos todos com simetria axial é fácil mostrar que tôdas as componentes de \overrightarrow{u}_D são perpendiculares ao plano que contem a L.F. e o eixo de simetria, acarretando em que a partícula permença sôbre ums superfície de fluxo constante, obtida pela rotação em tôrno do eixo de simetria da L.F.,

De um modo geral as derivas vistas no item anterior vão afetar o confinamento ao campo magnético. Entretanto, se os campos \vec{E} e \vec{E} forem axialmente simétricas, e se a energia cinética não for grande, pode-se dar uma prova exata de que tais desvics não afetam o confinamento das partículas.

Vamos escrever $\vec{F} = q$ ($\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}$) em coordenadas cilíndricas:

$$\gamma_{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{m}} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{r}} + \mathbf{u}_{\phi} \mathbf{B}_{\mathbf{z}} - \mathbf{u}_{\mathbf{z}} \mathbf{B}_{\phi} \right)$$

$$\gamma_{\underline{!}} = \frac{q}{m} (E_{\phi} + u_z B_r - u_r B_z)$$

$$\gamma_{ii} = \frac{q}{m} (E_z + u_r B_\phi - u_\phi B_r)$$

Devido a simetria axial:

$$\gamma_{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{m}} (\mathbf{E}_{\mathbf{r}} + \mathbf{u}_{\phi} \mathbf{B}_{\mathbf{z}})$$

$$\gamma_{\perp} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{m}} (\mathbf{u}_{\mathbf{z}} \mathbf{B}_{\mathbf{r}} - \mathbf{u}_{\mathbf{r}} \mathbf{B}_{\mathbf{z}})$$

$$\gamma_{11} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{m}} (\mathbf{E}_{\mathbf{z}} - \mathbf{u}_{\phi} \mathbf{B}_{\mathbf{z}})$$

Sendo
$$\Phi = \int \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n} ds$$
, prova-se que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} = 2\pi \mathbf{r} \mathbf{B}_{\mathbf{z}}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -2\pi r B_r$$

Portanto: $\gamma_{\perp} = \frac{-q}{2\pi m} \left(\frac{u_z}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$

Integrando: $mru_{\phi} + \frac{q}{2\pi} \Phi (r,z) = C$

Isto nada mais é do que o momentum angular generalizado:

$$P_{\phi} = mru_{\phi} + \frac{q}{2\pi} \Phi (r,z) = C$$

que nos permite demonstrar o confinamento das partículas em campos axialmente simétricos como mostram as figuras II-la e II-lb.

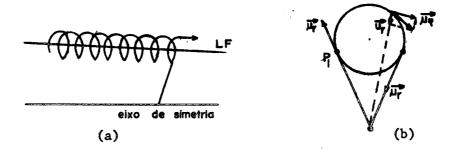


Fig. II-1 - Confinamento de partículas carregadas em campos axialmente simétricos

Nos pontos P_1 e P_2 da figura II-1b, $u_{\phi} = 0$, e portanto:

$$(r,z) = \frac{-2\pi c}{q}$$

ou
$$r = f(z,c)$$

E portanto P_1 e P_2 se mantêm sempre numa superfície.

6. Invariantes Adiabáticos

A - Primeiro invariante adiabático

O primeiro invariante adiabático é dado pelo momento diamagnético da partícula, que é definido como o produto da corrente circulante pela área con tida:

$$u = I.A = \frac{e}{T} \cdot \pi a^2 = \frac{ew}{2\pi} \cdot \pi a^2 = \frac{e}{2} \left(\frac{wa}{w}\right)^2 = \frac{e}{2} \cdot \frac{v_{\perp}^2}{\frac{eB}{m}} = \frac{1/2 \cdot mv_{\perp}^2}{B}$$
 $\therefore u = \frac{k_{\perp}}{B}$

a) B uniforme e variável no tempo Haverá um campo elétrico induzido, tal que:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

A variação da energia k da partícula em um giro:

$$\Delta k_{\perp} = \oint e\vec{E} \cdot d\vec{s} = e \int (\nabla x \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{e}{c} \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

se B permanece aproximadamente constante na região de integração:

$$\Delta k_{\perp} = \frac{e}{c} \frac{\Delta B}{T} \pi a^2 = \frac{e}{c} \Delta B \frac{w}{2\pi} \pi a^2 = \frac{k_{\perp}}{B} \Delta B$$

ou seja
$$\Delta(\frac{k_{\perp}}{B}) = 0$$

 $\therefore u = \frac{k_{\perp}}{B} = cte$

b) B não uniforme

Ja vimos anteriormente que
$$F_{ii} = -\frac{k_{\perp}}{B} \nabla_{ii}B$$

ou seja $\frac{\text{mdv}_{ii}}{\text{dt}} = -u \frac{\partial B}{\partial s}$

Vamos desenvolver o primeiro membro:

$$\frac{m}{dt} \frac{dv_{ii}}{dt} = \frac{m}{ds} \frac{dv_{ii}}{dt} = m v_{ii} \cdot \frac{dv_{ii}}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} m v_{ii}^2\right) = \frac{\partial}{\partial s} (k - k_{\perp})$$

Como k 2 cte:

$$\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{dt}} = -\frac{\partial \mathbf{k}_{\perp}}{\partial \mathbf{s}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} (\mathbf{u} \mathbf{B}) = -\mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{s}} - \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{s}}$$

Portanto, na expressão original:

$$- u \frac{\partial B}{\partial s} - B \frac{\partial u}{\partial s} = - u \frac{\partial B}{\partial s}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{s}} = 0 \qquad \therefore \quad \mathbf{u} = \mathsf{cte}$$

Logo <u>u</u> se conserva sobre uma linha de força.

c) Espelhamento de partículas

Sendo a o ângulo entre a velocidade da partícula e a direção da linha de força:

$$\cos = \frac{v_{ii}}{v} = (\frac{k_{ii}}{k})^{1/2}$$

Portanto:

Daí vemos que a medida que B cresce sen α também cresce, até que sen α = 1 (α = $\pi/2$), ou seja v_{ii} = 0. Portanto:

$$\frac{1}{B_{m}} = \frac{\sin^{2}\alpha_{o}}{B_{o}} : NB_{m} = \frac{B_{o}}{\sin^{2}\alpha_{o}}$$

E temos:

$$v_{11}^2 = v^2 - v_{\perp}^2 = v^2 (1 - \sin^2 \alpha) = v^2 (1 - \frac{B}{B_0} - \sin^2 \alpha)$$

$$\therefore v_{11} = \pm v (1 - \frac{B}{B_m})^{1/2}$$

O duplo sinal indica que a partícula, após refletida passará por cada ponto com a mesma velocidade paralela, mas em sentidos opostos. Este efeito de reflexão de partículas carregadas num campo magnético nos traz de imediato a idéia de aprisionamento de partículas, com sucessivas reflexões em tais pontos de espelhamento.

B - Segundo invariante adiabático

No primeiro invariante mostrou-se que uma partícula carregada poderia ficar confinada, num campo magnético axialmente simétrico, a uma superfície de fluxo constante, obtida pelo giro de uma certa linha de força em torno do eixo de simetria. O movimento da partícula sobre a superfície de fluxo constante seria devido a deriva da mesma.

Entretanto se o campo não for axialmente simétrico, a deriva não será pura mente azimutal, passando ela para outras linhas de força não resultantes de uma revolução da original.

Então para onde irá a partícula? Retornará à linha de forla original?

Sabemos do primeiro invariante que a intensidade de B_m nos pontos de espelhamento é sempre a mesma (não varia com a energia da partícula e sim com as condições iniciais de injeção, B_o e α_o) de modo que ela não muda ao se passar de uma linha de fôrça para outra; entretanto a posição de B_m certamente variarã. A fim de fixar tôdas as possíveis linhas de fôrça para as quais pode a partícula derivar, necessitamos de uma segunda constante do movimento, que será a integral do momentum ao longo da linha de fôrça,entre dois pontos de espelhamentos A e A':

$$J = \int_{A}^{A'} \overrightarrow{p} \cdot d\overrightarrow{s} = \int_{A}^{A'} p_{ii} ds = cte$$

De tôdas as linhas de fôrça a partícula só pode se espelhar naquelas em que o valor de J é o mesmo que para a linha de fôrça original.

Esta quantidade H é um invariante adiabático, e é conservado somente se o tempo de trânsito da partícula, através das irregularidades do campo magnético, é longo comparado com o intervalo de tempo entre as reflexões; ou se ja, velocidade de deriva pequena.

Como consequência da invariança de J, o C.G. da partícula deriva em tôrno de supesto eixo de simetria de campo em uma única superfície longitudinal invariante (determinada pelas LF que obedecem ao segundo invariante adiabático) e retorna à L.F. inicial.

A seguir sera demonstrada a invariança de J. Para tal faremos uso da velocidade de deriva resultante de irregularidades no campo:

$$\vec{u}_D = \frac{k_\perp}{qB^3} \vec{B} \times \nabla \vec{B} + \frac{2k_{\parallel}}{qB^3} \vec{B} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial s}$$

Consideremos um pedaço de linha de força original δ s, e um pedaço de uma no va linha de força δ s', nas vizinhanças da original. O novo elemento foi des locado na direção \vec{u}_D , e seu comprimento é tomado entre dois planos perpendiculares à linha de força original como mostra a figura II-2.

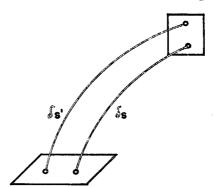


Fig. II-2 - Linhas de força vizinhanças

Se $\vec{u}_D \perp \vec{R}$ a nova L.F. seria obtida pela revolução da anterior, mostrando a existência da simetria axial. Porém, se \vec{u}_D não é perpendicular a \vec{R} , então a nova L.F. poderá ser obtida transladando-se a original na direção de \vec{R} , de

um comprimento e = $(\vec{u}_D$. $\vec{R})$ dt, e em seguida fazer a revolução como consta na figura II-3.

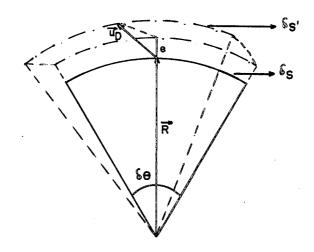


Fig. II-3 - Nova linha de força com \vec{u}_D não perpendicular à \vec{R} .

Só a primeira operação altera o comprimento do elementos de arco.

Temos:

$$\begin{cases} \delta s = R\delta\theta \\ \delta s' = (R + e)\delta\theta \end{cases} \therefore d(\delta s) = e\delta\theta \therefore \frac{d(\delta s)}{\delta s} = \frac{e}{R}$$

logo:
$$\frac{d(\delta s)}{\delta s} = \frac{(\overrightarrow{u}_D \cdot \overrightarrow{R}) dt}{R} = \overrightarrow{u}_D \cdot \frac{\overrightarrow{R}}{R} dt$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\delta s} \quad \frac{d(\delta s)}{dt} = \overrightarrow{u}_D \quad \cdot \quad \frac{\widehat{R}}{R} = \frac{k_{\perp}}{q_B^3} \quad (\overrightarrow{B} \times \nabla \overrightarrow{B}) \quad \cdot \quad \frac{\widehat{R}}{R} + \frac{2k_{\parallel}}{q_B^3} \quad (\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{B}) \quad \cdot \quad \frac{\widehat{R}}{R}$$

êste último elemento se anula, e temos:

$$\frac{1}{\delta s} \quad \frac{d}{dt} \left(\delta s \right) = \frac{k_{\perp}}{aB^3} \left(\vec{B} \times \vec{V} \vec{B} \right) \cdot \frac{\hat{R}}{R} \tag{1}$$

Vejamos agora a razão de variação de u, . Temos que:

$$u_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{2}{m} (k - k_{\perp}) \end{bmatrix}^{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{m} (k - uB) \end{bmatrix}^{1/2}$$

$$\frac{1}{u_{11}} \frac{du_{11}}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{u}{(k-uB)} \frac{dB}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{u}{k_{11}} \frac{\partial B}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{k_{\perp}}{k_{11}B} \quad \nabla B \cdot \overrightarrow{u}_{D}$$

Portanto:

$$\frac{1}{u_{ii}} \frac{du_{ii}}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{k_{\perp}}{k_{ii}B} \quad \forall B. \quad (\frac{k_{\perp}}{aB^3} \stackrel{?}{B} \times \forall \stackrel{?}{B} + \frac{2k_{ii}}{aB^3} \stackrel{?}{B} \times \frac{\partial \stackrel{?}{B}}{\partial s})$$

De (1) e (2):

$$\frac{1}{\delta s} \quad \frac{d(\delta s)}{dt} + \frac{1}{u_{ii}} \quad \frac{du_{ii}}{dt} = 0$$

ou
$$\frac{1}{u_{ii}\delta s} \frac{d}{dt} (u_{ii}\delta s) = 0$$
 . $u_{ii}\delta s = cte$

$$...$$
 $P_{ii}\delta s = cte$

Os pontos de espelhamento estão numa superfície de B constante, a qual não é necessariamente perpendicular à linha de força. Entretanto, usando novamente a teoria adiabática, e supondo aæsimetria do campo pequeno, as discrepâncias entre as posições de espelhamento e aquelas dos pontos sobre uma superfície normal à L.F. original não darão contribuição para a integral, e:

$$J = \int \frac{A'}{A} P_{ii} ds = cte$$

Sabemos que para uma certa partícula, B_m é fixo pelas condições iniciais e independe da L.F.. Além disso ela tem que se mover de tal forme que J permaneça constante. Desejamos saber para qual L.F. ela vai. Da figura II-4 no ta-se que (2) é proibida, visto que o campo na superfície J = cte é diferente de B_m . Em suma, os dois invariantes adiabáticos nos permitem selecionar, entre a dupla infinidade de L.F. disponíveis, uma simples infinidade de L.F. as quais determinam uma "concha", chamada superfície longitudinal invariante. É formada por aqueles trechos de L.F. que passam pelas intersecções entre as superfícies B_m = cte e J = cte.

Da análise feita vemos que as partículas carregadas movimentar-se-ão em "conchas", quaisquer que sejam suas energias, e determinadas apenas pelas condições iniciais. Foi isto que deu origem ao sistema de coordenadas B - L.

C - Terceiro invariante adiabático

As coordenadas suficientes para especifiar o estado dinâmico do C.G. são: P_{\perp} (ou k_{\perp} , ou u), P_{u} (ou k_{\parallel} , ou J) e $\stackrel{\rightarrow}{r}$ (raio vetor do C.G.).

Em presença de campos estáticos, magnéticos e elétricos, a energia total E = k + eV é constante pois o campo elétrico é conservativo, e B não altera a energia cinética da partícula. Neste caso as três constantes do movimento,

u, J e E são os três parâmetros que especificarão a superfície invariante

Com campos variáveis no tempo, E não é constante, numa vez que um campo mag nético variável dá origem a um campo elétrico que não é conservativo. Então J e u não são suficientes para descrever o movimento. Precisamos então de um terceiro invariante adiabático, que será o fluxo através da superfície invarianete:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

onde s e a superficie transversal ao eixo de simetria do campo como mostra a figura II-4.

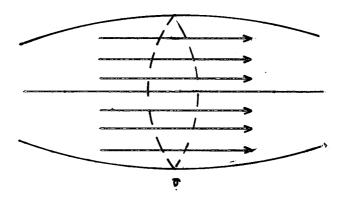


Fig. II-4 - Superficie transversal ao eixo de simetria

Sendo
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$
, $= \oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{1}$

Se os campos são estáticos, a partícula retornará a L.F. original pois ela oscila entre as extremidades de uma concha especificada por u, J e E; consequentemente as L.F. que constituem a superfície invariante são sempre as mesmas, logo o fluxo através da superfície será constante. Agora, mesmo que o campo não seja estático, a partícula move-se de uma concha para outra ca-

racterizada pelos mesmos valores de u e J mas com E diferente. Pode-se então obter $\frac{d\phi}{dt}$ em cada instante, e é possível provar que a média temporal

 $\frac{d\phi}{dt}$ em um circuito da concha é nula. Isto implica na invariança adiabática de ϕ .

2. Comportamento Macroscópico de um Plasma

2.1 Conceito de Plasma - Distância de Debye

Para se obter uma boa compreensão do comportamento de um gás ionizado quan titativamente devemos estudar o plasma como um todo.

- 1) Para quaisquer cálculos precisos torna-se necessário levar em conta a distribuição estatística de velocidades das partículas (maxwelliana).
- 2) A propria densidade de corrente j desempanha um importante papel na maio ria dos casos, dando origem a ambos os campos, elétricos e magnéticos.

Para resultados aproximados os problemas específicos são melhores analizados em têrmos das equações macroscópicas do movimento.

Nota: Nas equações macroscópicas que obteremos, não dependem sensivelmente da razão $\frac{v}{w_{ce}}$ onde v = frequência colisão e w_{ce} = frequência ciclotrônica dos eletrons.

A. Conceito de Plasma

Definição: "Um gás ionizado, no qual estão presentes ions positivos, negativos eletrons, além de partículas neutras, mas tal que se apresente macroscôpicamente neutro. Para que um tal gás ionizado receba o nome de plas ma é preciso que a "distância de blindagem de Debye" seja pequena em comparação com outros comprimentos de interêsse". Este último requisito está ultimamente ligado a observação macroscópica de neutralidade no plasma. Para um gás apresentar o comportamento de um plasma é preciso que a densidade de carga seja suficientemente alto.

Se num grande volume de gás a densidade de eletrons se desviar apreciavelmente dos ions positivos, sugirão forças eletrostáticas que darão origem a energias potenciais enormemente maiores que a energia térmica média, haven do movimento no sentido do gás se neutralizar eletricamente.

b. <u>Distâncias de Debye</u>

Vamos supôr plasma frio e inicalmente em repouso, eletricamente neutro, i.é, $n_i \sim n_e$. Separando as cargas entre x e x + dx por um impulso elétrico, não alterando ions frente aos eletrons, como mostra a figura II - , teremos:

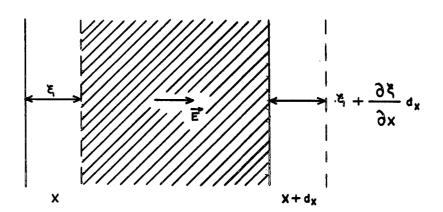


Fig. II - 5 Movimento do plasma por um impulso elétrico.

Antes do impulso: $N = n_e dx$ (1) e depois do impulso: $N = n' (dx + \frac{\partial \xi}{\partial x}) dx$) (2)

onde N \hat{e} a densidade de plasma entre x e x + dx.

De (1) e (2) teremos:

$$n' - n_e = -n' \frac{\partial \xi}{\partial x}$$
 (3)

Considerando o plasma isotrópico, podemos usar a permissividade como um es calar e usemos ϵ como para um gás neutros, logo:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{4}$$

Como E = $-\frac{dv}{dx}$ (5), e considerando E = 0 para ξ = 0 e ainda que $n_e \sim n_1$, de (3),(4) e (5) teremos:

$$E = -\frac{n_e e}{\xi} \quad \xi \tag{6}$$

A equação de movimento será

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{n_e e^2}{m \epsilon} \quad \xi = 0 \quad \text{onde}$$

$$w_{p} = \sqrt{\frac{n_{e} e^{2}}{m \epsilon_{o}}}$$
 frequência do plasma

Na realidade o plasma é quente e as colisões introduzem um têrmo de atrito viscoso que dará origem a um amortecimento na onda.

Em têrmos da energia potencial teremos:

$$U = \frac{n}{2} e^{2} = \xi^{2}$$
 (7) onde $U = 0$ para $\xi = 0$

Para uma ordem de grandeza podemos considerar o efeito térmico, então tere mos

$$\Delta U = \frac{1}{2} kT$$
 e fazendo $\xi = h$ teremos

$$\Delta U = \frac{n_e e^2}{2\varepsilon} h^2$$
 onde tiramos que

$$h = 69 \sqrt{\frac{T}{n_e}}$$
 (8)

onde n é a distância de Debye.

Com todos parâmetros de movimento de um gás (raio de giro, etc.) maior que h, o gás é chamado de plasma.

7.2 FUNDAMENTOS DE MAGNETOHIDRODINÂMICA

A. Introdução

A magnetohidrodinâmica tem por finalidade estudar o movimento de um fluido condutor em interação com campos elétricos e magnéticos.

O estudo do movimento individual de partículas carregadas, embora seja básico para o entendimento dos processos presentes nos plasmas, não é suficiente quando se deseja informações quantitativas sobre o plasma como um todo.

Efeitos secundários, como o enorme número de partículas presentes (exigindo um tratamento estatístico), além do fato de que as proprias correntes dão origem a campos elétricos e magnéticos que interagição com os preexistentes, trazendo como resultado uma alteração das correntes já calculadas.

O método mais adequado a um tratamento matemático rigoroso, embora nem sempre fácil de vizualizar fisicamente, é aquêle que usa um tratamento estatístico do problema.

O método estatístico, partindo da chamada Equação de Boltzmann (que leva em conta o efeito de colisões) fornece equações "macroscópicas" para o movimen to do fluido, isto é, equações em têrmos das grandezas macroscópicas que caracterisam o fluido condutor e que são possível de medição.

O processo analítico usado é o de tomar os vários "momentos estatísticos"da equação de Boltzmann, no espaço de velocidades. Estes momentos darão origem às chamadas Equações de Transferência (ou de Transporte) da Teoria Cinética.

B. Equação de Boltzmann

O estudo estátistico será desenvolvido no chamado Espaço Ordinário de Fases. Em tal espaço com 6 dimensões, cada ponto corresponde a um estado dinâmico de uma certa partícula, e é caracterizado por um raio vetor:

$$\vec{R} = v (x,y,z,v_x,v_y,v_z)$$

cujas componentes são as 3 coordenadas de posição e as 3 coordenadas de velocidade da partícula.

Num instante subsequente, a partícula estará em outra posição no espaço tridimensional comum, e com outra velocidade. Este novo estado dinâmico da partícula será representado por um outro ponto no Espaço Ordinário de Fases. A sucessão dêstes pontos representativos dos estados dinâmicos da partícula recebe o nome de Trajetória Dinâmica no E.O. de Fases.

Em tal espaço, está também definida uma velocidade hexa-dimensional, expressa por:

$$\vec{V} = v \left(v_x, v_y, v_z, \frac{Fx}{m}, \frac{Fy}{m}, \frac{Fz}{m}\right)$$

onde F é a força atuante sobre a particula.

Seja f (\vec{r}, \vec{v}, t) a densidade de probabilidades para as partículas. Isto é, $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ d³r d³v representa a probabilidade de se encontrar uma partícula na posição entre \vec{r} e \vec{r} + d \vec{r} e com velocidade entre \vec{v} e \vec{v} + d \vec{v} , no instante t. Õbviamente, $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ representará a densidade "volumétrica" de pontos no E.O. de Fases.

Como o número de partículas do gás se conserva, também será conservado o número de pontos do Espaço Ordinário de Fases. Daí a equação de continuidade de de probabilidade:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_6 / f \vec{\nabla} = 0$$

onde
$$\nabla_6 = \sum_{i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{x}_i + \frac{\partial}{\partial v_i} \hat{v}_i \right) = \nabla_r + \nabla_v$$

mas
$$\nabla_6/f\vec{\nabla} = f\nabla_6/\vec{\nabla} + \nabla_6f/\vec{\nabla}$$

ora
$$\nabla_6/\vec{\nabla} = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial Fx}{\partial v_x} + \frac{\partial Fy}{\partial v_y} + \frac{\partial Fz}{\partial v_z} \right)$$
 e esta expressão se anula

para \vec{F} conservativo ou resultante de um campo magnético (único caso que con sideraremos para forças dependentes de velocidade).

Resulta então a chamada Equação de Liouville:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}/\nabla_6 f = 0 \tag{1}$$

A equação de Liouville atesta o fato que: "A densidade de pontos no E.O. de Fases é constante ao longo de uma trajetória dinâmica".

A equação de Boltzmann, porém, estabelece que a razão de variação de f(\vec{r} , \vec{v} ,t) ao longo de uma trajetória dinâmica (computada ignorando-se as colisões) resultará unicamente das colisões entre partículas. Isto é:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \overrightarrow{v}/\nabla_r f + \frac{\overrightarrow{F}}{m}/\nabla_v f = (\frac{\partial f}{\partial t}) \text{ col}$$
 (2)

tendo em vista as expressões de \vec{V} e ∇_6 .

C. Equação de Transferência de Momentum, para uma Espécie de Partículas

Um gas ionizado ou não pode ser formado por varios especies de partículas. Consideraremos inicialmente uma destas especies isoladamente uma destas especies isoladamente, a especie k.

A densidade numérica (macroscópica) de partículas e a velocidade média das mesmas serão dadas, respectivamente, por:

$$N_{k}(\vec{r},\vec{t}) = \iiint_{k} (\vec{r},\vec{v},t) d^{3}v$$

$$\vec{u}_{k}(\vec{r},t) = \frac{1}{N_{k}} \iiint_{k} \vec{r}_{k} \cdot f_{k}(\vec{r},\vec{v},t) d^{3}v = \langle \vec{v}_{k}(\vec{r},t) \rangle$$

onde $d^3v = dv_x \cdot dv_u \cdot dv_z$ e usamos a notação $\langle \rangle$ para indicar médias somente no espaço de velocidades.

Conforme já nos referimos anteriormente, o processo analítico usado na obtenção das Equações de Transporte consiste em tomar os vários momentos da Equação de Boltzmann em relação à distribuição de velocidades.

Para fazer isto, basta multiplicar a equação (2) por $Q(\vec{v}_k) \cdot d^3v$ e integrar sobre todo o espaço de velocidades.

 $Q(\vec{v}_k)$ é uma função de \vec{v}_k que pode ser um escalar, um vetor ou um tensor de segunda ordem ou maior. Conforme a ordem do tensor $Q(\vec{v}_k)$, obteremos os vários momenta da Equação de Boltzmann e daí as Equações de Transporte desejadas.

).

Consideramos apenas os casos em que $Q(\overrightarrow{v}_k)$ é um escalar e um vetor, isto é:

$$Q(\overrightarrow{v}_k) = 1$$
 $Q(\overrightarrow{v}_k) = \overrightarrow{mv}_k$

O primeiro caso nos fornecerá a equação macroscópica de continuidade para o número de partículas:

$$\partial N_{\mathbf{k}} (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{t}) / \partial \mathbf{t} + \nabla / N_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = 0$$
 (3)

e o segundo caso nos fornecera a equação de transferência de momentum:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(N_k^m \vec{u}_k \right) + \nabla / \tilde{P}_k = N_k \langle \vec{F}_k \rangle + \vec{S}_k$$
 (4)

onde: $\vec{P}_k = N_k m_k \langle \vec{v}_k \vec{v}_k \rangle$, sendo a notação (~) reservada para indicar tensores.

 \vec{S}_k = razão média de variação do momentum macroscópico, por unidade de volume, da espécie de partículas considerada, devido a colisões com partículas de outras espécies. Tem-se, em geral:

$$\vec{S} = \sum_{j} N_k^m_k \quad v_{kj}(\vec{u}_k - \vec{u}_j)$$

sendo: v_{kj} = frequência efetiva de colisões com partículas da especie j \dot{v}_{i} = velocidade média das partículas de especie j.

Notar que colisões entre partículas da mesma espécie não contribúi para a variação do momentum desta espécie, uma vez que nas colisões há conservação do momentum total. Analogamente, a soma dos têrmos S de tôdas as espécies deverá dar resultado nulo, não produzindo assiminfluência no momentum global do plasma.

Façamos agora: $\vec{v}_k = \vec{u}_k + \delta \vec{v}_k$, onde $\delta \vec{v}_k$ é a velocidade aleatória das partículas em relação à velocidade média, e não é necessariamente um infinitésimo. Evidentemente: $\delta \vec{v}_{ik} = 0$

Isto nos permite escrever:

$$\tilde{P}_{k} = N_{k} m_{k} \left\langle \vec{v}_{k} \vec{v}_{k} \right\rangle = N_{k} m_{k} \vec{u}_{k} \vec{u}_{k} + N_{k} m_{k} \left\langle \delta \vec{v}_{k} \delta \vec{v}_{k} \right\rangle$$

Define-se:

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}} = \mathbf{\hat{v}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{m}} \left\langle \delta \mathbf{\hat{v}}_{\mathbf{k}} \delta \mathbf{\hat{v}}_{\mathbf{k}} \right\rangle \tag{5}$$

como o Tensor de Tensões (ou Pressões).

A força atuante sobre as particulas será:

$$\vec{F}_{k} = q_{k} (\vec{E} + \vec{v}_{k} \times \vec{B}) - m_{k} \cdot \nabla \phi_{i}$$

onde m_k^{ϕ} é o potencial gravitacional.

Para uma mesma espécie de partículas, tem-se:

$$\langle \vec{F}_k \rangle = q_k (\vec{E} + \vec{u}_k \times \vec{B}) - m_k \cdot \nabla \phi$$
 (6)

Introduzindo (5) e (6) em (4), fazendo algumas transformações matemáticas e usando (3), resulta:

$$N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{m}_{\mathbf{k}}} \left[\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}}{\partial t} + (\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}^{\dagger} / \nabla) \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} \right] = N_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{B}}) - \nabla / \widetilde{\psi}_{\mathbf{k}} - N_{\mathbf{k}} m_{\mathbf{k}} \nabla \phi + \vec{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}}$$
(7)

Esta é a chamada Equação de Transferência do Momentum ou Equação Macroscópi ca do Movimento, para uma só espécia de partículas (a espécia k).

Observar que no caso de o Tensor de Pressões ter os elementos da diagonal $\underline{\textbf{i}}$ guais a $\textbf{p}_{\textbf{k}}$, poderemos escrever

$$\nabla/\widetilde{\psi}_{\mathbf{k}} = \nabla \mathbf{p}_{\mathbf{k}} = \mathbf{F}_{\mathbf{v}\mathbf{k}}$$

onde: p_k = pressão devida somente às partículas da espécie k

 \vec{F}_{vk} = força de viscosidade entre as partículas da espécie k (corresponde às componentes de $\tilde{\psi}_k$ fora da diagonal).

Se houver isotropia na distribuição dos $\delta \vec{v}_k$, o que pode ocorrer quando os percursos livre médios de colisão forem muito curtos, então $\tilde{\psi}_k$ será um tensor diagonal e a força de viscosidade será nula.

Multiplicando a equação (3) sucessivamente por m_k e q_k , obteríamos as equações de continuidade de massa e de carga:

$$\partial (N_k m_k) / \partial t + \nabla / (N_k m_k u_k) = 0$$
 (8)

$$\partial(N_k q_k)/\partial t + \nabla/(N_k q_k u_k) = 0$$
 (9)

D. Equação Macroscópica de Movimento para o Plasma

Na maioria dos problemas é altamente conveniente que sejam obtidas equações em têrmos de grandezas macroscópicas do plasma como um todo, grandezas estas passíveis de medição experimental direta.

Estas grandezas macroscópicas seriam:

Densidade Espacial de Massa:
$$\rho = \sum_{k} N_{k} m_{k}$$
 (10)

Densidade Espacial de Carga:
$$\eta = \sum_{k} N_{k} q_{k}$$
(11)

Densidade de corrente macroscópica:
$$\vec{J} = \sum_{k} N_{k} q_{k} \vec{u}_{k}$$
 (13)

A simples soma da equação (7) sobre todas as especies não nos levaria diretamente a uma expressão conveniente, em função das grandezas acima, pois estamos usando como base a velocidade macroscópica do plasma (u) e isto nos obriga a definir as pressões relativamente a ela.

Devemos pois partir de (4) e usar:

$$\vec{v}_{k} = \vec{u} + \delta \vec{v}_{k}^{*}$$
 (14a)

ao invés de:
$$\vec{v}_k = \vec{u}_k + \delta \vec{v}_k$$
 (14b)

Evidentemente,
$$\langle \delta \vec{v}_k^{\dagger} \rangle \neq 0$$
 e $\vec{u}_k = \vec{u} + \langle \delta \vec{v}_k^{\dagger} \rangle$ (14c)

Somando as equações (8) e (9) sobre todas as espécies, obteremos as equacões macroscópicas de continuidade de massa e de carga para o plasma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} + \nabla/\rho \dot{\mathbf{u}} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla/\vec{J} = 0 \tag{16}$$

fazendo transformações matemáticas em (4), usando (14),(15) e (16) e mais a conservação do momentum nas colisões, obtém-se:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}/\nabla) \vec{u} \right] = \left(\sum_{k} N_{k} q_{k} \right) \vec{E} + (\vec{J} \times \vec{B}) - \nabla / \tilde{\psi} * - \rho \cdot \nabla \phi \qquad (17)$$

onde agora:

$$\widetilde{\psi}^* = \sum_{k}^{\infty} N_k m_k \left\langle \delta \overrightarrow{v}_k^* \delta \overrightarrow{v}_k^* \right\rangle$$

Esta equação em sua forma exata é bastante complicada e em geral o estudo e feito adotando-se as seguintes hipóteses simplificadoras:

- a Supor-se-á variação de u (e posteriormente de J) no espaço muito mais lentas que no tempo, de modo possibilitar a linearização das equações.
- b Supor-se-á sempre a neutralidade elétrica. Naquelas situações em que houver um campo elétrico presente, os possíveis desvios da neutralidade serão levados em conta na equação divergente de Maxwell para o campo elétrico, mas ignorados na equação dinâmica.
- c Usar-se-á a hipótese de que o tensor $\tilde{\psi}^*$ tem os elementos da diagonal iguais a p, de modo que: $\nabla/\tilde{\psi}^* = \nabla p \vec{f}_v$. Admitiremos também as forças de viscosidade (\vec{f}_v) desprezíveis frente ao gradiente de pressão do plasma.

Com estas aproximações, obteremos a partir de equação (17) uma forma mais conveniente para a Equação Macroscópica do Movimento:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla p - \rho \cdot \nabla \phi$$
 (18)

As equações (15), (16) e (18) dão, respectivamente, as variações temporais de ρ , η e $\dot{\vec{u}}$. Em tôdas elas, porém, estão presentes as variáveis eletrodinâmicas: $\dot{\vec{E}}$, $\dot{\vec{B}}$ e $\dot{\vec{J}}$; de modo, que, para deixar o problema completamente determinado, precisamos de mais três equações vetoriais.

Duas destas relações podem ser fornecidas pelas duas equações rotacionais de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
 (19)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
 (20)

Notar que a equação divergente em É pode ser obtida a partir de (20) e (16). A única equação que nos falta é aquela que dá a variação temporal da densidade de corrente J. Vamos obtê-la.

E. Lei de Ohm Generalizada

Definimos anteriormente:

$$\vec{J} = \sum_{k} N_{k} q_{k} \vec{u}_{k}.$$

Usando a relação (14c), teremos:

$$\vec{J} = \eta \vec{u} + \sum_{k} N_{k} q_{k} \left(\delta \vec{v}_{k} \right)^{*}$$
(21)

Define-se agora:

 $\vec{J}_{cv} = \vec{n}\vec{u} \equiv \frac{\text{corrente de convecção}}{\text{te de carga espacial pelo movimento macros-copico do plasma (evidentemente <math>\vec{J}_{cv} = 0$ se houver neutralidade eletrica).

$$\vec{J}_{co} = \sum_{k} N_{k} q_{k}$$
 $\vec{\delta v_{k}}^{*} = \frac{\text{corrente de condução}}{\text{sidade de corrente medida em um referêncial}}$ movendo-se com o plasma.

A fim de obter a equação que dá a variação temporal de \vec{J} usaremos o mesmo método empregado na obtenção da equação de continuidade de carga. No caso presente, multiplicaremos a equação de transferência de momentum por q_k/m_k e somaremos sobre todas as espécies:

Fazendo isto, obtém-se:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \nabla / \vec{u} (\vec{j} + \vec{j}_{co}) + \nabla / \tilde{L} * - \sum_{k} N_{k} \frac{q_{k}}{m_{k}} \langle \vec{f}_{k} \rangle = \sum_{k} \frac{q_{k}}{m_{k}} \vec{s}_{k}$$
 (22)

onde:

$$\tilde{L}^* = \sum_{k} N_k q_k$$
 $\langle \delta v_k^{\dagger} * \delta v_k^{\dagger} * \rangle \equiv \text{Tensor Eletrocinético de Tensões}$

A equação na forma (22) é de pouca valia na prática. A fim de obter uma forma mais conveniente, somos obrigados a usar as hipóteses de que o plasma contém somente:

a - eletrons (com carga - e)

b - ions positivos de uma unica especie (com cargas Ze)

A hipótese de neutralidade elétrica leva a: $N_i Z = N_e$

Fazendo as aproximações de que: $\frac{m_e}{m_i}$ << 1, que so ocorram colisões entre eletrons e ions e linearizando a equação (desprezando-se $\nabla/\hat{u}(\hat{J} + \hat{J}_{co})$, obtemse

$$\frac{\overset{\mathsf{m}}{e}}{\overset{\mathsf{d}}{\mathsf{J}}} = \overset{\mathsf{d}}{\mathsf{J}} = \overset{\mathsf{d}}{\mathsf{E}} + \overset{\mathsf{d}}{\mathsf{u}} \times \overset{\mathsf{d}}{\mathsf{B}}) - \frac{1}{\overset{\mathsf{d}}{\mathsf{N}}_{\mathsf{e}} \cdot \mathsf{e}} \overset{\mathsf{d}}{\mathsf{J}} \times \overset{\mathsf{d}}{\mathsf{B}} - \frac{1}{\overset{\mathsf{d}}{\mathsf{\sigma}}} \overset{\mathsf{d}}{\mathsf{J}} + \frac{1}{\overset{\mathsf{N}}{\mathsf{N}}_{\mathsf{e}} \cdot \mathsf{e}} \quad \nabla/(\overset{\mathsf{u}}{\mathsf{Q}}_{\mathsf{e}} - \frac{\overset{\mathsf{m}}{\mathsf{m}}_{\mathsf{i}}}{\overset{\mathsf{u}}{\mathsf{j}}}) \tag{23}$$

denominada Lei de Ohm generalizada.

Na equação acima tem-se: $\sigma' = \frac{N_e \cdot e^2}{m_e v_{ei}}$, que possúi dimensão de condutividade mas não é igual à condutividade macroscópica do plasma, que estabelece proporcionalidade entre \vec{J} e \vec{E} .

Supondo condições quasi-estáticas ($\frac{\partial J}{\partial t} = 0$) e desprezando os têrmos da pressão resulta:

$$\vec{J} + \frac{1}{v_{ej}} \vec{J} \times \vec{\omega}_{ce} = \sigma'(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$
 (24)

onde:

$$\dot{\omega}_{ce} = \frac{e}{m_{e}} \dot{B} = Girofrequência$$

$$\frac{1}{v_{ei}}$$
 $\overrightarrow{J} \times \overrightarrow{w}_{ce} = Corrente de Hall$

a - eletrons (com carga - e)

b - ions positivos de uma única espécie (com cargas Ze)

A hipótese de neutralidade elétrica leva a: $N_i^z = N_e$

Fazendo as aproximações de que: $\frac{m_e}{m_i}$ << 1, que só ocorram colisões entre eletrons e ions e linearizando a equação (desprezando-se $\nabla/\vec{u}(\vec{j} + \vec{j}_{co})$), obtêm-se

$$\frac{\mathbf{m}_{e}}{\mathbf{N}_{e} \cdot \mathbf{e}^{2}} \frac{\partial \vec{\mathbf{J}}}{\partial t} = (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}) - \frac{1}{\mathbf{N}_{e} \cdot \mathbf{e}} \vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{\sigma^{2}} \vec{\mathbf{J}} + \frac{1}{\mathbf{N}_{e} \cdot \mathbf{e}} \nabla / (\widetilde{\psi}_{e} - \frac{\mathbf{m}_{e}}{\mathbf{m}_{1}} \widetilde{\psi}_{1})$$
 (23)

denominada Lei de Ohm Generalizada.

Na equação acima tem-se: $\sigma' = \frac{N_e \cdot e^2}{m_e \cdot e^i}$, que possúi dimensão de condutividade mas não é igual à condutividade macroscópica do plasma, que estabelece a proporcionalidade entre \vec{J} e \vec{E} .

Supondo condições quasi-estáticas $(\frac{\partial J}{\partial t} = 0)$ e desprezando os têrmos da pressão resulta:

$$\vec{J} + \frac{1}{\nu_{ej}} \vec{J} \times \vec{\omega}_{ce} = \sigma'(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$
 (24)

onde:

$$\overset{\rightarrow}{\omega}_{ce} = \frac{e}{m_{e}} \vec{B} = Girofrequência$$

$$\frac{1}{v_{ei}} \stackrel{\rightarrow}{J} \times \stackrel{\rightarrow}{w_{ce}} = \text{Corrente de Hall}$$

Quando a frequência de colisões entre os eletrons e ions for muito maior que a girofrequência dos eletrons, a equação (24) assume a forma:

$$\vec{J} = \sigma'(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \sigma'\vec{E}'$$
(25)

sendo \vec{E} o campo elétrico medido num referêncial movendo-se com o fluido.

No caso de o campo magnético ser nulo a equação (25) reduz-se a:

$$\vec{J} = \sigma' \vec{E}$$

que é a lei de Ohm comum.

F. Equações Fundamentais da Magnetohidrodinâmica

As equações fundamentais da MHD são as seis equações: (15), (16), (18),(19), (20) e (23), que reproduzimos em ordem, abaixo, para facilitar a consulta:

Equação de Continuidade de Massa:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla/\rho \dot{u} = 0$$
 (15)

Equação de Continuidade de Carga:
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla/\vec{J} = 0$$
 (16)

Equação Macroscópica do Movimento:
$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla p - \rho \nabla \phi$$
 (18)

Equação de Maxwell rotacional em
$$\vec{E}$$
: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (19)

Equação de Maxwell rotacional em
$$\vec{B}$$
: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (20)

Lei de Ohm Generalizada:

$$\frac{\mathbf{m}_{e}}{\mathbf{N}_{e} \cdot \mathbf{e}^{2}} \frac{\partial \vec{\mathbf{J}}}{\partial \mathbf{t}} = (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{B}}) - \frac{1}{\mathbf{N}_{e} \cdot \mathbf{e}} \vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{\sigma'} \vec{\mathbf{J}} + \frac{1}{\mathbf{N}_{e} \cdot \mathbf{e}} \nabla / (\widetilde{\psi}_{e} - \frac{\mathbf{m}_{e}}{\mathbf{m}_{i}} \widetilde{\psi}_{i}) (23)$$

ou na aproximação quasi-estática (e desprezando o têrmo das pressões)

$$\vec{J} + \frac{1}{\nu_{ei}} \vec{J} + \vec{\omega}_{ce} = \sigma'(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$
 (24)

Notar que de (16) e (20) sai a equação divergente em È, dada

$$\mathbf{div} \stackrel{\rightarrow}{\mathbf{D}} = \eta$$

As seis equações apresentadas são tôdas independentes e suficientes para caracterizar completamente o movimento macroscópico do fluido condutor, em interação com campos elétricos e magnéticos.

7.3 Movimento do Fluido Ionizado através das Linhas de Força Magnéticas

Movimentos de larga escala, do material ionizado, tendem a estar em quasiequilíbrio, no qual as forças eletrostática e de Lorents se contrabalençam:

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0$$

onde \vec{E} é o campo elétrico local, \vec{B} a indução magnético local e \vec{V} a velocida de média local dos constituintes ionizados.

Quando combinada com a lei de Faraday, temos:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \nabla \times \vec{E} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})$$

Esta relação dá origem ao conceito hidromagnético da "campo magnético congelado", que é importante não só na discussão de certos aspectos da dinâmica ionosférica, como também no tratamento do plasma interplanetário e estelar. O conceito é que, quando a expressão acima é uma aproximação válida, as linhas de fluxo magnético podem ser pensadas como "congeladas" ao meio condutor, ou seja, são arrastadas com o meio no curso de seu movimento.

A afirmação acima deve ser provada, e para tal é preciso chegar a duas conclusões. Primeiro, é necessário que a porção do meio que repousa ao longo de uma linha de fluxo em um certo tempo, permaneça ao longo da linha de fluxo; segundo, um tubo de fluxo cuja superfície de contôrno é identificada por um conjunto de tais linhas, deve sempre conter o mesmo número de linhas de fluxo.

Na figura II-6 um tubo de meio condutor (definido em um istante por um contôrno transversal Λ e pelas linhas de fluxo magnético, tal como X Y, que pas sa através Λ) se move no curso do tempo para uma nova posição ilustrada por

 Λ ' e X' Y'. Quando a aproximação "campo congelado" é válida, linhas como X' Y' devem ainda ser linhas de fluxo magnéticos, e o número de linhas de fluxo contidas por Λ ' deve igualar o número previamente contido por Λ .

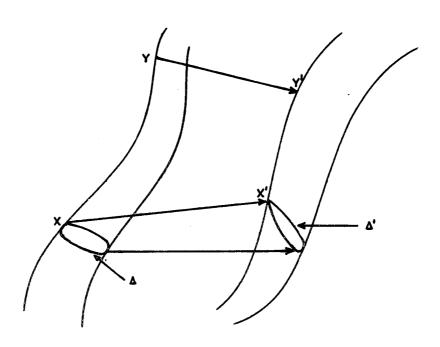


Fig.II - 6 - Tubo do meio condutor

Para estabelecer as duas conclusões citadas acima, começaremos por mostrar que o fluxo através de um contôrno fechado que se move com o meio condutor é invariável.

Consideremos um contôrno fechado Λ arrastado no meio condutor, formado de <u>e</u> elmentos $d\vec{\lambda}$, contendo uma superfície Σ cujos elementos são $d\vec{\sigma}$. Este contorno contem um certo fluxo magnético Φ , dado por:

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$$

Quando o meio se move e se deforma, o mesmo acontece com o contôrno Λ ; queremos determinar a variação de Φ . A variação $\delta\Phi$ que ocorre no tempo δ pode ser separada em duas partes: a primeira resulta da variação que ocorre em \vec{B} sem levar em conta o movimento de Λ ; a segunda considera a variação de posição e configuração de Λ , sem levar em conta a variação temporal de \vec{B} .

A primeira é expressa como:

$$\delta_1 \Phi = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \delta t \right) \cdot d\vec{\sigma}$$

usando a aproximação campo congelado:

$$\delta_1 \Phi = \delta t \int_{\Sigma} \nabla \mathbf{x} (\vec{\mathbf{V}} \mathbf{x} \vec{\mathbf{B}}) .d\vec{\sigma}$$

pelo teorema de Stokes:

$$\delta_1 \Phi = \delta t \oint_{\Lambda} (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\lambda}$$

A segunda variação é encontrada notando que cada elemento $d\vec{\lambda}$ varre uma área vetorial $(\vec{V}\delta t) \times d\vec{\lambda}$ no tempo δt , e portanto transfere $(\delta t)\vec{B} \cdot (\vec{V} \times d\vec{\lambda})$ linhas de fluxo de um lado de Λ para o outro, portanto:

$$\delta_2 \Phi = \delta t \oint \vec{B} \cdot (\vec{V} \times d\vec{\lambda}) = \delta t \oint (\vec{B} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\lambda} = -\delta_1 \Phi$$

Logo a variação total no fluxo, $\delta \Phi = \delta_1 \Phi + \delta_2 \Phi$ se anula. Esta conculsão é válida independente do tempo em que foi feita a análise, portanto:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

Consideremos agora uma superfície material arrastada de modo que $\vec{B}.d\vec{\sigma}$ = 0, e contendo um conjunto de segmentos de linhas de fluxo (veja figure II-6). Se algum contôrno fechado Λ é arrastado sôbre esta superfície, a integral $\Phi = \int_{\Sigma} \vec{B}.d\vec{\sigma}$ se anula, e de acôrdo com $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ permanecerá zero, a despeito do movimento da superfície e de Λ com o meio. Isto é verdade para um arbitrário dentro da superfície; portanto $\vec{B}.d\vec{\sigma}$ continua a se anular por tôda superfície, e a superfície continua a consistir sômente de segmentos de linhas de fluxo. Consideremos agora uma segunda superfície, interceptando a primeira ao longo de algum segmento de linha L; L deve ser uma parte de uma linha de fluxo a despeito do movimento. Portanto, porções do meio que estão, em certo tempo, ligadas por uma linha de fluxo, permanecem ligadas, durante o movimento, por uma linha de fluxo. A primeira exigência do conceito de "campo congelado" estã portanto satisfeita.

É claro que um tubo de fluxo (definido pelo material sobre seu contorno em qualquer tempo dado) permanece um tubo de fluxo. Se alguma secção transversal Σ é arrastada com êle, então $\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{c}$ da o número de linhas de fluxo contidas, e de acôrdo com $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ êste número permanece constante durante o movimento; a segunda exigência do conceito de "campo congelado" está satisfeita.

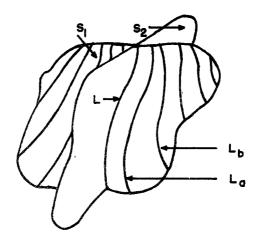


Fig.II-7 - S₁ é um segmento de uma superfície compreendando um conjunto de segmento de linhas de fluxo (como L, L_a, L_b);

S₂ é um segmento de superfície semelhante. S₁ e S₂ se intercep tam ao longo do segmento L. Quando S₁ e S₂ se movem com o meio, continuam a conter conjuntos de segmentos de linhas de fluxo, e L continua a ser tal segmento.

8. ONDAS EM PLASMA

8.1 Introdução

Um gas ionizado é capaz de apresentar uma grande variedade de movimentos oscilatórios, e estas oscilações podem, em geral, ser extremamente complexas. Nosso estudo dirá respeito à pequenos disturbios introduzidos num meio homo gêneo e em condições relativamente simples. Três tipos particulares de oscilações são importantes nos plasmas:

- a Ondas eletromagnéticas
- b Ondas hidromagnéticas
- c Ondas eletrostáticas

É bastante improvável que estas ondas idealizadas sejam encontradas na natureza, em suas formas puras, exceto sob condições controladas em laboratórios. Entretanto, um entendimento delas permitirá uma boa visão do que ocorre quando se apresentam fenômenos complicados.

Na ausência de campos magnéticos, as ondas em plasma podem ser apenas de dois tipos:

a) Eletromagnéticas: São as ondas já familiares, nas quais Ex B são perpendiculares à direção de propagação. Elas se propagam em dois modos com polarizações peculiares: ordinário e extraordinário. Se a frequência fôr inferior à "frequência de plasma" as ondas eletromagnéticas não podem se propagar na ausência de campo magnético (se houver campo magnético presente a frequência mínima é:

$$\sqrt{w_{\rm p}^2 + (\frac{w_{\rm ce}}{2})^2 - \frac{w_{\rm ce}}{2}},$$

corresponde X = 1 + Y, em plasmas frios, isto é, sem colisões.

b) Eletrostáticas: São ondas resultantes de pequenas pertubações na neutralidade de carga espacial; nelas os vetores J e E, são paralelos à direção de propagação (ondas longitudinais). Elas se propagam em dois modos. Num dêles os ions quase não são afetados, sõmente os eletrons oscilando, dão origem às chamadas "ondas de eletrons", ou "ondas de plasma". No outro modo, chamado "onda de ionspositivos", na qual ions e eletrons se movem juntos; a inércia dos ions determina a velocidade da onda, a qual é normalmente menor que para as ondas de eletrons. As frequências de corte são:frequência de plasma para o primeiro modo, e me para o segundo na ausência de campo magnético.

Na presença de um campo magnético, estes quatro modos são profundamente modificados, embora permaneça constante e o número de modos independentes.

Num fluido ordinário, oscilações de baixa frequência somente se podem propagar na forma de <u>"ondas de pressão"</u> (i.é.,Som).

Num meio condutor porém, se houver um campo magnético, podem aparecer ondas de baixa frequência (w << w_{ci}) de um outro tipo, descobertas por Alfvén, de nominadas <u>ONDAS HIDROMAGNÉTICAS</u> (HM). Estas são portanto aquêles distúrbios de muito baixa frequência w << w_{ci}, que aparecem quando um campo magnético é sobreposto ao fluido condutor.

Nas ondas HM, os ions positivos fornecem a inércia da oscilação enquanto as forças restauradoras provêm do têrmo $\vec{J} \times \vec{B}$ na Equação Macroscópica do Movimento. No item anterior, vimos que êste têrmo dá origem à força magnética e que uma análise qualitativa de sua influência pode ser feita em têrmos de pressões e tensões magnéticas no fluido, considerando as linhas de força (L.F.) como fios elásticos. Assim sendo, o acoplamento entre o plasma e o campo magnético faz com que pertubações no plasma excitem oscilações nas L.F.,

sendo a inércia fornecida pelas partículas carregadas ao longo da mesma. Estas ondas H.M. podem pois ser encaradas como oscilações nas L.F..

Em geral, uma onda que se propague no fluido condutor na presença de um cam po magnético, envolverá forças tanto magnéticas como eletrostáticas. Assim sendo teremos:

- a um disturbio de alta frequência que é usualmente uma combinação de uma onda eletromagnética (transversal) e de uma eletrostática (longitudinal).
- b uma onda HM (distúrbio de baixa frequência) que pode envolver fôr ças elétricas semelhantes aquelas existentes nas ondas eletros táticas.

Gradientes de densidade podem estabelecer um <u>acoplamento</u> entre os diversos tipos de onda. Todas estas complicações resultam da solução das equações macroscópicas já obtidas.

A fim de obter as ondas puras, são feitas em cada uso as aproximações convenientes. No nosso caso, estudaremos somente as ondas HM.

8.2 Ondas Hidromagnéticas - Equações Gerais

Estas ondas representam aquêles distúrbios de muito baixa frequência (w<< w_{ci}) que se propagam em um plasma sujeito a um campo magnético.

No estudo destas ondas, usaremos o conceito de "campo congelado" fazendo o emprego de sua equação básica. No final, levaremos em conta o efeito da condutividade finita, a qual, junto com as forças de viscosidade, introduzem efeitos dissipativos.

Para descrever as pertubações, vamos lançar mão das seguintes equações macroscópicas:

- a Equação da continuidade de massa: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \stackrel{+}{u} = 0$
- b Equação macroscópica do movimento: $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{J} \times \vec{B} \nabla_p \rho \nabla \phi + \vec{F}_v$
- c Duas equações rotacionais de Maxwell: $\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$
- d Lei de Ohm generalizada: $\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$
- e Equação de estado que permite dar a pressão em têrmos da densidade (usando a hipótese simplificadora que a pressão é um escalar):

$$pV^{\Upsilon} = const.$$

 $p = A \rho^{\Upsilon}$

Estas equações permitem descrever o comportamento das <u>Ondas Hidromagnéticas</u> <u>puras</u>. A equação de continuidade de carga soirá interessar para as ondas eletrostáticas,

Para o estudo das ondas HM idealizadas, suporemos:

- a Viscosidade nula (Fv = 0)
- b Potencial gravitacional desprezível
- c condutividade infinita (condição de campo "congelado")

Quando se considera as <u>forças viscosas</u> e a <u>condutividade finita</u>, aparecerão perdas dissipativas e <u>decaimento</u> na <u>amplitude das ondas</u>:

As relações acima não são tôdas independentes, de modo que vamos obter conjunto de equação conveniente para tratar o problema.

- a Da condição de congelamento, a lei de Ohm generalizada fornece $\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$ que introduzida na primeira equação rotacional de Max well, dá $\nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- b Vamos agora eliminar o têrmo J x B da equação do movimento. Reescrevemos a segunda equação rotacional de Maxwell, desprezando o
 têrmo correspondente a corrente de deslocamento, ou seja V x H =J,
 o que torna nosso estudo válido somente para as baixas frequências;
 para maiores frequências os efeitos de separação de cargas serão
 também importantes. Então:

 $\vec{J} \times \vec{B} = -\vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) = -\frac{1}{\mu} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \text{ (valida para gases em geral)}$

Com isto, as equações que descrevem o movimento de ondas HM idealizadas são:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \dot{\psi} \dot{\rho} \dot{u} = 0 \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} = - \nabla p - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{B} \times (\nabla \times \overrightarrow{B})$$
 (2)

$$\nabla \times (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{B}) = \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$
 (3)

$$pV^{\gamma} = cte : p = A \rho^{\gamma}$$
 (4)

Estas duas últimas equações exprimem a aproximação de processo adiabático num gás perfeito e a hipótese simplificadora de ser a pressão um escalar.

Inicialmente para fixar ideias, estudaremos estas ondas em meios incompressíveis ($\nabla p = 0$)

8.3 Ondas HM em Fluidos Incompressíveis

Suponhamos a existência de um campo <u>estático uniforme</u> e constante <u>bo, presen</u> te num fluido condutor infinito de densidade de massa constante <u>bo. Suponha</u> mos agora, que um pequeno volume do fluido se desloca numa direção perpendicular à L.F.. Se prevalece as condições de congelamento, a L.F. será deformada. Retirada a causa do deslocamento, a "elasticidade" da L.F. procurará estabelecer o equilíbrio, dando origem à uma oscilação no fluido que se propagará ao longo da L.F.. A fim de analisar o movimento, vamos considerar a existência de pequenos afastamentos do valor de equilíbrio de Bo (não de porque estamos supondo fluido incompressíveis),

$$\vec{b}$$
 $(\vec{r}, \vec{t}) = \vec{b}o + \vec{b}$ (\vec{r}, t)

As equações (1), (2) e (3) nos dão, respectivamente, $B_0 >> b$:

$$\frac{\partial \rho_{o}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_{o} \stackrel{\rightarrow}{u} = 0 \quad \therefore \quad \rho_{o} \stackrel{\rightarrow}{\nabla \cdot u} = 0 \quad (5) \quad = \quad \therefore$$

$$\rho_{o} \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} (\overrightarrow{B}_{o} + \overrightarrow{b}) \times \left[\operatorname{rot}(\overrightarrow{B}_{o} + \overrightarrow{b}) \right] = \rho_{o} \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \overrightarrow{B}_{o} \times \operatorname{rot} \overrightarrow{b} \stackrel{\sim}{=} 0$$
 (6)

$$\operatorname{rot} \overset{\rightarrow}{\mathbf{u}} \times (\overset{\rightarrow}{\mathbf{B}}_{0} + \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}) = \frac{\partial}{\partial t} (\overset{\rightarrow}{\mathbf{B}}_{0} + \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}) \overset{\sim}{\cdot} \operatorname{rot} (\overset{\rightarrow}{\mathbf{u}} \times \overset{\rightarrow}{\mathbf{B}}_{0}) \overset{\sim}{=} \frac{\partial \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}}{\partial t} \tag{7}$$

Tomando $\frac{\partial}{\partial t}$ dos dois membros em (6), e entrando com (7) na equação resultante e fazendo: $\overrightarrow{v}_{A} = \frac{\overrightarrow{B}_{O}}{\overrightarrow{\mu} \overrightarrow{\rho}_{O}}$ = velocidade de Alfvén, obtem-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}} \times \text{rot rot } (\overset{\rightarrow}{\mathbf{u}} \times \overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}}) = 0$$
 (8)

A (8) é a equação de onda para ondas HM ideais, num meio incompressível numa direção arbitrária.

Mas rot
$$(\vec{u} \times \overset{\rightarrow}{v_A}) = \overset{\rightarrow}{v_A} \overset{\circ}{\circ} \nabla u - \vec{u} \cdot \nabla \overset{\rightarrow}{v_A} + (\nabla \cdot \overset{\rightarrow}{v_A})\vec{u} - (\nabla \cdot \vec{u})\overset{\rightarrow}{v_A} = \overset{\rightarrow}{v_A} \cdot \nabla \vec{u} = \overset{\rightarrow}{v_A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

tomando

$$\vec{B}_0 = \vec{B}_0 \hat{z}$$

rot rot
$$(\vec{u} \times \overset{\rightarrow}{v_A}) = \text{rot } \overset{\rightarrow}{v_A} = \overset{\rightarrow}{v_A} =$$

$$+\left(\frac{\partial^{2} u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^{2} u}{\partial y \partial z}\right) \hat{z}$$

$$\vec{v}_A \times \text{rot rot } (\vec{u} \times \vec{v}_A) = \vec{v}_A^2 \left[(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}) \hat{x} + (\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}) \hat{y} \right]$$

Entretanto com este resultado na equação de onda (8) e considerando que no plasma não há variações segundo x ou y, isto é, como supomos o campo $\vec{B}_0 = \vec{B}_0 \hat{z}$ uniforme, consideraremos o plasma movendo-se de tal forma que suas grande-zas sejam uniformes em planos transversais ao campo, resulta:

 $\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0$ => a velocidade do plasma ao longo das L.F. não é pertubada

$$\frac{\partial^{2} u_{x}}{\partial t^{2}} - v_{A}^{2} \frac{\partial^{2} u_{x}}{\partial z^{2}} = 0$$
 (9)

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - v_A^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = 0 \tag{10}$$

A (21) nos assegura que a velocidade do plasma não pê pertubada ao longo da linha de força; (9) e (10) são equações de onda que têm como solução ondas planas se propagando na direção 2, na forma:

$$u_x = u_{xo} e^{\frac{1}{2}ik}(z - v_A^t) + cte$$

$$u_y = u_{vo} e^{\frac{+}{1}ik}(z - v_A^t) + cte$$

isto mostra que as ondas são transversais.

Analogamente a (8), poderíamos obter uma equação de onda para b, (principal equação de onda).

Derivando (7) e observando a (6), vem:

$$\frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2} = \text{rot} \quad \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{b}_o \right] = \text{rot} \quad \left[\left(-\frac{\vec{b}_o}{\rho_o u} \times \text{rot } \vec{b} \right) \times \vec{b}_o \right] = \text{rot} \quad \vec{v}_A \times (\vec{v}_A \times \text{rot } \vec{b})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2} + \text{rot} (\vec{v}_A \times \text{rot} \vec{b}) \times \vec{v}_A = 0 \quad (11)$$

mas

pois estamos considerando

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{o}$$

Logo resulta: $\frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2} - v_A^2 \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial z^2} = 0 \quad (12) \quad (equação de onda de \vec{b})$

A solução da $\vec{b} = \vec{b}_0$ e i (kz - wt) onda plana se propagando na direção do campo e com velocidade

$$v_A = \sqrt{\frac{B_o}{\mu \rho_o}}$$

Portanto, os distúrbios no plasma e no campo magnético se propagam ao longo das linhas de campo. Esta onda <u>transversal</u>, (pois o meio oscila perpendicularmente à direção de propagação, visto que u_z não oscila) é denominada <u>ONDA DE ALFVÉN</u> e é a única presente se o meio é incompressível.

Estas ondas poderiam ser obtidas à partir do tratamento geral eletromagnético, impondo-se que (w << w_{ci}).

O efeito de uma condutividade finita na propagação das ondas de Alfven pode ser levado em conta da seguinte forma: da lei de Ohm generalizada tiramos:

$$\vec{J} = \sigma' \quad (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad \hat{E} = -\vec{u} \times \vec{B} + \frac{\vec{J}}{\sigma}$$

onde usando as hipóteses:

a - condições estacionárias: $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0$

b - Fluido incompressível

c - w_{ci} >> |w_{ce}| = corrente de Hall desprezível

Consequentemente, a equação básica (3), ficará, usando

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$J = \nabla x \dot{H}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{u} \times \vec{B} - \frac{1}{\mu \sigma^{\dagger}} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \operatorname{rot} \vec{u} \times \vec{B} + \frac{1}{\mu \sigma^{\dagger}} \nabla^{2} \vec{B}$$
 (3')

Usando $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$, obtemos para a equação (7)

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \text{rot } (\vec{u} \times \vec{B}_0) + \frac{1}{\mu \sigma^{\dagger}} \nabla^2 b$$
 (7')

Na equação (9) aparecerá pois o têrmo adicional $\frac{1}{\mu\sigma^*}$ $\nabla^2 \frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$ resultando para a equação de onda a expressão:

$$\frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2} - v_A^2 \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial z^2} - \frac{1}{\mu \sigma^i} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \right) = 0$$

Admitimos para \vec{b} uma solução do tipo $\vec{b} = \vec{b}$ e \vec{b} e vamos obter a relação de dispersão , isto \vec{e} , $\vec{k} \neq k(w)$

$$-w^{2}\vec{b} + v_{A}^{2} k^{2}\vec{b} - \frac{iwk^{2}}{\mu\sigma'}\vec{b} = 0$$

Logo a relação de dispersão será do tipo:

$$w^{2} - k^{2}v_{A}^{2} + \frac{iwk^{2}}{\mu\sigma^{*}} = 0$$
 (13)

$$k^{2}v_{A}^{2} (1 - \frac{iw}{\mu\sigma'v_{A}^{2}}) = w^{2} ... kv_{A} = \frac{w}{\sqrt{1 - \frac{iw}{\mu\sigma'v_{A}^{2}}}}$$

Sabemos que $\sigma' = \frac{N_e e^2}{m_e v_{ei}}$ mesmo não sendo infinita é muito grande. Por outro lado, as ondas HM existem nas baixas frequências, logo: w << $\mu\sigma'v_A^2$, e

portanto:

$$k = \frac{w}{v_A} + i \frac{w^2}{2\mu\sigma^{\dagger}v_A^3}$$
 (14)

A parte complexa de \underline{k} vai resultar numa exponencial decrescente em \vec{b} , indicando a existência de atenuação.

Asconstante de atenuação é

$$\chi = \frac{w^2}{2\mu\sigma^* v_A^3}$$

O percurso em que a onda é atenuada de $\frac{1}{e}$ será:

$$z_o = \frac{2\mu\sigma'v_A^3}{v_A^2}$$
 onde $z_o = \frac{\mu\sigma'v_A^2}{2\pi^2}$

Para que a onda de Alfvén possa existir, é óbvio que se deve ter

$$\lambda \ll z_0$$
; i e $\frac{z_0}{\lambda} = \frac{\mu \sigma' v_A \lambda}{2\pi^2} \gg 1$ $L_N = \frac{\sigma' B_0 \lambda}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} = NQ$ de Lundquist.

8.4 Ondas HM em Fluidos Compressíveis

Nêste caso, veremos que em adição às <u>ONDAS TRANSVERSAIS</u>, aparecerão em geral ondas <u>magneto-acústicas</u> que não são ondas puramente transversais nem <u>pu</u> ramente longitudinais. A superposição de tôdas estas ondas é que constitue a onda complexa que se propaga no plasma. Como o fluido agora é suposto com pressível, as pertubações não se restringirão ao campo, estendendo-se à densidade de massa e consequentemente à pressão.

Assim escrevermos:

$$\vec{B}$$
 $(\vec{r},t) = \vec{B}_0 + \vec{b}$ (\vec{r},t)

$$\rho$$
 $(\vec{r},t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{r},t)$

onde tomamos \vec{b}_0 e ρ_0 como <u>uniformes</u> e <u>constantes</u>; \vec{b} e ρ_1 representam pequenos afastamento do equil**i**brio, de modo que b >> B e ρ_1 >> ρ_0 .

8.4.1 Obtenção da Equação Característica de Velocidade

Vamos agora introduzir estes valores nas equações do movimento (1), (2),(3) e (4) obtidas com as hipóteses:

- 1 Viscosidade nula e pressão escalar
- 2 potencial gravitacional desprezível
- 3 condições de congelamento (condutividade infinita)

As equações (1), (2) e (3) ficam na forma abaixo, onde p foi eliminado a-través da relação (4):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o + \rho_1) + \nabla \cdot (\rho_o + \rho_1) \dot{\vec{u}} = 0$$

$$(\rho_o + \rho_1) \frac{\partial \dot{\vec{u}}}{\partial t} = - \nabla (A (\rho_o + \rho_1)^{\gamma}) - \frac{1}{\mu} (\vec{B}_o + \vec{b}) \times (\nabla \times (\vec{B}_o + \vec{b}))$$

$$\frac{\partial (\vec{B}_o + \vec{b})}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times (\vec{B}_o + \vec{b}))$$

Usando agora as aproximações b $<< B_o, \rho_1 << \rho_o$ e supondo desprezível a variação espacial de ρ_1 frente à u (linearização da equação (15)) teremos:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla_0 \vec{u} = 0 \tag{15}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + v_s^2 \cdot \nabla \rho_1 + \frac{1}{\mu} \overrightarrow{B}_0 \times (\nabla \times \overrightarrow{b}) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}_0)$$
 (17)

onde

$$v_s^2 = \frac{\gamma^p_o}{\rho_o}$$
 velocidade do som, pois

$$\nabla A(\rho_0 + \rho_1)^{\gamma} = A\gamma (\rho_0 + \rho_1)^{\gamma - 1} \nabla \rho_1 = A \gamma \rho_0^{\gamma - 1} \nabla \rho_1 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \nabla \rho_1$$

Vamos provar que v_s é justamente a velocidade do som. O processo em consideração é isotrópico, pois é adiabático e supô-lo-emos também reversível. Seja uma camada de fluido que se move com velocidade \vec{u}_o , contida entre x e x + dx. Por algum motivo é introduzida uma pertubação na mesma. O volume inicial era: Adx, e o novo será A (dx + $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ dx). O coeficiente de compressibilidade é dado por: $K = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$. Considerando a pressão como $p = p_o + p_1$, e supondo T = cte, teremos dp = p_1 . O módulo de elasticidade do fluido é da do por p = p_1 de portanto:

$$p_1 = -B \frac{dV}{V} = -\frac{BA}{A} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx = -B \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

Fig. II-8 - Movimento do fluido

A equação macroscópica do movimento nos dá, desprezando o efeito do potencial gravitacional (camada estreita de fluido):

$$\rho \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} = - \nabla p : (\rho_o + \rho_1) \frac{\partial (\overrightarrow{u}_o + \overrightarrow{u}_1)}{\partial t} = - \nabla p_1$$
ou seja
$$\rho_o \frac{\partial \overrightarrow{u}_1}{\partial t} = - \nabla p_1$$

Considerando o caso unidimensional : $u_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, logo obteremos:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad \therefore \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0} \frac{d^2 \xi}{\partial x^2}$$

Esta é a equação para a pertubação longitudinal no fluido (som), a qual se propaga com uma velocidade $v_s^2 = \frac{B}{\rho_o}$. Considerando agora o gás como sendo perfeito:

$$Tds = du + pdv$$

$$Tds = dh - vdp$$

porém

$$u = u(T)$$
 $du = c_V dT$
 $h = h(T)$ $dh = c_D dT$

Usando o fato adicional de processo adiabático e reversível, isto é, isentrópico, teremos ds = 0 logo:

$$Tds = c_{v}dT + pdv = 0$$

$$c_{v}dT = -pdv$$

Assim num processo adiabático um gás perfeito nos dará $B = \gamma p$, e substituindo na expressão de v_s , teremos:

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma p_o}{\dot{\rho}_o}}$$

Consideremos $\frac{u}{v_s} = M = n$? Mach. Se M >1, a velocidade da massa é maior que a velocidade com a qual sinais podem ser transmitidos na direção de deslocamento do fluido (através de colisões), de modo que podem ocorrer descontinuidades além da qual nenhum sinal acústico seja recebido.

Considerando ρ_1 e \vec{b} como funções matemáticas bem comportadas, podemos tormar as derivadas temporais da equação (16) e teremos:

$$\rho_{o} \frac{\partial^{2} \vec{u}}{\partial t^{2}} + v_{s}^{2} \quad \nabla \frac{\partial \rho_{1}}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \vec{B}o \times (\nabla \times \frac{\partial \vec{b}}{\partial t}) = 0$$

Entretanto agora com as equações (15) e (17), teremos:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial_{t^2}} - v_s^2 \quad \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \vec{v}_A \times \text{rot rot } (\vec{u} \times \vec{v}_A) = 0 \quad (18)$$

Esta é a equação para ondas HM ideais e de direção arbitrárias. Comparando com a equação (8), vemos to aparecimento do têrmo adicional: $-v_s^2 \nabla(\nabla . \vec{u})$, resultante de se levar em conta a compressibilidade do meio. No estudo de ondas em fluidos incompressíveis, supuzemos não existirem variações num pla no transversal $(\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0)$ ao campo além de levarmos em conta que $\nabla . \vec{u} = 0$ e o obtivemos uma onda transversal se propagando na direção do campo. Aquí, porém, a situação se torna mais complicada, visto que, $\nabla . \vec{u} \neq 0$, e resulta uma onda complicada, cujas componentes serão simples de analisar, como vere mos adiante.

Portanto, para tornar possível uma análise pormenorizada, consideramos a velocidade u pertubada na forma:

$$\vec{u} = \vec{u}_a e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)}$$

e chamando $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - wt$. Vemos agora obter uma equação característica, relacionando \vec{k} e \vec{u}_a (onde \vec{u}_a seria a amplitude constante da onda plana), i.e., estudaremos a propagação de ondas <u>planas</u> e <u>monocromáticas</u>. Entretanto com isto em (18) teremos:

$$- w^{2 + 1} u_a e^{i \phi} - v_s^2 \nabla (\overrightarrow{ik} \cdot \overrightarrow{u}_a) e^{i \phi} + \overrightarrow{v}_A \times \text{rot rot } (\overrightarrow{u}_a e^{i \phi} \times \overrightarrow{v}_A) = 0$$
 (19)

mas

$$\operatorname{rot} \overset{\rightarrow}{\mathbf{u}} \times \overset{\rightarrow}{\mathbf{v}_{A}} = (\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}_{A}}, \nabla)\overset{\rightarrow}{\mathbf{u}} + (\nabla.\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}_{A}})\overset{\rightarrow}{\mathbf{u}} - (\overset{\rightarrow}{\mathbf{u}}.\nabla)\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}_{A}} - (\nabla.\overset{\rightarrow}{\mathbf{u}})\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}_{A}} = \mathbf{i} \ (\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}_{A}}, \overset{\rightarrow}{\mathbf{k}})\overset{\rightarrow}{\mathbf{u}} - \mathbf{i}(\overset{\rightarrow}{\mathbf{k}}, \overset{\rightarrow}{\mathbf{u}})\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}_{A}}$$

rot rot
$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}_{A}) = 1$$
 rot $[(\overrightarrow{v}_{A} \cdot \overrightarrow{k}) \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{u}) \overrightarrow{v}_{A}] = \overrightarrow{X}$

É muito fácil mostrar que $\nabla\Phi$ onde Φ é uma função genérica será representado por ik Φ . Então teremos:

$$\vec{X} = i(\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \text{ rot } \vec{u} - i \nabla (\vec{k} \cdot \vec{u}) \times \vec{v}_A = - (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) (\vec{k} \times \vec{u}) + (\vec{k} \cdot \vec{u}) (\vec{k} \times \vec{v}_A)$$

mas

$$\vec{v}_A \times \vec{X} = (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \left[(\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \vec{u} - (\vec{v}_A \cdot \vec{u}) \vec{k} \right] + (\vec{k} \cdot \vec{u}) \left[v_A^2 \vec{k} - (\vec{v}_A \cdot \vec{k}) \vec{v}_A \right]$$

Entrando com isto em (19), resulta:

$$-\mathbf{w}_{\mathbf{u}_{\mathbf{a}}}^{2+}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\phi}+\mathbf{v}_{\mathbf{s}}^{2}(\mathbf{k}.\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{2})\mathbf{k}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\phi}+(\mathbf{v}_{\mathbf{A}}.\mathbf{k})\left[(\mathbf{v}_{\mathbf{A}}.\mathbf{k})\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{2}-(\mathbf{v}_{\mathbf{A}}.\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{2})\mathbf{k}\right]\mathbf{e}^{\mathbf{i}\phi}+(\mathbf{k}.\mathbf{u}_{\mathbf{a}}^{2})$$

$$\left[\mathbf{v_A}^2 \vec{k} - (\vec{v_A} \cdot \vec{k}) \vec{v_A}\right] e^{i\phi} = 0$$

Daí sai a equação característica de velocidades:

$$(\vec{v}_{A} \cdot \vec{k}) \left[(\vec{v}_{A} \cdot \vec{k}) \vec{u}_{a} - (\vec{v}_{A} \cdot \vec{u}_{a}) \vec{k} - (\vec{u}_{a} \cdot \vec{k}) \vec{v}_{A} \right] = w^{2} \vec{u}_{a} - (v_{g}^{2} + v_{A}^{2}) (\vec{u}_{a} \cdot \vec{k}) \vec{k}$$
(20)

Esta equação independe de r e talo contém uma descrição das intensidades e direções das possíveis velocidades das HM.

Nota: A equação divergente de Maxwell em \vec{b} nos da: div \vec{b} = 0, logo div \vec{b} =0 e portanto $\vec{k} \cdot \vec{b}$ = 0. Consequentemente a pertubação em \vec{b} é sempre perpendicular à direção de propagação.

- 1 Se k ⊥ Bo → b || Bo, de modo que as linhas de Bo são mantidas retas paralelas, mas a intensidade de campo total: B = Bo + b é aumentada em certas regiões e diminuidas em outras. Pode-se pois,i-maginar as linhas de B como oscilando perpendicularmente à k, condensando-se a rarefazendo-se alternadamente:
- 2 Se k || Bo -> b | Bo, e como b << Bo, a intensidade de B se man tem praticamente inalterada (primeira aproximação). As L.F.,entre tanto, não mais serão retas, assumindo a forma senoidal, com a per tubação se propagando ao longo das mesmas.
- 3 Se k forma um ângulo qualquer com Bo, teremos uma superposição dos dois tipos de pertubações acima.

8.4.2 - Discussão dos possíveis tipos de Ondas

Passamos agora a análise da Equação Característica (20) obtida.

Chamemos de θ o ângulo entre a direção de propagação \vec{k} e a direção do campo estático uniforme \vec{B} o, logo $\vec{k}.\vec{v}_A$ = kv_A $cos\theta$.

A fim de obter as equações de dispersão aplicaveis às várias ondas tomemos o produto escalar de (20) respectivamente por: \vec{u}_a , \vec{k} , \vec{v}_A , disto resulta:

$$(\vec{k}.\vec{u}_{a}) \left[2(\vec{v}_{A}.\vec{u}_{a}).kv_{A}\cos\theta - (v_{s}^{2} + v_{A}^{2})(\vec{k}.\vec{u}_{a}) \right] = (k^{2}v_{A}^{2}\cos\theta^{2} - w^{2})u_{a}^{2}$$
(21)

$$(\vec{k}.\vec{u}_a) \cdot [(v_s^2 + v_A^2)k^2 - w^2] = k^3 v_A \cos (\vec{v}_A . \vec{u}_a)$$
 (22)

$$(\vec{k}.\vec{u}_a) \left[kv_A v_s^2 \cos\theta\right] = w^2(\vec{v}_A.\vec{u}_a)$$
 (23)

A) Investiguemos a existência de ondas transversais

Fazendo $\vec{k} \cdot \vec{u}_a = 0$, resultará

$$w^{2} = k^{2}v_{A}^{2} \cos^{2}\theta \qquad (eq. dispersão)$$

$$\vec{v}_{A} \cdot \vec{u}_{B} = 0$$

Ignorando-se as soluções triviais: k=0, $\cos\theta=0$, $v_A=0$, $u_a=0$, w=0, e lembrando que $v_A=\frac{B_o}{\sqrt{\mu\rho_o}}$ resulta uma onda HM transversal, que se propaga formando um ângulo θ com o campo magnético estático, e tal que:

- a) Sua velocidade de fase será $v_1 = \frac{w}{k} = v_A \cos \theta$
- b) A pertubação u na velocidade além de ser transversal à direção de propagação é também perpendicular ao campo aplicado (B). Isto é, as pertubações na velocidade do plasma ocorrem num plano \(\begin{align*}{c}\) ao plano (\(\beta\), \(\beta\)). Estas ondas são pois ondas do tipo de Alfvén (i.e., ondas HM transversais), reduzindo-se a onda de Alfvén usual, quando a propagação se faz ao longo do campo. Isto porque a onda de Alfvén usual ocorre como resultado de oscilação pura nas L.F. (\(\beta\) \(\beta\)), no caso em pauta com (θ \(\pm\) 0) teremos a superposição de dois tipos de oscilações:

- 1 oscilação ao longo da L.F., resultante de b
- 2 rarefração e condensação das L.F., resultante de b,

Ainda em virtude da onda ser transversal $(\vec{u}_a \perp \vec{k})$, a onda de Alfvén não pode induzir variações na densidade de partículas do plasma (uma vez que tôdas se deslocam em média, \perp mente a \vec{k}). A não modulação da densidade do plasma é justamente aquela característica que distingue a onda de Alfvén das Ondas magneto-acústicas que veremos à seguir:

Conforme já foi dito, as ondas de Alfvén são essencialmente ondas ele tromagnéticas transversais, de baixa frequência: w << w_{ci}. Consequentemente, elas podem ser prolongadas de duas formas (onda ordinária e onda extraordinária), dando dois diferentes modos de propagação.Entretanto para o caso w << w_{ci}, a relação de dispersão é aproximadamente a mesma para ambas as ondas.

B. Considerando agora $k.u_a \neq 0$, procuraremos outros tipos de ondas

Dividindo (22) por (23) e fazendo $k = \frac{w}{v}$, vem:

$$v^4 - (v_s^2 + v_A^2) v^2 + v_A^2 v_s^2 \cos^2\theta = 0$$
 (Eq. dispersão) (24)

A equação de dispersão é quadrática em v^2 , resultando que em geral dois modos podem se propagar, com velocidades de fase:

$$v_{2,3} = \sqrt{\frac{v_s^2 + v_A^2}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{(v_s^2 + v_A^2)^2 - 4 v_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta}$$
 (25)

Estes dois modos hibridos (pois não são nem puramente transversais, nem pu-

ramente longitudinais) são denominadas de:

ONDA HM MODIFICADA (onda 2, sinal +), ou Alfvén modificada.

ONDA ACÚSTICA MODIFICADA (onda 3,isto é, sinal -)

Para uma análise inicial mais simples consideremos dois casos de propagação:

- 19) propagação perpendicular ao campo ($\theta = 90^{\circ}$)
- 29) propagação paralela ao campo $(\theta = 0^{\circ})$

B.1
$$\theta = 90^{\circ} = v_2 = \sqrt{v_s^2 + v_A^2} = v_3 = 0$$

Do item (A) resulta v₁ = 0, isto implica que perpendicularmente ao camposomente se pode propagar a onda HM modificada que aquí recebe o nome de <u>Onda</u> <u>Magnetosônica</u> (pois sua velocidade é uma combinação da velocidade de Alfvén e da velocidade do som).

Aplicando a equação característica de velocidade (20) a êste caso, teremos:

$$\mathbf{v}^{2} \dot{\mathbf{u}}_{a} = (\mathbf{v}_{s}^{2} + \mathbf{v}_{A}^{2})(\dot{\mathbf{u}}_{a} \cdot \dot{\mathbf{k}}) \dot{\mathbf{k}}, \text{ então } \dot{\mathbf{u}}_{a} // \dot{\mathbf{k}}.$$

Portanto a onda magnetosônica é uma onda longitudinal, propagando-se perpendicularmente ao campo. Note-se aquí, que esta é a única onda que se propaga nêste caso, pois a onda de Alfvén vista no item A não se propaga $\vec{k} \perp \vec{B}_0$.

Para campos fracos ou temperaturas altas, $\vec{v}_A > \vec{v}_s$, então $\vec{v}_2 = \vec{v}_A$ (onda de Alfvén) e para o caso de campos fortes ou baixas temperaturas $\vec{v}_2 = \vec{v}_s$ (onda acústica).

B.2 Propagação paralela ao campo

Neste caso, introduzindo $\theta = 0$ na equação (25) vem:

$$v_2 = v_s$$

$$v_3 = v_A$$

Da equação característica (20), resulta:

$$kv_{A} \left[kv_{A}^{\dagger} \dot{u}_{a} - 2 (\hat{v}_{A}^{\dagger} \dot{u}_{a}) kv_{A}^{\dagger} \hat{v}_{A} \right] = w^{2\dagger} \dot{u}_{a} - (v_{s}^{2} + v_{A}^{2}) (\dot{u}_{a}^{\dagger} \cdot \hat{v}_{A}) \hat{v}_{A} \cdot k^{2}$$

$$(k^{2}v_{A}^{2} - w^{2}) \dot{u}_{a}^{\dagger} = \left[2 k^{2}v_{A}^{2} - k^{2}(v_{s}^{2} + v_{A}^{2}) \right] (\dot{u}_{a}^{\dagger} \cdot \hat{v}_{A}) \hat{v}_{A} =$$

$$= k^{2}(v_{A}^{2} - v_{s}^{2}) (\dot{u}_{a}^{\dagger} \cdot \hat{v}_{A}) \hat{v}_{A} \qquad (26)$$

Uma análise da equação (26), tendo em vista que $k = \frac{w}{v}$ ou w = kv, mostra que

a) Se
$$v = v_3 = v_A$$
 $k^2 v_A^2 - w^2 = 0$, obriga $\vec{u}_a \cdot \vec{v}_A = 0$ (onda transversal)

b) Se
$$v = v_2 = v_s \neq v_A$$
, então $\vec{u}_a // \hat{v}_A$ ou $\vec{u}_a // \vec{k}$ (onda longitudinal)

Portanto, na propagação paralela ao campo só teremos dois modos, um com oscilação longitudinal: onda acústica e o outro com oscilação transversal: onda de Alfvén.

O fato de \vec{u}_a // \vec{v}_A levado a equação (17) mostra a inesistência de pertubação \vec{b} no campo, conforme seria de se esperar numa onda acústica.

8.4.3 Resumo dos Tipos de Ondas

Vamos tomar um sistema de referência com o eixo \hat{z} na direção do campo aplicado \hat{B}_{0} e tomar sucessivamente os vários tipos de propagação, paralela ao campo, perpendicular, e formando uma direção qualquer.

A - Na porpagação paralelamente ao campo, somente dois modos estão presentes:

- a) Onda acústica, longitudinal $(v_f = v_s)$
- b) Onda de Alfvén, transversal $(v_f = v_A)$

superpondo-se para dar a onda resultante como mostra a figura II -

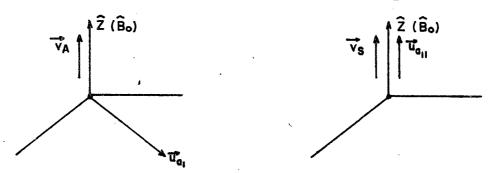


Fig. II-9 - Propagação paralela ao campo

B - Na propagação perpendicularmente ao campo, somente estará presente uma modo:

Onda Magnetosônica longitudinal $v_f = \sqrt{v_A^2 + v_s^2} (v_3 = 0)$ como mostra a figura II-10.

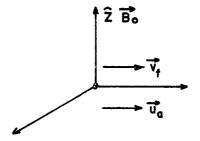


Fig. II-10 - Propagação perpendicular ao campo

C - Consideramos agora o caso geral de propagação fazendo um ângulo genérico com a direção do campo aplicado.

Para facilidade de análise, façamos uma decomposição da velocidade $\overset{\star}{u}_a$ em duas componentes:

$$\vec{u}_a = \vec{u}_{a_1} + \vec{u}_{a_2}$$

onde \vec{u}_{a_1} é a componente perpendicular a \vec{B}_0 e \vec{u}_a a componente perpendicular a \vec{u}_{a_1} .

Estarão pois presentes 3 modos como mostra a figura II -

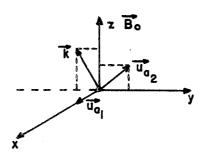


Fig. II-11 - Caso geral de propagação

Estão presentes 3 modos:

a) transversal: Onda tipo Alfvén $(v_1 = v_A \cos \theta)$ (\dot{u}_{a_1})

1) Ondas HM modificada: $v_{2} = \sqrt{\frac{v_{s}^{2} + v_{A}^{2}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(v_{a}^{2} + v_{A}^{2})^{2} - 4v_{s}^{2} v_{A}^{2} \cos^{2}\theta}}$ b) Híbridos $(\vec{u}_{a_{2}})$ $v_{3}\sqrt{=\frac{v_{s}^{2} + v_{A}^{2}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(v_{s}^{2} + v_{A}^{2})^{2} - 4v_{s}^{2} v_{A}^{2} \cos^{2}\theta}}$

denomina-se v, de onda rapida e v, de onda lenta.

Em todos os tipos de onda acima, a pertubação \vec{b} em \vec{B} é perpendicular a direção de propagação:

- a) onda acústica $\vec{b} = 0$
- b) onda Alfvén \therefore $\vec{b} \perp \vec{B}_0$ dando origem a oscilações na L.F., como seria de se esperar numa onda transversal
- c) onda magnetosônica $\therefore \vec{b}$ // \vec{B} dando origem a condensações e rare fações na L.F., conforme é de se esperar numa onda longitudinal.

Nas ondas híbridas o fluido se move no plano (k, B_0) sob a influência combinada das fôrças magnéticas e de pressão, resultando daí o nome de Ondas "Magneto-acústicas". Quando êstes efeitos se somam, a onda se propaga mais lentamente do que o som (onda acústica modificada).

Dois casos podem em geral ocorrer. Considerando que
$$v_s = \frac{\gamma po}{\rho_0} = \frac{\gamma NkT}{m}$$
 e $v_A = \frac{B_0}{\mu \rho_0}$, teremos:

- 1) $v_A > v_S$ para campos magnéticos fortes e/ou gás com baixa temperatura
- 2) $v_A = v_S$ para campos magnéticos fracos e/ou gás a altas temperaturas

Vamos agora usar a equação de dispersão (24) e a análise já feita para tra çar um gráfico polar representando o valor das velocidades das várias ondas em função da direção de propagação, para os dois casos v_A . > v_s e v_A < v_s como mostra a figura II-12

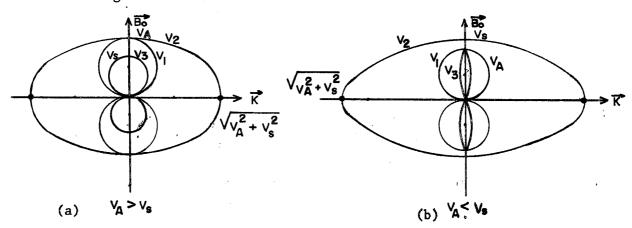


Fig. II-12 - Gráfico polar das velocidades das várias ondas em função da direção de propagação

 $v_1 \rightarrow \text{onda transversal}$ (onda de Alfvén)

Temos que $v_2 \rightarrow \text{onda rápida}$ (onda HM modificada) $v_3 \rightarrow \text{onda lenta}$ (onda acústica modificada)

Podemos observar alguns resultados dos gráficos:

- a A onda HM modificada é que dá origem a onda magnetosônica, única onda puramente com propagação transversal.
- b Na propagação longitudinal, temos:
 - 1) para $v_A^{}$ > $v_s^{}$ a onda HM modificada da origem a onda de Alfvén e a onda acústica modificada da origem a onda acústica.
 - 2) o inverso ocorrendo no caso de $v_A^{} < v_S^{}$
- c Observa-se também que as ondas de Alfvén e acústicas modificadas são mais ou menos guiadas pelas linhas de campo, isto é, têm suas velocidades máximas (de fase e de grupo) quando se propagam ao longo das L.F.. Se a temperatura é bastante baixa e o campo mag nético alto, teremos que v_A >> v_s, resultando v₂ = v_A e v_s = 0.

Consequentemente, num plasma "frio", figura II-, no qual podemos desprezar os movimentos térmicos das partículas:

apenas existem a onda de Alfvén e a onda HM modificada, a qual apresenta agora uma propagação isotrópica.

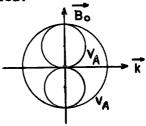


Fig. II-13 - Gráfico polar para plasma frio

De um modo geral, para tôdas as intensidades de campo obtidas em laboratório temos: $v_A << v_s$; em problemas astrofísiços, por outro lado, pode-se ter $v_A >> v_s$ devido as baixas densidades em jôgo.

Importante notar que quando $v_A << v_s$, isto é, quando $v_A + zero$, praticamente só estarão presentes ondas acústicas, pois $v_1 = 0$, $v_3 = 0$ e $v_2 = v_s$.

8.4.4 Pertubação no Campo Magnético

No estudo dos tipos de onda HM possíveis, analisamos a equação característica de velocidades. Desejamos saber agora qual será a pertubação introduzida no campo, nas várias ondas, embora já saibamos que sempre: $\vec{b} \perp \vec{k}$ (pois div $\vec{b} = 0$ => $\vec{k} \cdot \vec{b} = 0$).

Vamos introduzir agora a solução na forma da onda plana monocromática:

$$u = \dot{u}_a e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)}$$
 na equação (17)

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}_0) = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{u} + (\nabla \cdot \vec{B}_0) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B}_0 - (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{B}_0$$

$$= 0$$

Donde:
$$\vec{b} = \left[(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{u}_a e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - (\nabla \cdot \vec{u}_a e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \vec{B}_0 \right] \frac{i e^{iwt}}{-iw} + \vec{f}(x,y,z)$$
 (27)

Para determinar o valor de \vec{f} , consideramos o caso em $\vec{u}_a = 0$, isto \vec{e} o fluido não se move. Nêste caso $\vec{b} = 0$ isto porque os desvios de \vec{B}_o se devem em parte ao movimento do fluido condutor; sem este movimento não pode haver acoplamento magnetomecânico e, portanto, não pode haver onda HM. O mesmo poderia ser obtido considerando-se $\vec{B}_o = 0$.

Aplicando estas condições à equação acima resulta: f(x,y,z) = 0. E a equação (27) se torna pois:

$$\vec{b} = \frac{1}{w} \left[(\vec{k} \cdot \vec{u}_a) \vec{B}_o - k B_o \cos \vec{u}_a \right] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)}$$

$$\vec{b} = \vec{b}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - wt)}$$
(28)

A equação acima da \vec{b} como uma função do espaço e do tempo para uma onda HM simples, plana e monocromática, propagando-se numa direção formando um \hat{a} n-gulo θ com o campo magnético estático.

$$1 - \underline{\text{Modo transversal}} \colon \vec{k} \cdot \vec{u}_{a} = 0$$

$$\vec{b}_{o} = -\frac{k \text{ Bo } \cos \theta}{w} \quad \vec{u}_{a} \quad \therefore \quad \vec{b}_{o} = -\frac{B_{o}}{v_{A}} \vec{u}_{a}$$

qualquer que seja θ . Portanto \vec{b} é realmente perpendicular a \vec{k} , con forme seria de se esperar.

2 - Modos híbridos:
$$\vec{k} \cdot \vec{u}_a \neq 0$$

$$A - \theta = 0 \rightarrow \overrightarrow{bo} = \frac{1}{w} \left((\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{u}_a) \overrightarrow{b}_o - k \overrightarrow{b}_o \overrightarrow{u}_a \right)$$

Aquí, porêm, podem ocorrer dois casos:

a)
$$v = v_A \implies \overrightarrow{u}_a \cdot \overrightarrow{v}_A = 0$$
, onda de Alfvén. Logo $\overrightarrow{b}_o = -\frac{B_o}{v_A} \overrightarrow{u}_a$

nêste caso \vec{b}_0 é perpendicular a \vec{B}_0 , ocorrendo oscilação ao longo da linha de força.

b)
$$v = v_s$$
 => u_a // v_A , onda acustica. Entre $\vec{b}_o = \frac{1}{w} (ku_a B_o - B_o u_a) \hat{B}_o = 0$
= 0 $\vec{b}_o = 0$

$$B - \theta = \pi/2 \implies \vec{b}_0 = \frac{1}{w} (\vec{k} \cdot \vec{u}_a) \vec{B}_0 = \frac{(\vec{u}_a \cdot \hat{k})}{\sqrt{v_A^2 + v_s^2}} \vec{B}_0 \quad \text{onda magnetosonica.}$$

E como
$$\vec{u}_a$$
 // \vec{k} $\vec{b}_o = \frac{\vec{u}_a}{\sqrt{\vec{v}_A^2 + \vec{v}_s^2}} \vec{b}_o$ neste caso \vec{b}_o // \vec{b}_o , provocando con-

densação e rarefação da linha de força.

Como um comentário final, podemos acrescentar que a pertubação no campo magnético, num caso geral, será uma superp**osição**de oscilações ao longo da L.F. com amplitude: $b_0 = \frac{B_0 u_a}{v_A} + uma parte de derivada dos modos híbridos. Nos$

casos particulares acima, a maior pertubação ocorre quando se propaga a $\underline{\text{on-}}$ da de Alfvén .

8.4.5 Efeitos Dissipativos

Da consideração do potencial gravitacional chega-se a as seguintes conclusões:

- a) As ondas tipo de Alfvén permanecem inalteradas
- b) As ondas híbridas tem suas velocidades alteradas, além de passarem a ser atenuadas.

Analisaremos agora a influência da viscosidade e da consideração de uma condutividade finita. Chamado de η o coeficiente de viscosidade, as equações (10, (2), (3) e (4) resultarão em:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u = 0 \tag{29}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = - \nabla p - \frac{1}{\mu} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 + u$$
 (30)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu \sigma'} \quad \nabla^2 B$$
 (31)

$$p = Ap\gamma (32)$$

O uso de $\vec{F}_v = \eta \nabla^2_{\vec{u}}$ não é de todo rigoroso, pois isto so vale para fluidos incompressíveis. Entretanto, podemos usar esta expressão para obter um comportamente qualitativo. Onde (31) foi obtida tomando-se para a lei de Ohm generalizada, $\vec{J} = \sigma'(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$. E procedendo de modo analogo ao anterior as equações (15), (16) e (17) assumirão as formas:

$$\frac{\partial \rho 1}{\partial t} + \rho_0 \quad \nabla . \vec{u} = 0 \tag{33}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + v_s^2 \qquad \nabla \rho_1 + \frac{1}{u} \vec{B}_0 \times (\nabla \times \vec{b}) - \eta \nabla^2 \vec{u} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \nabla \mathbf{x} (\vec{u} \times \vec{B}_{o}) + \frac{1}{\mu \sigma^{\dagger}} \nabla^{2} \vec{b}$$
 (35)

Derivando a equação (34) com respeito ao tempo e entrando com (33) em (34) obtemos:

$$\frac{\partial^{2} \vec{u}}{\partial t^{2}} - v_{s}^{2} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{1}{\mu \rho_{o}} \vec{B}_{o} \times (\nabla \times \frac{\partial \vec{b}}{\partial t}) - \frac{\eta}{\rho_{o}} \nabla^{2} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$$
 (36)

Procuramos agora soluções em ondas planas monocromáticas, seja

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{a}} e^{i\psi}$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{b}}_{\mathbf{o}} e^{i\psi}$$

$$\psi = \dot{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{w}t$$

com

Da equação (35) virá:

$$-iw\vec{b} = (\vec{B}_{o}.\nabla)\vec{u} - (\nabla.u)\vec{B}_{o} - \frac{1}{\mu\sigma'}k^{2}\vec{b}$$

$$(\frac{k^{2}}{\mu\sigma'} - iw)\vec{b} = \sqrt{\mu\rho_{o}}\vec{A} \quad com \quad \vec{A} = i \quad \left((\vec{v}_{A}.\vec{k})\vec{u} - (\vec{k}.\vec{u})\vec{v}_{A}\right)$$

Observando o desenvolvimento feito para as HM compressíveis, o terceiro têr mo da equação (36) fica.

$$B = \frac{1}{\mu \rho_0} \vec{B}_0 \times (\nabla \times - i w \vec{b}) = \vec{v}_A \times (\nabla \times \frac{w}{\alpha} \vec{A}) \quad com \quad \alpha = w + i \frac{k^2}{\mu \sigma}$$

$$B = \frac{\mathbf{w}}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}_{A} \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{\mathbf{w}}{\alpha} \left\{ (\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}_{A} \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{k}}) \left[(\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}_{A} \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{k}}) \overset{\rightarrow}{\mathbf{u}} - (\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}_{A} \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{u}}) \overset{\rightarrow}{\mathbf{k}} \right] + (\overset{\rightarrow}{\mathbf{k}} \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{u}}) \right\}$$

$$\left[v_{A}^{2} \overset{\rightarrow}{\mathbf{k}} - (\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}_{A} \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{k}}) \overset{\rightarrow}{\mathbf{v}}_{A} \right]$$

Retornando a equação (36), ficamos com:

$$-\mathbf{w}^{2}\mathbf{u}_{a}^{2}+\mathbf{v}_{s}^{2}(\vec{k}.\vec{u}_{a})\vec{k}+\frac{\mathbf{w}}{\alpha}(\vec{v}_{A}.\vec{k})\left(\ldots-\ldots\right)+\frac{\mathbf{w}}{\alpha}(\vec{k}.\vec{u}_{a})\left(\ldots-\ldots\right)-i\frac{\mathbf{w}k\hat{\eta}}{\rho_{o}}\vec{u}_{a}=0$$

Daí obtemos a equação característica de velocidade:

$$\frac{\mathbf{w}}{\alpha} (\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}_{A}} \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{k}}) \left[(\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}_{A}} \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{k}}) \overset{\rightarrow}{\mathbf{u}_{a}} - (\overset{\rightarrow}{\mathbf{v}_{A}} \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{u}_{a}}) \overset{\rightarrow}{\mathbf{k}} - (\overset{\rightarrow}{\mathbf{u}_{a}} \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{k}}) \overset{\rightarrow}{\mathbf{v}_{A}} \right] = (\mathbf{w}^{2} + \frac{\mathbf{i} \mathbf{w} \mathbf{k}^{2} \eta}{\rho_{o}}) \overset{\rightarrow}{\mathbf{u}_{a}} - (\mathbf{v}_{s}^{2} + \frac{\mathbf{w}}{\alpha} \ \mathbf{v}_{A}^{2}) (\overset{\rightarrow}{\mathbf{k}} \cdot \overset{\rightarrow}{\mathbf{u}_{a}}) \overset{\rightarrow}{\mathbf{k}}$$
(37)

Multiplicando a equação (37) escalarmente por \vec{u}_a , \vec{k} , \vec{v}_A , obtemos as equações de dispersão abaixo:

$$(\vec{k}.\vec{u}_a) \left[\frac{2w}{\alpha} \quad (\vec{v}_A.\vec{u}_a)kv_A\cos\theta - (v_s^2 + \frac{w}{\alpha} v_A^2)(\vec{k}.\vec{u}_a) \right] = (\frac{w_k^2v_A^2\cos^2\theta}{\alpha} - w^2 - \frac{iwk^2\eta}{\rho_o})u_a^2$$
(38)

$$(\vec{k}.\vec{u}_a) \left[(v_s^2 + \frac{w}{\alpha} v_A^2) k^2 - w^2 - \frac{iwk^2\eta}{\rho_o} \right] = \frac{w}{\alpha} k^3 v_A \cos\theta (\vec{v}_A \cdot \vec{u}_a)$$
(39)

$$(\vec{k}.\vec{u}_a) \left[kv_A v_s^2 \cos\theta \right] = (w^2 + \frac{iwk^2\eta}{\rho_o})(\vec{u}_a.\vec{v}_A)$$
 (40)

Onda Transversal: $\vec{k} \cdot \vec{u}_a = 0$

Neste caso, resulta:
$$\begin{cases} \frac{w}{\alpha} k^2 v_A^2 \cos^2 \theta - w^2 - \frac{iwk^2 \eta}{\rho_o} = 0 \\ \frac{v_A^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{v_A^2 \cos^2 \theta} - \frac{i\alpha k^2 \eta}{\rho_o} = 0 & e \cos \alpha = w + \frac{ik^2}{\mu\sigma}, \text{ vem} \end{cases}$$

$$k^2 v_A^2 \cos^2 \theta - \alpha w - \frac{i\alpha k^2 \eta}{\rho_o} = 0 & e \cos \alpha = w + \frac{ik^2}{\mu\sigma}, \text{ vem} \end{cases}$$

$$k^2 (v_A^2 \cos^2 \theta + \frac{\eta k^2}{\rho_o \mu \sigma^*}) - w^2 - iw \left(\frac{k^2}{\mu \sigma^*} + \frac{k^2 \eta}{\rho_o}\right) = 0$$

Como η é pequeno e σ' muito grande, teremos

$$k^{2}v_{A}^{2}\cos^{2}\theta = w^{2} + iwk^{2}\left(\frac{1}{\mu\sigma^{\dagger}} + \frac{\eta}{\rho_{o}}\right) = w^{2}\left[1 + i\left(\frac{k^{2}}{w\mu\sigma^{\dagger}} + \frac{\eta k^{2}}{w\rho_{o}}\right)\right]$$

Logo, $kv_a cos\theta = w + i \frac{wk^2}{2} (\frac{1}{w\mu\sigma^*} + \frac{\eta}{w\rho})$ e considerando as correções dissipativas pequenas, podemos tomar

$$k = \frac{w}{v_A \cdot \cos \theta}$$
, logo

$$k = \frac{w}{v_A \cdot \cos \theta} + i \frac{w^2}{2(v_A \cos \theta)^3} \left(\frac{1}{\mu \sigma^{\dagger}} + \frac{\eta}{\rho_0}\right)$$
 (41)

Esta equação mostra que a atenuação aumenta rapidamente com a frequência, mas diminue, também, rapidamente com o campo aplicado.

Ondas Hibridas

Os efeitos dissipativos apresentados traduzem perda de energia por parte da onda, as quais resultariam um aquecimento do plasma.

Dessler (1959), investigou a razão de dissipação da energia por unidade de volume numa onda HM se propagando para baixo através da ionosfera. Ele concluiu que efeitos HM são normalmente sem importância no aquecimento da ionos fera, embora o aquecimento HM possa se tornar a fonte principal de aquecimen to da ionosfera durante período de grande atividade magnética.

A figura II-14 mostra a variação da velocidade de Alfvén com a altura na atmos fera terrestre, no plano equatorial. Obviamente esta é uma curva média, uma vez que ocorrem variações no tempo e há dependência com o fluxo de plasma so lar.

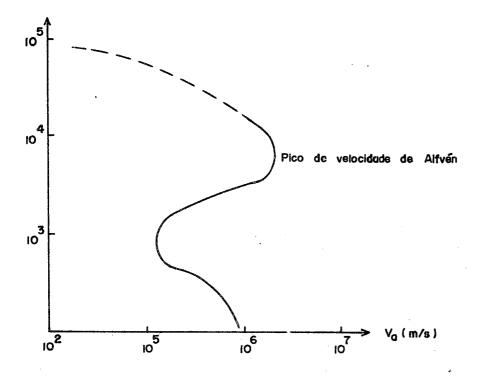


Fig. II-14 - Variação da velocidade de Alfvén com a altura na atmosfera terres

CAPITULO III

1. <u>0 SOL</u>

1.1 Introdução

É uma estrela de terceira geração, constituido de hidrogênio, hélio e elementos pesados, situa-se aproximadamente 10 kpc do centro de nossa galáxia. Devido ao grande uso em astronomia e cosmologia tomam-se os principais parâmetros do Sol como unidades astronômicas. Assim temos:

Mo =
$$1.99 \times 10^{30}$$
 kg (massa do Sol)
Ro = 7×10^5 km (raio médio do Sol)
Lo = 3.9×10^{33} ergs/seg (luminosidade do Sol)

A distância Sol-Terra $\acute{\rm e}$ da ordem de 1.5 x 10^8 km que $\acute{\rm e}$ chamada l A.U. (uma unidade astronômica).

Podemos dividir a estrutura solar de acordo com os radiações que nos chegam e de acordo com os fenômenos observados, em:

interior opaco a qualquer comprimento de onda fotosfera camada de aproximada de 320 km de espessura cromosfera camada de aproximada 15.000 km de espessura Coroa camada acima de 1.03 Ro. Do interior solar não temos nenhuma informação, porem são observados que neutrinos escapam do Sol, provavelmente da parte mais interna.

Estuda-se cada camada através das linhas de emissão observadas. Para isso devemos ter conhecimento do grau de ionização dos elementos (equação de Saha) e do fluxo radiativo.

O Sol apresenta fenômenos periódicos, como manchas solares (período de 11 anos ou de 22 anos se a polarização for levada em consideração), flares, pro eminenças, fáculas, filamentos, etc.. Esses fenômenos apresentam uma grande variação em nossa atmosfera, aumentando o grau de ionização da atmosfera su perior da Terra. É de grande interesse o estudo estatístico desses fenômenos, visto que eles interferem em problemas de propagação. A seguir estudaremos cada camada solar em particular.

2. FOTOSFERA

2.1 Introdução

Para conhecemos a estrutura da atmosfera solar é necessário se conhecer os parâmetros físicos que caracterizam o estado da matéria nas regiões superio res do Sol. Tais parâmetros são a temperatura, pressão, gráu da ionização dos elementos presentes, campo magnético, etc.

Cálculo do Gráu de Ionização

O número de partículas de um sistema, num dado estado, é dado pela distribuição de Boltzman.

$$n_s = A g_s e^{-E_s/kT}$$
 (1)

onde A $\acute{\rm e}$ uma constante, g $\acute{\rm e}$ o peso estatístico do estado, $E_{\rm s}$ a energia do estado considerado e k a constante de Boltzman.

Em geral $g_s = (2J_s + 1)$, onde J_s é o momento angular total do estado considerado, isto é, momento angular orbital mais o spin.

Através da equação (1) podemos calcular a razão do número de partículas em dois estados de energia.

Por exemplo:
$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} = -\frac{\frac{x_{21}}{kT}}{e}$$
 onde $x_{21} = E_2 - E_1$

Para o caso do Hidrogênio

T(^O k)	N ₂ / _{N₁}
6.000	10-8
8.000	1.6×10^{-6}
10.000	3.1×10^{-5}
15.000	1.5×10^{-3}
20.000	1.1×10^{-2}

O número total de atomos em todos os níveis será:

$$N = \sum_{s=1}^{\infty} n_s$$

que pode ser escrita utilizando-se da equação (1)

$$\frac{N}{n_1} = \frac{1}{g_1} (g_1 + g_2) e^{-x_{21}/kT} + g_3 e^{-x_{31}/kT} + ...)$$

ou
$$N = \frac{n_1}{g_1} Z e^{x_1/kT}$$
 onde $Z = \sum_{s} g_s e^{-x_s/kT}$

é a função de partição do sistema.

De uma maneira geral podemos escrever

$$\frac{n_{\underline{i}}}{N} = \frac{g_{\underline{i}}}{Z} e^{-x_{\underline{i}}/kT}$$
 (2)

Vamos nos utilizar da equação (2) para o cálculo do grau de ionisação. Sem entrarmos em detalhes quanto ao processo de ionisação (fotoionização, ionisação por colisão), a energia dos elétrons livre será:

$$E = X_0 + \frac{1}{2} mv^2 = X_0 + \frac{p^2}{2m}$$
 onde X_0 = energia de ionisação a partir do estado fundamental

O número de eletrons com momento entre p e p + dp é dado por

$$dN_e = A g_e e^{-x_0/kT} e^{-\frac{p^2}{2mkT}}$$

 $g_e = 2 g_1^* \frac{dxdydz dp_x dp_y dp_z}{h^3}$ onde $g_1^* = p\hat{e}so$ estatístico do estado fundamental

do átomo ionisado.

Então

$$\frac{dN_e}{n_{o_1}} = \frac{2g_1'}{g_o} \cdot \frac{-x_o/kT}{h^3} \cdot \frac{-\frac{p^2}{2mkT}}{dxdydz dp_x dp_y dp_z}$$

onde $n_{01} = n\hat{u}$ mero de átomos neutros no estado fundamental

g = pêso estatístico do estado fundamental do átomo neutro

Integrando-se por todos os momentos e coordenadas obtemos

$$\frac{Ne}{N_{o_1}} = \frac{2g_1'}{g_o} \cdot \frac{e^{-x_o/kT}}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} v$$

O volume do sistema é eliminado através da condição

 N_1^* V = 1 onde N_1^* = número de atomos ionisados no estado fundamental por cm³

e substituindo-se vem:

$$\frac{{}^{N}_{e}{}^{N'}_{1}}{{}^{N}_{o_{1}}} = \frac{2g'_{1}}{g_{o}} \cdot \frac{{}^{-x_{o}/kT}}{{}^{h}^{3}} (2\pi mkT)^{3/2}$$

através da equação (2) obtemos

$$N_{o1} = N_{o} \frac{g_{o1}}{Z_{o}} = N_{1} \frac{g_{1}^{t}}{Z_{1}}$$

e substituindo acima obtemos

$$\frac{\frac{N_1 N_e}{N_0}}{\frac{N_0}{N_0}} = \frac{(2\pi m kT)^{3/2}}{h^3} \frac{2Z_1}{Z_0} = -x_0/kT$$

ou de maneira mais geral

$$\frac{N_{r+1}N_e}{N_r} = \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \frac{2Z_{r+1}}{Z_r} e^{-x_r/kT}$$

que é a equação de ionisação de Saha.

Como o eletron tem função de onda antisimétrica, isto \hat{e} , $\Psi(x) = - \Psi(-x)$ obedece a estatística de Fermi-Dirac.

Para funções de onda simétrica, temos a estatística de Bose-Einstein.

Para altas temperaturas podemos tratar o movimento das partículas pela esta tística de Boltzman desde que $\frac{\lambda}{\ell}$ << 1 onde ℓ = distância inter-atômica e λ é o comprimento da onda associado.

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$
 onde $\frac{1}{2}$ mv⁻² = 3/2 kT implica que $mv = (3 \text{ kTm})\frac{1}{2}$ e tomando $\ell = (n)^{-\frac{1}{3}}$, que ℓ a geometria mínima para conter uma partícula por cm³.

Logo
$$\frac{\ln \frac{1}{3}}{(3mkT)\frac{1}{2}}$$
 << 1 condição essencial para podermos aplicar a estatísti-

ca de Maxwell-Boltzman.

Para fins práticos a equação de Saha é escrita na forma

$$\log \frac{N_1}{N_0} + \log P_e = -\frac{5040}{T} \times + 2.5 \log T - 0.48 + \log \frac{2Z_1}{Z_0}$$

Por exemplo: Na atmosfera do Sol

$$T = 5.700^{\circ} K$$
 e $P_e = 30 \text{ bar}$

Vamos calcular a percentagem de Al neutro

$$x = 5.96 \text{ ev}$$
 e $\frac{2Z_1}{Z_0} = 0.32$
 $\frac{N_1}{N_0} = 47.7$ ou $\frac{N_0}{N_1 + N_0} = \frac{1}{48.7} = 0.0205$

Como o segundo potencial de ionização é 18.7 ev pequena porcentagem de Al perde o segundo eletron.

2.2 A Equação de Transporte

Vamos considerar agora o problema da interação entre radiação e matéria, como sugere a figura III.1.

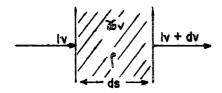


Fig. III-l - Interação entre radiação e matéria

Vamos caracterizar o campo de radiação pela intensidade específica definida como

$$I_{v} = \frac{dEv}{\cos\theta \ dwd\sigma \ dt \ dv} \tag{1}$$

O fluxo de energia monocromático é definida como

$$F_{V} = \pi H_{V} = \frac{dE_{V}}{d\sigma dt dv} = \int_{4\pi}^{\pi} I_{V} \cos\theta dw \qquad (2)$$

e o fluxo integrado

$$F = \pi H = \begin{cases} \infty \\ F_{v} dv \end{cases}$$
 (3)

Vamos definir o coeficiente de absorção seletiva x, como

$$dI_{v} = -I_{v} \times_{v} \rho ds \tag{4}$$

cuja solução

$$I_{v} = I_{v}^{o} e^{-\tau} v$$

define a profundidade ótica $\tau_v = \int x_v \rho ds$

Vamos definir o coeficiente de emissão por massa através de E_{ν}^{0} = energia e mitida por unidade de ângulo sólido e por tempo

$$E_{v}^{o} = j_{v} dm dt dv$$
 (5)

A variação de energia ao atravessar um cilindro elementar de área do e espessura ds, é divida a absorção do material e emissão própria do cilindro, como mostra a Figura III-2.

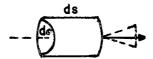


Fig. III-2 - Emissão e absorção num cilindro elementar de plasma $\begin{tabular}{ll} Variação de energia = dI_v do dw dt dv = energia absorvida + energia emitida. \\ energia absorvida = -I_v x_v \rho ds do dw dt dv \\ energia emitida = j_v do ds \rho dt dv \\ \energia emitida = j_v do ds \rho dt dv$

Então

$$\cos \theta \frac{dI_{v}}{d\tau_{v}} = I_{v} - \frac{j_{v}}{x_{v}}$$

é a equação de transporte onde a mudança de sinal é devido à orientação de $\tau_{_{\rm U}}$ e ds.

 $\frac{j_{\nu}}{x_{\nu}} = B_{\nu}(r)$, no caso de equilíbrio termodinâmico a função fonte é a <u>função</u> <u>de</u> Planck

Se $\mu = \cos \theta$ podemos escrever:

$$\mu \frac{dI_{v}}{d\tau_{v}} = + I_{v} - B_{v}$$

A equação de transporte é uma equação diferencial linear de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x)$$

cujo fator integrante e $\begin{cases}
P(x) & dx
\end{cases}$

Portanto a solução é

$$\frac{d}{dx}$$
 (e $\int P dx$ y) = Q(x) e $\int P dx$

ou

$$y = e^{-\int P dx} \int Q(x) e^{\int P dx} dx$$

No nosso caso
$$y = I_v$$
; $x = \tau_v$; $P(x) = P(\tau_v) = \frac{1}{\mu}$ e Q $(\tau) = \frac{B}{\mu}$

Portanto

$$I_{v}(\mu,\tau_{v}) = e^{\frac{\tau_{v}}{\mu}} \int_{\tau_{v}}^{\infty} \frac{B_{v}}{\mu} e^{-\frac{t_{v}}{\mu}} dt_{v}$$
 \text{\text{\text{\text{\$e\$ a solução}}}

do nosso problema. A intensidade na superfície $\tau_{\hat{\mathcal{V}}}$ = 0 é dada por

$$I_{v}(\mu,0) = \int_{0}^{\infty} \frac{B_{v}}{\mu} e^{-\frac{\tau}{\mu}} d\tau_{v}$$

Vamos considerar em primeira aproximação agora o caso de uma atmosfera cujo coeficiente de absorção independe da frequência (atmosfera cinza).

Então:

$$\frac{dI}{d\tau} = + I - B$$

e vamos definir três quantidades

$$J = \frac{1}{4\pi} \int I \ dw; \qquad \text{intensidade media de radiação}$$

$$H = \frac{1}{4\pi} \int I \cos\theta \ dw; \qquad \text{fluxo de radiação}$$

$$K = \frac{1}{4\pi} \int I \cos^2\theta \ dw; \qquad \text{pressão da radiação } x \ c$$

multiplicando a equação de transporte por cos $\frac{dw}{4\pi}$ e integrando vem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \int_{4\pi} \mathrm{I} \; \cos^2\theta \; \frac{\mathrm{d}w}{4\pi} = + \int_{4\pi} \mathrm{I} \; \cos\theta \; \frac{\mathrm{d}w}{4} - \int_{4\pi} \mathrm{B} \; \cos \; \frac{\mathrm{d}w}{4\pi}$$

$$\frac{dK}{d\tau} = + H \quad implica \quad que \quad K = H\tau + cte$$

Considerando-se a aproximação de Eddington, isto \acute{e} , I \acute{e} praticamente independente de θ em grandes profundidades oticas:

$$K = \frac{1}{4\pi} \quad I \quad \int \cos^2\theta \quad \sin\theta \quad d\theta \quad d\psi \quad = \frac{I}{2} \int \int \int 0 \cos^2\theta \quad d(-\cos\theta) = \frac{I}{2} \left[\frac{\cos^3\theta}{3} \right] \int 0 d\theta = \frac{I}{3}$$

$$K = \frac{I}{3} = \frac{J}{3}$$
 aproximação de Eddington $K = \frac{J}{3}$

$$\frac{dJ}{d\tau}$$
 = 3 H logo J = 3H τ + cte

Na superficie do Sol $J_0 = \overline{I}_0$

$$H_{o} = \frac{\overline{I}_{o}}{2\pi} \cdot 2\pi \int_{o}^{\pi/2} \cos\theta \ d(-\cos\theta) = \overline{I}_{o} \left[\frac{\cos^{2}\theta}{2} \right]_{\pi/2}^{o} = \frac{\overline{I}_{o}}{2} = \frac{J_{o}}{2}$$

$$J_0 = 2H_0 = cte$$
 e portanto

$$J(\tau) = 3H\tau + 2H = 2H(1 + \frac{3}{3}\tau) = \frac{F}{2}(1 + \frac{3}{3}\tau)$$

Vamos nos utilizar destas relações para a obtenção do **escurecimento** do lim

$$I (\theta,0) = \begin{cases} \infty & -\tau \sec \theta \\ B \sec \theta & d\tau \end{cases} = \begin{cases} -\tau \sec \theta \\ b \sec \theta & d\tau \end{cases}$$

$$\int_{0}^{\infty} -\tau \sec \theta \\ e & \sec \theta d\tau \end{cases}$$

Utilizando-se do resultado J = B = $\frac{F}{2}$ (1 + $\frac{3}{2}$ τ) vem:

I
$$(\theta,0) = \int_{0}^{\infty} \frac{F}{2} (1 + \frac{3}{2}\tau) e^{-\tau \sec \theta} \sec \theta d\tau = \frac{F}{2} (1 + \frac{3}{2}\cos \theta)$$

I (0,0) =
$$\frac{F}{2}$$
 . $\frac{5}{2}$ = $\frac{5}{4}$ F

Logo teremos:

$$\frac{\mathbf{I}(\theta,0)}{\mathbf{I}(0,0)} = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{3}{2} \cos\theta\right) = 0.4 + 0.6 \cos\theta$$

lei do escurecimento do limbo.

Embora a relação acima represente com alguma exatidão o escurecimento do limbo em luz integrada, é evidente que sérios desvios aparecem ao consi-

deramos a intensidade monocromática pois linhas de absorção do espectro alteram profundamente a forma na curva, como mostra a figura III-3.

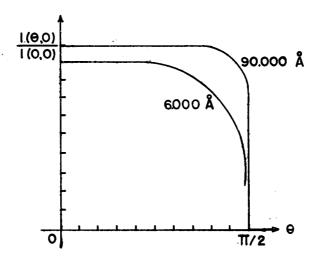


Fig. III-3 - Lei do escurecimento do limbo

No caso do Sol e de estrêlas cuja temperatura efetiva, dada pela lei de Planck é da ordem de 8.000° K a 5.000° K a absorção é devida quase que exclusivamente ao ion negativo do hidrogênio.

Para determinar a estrutura da fotosfera, supondo a existência de equilíbrio hidrostático:

$$\frac{dp}{dh} = -gp$$

e da relação $d\tau = -x\rho dh$, obtemos

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{g}{x}$$

Através da solução da equação de transporte obtemos uma relação $T = T(\tau)$, e a equação de Saha nos permite o cálculo do gráu de ionisação. Com estas relações, resolvendo-se númericamente, assumindo-se um valor para g, Te e μ , podemos obter um modêlo de fotosfera, Plaskett (1955)

τ	T (^O K)	P(10 ⁴ bar)	ρ(10 ⁻⁸ gr/cm ³)	p _e (bar)	α _H (10 ⁻⁴)
0.00	4649	0		0	_
0.03	5033	1.7	4.2	1.7	0.1
0.09	5246	3.1	7.1	3.2	0.1
0.12	5312	3.6	8.2	4.1	0.2
0.48	5838	6.9	14.4	17.7	1.6
0.96	6356	8.8	16.8	46.5	4.3
1.20	6555	9.4	17.4	70	6.5

Examinado-se com maiores detalhes a estrutura da fotosfera podemos verificar a sua não-homogeniedade apresentando uma estrutura granular.

Diâmetro das grânulas é da ordem de 400 a 1000 km de acordo como Schwarz-child (1958), preponderando aquelas da ordem de 200 km.

A vida media dos elementos granulares é da ordem de alguns minutos (~3 min).

A velocidade radial na linha do Fe 6560 \mathring{A} que \acute{e} a ordem de $\overset{-}{v}$ = 0.50 km/seg parece indicar movimentos em larga escala na fotosfera ou seja, macroturbulência. É necessário estudar-se a variação da velocidade radial com o limbo, para eliminar-se o efeito relativistico.

No caso do Sol
$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 R} = 2.12 \times 10^{-6}$$
 logo v - 0.636 km/seg

2.3 Teoria Simplificada de Transporte convectivo

Vamos considerar um elemento de volume no interior da fotosfera. Vamos supor que uma perturbação ocorrida no interior deste elemento altere sua posição para r + dr, e que durante esta mudança o elemento tenha sofrido uma expansão adiabática.

Antes da perturbação, as condições do elemento não diferem do meio, de acor do com esquema da figura III-4.

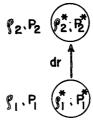


Fig. III-4 - Perturbação do plasma na fotosfera

$$\rho_1 = \rho_1$$
 e $P_1 = P_1$

Depois da perturbação, a pressão está novamente em equilíbrio com o meio, mas a densidade pode diferir consideravelmente do meio, já que a densidade interna é determinada pela expansão adiabática do elemento. Assim temos

$$P_2 = P_2^*$$
 e $\rho_2 = \rho_1^* \left(\frac{P_2^*}{P_1} \right)^{1/\gamma}$

Para que a instabilidade continue basta que

pois teremos ainda um impulso de Arquimedes atuando no elemento. Utilizandose das relações anteriores, teremos:

$$\rho_1^* \left(\frac{p_2^*}{p_1^*}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \stackrel{<}{<} \rho_2$$

ou

$$\rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} < \rho_2 \qquad \log \quad \rho_1 \left(\frac{P_1 + \delta P}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} < \rho_1 + \delta \rho$$

$$\rho_1 \ (1 + \frac{1}{\gamma} \frac{\delta P}{P_1}) < \rho_1 + \delta \rho, \ \frac{1}{\gamma} \frac{\delta P}{P} < \frac{\delta \rho}{\rho}$$

Da equação dos gases perfeitos temos que $\frac{\delta P}{P} = \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta T}{T}$, e substituindo-se na última relação vem:

$$\frac{\delta P}{P}$$
 $(\frac{1}{\gamma} - 1) < -\frac{\delta T}{T}$ portanto $\frac{\delta T}{T} > \frac{\delta P}{P}$ $(1 - \frac{1}{\gamma})$ ou

$$\frac{d \log T}{d \log P} > \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$
 condição para que haja conveção.

2.4 Energia Transportada por convecção

O "excesso" de temperatura do elemento com relação ao meio é dado por

$$dT' = (1 - \frac{1}{\gamma}) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} dr - \frac{dT}{dr} dr = \Delta \nabla T dr$$

$$\Delta \nabla T = (\frac{\gamma - 1}{\gamma}) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{dT}{dr}$$

Se multiplicamos o "excesso" de temperatura por $c_p \rho$ obtemos o excesso de energia térmica por umidade de volume e multiplicando por v, velocidade do elemento, obtemos o fluxo de energia por cm^2 e por seg, ou seja

$$H = c_p \rho v \Delta \nabla T dr$$

2.5 Campos Magnético Associados com Elementos Convectivos

Correntes elétricas, num plasma turbulento, são originadas entre regiões de diferentes densidades eletrônicas e temperaturas. Estas correntes produzem cam pos magnéticos locais fracos. Estes campos podem aumentar em intensidade se houver um meio de transformar energia cinética $\frac{1}{2}$ pv em energia magnética $\frac{\overline{H}^2}{8\pi}$.

Esta transformação pode ser obtida através de processo "spaghetti". Como a condutividade elétrica é muito grande, as linhas de fôrça podem ser considideradas "congeladas" no gás. Em matéria em repouso, mudanças no campo magnético são contrabalançadas por correntes de indução e o campo se modifica somente quando linhas de fôrça são transportadas com o material. Como regra geral, movimentos turbulentos produzem um estreitamento das linhas de fôrça, aumentando os comprimentos do tubo. De acôrdo com Fermi, o processo continua até que equipartição entre turbulência e energia magnética é alcançada, logo

$$\frac{\rho}{2}$$
 $v^2 = \frac{\overline{H}^2}{8\pi}$

Com $\rho = 10^{-7} \text{gr/cm}^3$ e v = 1 km/seg, temos H = 200 gauss, observado jā por Kiepenheuer (1953)

A - O efeito "spaghetti"

Vamos considerar a equação de Euler

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \nabla p + \vec{f}$$

onde \vec{f} = força atuando no fluido por unidade de volume. Entre estas forças podemos considerar

força magnética =
$$\frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$$

fôrça viscosa =
$$\eta \nabla^2 \hat{\mathbf{v}}$$

força gravitacional = $-\rho \nabla \psi$ onde ψ = potencial gravitacional

Desprezando efeitos de viscosidade no fluido, podemos escrever para a equação de Euler

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \nabla p - \rho \nabla \psi + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$$
 (1)

Se desprezarmos a corrente de deslocamento $\frac{1}{c}$ $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, o campo eletromagnético no fluido é descrito por

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$
 (2)

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$
 (3)

A condição $\nabla . \vec{J} = 0$ é equivalente a corrente de deslocamento ser nula.

Logo para um meio condutor de condutividade σ teremos:

$$\overrightarrow{J} = \sigma \overrightarrow{E}^{\dagger}$$

onde \vec{E} ' é medido no sistema de repouso do fluido. Se consideramos um meio movendo-se com velocidade \vec{v} teremos:

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) \quad \text{ou} \quad \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$$
 (4)

Substituindo-se este valor na equação (2) obtemos:

$$\frac{\nabla \times \vec{J}}{\sigma} - \frac{1}{c} \nabla \times \vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$
 (5)

mas da equação (3) $\nabla \times \vec{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \frac{c}{4\pi} \nabla^2 \vec{B}$ onde substituindo-se em (5) vem:

$$-\frac{c}{4\pi\sigma} \nabla^2 \vec{b} - \frac{1}{c} \nabla \times (\vec{v} \times \vec{b}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = 0$$
 (6)

Quando a condutividade $\sigma \rightarrow \infty$ podemos escrever

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

Este resultado equivale a dizer que o fluxo magnético através qualquer loop movendo-se com a velocidade local do fluido é constante no tempo, isto é:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \int_{S} \nabla x (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \oint_{C} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

mas

$$\frac{d}{dt} \int_{S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot ds + \int_{C} (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}$$

ou utilizando nosso resultado, $\frac{d\Phi}{dt}$ = 0, logo Φ = cte

Portanto as linhas de força acham-se "congeladas" no fluido.

Escrevendo-se a força magnética na forma

$$\frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} = -\frac{1}{4\pi} \vec{B} \times \nabla \times \vec{B}$$

e utilizando-se da identidade

$$\frac{1}{2} \nabla (\vec{B}.\vec{B}) = (\vec{B}.\nabla) \vec{B} + \vec{B} \times \nabla \times \vec{B}$$

obtemos
$$\frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} = -\nabla(\frac{B^2}{8\pi}) + \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\rho_{\rm M} = \frac{\rm B^2}{8\pi}$$

e da equação de Euler teremos:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \nabla(p + p_M + \rho \psi) + \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

onde no caso estático

$$p + p_M + \rho \psi = cte$$

3. Cromosfera

A cromosfera foi descoberta durante eclipse total do Sol, graças ao fato de que o diâmetro aparente da Lua é ligeiramente maior que o do Sol. Logo após o segundo contacto, o espectro de Fraunhofer desaparece completamente e um espectro de emissão muito fraco torna-se visível.

Linhas de Emissão observadas e distância do limbo

metais neutros - Fe, T	800	km
metais ionisados - Fe ⁺ , T ⁺	800	km
metais neutros - Fe,Ca,Cs,Al	2.500	km
metais ionisados - T +,Sr+	3.000	km
He ⁺ 4686	3.000	km
He	5.000	km
н	12.000	km
Ca ⁺ linha K	14.000	km

A interpretação da intensidade das linhas observadas é muito dificil desde que as intensidades estão relacionadas com a emissão por volume, por uma du pla integração. Além do mais, o cálculo das populações dos átomos ocupando um certo nível de energia não pode ser feito através da lei de Boltzman e lei de Saha, porque as condições de Equilíbrio Termodinâmico Local (ETL) es tão longe de ser preenchidas. Este desvio de ETL ocorre devido a diferênça de temperatura dos elétrons na cromosfera e a temperatura de radiações proveniente da fotosfera.

O cálculo do desvio de ETL é feito da seguinte maneira:

Seja N_n a população do nível n de um átomo ou ion em equilíbrio termodinâmico caracterizado por uma temperatura T_e e densidade N_e .

A população verdadeira será b N onde os b são fatores que indicam os desvios das condições de equilíbrio termodinâmico.

O número de transições do nível n para os outros níveis j será

$$b_n N_n \sum_{j} P_{nj}$$

onde P_{nj} depende de T_e e N_e para cada transição.

Este número deve ser igual ao número total de transições de outros níveis a n, ou seja, $\sum_j b_j N_j P_j n^*$

Aproximando-se o número infinito de níveis para N, obtemos N equações da forma

A solução deste sistema nos dá os b_n.

Giovanelli (1948) estudou transições para o caso do Hidrogênio, desprezando transições entre níveis tais como $2S \rightarrow 2P$ e obteve $b_n >> 1$ para pequenos valores de n e b ~ 1 para n > 20.

A análise das linhas de emissão do espectro da cromosfera nos mostra a existência de turbulência.

A variação da componente radial com a altura acima da fotosfera é dada pela figura III-5 abaixo.

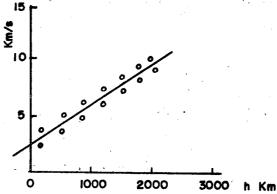


Fig. III-5 - Variação da componente radial com a altura a partir da fotosfera

Temperatura e densidades da baixa cromosfera, observadas com foguetes

a) Espectro contínuo - no ultra violeta

$$\lambda(\text{A})$$
 Trad h
1450 4050 450
1250 3900 600

b) Emissão contínua próxima do limbo - medida em eclipses

$$\frac{\log N_e}{T_{el}} = \frac{11.4}{6100^{\circ}}$$
 h = 1000 km

c) Conclusões de transições da série de Balmer para grandes números quân ticos.

Para grandes números quânticos, conforme o resultado de Giovanelli, o afastamento das condições de ETL é pequeno, assim assumindo-se b $_{n}$ - 1 para $\stackrel{>}{=}$ 20, podemos utilizar as intensidades observadas para determinar N_{e} e T_{e} .

$$E_n = N_n A_{2n} h v$$

 N_n é determinado pela lei de Saha e de Boltzman e assim por T_e e N_e .

Aplicando-se as linhas n-20, n-24, n-28 obteve-se

h	T _e				
	7500	10.000	16.000		
1070	11.54	11.66	11.65		
1750	11.24	11.35	11.29		
2400	10.94	11.05	10.95		

Parâmetros físicos da média cromosfera (1.500 a 6.000 km)

a) Espectro continuo - 4.700 a 3.640

h (km)	2.000	3.000	4.000	5.000
lg N _e	10.94	10.53	10.28	10.08
T	6.400	6.400	10.000	17.800

erang di s

Estrutura da Cromosfera

As espículas da cromosfera superior foram pela primeira vez descritas por Secchi. Sua altura média ~ 7.500 km no equador e 7.800 km nos polos. Seu número é 30% maior nos polos no equdor (já foram observadas espículas com 80.000 km)

Diâmetros ~ 2.000 km - no entanto estimativas melhores 500 a 600 km. A vida média é da ordem de 2 a 3 minutos.

A 4.000 km a componente radial de velocidade de matéria em movimento numa espícula é da ordem de 18 km/seg.

4. A coroa Solar

4.1 Descrição Geral

Durante muito tempo a parte mais externa e mais extensa da atmosfera solar era observada unicamente durante eclipses totais. Isto se deve ao fato de que a coroa é aproximadamente 10⁻⁶ vezes brilhante que a fotosfera.

A coroa possui uma estrutura complexa. Ganski demostrou que a forma de coroa depende da fase do ciclo da atividade solar.

Quando a atividade é máxima a coroa é uniforme e quando a atividade é mínima apresenta uma forma achatada nos polos. O seu brilho também depende da fase.

As partes internas da coroa tem um espectro contínuo sobre o qual se superpoem linhas de emissão.

A radiação das partes superiores da coroa (~1.2 R a 1.4 R) é parcialmente polarizada, podendo se afirmar com bastante segurança que é devido a dispersão de luz proveniente da fotosfera por eletrons livres.

4.2 A concentração eletrônica

A intensidade I (p) e o coeficiente de emissão γ (r) estão relacionados pela equação abaixo se a corôa é esfericamente simétrica.

Para o coeficiente de emissão podemos escrever

$$\gamma(r) = \sigma_{e} n_{e} (r) \frac{I e}{4 \pi} dw$$

onde

 σ_e = secção de choque de difusão $\sigma_e(r) = \tilde{n}_e(r) = \tilde{n}_e(r)$ da distribuição $\sigma_e(r)$

Para a intensidade solar:

$$I = I (1 - u + u \cos \theta)$$

Empiricamente utilizando-se de medidas fotométricas tem-se que:

$$\gamma(r) = \frac{0.0304}{r^{7/2}} + \frac{1.452}{r^{8}} + \frac{4.157}{r^{18}}$$

Através destas relações podemos determinar a variação da concentração eletrónica $n_{\rm e}({\bf r})$.

5. As manchas solares

Uma mancha típica consiste de uma região central escura (umbra), cercada por uma região mais clara (penumbra). A intensidade varia quase que discontinuamente entre a umbra, penumbra e fotosfera. A penumbra sempre mostra uma estrutura filamentar, constituida de grânulas alongadas. A vida média dessas grânulas é da ordem de 30 minutos, Macris (1956).

A umbra também não é homogenea, apresentando pequenos pontos brilhantes parecidos com grânulas, Rösch (1957).

O campo magnético das manchas é quase sempre perpendicular a superfície solar e é da ordem de alguns milhares de Gauss (10³ a 10⁴).

A medida do campo é feita através do efeito Zeeman clássico, isto é,

$$\frac{\nabla \lambda}{\lambda^2} = \frac{eH}{4\pi mc^2} g \text{ onde } g \sim 1 \text{ (fator de Landé)}$$

Há um relação entre o diâmetro da mancha e a máxima intensidade do campo magnético, dada pela formula empírica de Houtgast, ou seja H = $3700 \frac{A}{A+66}$ Gauss, onde A em 10^{-6} do hemisfério visível para θ = 0.

A distribuição do campo na mancha é dada por:

$$H = H_n (1 - r^4) e^{-2r^2}$$
.

Dados fotométricos:

a)
$$\frac{I_u}{I_{fot}}$$
 ~ 0.2 à 0.3

b)
$$\frac{I_{pen}}{I_{fot}} \sim 0.75$$

onde: I_{11} = intensidade luminosa da umbra

I = intensidade luminosa da penumbra

I fot = intensidade luminosa da fotosfera

Dados físicos: Através do estudo da intensidade das linhas do espectro da fotosfera e das manchas solares temos que:

$$\frac{(P_e)_{fot}}{(P_e)_{man}} \sim 40$$

onde: $(P_e)_{fot}$ = pressão eletrônica da fotosfera $(P_e)_{man}$ = pressão eletrônica da mancha

Efeito Evershed: è um movimento radial de massa com velocidade V_E , observada principalmente na penumbra, onde

$$(V_E)_{max} = (1.7 \pm 0.2) U + 0.56 \pm 0.17$$

onde U = raio da umbra.

5.1 Grupo de Manchas

A. Unipolares

- α = fáculas distribuidas simetricamente
- ap = centro da fácula na parte precedente do Campo Magnético
- af = centro da fácula na parte seguinte do Campo Magnético

B. Bipolares

- β = aproximadamente de mesma area
- βp = primeiro centro é o principal
- $\beta f = o seguinte \acute{e} o principal$
- βγ = não há distinção entre o par
- $\beta \gamma$ = grupo multipolar

5.2 História de uma mancha

Uma mancha, começa sua vida como um pequeno poro no campo geral da granulação da fotosfera, com diametro ~ 2.000 à 3.000 km.

A maioria dos poros desaparece, alguns permanecem durante um ou dois dias. No caso de mancha estável teremos:

- 1 Mancha simples de grupo poros sem penumbra primeiro dia sem estrutura bipolar
- 2 Grupo bipolar
- 3 Grupo bipolar A mancha maior apresenta penumbra no segundo dia
- 4 Aparecimento geral da penumbra 59 ao 159 dia
- 5 Grande grupo bipolar

- 6 Máximo desenvolvimento
- 7 Grande grupo bipolar 10º ao 15º dia
- 8 Mancha Unipolar

5.3 As fáculas

As fáculas são estruturas brilhantes no disco, visíveis principalmente nos espectroheliogramas das linhas intensas de Fraunhofer (fáculas cromosféricas) e fracamente visíveis no espectro contínuo próximo do limbo (fáculas fotosféricas).

As fáculas fotosféricas aparecem como estruturas brilhantes em tôrno das manchas, com áreas da ordem de 4 vezes à área da mancha. As grânulas fáculas tem vida média da ordem de 6 a 7 minutos.

A fácula fotosférica tem vida média da ordem de 80 dias, e a fácula cromosférica tem vida média da ordem de 250 dias.

6. Radiação Solar

6.1 Sol calmo

Numa primeira aproximação o sol calmo irradia como um corpo negro com uma temperatura efetiva da ordem de 5.800°K, onde o espectro de frequência é da do pela lei de Planck, ou seja:

$$B_{v}(T) = \frac{2hv^{3}}{c^{2}} \frac{1}{\frac{hv}{kT-1}}$$

Para o caso de ondas de radio temos que $h\nu << kT$, logo podemos desenvolver em série o têrmo $\frac{h\nu}{kT}$, isto é:

$$e^{\frac{hv}{kT}} = 1 + \frac{hv}{kT} + \left(\frac{hv}{kT}\right)^2 + \dots$$

Tomando os dois primeiros têrmos teremos:

$$B_{v} (T) = \frac{2kT}{v^{2}}$$

Superposto à esse espectro contínuo temos linhas características de emissão de elementos, sendo que as mais importantes são:

Hα (6563 Å), Ly - α (1216 Å), H_{eI} (584 Å), C_{III} (977 Å), Ly -β (1025.7 Å raio-X (10 a 100 Å).

Essas radiações são responsáveis pela formação das camadas na ionosfera.

6.2 Sol ativo

Além da radiação semipermanente referente a parte térmica do sol calmo, temos a parte variável que está fortemente relacionada com os centros ativos do sol. Um centro ativo (C.A.) é a totalidade dos fenômenos visíveis que acompanham o nascer e desenvolvimento das manchas solares.

Flare: É um repentino aumento de brilho visto no H_{α} ou $C_{\mathbf{a}}$, que ocorre numa região bem localizada do C.A. no disco solar. Os flares são classificados de acôrdo com a duração e com a área visível comparada com 10^{-6} da área do hemisférico solar.

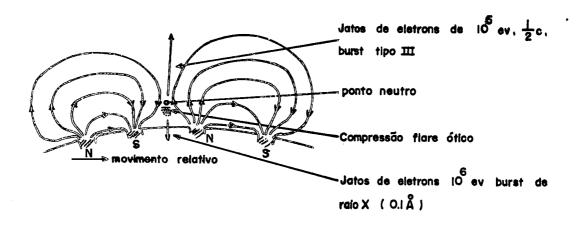
Bursts: Vários modêlos foram sugeridos últimamente destinados a relacionar fenômenos que se passam no sol, durante um flare e as radiações que chegam até nos. O mais aceito atualmente é o modêlo de Dungey, também chamado modêlo do "ponto neutro". Vamos aquí fazer um resumo deste modêlo, ilustrado na figura III-6.

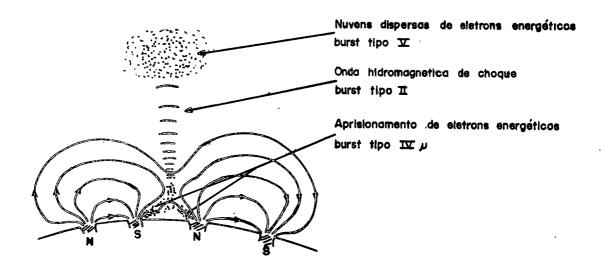
Como o sol não é um corpo rígido, num C.A. é possível que grupos de manchas bipolares, cada uma com seu própito sistema de linhas de campo, se aproximam, carregando consigo plasma altamente ionizado, originando uma grande compres são justamente no ponto neutro dando início ao flare ótico, observado nas linhas do C_a^+ e H_α . Numa primeira fase o campo elétrico acelera eletrons com energia da ordem de 10^6 eV, na direção da fotosfera. Esta por ser mais densa provoca emissão de raio-X por freiamento (radiação bremsstrahlung) dando origem aos "bursts" de raio-X (~0.1Å). Com direção a corôa solar iremos ter jatos de eletrons se deslocando com velocidade da ordem de $\frac{1}{2}$ c, excitando a matéria coronal dando origem a oscilações de plasma, provocando o burst ti-

po III (desvio rápido de frequência). A medida que o jato de eletrons avan ça para a coroa, irá originar uma onda de choque hidromagnética que se pro paga com velocidade da ordem de 1400 km/seg provocando burst tipo III (des vio lento de frequência). Depois de um certo tempo já na coroa teremos uma densidade de cargas negativas que eletrostáticamente irá interagir com car gas positivas provocando burst tipo V. No processo de reorganização das L.F. nas camadas superiores e inferiores irão ficar partículas presas, que darão origem a radiação sincrotonica, provocando respectivamente burst tipo IVm (ondas métricas) e burst tipo IVu (ondas decimétricas).

A dissolução do sistema de L.F. irá provocar a ejeção de partículas da atmosfera solar com altíssima energia, sendo esse mecanismo uma fonte de ra diação cósmica.

Ainda na parte inferior do sistema de manchas iremos têr as proeminências ou filamentos visto na linha do H_{α} . Na parte superior, aproximadamente na coroa média devido aos movimentos do plasma num estágio de reorganização, o nível de ruído irá aumentar dando origem as chamadas tempestades de ruído ou burst tipo I.





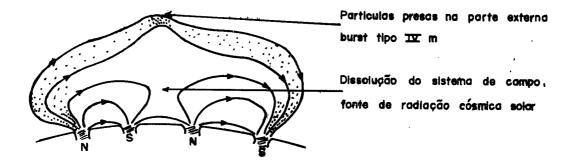


Fig. III-6 - Modêlo de Dungey

7. Ionisação na Atmosfera

Vamos admitir um processo de ionisação da forma

$$X + hv \rightarrow X^{+} + e^{-}$$

Vamos admitir ainda que a ionisação é devida a radiação monocromática com densidade $Q = \frac{quanta}{cm^2 x seg}$ e Q_{∞} é o valor fora da atmosfera. A probabilidade para o processo é dada pela secção de choque σ da molecula X cuja densidade (número de partículas cm^3) é N.

Desta maneira, a produção de elétrons é dada por

$$N \circ Q \left(\frac{\text{eletrons}}{\text{cm}^3 \times \text{seg}} \right)$$

Como N aumenta com a profundidade e Q decresce, há uma produção ótima de e létrons, a uma certa altura.

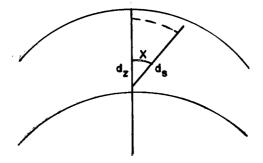


Fig. III-7 - Ângulo zenital solar O número de quanta absorvido é dado por

$$\frac{dQ}{ds} = - N \sigma Q ou \frac{dQ}{dZ} = N \sigma Q sec_{\chi}$$

onde χ = ângulo zenital.

Integrando-se a equação obtida

$$-\operatorname{\sigma} \operatorname{sec} \chi \qquad \int_{z}^{\infty} \operatorname{N}(z) \, dz$$

$$Q = Q_{m} \quad e$$

Para calcular esta integral, vamos admitir a validade da fórmula barométr<u>i</u>

$$N = N_0 e^{-z/H}$$
 onde $H = fator de escala = $\frac{RT}{\mu g}$$

Utilizando-se destas relações obtemos para a produção de elétrons

$$P(z) = \overbrace{\sigma Q_{\infty} N_{O}}^{PO} = \exp \left[-\frac{z}{H} - \sigma N_{O}^{H} e^{-z/H} \sec \chi \right]$$

Vamos calcular o máximo desta função:

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = Po \frac{\partial e^{-u(z)}}{\partial z} = -Po \frac{\partial u}{\partial z} e^{-u(z)} = -Po \left(\frac{1}{H} - \sigma N_o H\right) \left(\frac{1}{H}\right) e^{-z/H} \sec \chi e^{-u(z)} = 0$$

$$\frac{1}{H} - \sigma N_o \sec \chi e^{-Zo/H} = 0$$
 .: Zo = H Log σN_o H secx

Substituindo-se este valor na expressão da produção de eletrons

$$P_{\text{max}} = \frac{Q_{\infty}}{H \sec \chi e}$$

CAPÍTULO IV

ELETRODINÂMICA DA MAGNETOSFERA

1. Penetração de Partículas no Campo Terrestre

Antes de entrar no assunto, façamos uma ligeira recordação de alguns resultados ja obtidos.

No estudo da conservação do momentum quando de interação de um plasma com um campo eletromagnético obtemos a relação ponderomotriz:

(1)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \tilde{P} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$
 onde $\tilde{P} = \text{tensor de tensões}$

Incluindo o efeito do potencial gravitacional e fazendo certas aproximações, além de considerar a inexistência de campos elétricos, obtivemos a equação macroscópica do movimento:

(2)
$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \hat{j} \times \vec{B} - \nabla p + \vec{F}_{v} - \rho \nabla \phi$$

Usando a equação rot $\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, com $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ desprezível, obtemos para a fônça magnética por unidade de volume a expressão:

$$\vec{F}_B = (rot \vec{H}) \times \vec{B}$$

Usando a relação $\nabla(\vec{v}^2) = 2 (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + 2\vec{v} \times \text{rot } \vec{v} \text{ temos apos simplificações:}$

$$\vec{F}_B = \vec{V}_0 \vec{I}_B$$
 onde $\vec{T}_B = \frac{1}{2} \mu H^2 \vec{I} - \mu \vec{H} \vec{H}$

tensor magnético de tensões
$$\begin{cases} \frac{1}{2} \; \mu \; H^2 \; \tilde{I} \; \to \; \text{pressão magnética} \\ - \; \mu \; \overrightarrow{HH} \; \to \text{tensões magnéticas} \end{cases}$$

Supondo campo magnético uniforme, e ao longo das L.F. retas paralelas teríamos

$$\vec{F}_B = -\nabla \cdot (\frac{1}{2} \mu H^2)$$
 pois $(\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} = 0$

 $\frac{1}{2} \mu H^2 = P_M = \text{pressão}$ magnética que pode ser encarada como pressão exercida pelas L.F. supostas fios elásticos .

Desprezando os efeitos da gravidade e a existência da viscosidade, teríamos:

(3)
$$\rho \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} = -\nabla(p + p_m)$$
, válida para:

Aproximações usadas na obtenção de equação macroscópica de provimento e mais

- a potencial gravitacional desprezivel
- b viscosidade desprezível
- c L.F. retas paralelas ("viscosidade magnética" nula)

O campo pode ser suposto uniforme, ou seja não variam ao longo da L.F., a não ser nos polos, onde desprezar (H.V)H não vale em 1-aproximação.

Isto posto retornemos ao nosso assunto:

Suponhamos que uma nuvem de plasma se aproxima de um campo com L.F. dadas; por hipótese a condutividade é infinita, o fluido é incompressível e não há campo magnético carregado por êle. Ao atingir a região do campo, as condições de congelamento fazem com que o campo magnético seja comprimido. Fisicamente, aparecerão correntes de blindagem na superfície frontal da nuvem, as quais evitam a penetração do campo cancelando-o dentro do fluido o que implica em comportamento diamagnético. Supondo o fluido incompressível, o aumento de P_M daria origem a um retardamento na nuvem de plasma e eventual expulsão da mesma, a força atuante por unidade de volume do plasma seria pois $\nabla P_M = -\nabla(\frac{1}{2} \mu H^2)$. Consequentemente, o campo tenderia a empurrar a nuvem de volta, impedindo a sua entrada. Assim sendo, deixando fora de consideração as regiões polares onde não vale $(\vec{H}.\nabla)\vec{H} \sim 0$, é aceito que uma nuvem de plasma não pode se aproximar da Terra mais que uma distância de cêrca de 10R, no lado do Sol, onde se acha o campo terrestre confinado. Entretanto, êste seria o caso para fluidos incompressíveis.

Na realidade, um jato de partículas incidente no campo terrestre não pode ser completamente sustado por êle; uma porção do fluido penetrará no campo "escoando" por entre as L.F. "Quanto mais o fluido penetrar, mais será êle comprimido pelo campo. Êste resultado resulta da equação (3); no caso limite \dot{u} = cte (estado estacionário) implica que p + p_M = cte, portanto $p_1 + \frac{1}{2} \mu H_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \mu H_2^2$ e supondo $p_2 = 0$, $H_1 = 0$, temos: $p_1 = \frac{1}{2} \mu H_2^2$, logo se H_2 \uparrow => p_1 \uparrow . Como o descréscimo do volume de um elemento, diminui a força de repulsão diamagnética (resultante do congelamento) a profundidade de penetração dependerá do grau de compressão do elemento, o qual por sua vez dependerá da temperatura. Se a temperatura fôsse de cêrca de apenas 10.000° K o elemento seria comprimido a cêrca de 1/10 do seu volume inicial, o que

permiti-lo-ia aproximar-se dos limites da atmosfera. Entretanto, se a energia dos movimentos aleatórios das partículas é, como seria de se esperar, grande atrás da superfície frontal, o elemento não penetrará muito. Adiciona-se o fato da compressão elevar a temperatura.

Além disto, um outro efeito se sobrepõe para dificultar a penetração, qual seja:

A presença de um campo magnético na nuvem de plasma, o qual seria arrancado do sol, dificultaria a penetração, pois o escoamento por entre as L.F. do campo terrestre seria acompanhado de distorção nas L.F. dêste campo, implicando um gasto de energia. Ver (Mead and Beard (1964).

O problema foi analizado acima em termos de uma nuvem de plasma, mas também poderia ser analizado encarando-se o movimento das partículas individuais (Ver Beard, 1960). Protons e eletrons sofrerão desvios em sentidos opostos ao encontrarem um campo magnético, os quais terão raios de curvatura inversamente proporcionais as massas, se as partículas tiverem as mesmas velocidades. Assim sendo, os protons penetrarão mais profundamente no campo magnético, e um campo elétrico macroscópico aparecerá como resultado de separação de cargas. Escolhendo um referêncial como mostra a fig. IV-1 e supondo inexistência de campo magnético na nuvem teremos:

$$m \ddot{x} = -qE - qB\dot{y}$$
 $m \ddot{y} = +qB\dot{x}$

You

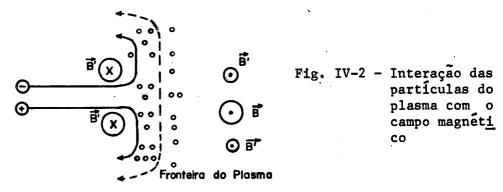
X

Fig.IV-1 - Direção de eixo y per pendicular

ao plano e saindo do papel.

- Logo: a Os protons penetrarão no campo magnético uma distância menor do que na ausência de campo elétrico;
 - b Os protons sofrem uma deflexão para <u>oeste</u> e os eletrons para <u>leste</u>. Este fato representa o comportamento diamagnético do plasma, uma vez que a fina camada de corrente de cêrca de 20 km resultante, cancelaria o campo local no interior da nuvem de plasma e deslocaria o campo à frente da mesma em primeira aproximação ver equa-

ção (8). Veja um esboço na figura IV-2:



As partículas após entrarem no campo descreverão parte de uma órbita até no vamente sairem de região onde existe o campo. Notar que na fronteira de mag netosfera temos $B \sim 100 \ \gamma$ e portanto o raio de giro dos protons é:

$$a_{+} \approx \sqrt{K_{\perp}} \, km$$
 (para k_{\perp} em eV), sendo o raio de giro dos eletrons cêrca de 40 vêzes menor.

Algumas trajetórias esperadas para protons e eletrons são indicadas na figura IV-3, mostrando reflexões práticamente especulares.

Vimos desta forma que, analizando o comportamento individual, das partículas, também não haverá penetração, embora a imagem com partículas individuais não seja de todo correta para dar respostas macroscópicas,

Entretanto, já foi constatada a existência de partículas carregadas com altas energias no interior da cavidade magnetosférica, como o evidenciam os cinturões de radiação de Van Allen e a corrente de anel.

Para justificar a penetração de partículas carregadas, várias hipóteses são aventadas.

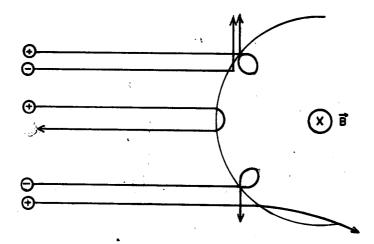


Fig. IV-3 - Reflexões especulares

- a É possível que uma violação do terceiro invariante adiabático, durante variações geomagnéticas muito rápidas permita que partículas carregadas com baixas energias e provenientes do vento solar difundam para dentro da magnetosfera, situando-se em geral na zona externa dos cinturões de radiação. A proporção que difundem, êles aumentam de energia uma vêz que o primeiro e o segundo invariantes adiabáticos se mantêm constantes devido a seus menores períodos. Protons provenientes do vento solar e tendo energias da ordem de 10 keV na magnetopausa poderão ter 10 MeV ou mais à cêrca de L = 3 ou 4, isto é, cêrca de L raios terrestres no equador.
- b Protons com energia de 30 MeV e presentes na zona interna dos cinturões de radiação poderiam resultar de processos de neutrons de albedo que difundiriam para fora da Terra, uma fração dêles décaindo em protons e eletrons na zona interna. Esses neutrons são resultados de processos em que raios cosmicos galáticos, de muita alta energia (1 Bev ou mais) atingindo a atmosfera terrestre produziriam neutrons em várias colisões nucleares. Protons com maio res energias (abaixo de 200 Mev) poderiam resultar de neutrons emitidos do sol e decaindo em protons na zona interna.

c - Além do mecanismo apresentado em <u>a</u>, a precipitação de eletrons do vento solar pode resultar de outro mecanismo, como seja a rotação da Terra, os movimentos diurnos do plasma, resultantes de for mação da magnetosfera pelo vento solar podem produzir campos elétricos que dêem origem à precipitação. Deve haver um mecanismo de disparo para a liberação da energia, acumulada por este efeito por ocasião de distúrbios geomagnéticos, em vista da grande correlação, entre a atividade geomagnética e a precipitação de eletrons.

Energias de Partículas

<u>Velocidade</u>	Energia de Protons	Energia de Eletrons
2.000 km/s	20 keV	5 eV
20.000 "	1 MeV	0.5 keV
200.000 "	100 MeV	50 keV

2. Formação da Cavidade Magnetosférica

2.1 Modelos sugeridos:

Numa tentativa de explicar a correlação entre flares e tempestades magnéticas observadas na superfície da Terra, Chapman e Ferraro propuseram em 1931 que jatos de plasma emitidos pelo sol viriam comprimir o campo geomagnético. Reconheceram que o comportamento diamagnético do plasma estabeleceria uma fronteira bem definida entre êle e o campo geomagnético. Em 1940 êles deram uma solução para o problema lançando uma certa luz na natureza do movimento das partículas do gás solar quando elas se aproximam do campo geomagnético. Em virtude das reflexões das partículas carregadas o plasma não penetraria no campo. Devida à resistência oferecida pelo campo geomagnético à penetração do plasma solar, o campo geomagnético gerará uma cavidade denominada de cavidade magnetosférica, dentro da qual estará encerrado o cam-

po magnético terrestre, como mostra a figura IV-4.

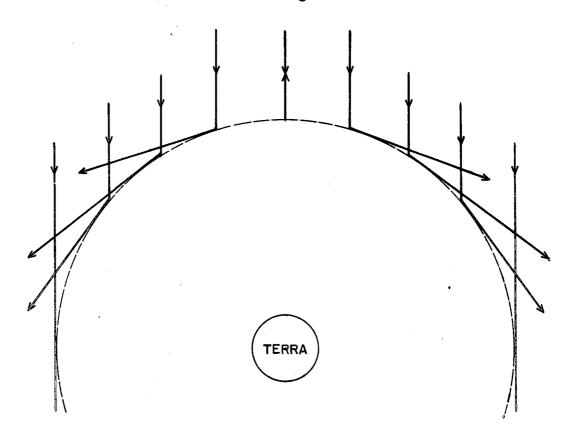


Fig. IV-4 - Formação da cavidade magnetosférica

A. Resumo de Evidências Experimentais

- a Medidas com o satélite Explorer XII, em 1961, feitas no lado iluminado do globo em distâncias por volta dos 10 raios terrestres, indicaram que:
 - 19) Ocorria uma mudança de 180° na direção do campo magnético, dentro de uma faixa de 100 a 1.000 km.
 - 29) O campo varia com $\frac{1}{r^3}$ até cêrca de 5 raios terrestres (mod.dipolo) após o que passa a variar com cêrca de $\frac{1}{2}$, apresentando um valor de cêrca 125 y na fronteira da magnetopausa, ao invês dos 60 y do

modêlo dipolar.

- 39) Na região de transição o campo é turbulento, sendo o campo exterior da ordem de 30 a 40 γ.
- b Medidas com o Explorer X, em 1961, indicam a existência de uma transi ção semelhante no lado escuro do globo, onde porém se verifica a existência de uma camada alongada (geocoma) que não se fecha até distância de pelo menos 40 raios terrestres.
- c Medidas realizadas com o satélite IMP 1, de Nov 63 a Maio 64, trazem também indicações de que a geocoma se extende até distâncias bastante grandes, mesmo além da órbita lunar (cêrca de 57 raios terrestres),a-lém de mostrar ser o campo geomagnético na geocoma paralelo à linha Sol-Terra mas com sentidos diferentes nos dois hemisférios sul e norte. Além disto apresenta ainda a existência de uma camada neutra com cêrca de 600 km de espessura.

Apresentaremos aquí resumidamente, alguns dos modêlos sugeridos:

Modêlo de Dungey (1961, 1962, 1963)

Neste modêlo observa-se o acomodamento entre os campos geomagnéticos e interplanetários. Notar também que a camada se fecha e que após a linha neutra, o campo tende a retornar à configuração interplanetária. As setas indicam a circulação do plasma, conforme mostra a figura IV-5

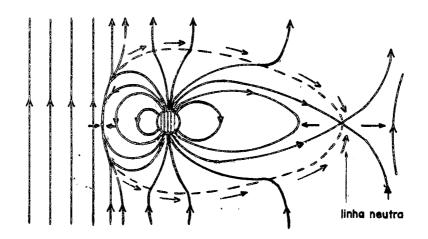


Fig. IV-5 - Modelo de Dungey (1961, 62, 63)

Modêlo de Levj et al (1964) e Axford et al (1965)

Elaboraram o modêlo de Dungey e o tornaram mais quantitativo o fechamento da cauda na linha neutra. Usaram também o conceito de L.F. opostas e congeladas num plasma altamente condutor; conceito êste já usado no estudo de "flares" solares, como mostra a figura IV-6.

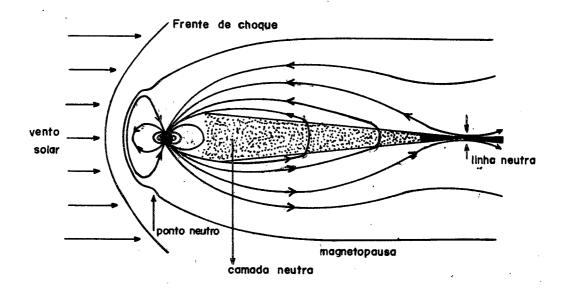


Fig. IV-6 - Modêlo de Levi et al (1964) e Axford et al (1965)

Modêlo de Dessler (1966)

Dessler propôs um modêlo em que é desprezível o acoplamento magnético (magnetic merging) das L.F.. Nêste modêlo a geocoma se estenderia até 20 a 50 unidades astronómicas, i. é, (5 x 10⁶ a 12 x 10⁶ raios terrestres), como constana fig. IV-7.

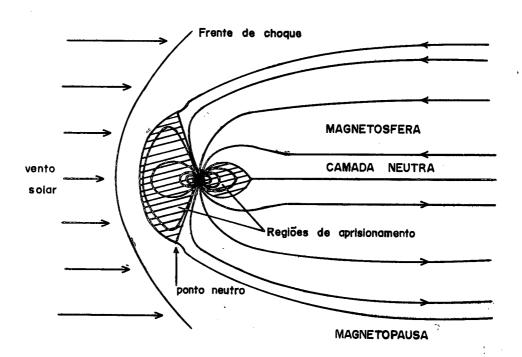


Fig. IV-7 - Modelo de Dessler

A principal diferença entre o modêlo de Dessler e os anteriores é a existência de uma camada neutra, ao invés de uma linha neutra. Notar que a "camada neutra" no modêlo de Levi e Axford não é realmente neutra e a não existência de uma conexão direta significativa das linhas geomagnéticas com as linhas magnéticas interplanetárias, embora esta conexão não possa estar inteiramente ausente; a oclusão ("merging") se daria lentamente.

Êste modêlo de Dessler parece estar bem de acôrdo com os resultados experimentais advindos dos magnetômetros do satélite IMP 1.

O fenômeno de acomodamento rápido de conexão entre os campos interplanetários e geomagnéticos não é apoiado por medidas de satélites e dados de raios cos micos. Embora medidas de satélites não possam estabelecer uma diferença entre os modêlos acima, dados sôbre a absorção na calota polar, (PCA), indicam uma cauda magnetosférica com cêrca de 1 unidade astronômica com conexão des prezível entre o campo geomagnético e o interplanetário, o qual abrir-se-ia para permitir passar o geomagnético. O modêlo de Dessler é pois, mais consistente com a teoria e com a experiência.

2.2 Calculo da Superficie Limite da Magnetosfera (Forma da Cavidade)

A - Delineamento do Método

Vamos agora tentar obter matematicamente a forma da cavidade magnetosférica usando um procedimento apresentado por Mead and Beard (1964).

De acôrdo com os resultados experimentais aos quals fizemos referência no final do item anterior, será razoável usar a hipótese simplificadora de que o vento solar esteja livre, de um campo magnético interplanetário. Será admitido adicionalmente, o plasma frio (o que garantirá não existirem movimentos laterais dos ions perpendicularmente à direção de deslocamento ma-

croscópico do vento solar), reflexão especular, conforme análise já vistanteriormente.

Assim, com as suposições de:

- a Plasma frio (não há movimento de partículas perpendicularmente direção de fluxo do plasma).
- b Plasma sem campo interplanetário (logo a pressão magnética se de verá só ao campo geomagnético).
- c Reflexão especular.

e considerando o plasma solar incidindo perpendicularmente ao dipolo geomagnético com velocidade constante (o que constitue o chamado problema constante (o que constante consta

Já mostramos que dentro de hipóteses razoaveis, a equação macroscópica movimento do plasma ficaria

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla(p + p_m) \text{ onde } p_m = \frac{1}{2} \mu H^2.$$

Para condições estacionárias teremos que $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ e portanto $p + p_m = ci$ $p_1 + \frac{1}{2} \mu H^2 = p_2 + \frac{1}{2} \mu H_2^2.$ Considerando não existir campo interplanetário (H₁ = 0) e ser desprezível a densidade de plasma no interior da magnetosfe (p₂ = 0), ficaríamos com:

$$p = \frac{1}{2} \mu_o H^2$$

onde: p = pressão dinâmica do vento solar

H = campo magnético terrestre

Vamos agora obter o valor da pressão que o vento solar exerce sobre a fronteira da magnetosfera.

Admitindo reflexão especular das partículas, a variação de momentum de cada uma sera $\delta \vec{P} = 2 \ (\vec{p} \cdot \vec{n}) \hat{n}$. Supomos ainda todo o plasma se movendo nos mesmo sentido e com velocidade \vec{u} . No intervalo Δt , atingirão a superfície um número de partículas dado por N $(\vec{u} \cdot \hat{n})$ Δt . Δs . Portanto a variação total de

momentum num intervalo At numa região de superfície é dado por:

$$\Delta \vec{P} = 2 \text{ Nm } (\vec{u} \cdot \hat{n})^2 \Delta t \cdot \Delta s \hat{n}.$$

A força exercida sobre a região As será $\Delta \vec{F} = -\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = -2 \text{ Nm} \quad (\vec{u}.\hat{n})^2 \Delta s \hat{n}$, de modo que a pressão será $p = \left| \frac{\Delta F}{\Delta S} \right| = 2 \text{ Nm} \quad (\vec{u}.\hat{n})^2$. Assim sendo, a pressão imposta à superfície frontal da magnetosfera será: $p = 2 \text{ Nm } u^2 \cos^2 \psi$, onde ψ é o ângulo entre u e a normal externa da superfície magnetosférica. Para um plasma com várias espécies de partículas, colocamos:

$$2 \rho u^2 \cos^2 \psi = \frac{1}{2} \mu H^2$$
 onde $\rho = Nm$.

Usaremos agora as condições de contôrno para o campo magnético. Como a componente normal de B é contínua através da superfície, e não há campo externamente, o campo magnético no interior da superfície é tangencial à mesma. A componente tangencial não se anula devido as correntes que existem na fronteira da superfície e já levadas em conta quando se supôs o congelamento.

Consequentemente ficaremos com:

$$2 \rho u^2 \cos^2 \psi = \frac{1}{2} \mu_0 H_t^2 = \frac{B_t^2}{2\mu_0}$$
 ou de $B_t = \hat{n} \times \hat{B}$ (2)

Chamamos $\rho u^2 = p_0$ que seria a metade da pressão na direção da linha Sol-Terra. Como no lado da superfície exposta ao sol o produto $(\hat{n}.\hat{u})$ é negativo, teremos:

$$|\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{B}}| = -\sqrt{4p_o \mu_o} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{u}})$$
 (3)

A superfície definida pela equação $F(r,\theta,\psi)=$ cte, pode definir implicitamente \underline{r} como função de $\underline{\theta}$ e $\underline{\psi}$, isto \underline{e} , \underline{r} = $R(\theta,\psi)$, como mostra a fig. IV-8.

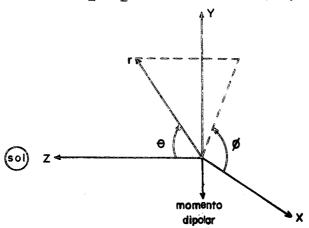


Fig. IV-8 - Referencial com Z apontando para o sol

A normal à superfície será dada evidentemente pelo seu gradiente, logo:

$$\widehat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla \mathbf{F}}{|\nabla \mathbf{F}|}$$

onde
$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \text{ sen} \theta} \frac{\partial F}{\partial \psi} \hat{\psi} \text{ pela regra de deriva-}$$

vação de funções implicitas, teremos:

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \theta}}{\frac{\partial F}{\partial \gamma}} \therefore \frac{\partial F}{\partial \theta} = -F_r \frac{\partial R}{\partial \theta} \text{ e analogamente para } \frac{\partial F}{\partial \psi}.$$

Portanto teremos:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r} \left(\hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right) \hat{\theta} - \frac{1}{r \text{ sen} \theta} \frac{\partial R}{\partial \psi} \hat{\psi} , \text{ dando para a normal}$$

o valor:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}}}{|\nabla \mathbf{F}|} (\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{\mathbf{r} \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi} \hat{\boldsymbol{\psi}}), \text{ onde}$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{X} \left(\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{\mathbf{r} \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi} \hat{\boldsymbol{\psi}} \right) \operatorname{com} \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}} / |\nabla \mathbf{F}|$$
(4)

Como estamos supondo a velocidade do plasma na direção - 2, teremos:

$$\hat{\mathbf{u}} = -\cos\theta \,\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \,\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{5}$$

Substituindo nas equações (4) e (5) em (3) poderemos resolver esta última obtendo $R(\theta,\psi)$, a qual dará a configuração da magnetopausa. Como o fator X aparece nos dois membros de (3) êle se cancelará. Entretanto para solver a equação (3) é preciso que conheçamos o campo magnético \vec{B} . Como êste campo inclui o efeito das correntes superficiais, êle não pode ser determinado en quanto não se conhecer a forma da superfície. Assim sendo, o problema não admite solução exata sendo necessário que lancemos mão à um método de aproximações sucessívas.

Este método consistirá em:

- a Assumir uma expressão razoável para B na equação (3)
- b Calcular a superficie correspondente
- c Corrigir o valor de B baseado na superfície obtida e usá-lo na equação (3).
- d Achar a nova superfície e retornar ao item c.

O processo de recorrência acima descrito é rapidamente convergente, e verifica-se que após a segunda interação não se consegue melhorias significativas para as demais aproximações (terceira em diante). Isto se deve a que os campos magnéticos devidos as correntes na fronteira do plasma, fora da magnetosfera, quase que totalmente cancelaram o campo dentro do plasma (cancelamento com precisão da l em 1.000). O campo total imediatamente dentro da magnetosfera será composto de 3 partes:

- B_g = campo do dipolo magnético
- ...B = campo produzido por uma folha plana de correntes superficiais, tangente à superfície
 - $_{\rm c}^{\rm B}$ = campo das correntes superficiais, resultante da curvatura da superfície.

O campo interno devido às correntes superficiais será pois $\vec{B}_s = \vec{B}_p + \vec{B}_c$ e o campo total será $\vec{B} = \vec{B}_g + \vec{B}_s$.

Supondo a região fronteira como infinitamente fina e movendo-se o observador para uma posição imediatamente fora da magnetosfera, \vec{B}_g e \vec{B}_c não se alteram e \vec{B}_p troca de sinal, como mostra a figura IV-9.

Logo

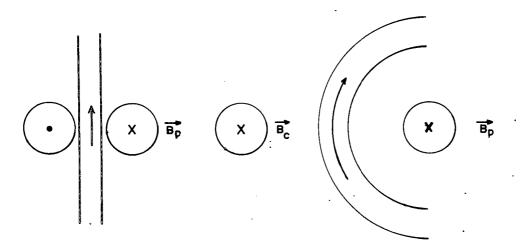


Fig. IV-9 - Campos na fronteira da magnetosfera

Logo
$$\vec{B}_{ext} = \vec{B}_g - \vec{B}_p + \vec{B}_c$$

Devido a hipótese de não existência de um campo magnético no plasma, associado aquela do congelamento, teremos:

$$\vec{B}_{p} = \vec{B}_{g} + \vec{B}_{c} \quad \text{implicando} \qquad \vec{B} = 2(\vec{B}_{g} + \vec{B}_{c}) \quad (6)$$

Entrando em (3) vem:
$$|\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{B}}_{g} + \hat{\mathbf{B}}_{c})| = -\sqrt{p_{o}u_{o}}(\hat{\mathbf{n}}.\hat{\mu})$$
 (7)

Substituindo em (7), as equações (5) e (4) teremos a equação a ser resolvida, e para a qual usaremos um processo de recorrência pois não conhecemos B_c , que só poderá ser obtido após conhecido a superfície.

B. Obtenção de primeira Aproximação

Uma primeira aproximação razoável consiste em ignorar o campo de curvatura, o que equivalerá a supôr:

$$\vec{B} = 2 \vec{B}_g \qquad (8)$$

No plano yz teriamos $\vec{B}_g = \frac{M}{r^3}$ (-2 sen θ \hat{r} + cos θ $\hat{\theta}$), e incluindo outros planos, teremos:

$$\vec{B}_g = \frac{M}{r^3} \left(-2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi \ \hat{r} + \cos\theta \operatorname{sen}\psi \ \hat{\theta} + \cos\psi \ \hat{\psi} \right) \tag{9}$$

Considerando pois $\vec{B}_{c} \sim 0$ e substituindo as equações (4), (5) e (9) em (7) obtem-se uma complicada equação diferencial não linear nas variáveis θ, ψ , a qual foi resolvida por Mead and Beard (1964) por métodos núméricos, usando a técnica de Newton - Raphson e um computador IBM 7094.

Pode acontecer, entretanto de não existir uma solução para todos os valores de θ e ψ , se não for usado o correto valor de B. Na realidade, a solução para todos os valores de θ e ψ no lado antisolar não existe numa primeira aproximação. Nêste caso, completa-se a superfície por uma extrapolação razo ável da parte que pode ser computada.

No plano meridiano o problema é razoavelmente simples: $a - \text{No plano meridiano } \frac{dR}{d\psi} = 0. \quad \text{Fazendo r}_0 = (\frac{M^2}{\mu_0 P_0})^{\frac{1}{6}} \quad \text{e medindo r} \quad \text{en}$

unidades de r_o, a equação (7) assumirá forma elementar:

$$\frac{dR}{d\theta} = rtg\theta (r^3 - 1) (r^3 + 2)$$
 (10)

cuja solução é:
$$\frac{r^3}{r^2} = \frac{r^2}{r^3 - 1} = \cos\theta \qquad (12)$$

onde
$$r_{oo} = r/_{\theta=0}$$

ou α no equador ($\theta = 90^{\circ}$), portanto somente (11), que é a equação de um círculo, fornece uma superfície aceitável.

b - Como \vec{B} troca de sinal nos polos e se usar o valor de $|\hat{n} \times \vec{B}|$, a equação da superfície no plano meridiano, no "lado escuro" dos polos será:

$$\frac{dR}{d\theta} = rtg\theta \quad (r^3 + 1) \quad (r^3 - 2) \tag{13}$$

cuja solução é:

$$kr^3/(1+r^3)=r\cos\theta$$

c - O problema de casar as duas soluções aproximadas (4) diurna, (14) noturna não é difícil, sendo ilustrado na figura IV-10.

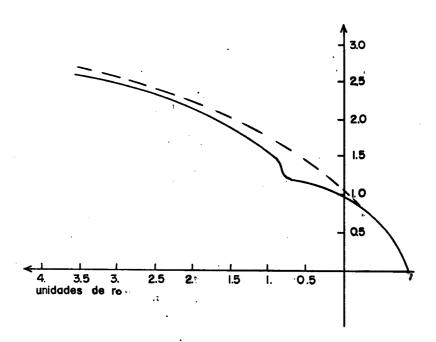


Fig. IV-10 - Primeira aproximação da cavidade magnetosférica no plano meridiano

C. Obtenção da segunda Aproximação

Obtida a superfície em aproximação de segunda ordem, o próximo passo será computar o valor de \vec{B}_{c} , isto é, do campo magnético adicional resultante da curvatura de superfície, suposto nulo na primeira aproximação. Isto é feito integrando-se sôbre as correntes de superfícies, usando a lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}_{c}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S} \frac{\vec{J}_{e} \times \vec{r}'}{r^{i3}} ds$$
 onde

J_e = corrente superficial por unidade de comprimento na superficie

r' = vetor do elemento da superficie ds ao ponto onde o campo está

sendo calculado. O integrando depende do ponto onde está sendo B

calculado, se num dos lados da superfície de correntes ou se no seu centro. Escolhemos o ponto central da camada de correntes a fim de se calcular apenas a correção devida à curvatura da superfície, como podemos ver na figura IV-11.

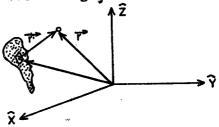


Fig. IV-11 - Integração das correntes superficiais A direção e magnitude de \vec{J}_e pode ser obtida através das condições de contôrno, que são:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{H}}_2 - \hat{\mathbf{H}}_1) = \hat{\mathbf{J}}_e$$

Como o campo interplanetário é nulo, teremos:

$$-\hat{\mathbf{n}} \times \frac{\hat{\mathbf{B}}}{\mu} = \hat{\mathbf{J}}_{e}, \quad \log \quad \hat{\mathbf{J}}_{e} = -\hat{\mathbf{n}} \times \frac{2(\hat{\mathbf{B}}_{g} + \hat{\mathbf{B}}_{c})}{\mu} \quad \text{donde}$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{c} (\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\left[-\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{B}}_{g} + \hat{\mathbf{B}}_{c}) \times \hat{\mathbf{r}}'\right]}{\mathbf{r}'3} \, ds \qquad (15)$$

Onde para $(\vec{B}_g + \vec{B}_c)$ é usada a aproximação anterior, de modo que para o cálculo de \vec{B}_c na segunda aproximação, teremos $\vec{B}_c(\vec{r}) = 0$ no integrando.

D. Resultados

Com êste valor de \vec{B}_c retorna-se a equação (7) e obtem-se a segunda aproxima ção de $R(\theta,\psi)$, com a qual obtem-se o novo valor de \vec{B}_c , etc. Êste processo de recorrência é ràpidamente convergente e a partir da quarta interação as superfícies se tornam indistinguíveis, como mostra a figura IV-12.

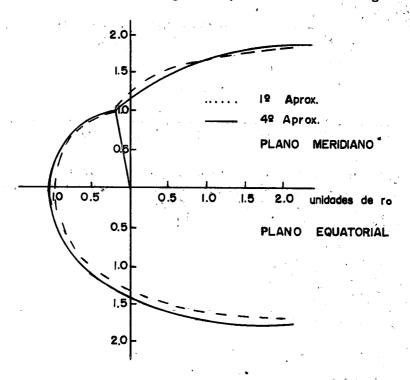


Fig. IV-12 - Relação entre a primeira e quarta aproximação

A configuração da cavidade magnetosférica em outros planos pode ser tirada das figuras IV-13 e IV-14 abaixo.

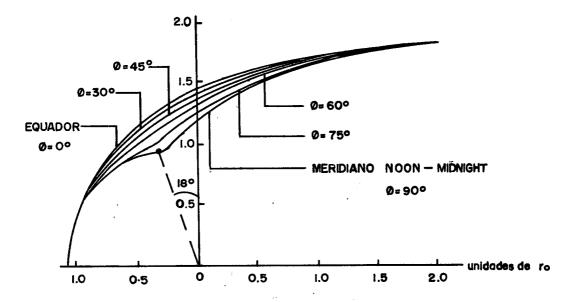


Fig. IV-13 - Interseções da aproximação de quarta ordem para a superfície magnetosférica, com planos girados de 15º em tôrno da linha Sol-Terra

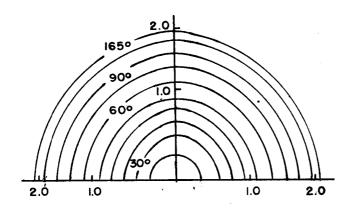


Fig. IV-14 - Contôrno da magnetosfera para vários θ projetado sôbre a linha Sol-Terra

Ao lado damos as configurações da magnetosfera, conforme obtidas por Spreiter and Briggs (1962), no plano meridiano, para incidência do jato de plasma solar não perpendicularmente ao eixo do dipolo. Muitos outros métodos têm sido usados para calcular a forma da magnetosfera e acham-se resumidamente descritos no McCormac (1965).

Beard (1962), Kellog (1962), Spreiter and Jones (1964) aplicaram, com sofisticação crescente, a teoria convencional de choque hidrodinâmico a este problema e predisseram com sucesso a forma de "magnetosheath", a camada de transição entre o campo magnético comprimido e o plasma na superfície da magnetosfera que usualmente chamada "camada de choque", como mostra a figura IV-15.

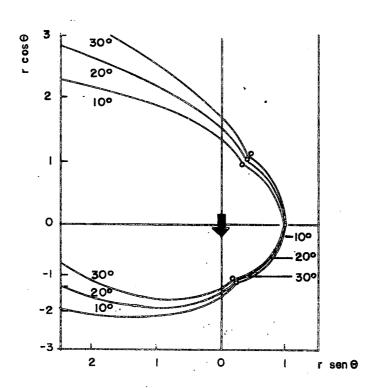


Fig. IV-15 - Previsoes de camadas de transição

A figura IV-16 mostra o resultado obtido por Spreiter and Jones (1963) para a "magnetosheath" êle é um refinamento do cálculo anterior feito por Kellog (1962). Além dos processos que podem ocorrer na região de transição, como : possível turbulência, ondas, etc; um processo adicional muito importante dis respeito à criação de eletrons energéticos dentro da "magnetosheath". Devido a separação de cargas que resulta do fato de que o plasma se curva na região de campo comprimido, onde a velocidade do mesmo difere da do plasma, aparecem campos elétricos que aceleram eletrons e desceleram protons.

O gráfico representado na fig. IV-16 mostra a região de transição entre onda e a fronteira de magnetosfera.

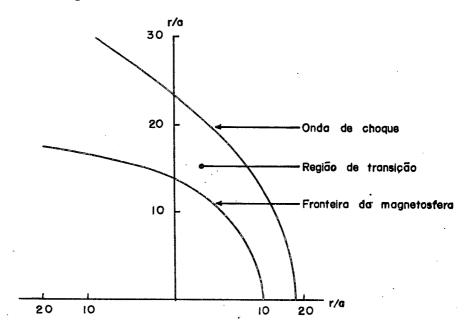


Fig. IV-16 - Região de transição entre a onda e a fronteira da magnetosfera

3. Deformação do Campo Geomagnético pelo Vento Solar

Conforme vimos no item anterior a presença do vento solar faz surgir uma ca vidade geomagnética ao mesmo tempo que introduz uma deformação no campo geomagnético. O campo geomagnético será pois constituido de duas partes:

- a uma parte interna, que será representada pelo campo dipolar da Terra
- b uma parte devida a fontes externas

Na superfície da Terra, cálculos já indicados anteriormente mostram que apenas 1% do campo terrestre superficial se deve à fontes externas. A grandes distâncias, porém, a parte do campo devida às fontes externas se torna proporcionalmente muito maior, uma vez que o campo dipolar varia com $(1/r)^{-3}$ enquanto que o campo devido às fontes externas ou é constante ou proporcional às potências positivas de r.

As fontes externas recaem em 3 grupos principais:

- 1 Correntes ionosféricas
- 2 Correntes de anel devido às partículas aprisionadas
- 3 Correntes superficiais na fronteira da magnetosfera, devido à interação do campo terrestre com o vento solar.

As correntes ionosféricas constituem a fonte da maioria das variações diurnas no campo magnético observado na superfície da Terra; entretanto, acima da ionosfera estas correntes passam a constituir "fontes internas" e os seus efeitos caem râpidamente junto com o campo principal, de modo que pouca constribuição no campo a grandes distâncias. As correntes de anel associadas à deriva de partículas aprisionadas, têm sido desde há muito postuladas como a fonte da fase principal das tempestades. A localização e intensidade das mesmas ainda não foram estabelecidas com certeza, e sem tal

conhecimento é muito difícil incluí-las em qualquer cálculo do campo magnético no espaço. Além do mais elas são pequenas nas épocas magnêticamente cal mas.

Teceremos pois comentários sobre os efeitos da terceira fonte, os quais podem ser determinadas através da expressão do campo em harmônicas esféricas. Assim os valores numéricos dos coeficientes que descrevem a parte externa são obtidas da solução numérica tridimensional do problema de Chapman-Ferraro, a qual consiste em determinar a forma da superfície fronteiriça en tre um plasma frio, sem campo, com velocidade constante incidindo primeiramente no campo dipolar e suposto refletido especularmente. Após ser a forma da superfície obtida, o campo de perturbação pode ser determinado pela lei de Biot-Savart, fazendo a integração das correntes superfíciais sobre a superfície da magnetosfera, conforme indicado em tópicos anteriores.

O valor dos coeficientes é, pois obtido comparando-se à análise em harmônicas esféricas, com a solução obtida pelo método acima. Abaixo mostramos o resultado obtido por Mead (1964) na figura IV-17.

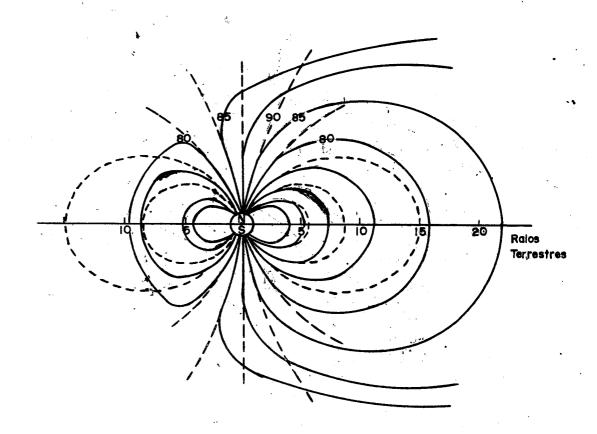


Fig. IV-17 - Configuração da linha magnética no plano meridiano (meio dia-meia noite)

Observa-se que as linhas de campo são comprimidas tanto no lado claro como no escuro da Terra. O comportamento das L.F. muda abruptamente ao se aproximar da latitude crítica (entre 80° e 85°), dependendo da intensidade do vento solar. Além destas latitudes, linhas que se originam no hemisfério diur no passam sobre o polo norte e cruzam o equador ao longo do meridiano ao meio-dia.

Experiências mais recentes Ness (1965), mostraram ser tal modêlo incapaz de descrever com precisão a topologia do campo na geocoma. Na região além de 10. raios terrestres, próximo ao meridiano da meia-noite, foi encontrada uma camada neutra, que separa campos na direção anti-solar no hemisfério sul de

campos na direção solar do hemisférico norte. A presença desta camada neutra impliga na existência de fortes correntes dentro da magnetosfera.

Uma vez que o problema Chapman-Ferraro supoe não existir plasma no interior da cavidade, o modêlo originalmente usado deve ser modificado a fim de incluir os efeitos que aparecem na camada magnetosférica.

Isto pode ser feito calculando-se o campo devido a uma camada de corrente na camada e adicionando-o vetorialmente ao obtido pelo problema Chapman-Ferraro. Isto foi feito por William and Mead (1967) dando o segundo modêlo mostrado na figura IV-18.

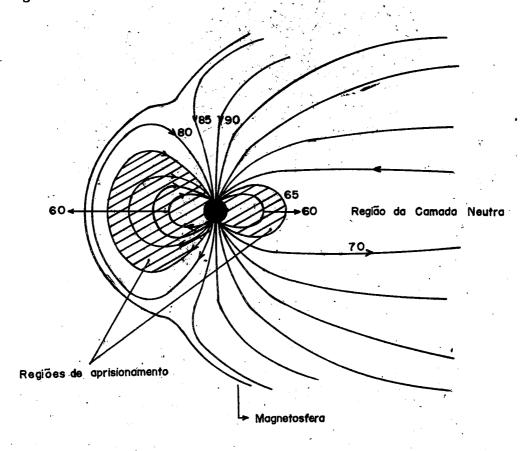


Fig. IV-18 - As linhas sólidas mostram as linhas de campo no plano meridiano obtido pelo acrescimo da corrente de blindagem na cauda

O efeito geral das correntes na camada é o de esticar as L.F. no lado escuro; como resultado, as L.F. das altas latitudes (> 65°) não mais serão fechadas, mas se esticam formando uma camada. Com a intensidade de campo (logo de correntes na cauda) usada nêste modêlo, todas as L.F. acima de cêrca de 67° na superfície da Terra são abertas no lado escuro, portanto não podem manter partículas estavelmente aprisionadas.

A latitude crítica de abertura das L.F. diminui com o aumento do campo. na camada. Tais aumentos foram observados por Ness (1965) durante períodos magneticamente pertubados. Portanto deve-se esperar que a linha limite de aprisionamento de partículas no lado escuro deve se mover para menores latitudes durante distúrbios magnéticos.

A expressão para o campo distorcido no plano equatorial é particularmente simples, se nos restringirmos aos dois primeiros têrmos na expressão das fontes externas, os quais são os mais importantes:

$$B = \frac{M}{r^{3}} + \frac{a_{1}}{r_{g}^{3}} + \frac{a_{2}}{r_{s}^{4}} r \cos \psi \qquad \text{onde}$$

M = 0.31 gauss = valor equatorial do campo dipolar da superfície Terra

r_g = distância à magnetopausa na direção do Sol

 ψ = angulo azimutal medido a partir do meridiano do meio dia.

 $a_1 e a_2 = coeficientes externos$

a = 0.816 M = 0.25 gaussSegundo Mead (1964), valem $a_2 = 0.675 M = 0.21 \text{ gauss}$

3.1 Propriedades Geomagnéticas de um Campo Dipolar Puro

Vamos analisar as propriedades geomagnéticas de um campo dipolar puro, que é a primeira aproximação do campo terrestre.

$$\vec{B}$$
 $(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{r^3}$ ($3(\vec{M} \cdot \vec{r})\hat{r} - \vec{M}$) com $\mu_0 M = 8.1 \times 10^9$ gauss x m³

usaremos \vec{M} como representando $\vec{\mu}$.

$$Br = \frac{2M}{r^3} \cos\theta$$

$$Bo = \frac{M}{r^3} sen\theta$$

$$B(r,\theta) = \frac{M}{r^3} (1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2}$$

ou
$$B(r,\lambda) = \frac{M}{r^3} (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}$$

A equação das L.F. é $r = r_0 sen^2 \theta$ daí termos

$$B(\theta) = \frac{M}{r_0^3} \frac{(1 + 3\cos^2\theta)}{\sin^6\theta}$$

$$\nabla B = -\frac{3M}{r^4} \qquad (1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2} \hat{r} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{(1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2}} \hat{\theta}$$

O raio de curvatura das linhas de força é dado por:

$$R_{c} = \frac{r_{o}}{3} \operatorname{sen}\theta \frac{(1 + 3 \cos^{2}\theta)}{1 + \cos^{2}\theta}$$

Notar que R_c no equador pode ser tomado como valor típico de R_c para uma L.F., que é dado por $R_c = r_{o/3}$

Pela primeira formula de Frenet:

$$-\frac{\hat{R}}{R} = \frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} (\frac{\vec{B}}{B}) \quad \text{mas: } \frac{\partial}{\partial s} = \hat{t}/\nabla \quad \text{logo: } -\frac{\hat{R}}{R} = (\hat{t}/\nabla)\hat{t} \text{ onde } \hat{t} = \frac{\vec{B}}{B}$$

ou
$$\hat{t} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{2 \cos \theta}{(1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2}} \hat{r} + \frac{\sin \theta}{(1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2}} \hat{\theta}$$

$$(\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{(1+3\cos^2\theta)^{1/2}} (2\cos\theta \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\sin^2\theta}{\mathbf{r}}) \left[\frac{1}{(1+3\cos^2\theta)^{1/2}} (2\cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin^2\theta}{\mathbf{r}}) \right]$$

Não esquecer que $\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \hat{\theta} e \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{r}}$, e daí facilmente da fórmula:

$$Rc = \frac{(r^2 + r^2)^{3/2}}{2r^2 - rr'' + r^2} com$$

$$r' = r_0 sen^2 \theta$$

$$r'' = 2r_0 sen \theta cos \theta$$

$$r'' = 2r_0 (1-2 sen^2 \theta)$$

4. Aprisionamento de Partículas num Campo Estacionário

4.1 a - Espelhamento e Deriva num Campo Dipolar Puro

Vamos estimar a energia crítica para o aprisionamento de partículas para que haja aprisionamento. Como existem invariantes adiabáticos, é preciso que:

 $|\nabla B|$.a << B. No equador temos que $\frac{B}{|\nabla B|} = \frac{r_0}{3}$ que é o mesmo valor de R_c, portanto o aprisionamento começa a falhar quando o raio de giro da partícula se torna da ordem do raio de curvatura da L.F.

A energia crítica é definida como aquela energia para a qual o raio de giro fica da ordem do raio de curvatura.

$$a = \frac{P \mid }{qB} \sim R_{c} \text{ e no equador}$$

$$B = \frac{M}{r_{o}^{3}} \Rightarrow p \mid = \frac{qM}{3} \frac{1}{r_{o}^{2}}$$

Como E =
$$\frac{P^2}{2m}$$
 e como M = (Bo)_{sup} $R_T^3 \propto R_T^3$ teremos: $E_{crit} \propto (\frac{R_T}{r_o})^4$

Portanto a energia crítica para o aprisionamento de partícula cai muito ràpidamente com a distância, no campo geomagnético. Esta é a razão pela qual podemos encontrar, por exemplo, protons de 100 MeV aprisionados no cinturão interno (a cêrca de $r_0 \sim 1.5~R_T$), ao passo que nunca poderão ser encontrados no cinturão externo (a cêrca de $r_0 \sim 3.5~R_T$), pois aí a energia crítica cai para um valor por volta de uns poucos MeV para protons.

b - (Ver Hamlin et al, 1961)

O angulo de elevação (ou de passo) em função da colatitude e do seu valor no equador é dado por:

$$\frac{\sin^2\alpha}{B} = \frac{\sin^2\alpha o}{B_o} \quad \text{portanto } \sin^2\alpha = B/B_o \quad \sin^2\alpha = \sin^2\alpha = \sin^2\alpha o \quad \frac{(1+3\cos^2\theta)^{1/2}}{\sin^6\theta}$$

Usando a notação $x = sen\alpha$ teremos:

 a - Os pontos de espelhamento podem ser dados em função de x, tendo em vista que neles

$$u_{ii} = 0 \log \alpha = \pi/2$$
 $x^2 = \frac{Bo}{Bm} \text{ portanto } \frac{\sin^6 \theta_m}{1 + 3\cos^2 \theta_m} = x^2, \text{ que}$

pode ser representada com boa aproximação por $x = sen^4 \theta_m$ (Ver grafico na publicação citada acima).

b. - O período de espelhamento é dado por:

$$T_m = 4 \int_{\theta_m}^{\pi/2} \frac{ds}{\mu''} = \frac{4ro}{\mu} T(x), \text{ pois } dt = \frac{ds}{\mu''}$$

 $T_{m} = \frac{4ro}{\mu} T(x)$. Usando o fato de que ds = r_{o} sen θ (1+3 $\cos^{2}\theta$) $\frac{1}{2}$ d θ teremos

$$T(x) \begin{cases} \pi/2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \theta_{m}(x) & \frac{1}{1 - \frac{x^{2} (1+3 \cos^{2}\theta)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}{\sec^{6}\theta} \end{cases}$$

que pode ser representado com boa aproximação por:

T(x) = 1.30 - 0.56x (Ver grafico na publicação citada acima)

" A frequência angular de espelhamento será pois

$$v_{\rm m} = \frac{1}{Tm}$$
 $v_{\rm m} = \frac{u}{4r_{\rm o}} \frac{1}{T(x)}$

 $v_{\rm m} = \frac{u}{4r_{\rm o}} \frac{1}{T(x)}$ frequência de espalhamento

c - A velocidade de deriva devido as não uniformidades do campo será:

$$\vec{\mu}_{D} = \frac{K(1 + \cos^{2}\alpha)}{qB^{3}} \vec{B} \times \nabla \vec{B}$$
 más

$$\vec{B} \times \vec{\nabla} \vec{B} = \frac{3M^2}{r^7} \quad \text{sen}\theta \quad (1 + 3\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}} \quad (1 - \frac{2\cos^2\theta}{1 + 3\cos^2\theta}) \quad \hat{\psi}$$

$$B = \frac{M}{r^3} (1 + 3 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$$

logo
$$\vec{\mu}_{D} = \frac{3K(1 + \cos^{2}\alpha)}{Mr_{o}q} \frac{1}{\text{sen}\theta(1+3\cos^{2}\theta)} (1 - \frac{2\cos^{2}\theta}{1+3\cos^{2}\theta}) \hat{\psi}$$

Partículas positivas desviam para $\underline{\underline{W}}$ e as negativas para $\underline{\underline{E}}$.

Uma expressão mais útil é a deriva média com que a partícula circula a terra. Para isto, teremos de fazer a média de μ_D sôbre tôdas as latitudes, obtendo

$$\mu_{D} = \frac{1}{2_{\lambda m}} \begin{bmatrix} \lambda m \\ -\lambda m \end{bmatrix} \mu_{D}(\lambda) d\lambda$$

Logo
$$\frac{-}{\mu_{\rm D}} = \frac{2k r_{\rm o}^2}{qM} (1.05 + 0.45 \text{ sen}\alpha_{\rm o})$$

Aproximação válida para $\alpha_0 > 40^\circ$. A aproximação é melhor quando α_0 , é próximo de 90° , pois aí os pontos de reflexão serão próximos ao equador.

- 1) A expressão para $\cos^2 \alpha$ pode ser tirada de (b) acima
- 2) Como $\frac{\nabla B}{B} = \frac{\hat{R}_c}{R_c}$, podemos escrever:

$$\vec{\mu}_{D} = \frac{k(1+\cos^{2}\alpha)}{qB^{2}} \quad \frac{\vec{B} \times \vec{R}_{C}}{R_{C}} \quad \log \mu_{D} = \frac{\frac{2}{\mu_{D}^{2} + \frac{1}{2}\mu_{D}^{2}}}{w_{C}R_{C}}$$

 d - A frequência média de deriva, avaliada sôbre um período de espelha mento é dada por

$$\Delta t = \frac{ds}{\mu^{11}} \quad \text{dando } v_D = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \emptyset}{Tm} \quad \text{onde} \quad \Delta \emptyset = L \int_{\theta m}^{\pi/2} \frac{ds}{d\theta} \frac{\mu_D}{\mu_H} \frac{d\theta}{r \text{ sen}}$$

que é o valor do deslocamento angular sofrido pela partícula durante um período de espelhamento.

$$v_{D} = \frac{3 m u^{2}}{e B_{0} ro^{2}} \frac{E(x)}{T(x)} \quad \text{onde}$$

$$E(x) = \int_{\theta_{m}}^{\pi} \frac{\sin^{3}\theta (1+\cos^{2}\theta) \left[1 - \frac{1}{2}x^{2} \frac{(1+3\cos^{2}\theta)^{\frac{1}{2}}}{\sin^{6}\theta}\right]}{(1+3)\cos^{2}\theta} \frac{3/2}{\left[1 - x^{2} \frac{(1+3\cos^{2}\theta)^{\frac{1}{2}}}{\sin^{6}\theta}\right]^{\frac{1}{2}}} dx$$

Ha uma expressão aproximada que da:

$$\frac{E(x)}{T(x)} \stackrel{\sim}{=} 0.35 + 0.15 x$$

4.2 - RELAÇÕES DE FLUXO PARA PARTÍCULAS APRISIONADAS

Consideremos agora com mais detalhes o movimento de partículas carregadas numa configuração de aprisionamento, a fim de obter várias expressões úteis para o estudo do caso particular dos cinturões de rediação na Terra.

Suporemos o campo com simetria azimutal com relação a um eixo z e simétrico em relação a um plano central (\downarrow a \hat{z}) entre os pontos de espelhamento. Injeta-se em seguida, e de forma isotrópica, um grupo de partículas no ponto $\underline{0}$ da linha central, por exemplo, com uma fonte radiativa (montagem experimental de labora tório).

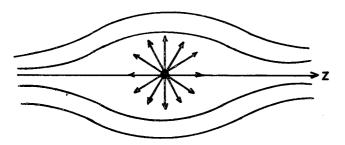


Fig. IV-19 - Injeção isotrópica de particulas

Após um certo tempo t, muito maior que o período de espelhamento, a dis tribuição terá atingido um estado es tacionário e procuraremos agora examinar a distribuição de intensidades das partículas ao longo das L.F. como mostra a Fig. IV-19.

Para cada valor inicial do ângulo de elevação, corresponderá um valor para Bm

$$(Bm = \frac{Bo}{sen^2 \alpha^o})$$

a) Definimos agora:

j (α) = <u>fluxo direcional</u> ou distribuição angular direcional (número de partícular que cruzam uma área unitária perpendicular à L.F., por unidade de tempo e de ângulo sólido, isto é com ângulos entre α e α + d α +"densidade direcional de corrente de partículas por unidade de ângulo sólido".

Considerando que a distribuição dos é isotrópica, a fração de partículas com ângulo de elevação entre $\underline{\alpha}$ e $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ será proporcional ao ângulo sólido contudo entre $\underline{\alpha}$ e $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ is $\underline{\alpha}$ = $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ = $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ = $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ = $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ = $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ = $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ = $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$ = $\underline{\alpha}$ + $\underline{\alpha}$

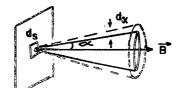


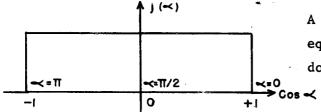
Fig. IV-20 - Distribuição isotrópica de partículas

$$dn = j (\alpha) \times d\Omega \ ds \ dt \qquad onde \ d\Omega = 2\pi \ sen\alpha \ d\alpha = -2\pi \ d \ (\cos\alpha)$$

$$\frac{\text{Nota: Se não houvesse isotropia, teria}}{\text{mos de usar } d\Omega = \text{sen}\alpha \ d\alpha \ d\phi}$$

$$\frac{dn}{2\pi d(-\cos\alpha) ds \ dt}$$

Pode-se ver que a variável independente que aparece no ângulo sólido não é <u>α</u>, mas sim seu <u>coseno</u>. É por esta razão que se procura representar distribuições angulares como função do cosseno do ângulo, e não como função do ângulo. Assim sendo, se representarmos uma distribuição diferencial isotrópica com função do <u>cosα</u> obteremos uma constante, porque será em iguais intervalos de <u>cosα</u> que teremos o mesmo número de partículas, como mostra a Fig. IV-21.



A intensidade unidirecional no plano equatorial: $j_0(\cos\alpha_0) = distribuição$ do ângulo de elevação.

Fig. IV-21 Intensidade unidirecional no plano equatorial

Consideremos agora o espelhamento. Como existe um valor máximo para o cam po, haverá um valor mínimo para o ângulo de elevação (α_m) medido num dado ponto, abaixo do qual não mais poderá haver aprisionamento. Isto significa que tôdas as partículas dentro de um cone com abertura α_m não encontrarão um campo com intensidade suficiente para obrigá-los a refletir. Ês se cone é chamado de cone de perdas.

0 ângulo do cone de perdas seria dado por:
$$sen^2 \alpha_{omin} = \frac{Bo}{B_{max}}$$
 em que B_o é o valor do campo onde α_o é medido.

Numa representação gráfica, teremos de acordo com a Fig. IV-22:

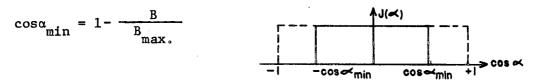


Fig. IV-22 - Cone de perdas

b) O chamado <u>fluxo omnidirecional</u> num certo ponto da L.F. é dado pelo número total de partículas, por unidade de area e por unidade de tempo, que cruzam <u>ds</u> quaisquer que sejam seus <u>ângulos</u> de elevação. Co<u>n</u> sequentemente:

$$J = \begin{cases} \frac{dn}{ds \ dt} & ... & J(B) = 2\pi \end{cases} \begin{cases} \cos \alpha_{\min} \\ j(\cos \alpha) \cdot d(\cos \alpha) \\ -\cos \alpha_{\min} \end{cases}$$

Este é justamente o fluxo medido por um detetor omnidirecional (como uma câmara de ions ou por um contador Geiger-Muller), mas não aquêle medido por um fino contador de cintilação.

c) Vamos agora procurar relacionar os fluxos direcionais em dois pontos diferentes de uma mesma linha.

Consideremos um grupo de partículas com ângulo de passo no equador entre α e α - $d\alpha$, e que se espelham entre λ e λ + $d\lambda$.

Desprezando a lenta deriva lateral, os centros de giro destas partículas movem-se num aglomerado de L.F. que constituem um tubo de fluxo entre - λ e λ + $d\lambda$

Em condições de equilibrio, o mesmo número de C.G. que cruza uma secção do tubo numa dada direção num intervalo dt é o mesmo que cruza qualquer outra secção do tubo em dt, nesta mesma direção.

Como estamos tomando ds 丄 a L.F., e considerando a direção acima como <u>a</u>

quela da L.F., deveremos ter: $dn_0 cos\alpha_0 = dn_0 cos\alpha$. Donde $2\pi j_0 (cos\alpha_0)$ $ds_0 d(cos\alpha_0) = 2\pi j_0 (cos\alpha_0) ds_0 ds_0$. Mas, da constância do primeiro invariante, temos:

$$\frac{-\sin^2 \alpha o}{Bo} = \frac{-\sin^2 \alpha}{B} \cdot \cdot \cdot \cos \alpha_o = \sqrt{1 - \frac{Bo}{B} (1 - \cos^2 \alpha)}$$

$$\frac{d (\cos \alpha_0)}{d (\cos \alpha)} = \frac{Bo}{B} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{Bo}{B}} (1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{Bo}{B} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0}$$

Substituindo na equação acima, teremos:

$$j_0$$
 Bo dso = j B ds

Como para o tubo de fluxo Bo dso = Bda

$$j_{\tilde{0}} (\cos \alpha_{0}) = j (\cos \alpha)$$

(Lembrar que α e α estão ligados pela relação de espelhamento)

Este resultado um pouco surpreendente de que o fluxo directonal para o mesmo grupo de partículas seja constante ao longo de uma L.F. pode ser tor nado mais claro tendorse em vista que, embora o ângulo de passo ou seja a direção com que a partícula cruza ds aumenta à proporção que caminhamos para regiões de campo mais intenso, êste aumento é exatamente balanceado pe la "compressão" das trajetórias dos C.G.

d) J (B)= 4
$$\int_{\alpha_{\min}}^{\pi/2} j(\cos\alpha) \operatorname{sen}\alpha \, d\alpha = 4\pi \int_{\alpha_{\min}}^{\pi/2} j_{\tilde{o}}(\cos\alpha_{\tilde{o}}) \operatorname{sen}\alpha \, d$$

$$= 2\pi B \begin{cases} B_{\text{max}} & J_{\theta} \text{ (Bm) d Bm} \\ B & Bm^{3/2} \text{ (Bm - B)}^{1/2} \end{cases}$$

Notar que partículas tendo espelhamento a Bm < B, isto é, aquelas nas altas latitudes não contribuem para J (B).

O fluxo omnidirecional J (B) ao longo de uma L.F. depende funcionalmente da distribuição angular j_o (cosα_o) no equador. Êste é um fato de grande importância experimental, uma vez que é bastante difícil medir diretamente a distribuição angular. O fluxo omnidirecional é uma grandeza mais acessível, especialmente no caso dos cinturões de radiação terrestres.

A distribuição j $_0$ (cos α_0) pode ser obtida através do fluxo omnidirecional, resolvendo a equação integral acima, o que pode ser feito de uma maneira bem simples (Farley and Garders), 1265; dando:

$$j_{o} (\cos \alpha_{o}) = -\left(\frac{Bm}{\pi}\right)^{3/2} \begin{bmatrix} B_{max} \\ \frac{d}{dB} \left(\frac{J}{2} \frac{B}{B}\right) \\ B_{m} \end{bmatrix} (B - Bm)^{1/2} dB$$

- e) Sumarizando, para radiação aprisionada em estado estacionário:
- 1 O fluxo direcional é constante ao longo de uma L.F., isto é,: j $(\cos\alpha)$ = j $(\cos\alpha)$, desde que α e α estejam ligados pela relação de espelhamento;
- 2 O fluxo direcional em qualquer ponto fixo de uma L.F. determina o fluxo omnidirecional em qualquer ponto que se deseja na L.F. correspondente.

Até aqui supuzemos não haver interação entre partículas. Num estudo mais detalhado teremos de levar em conta as colisões, as quais dão origem a dois efeitos de espelhamento:

- 1 Perda de partículas por espelhamento por dentro do cone de perdas
- 2 Transferência do C.G. de uma partícula de uma L.F. para outra.

5. COORDENADAS B - L

Consideráveis dificuldades foram encontradas em tentativas de catalogar as intensidades de partículas carregadas, medidas experimentalmente. As dificuldades eram principalmente devidas aos grandes gradientes de intensidade. Como a forma real do campo terrestre se desvia em mais de 3% de qualquer possível representação por dipolo, o uso dêste modêlo para um sistema de coordenadas não levaria resultados aceitáveis razão pela qual se procurou obter um sistema de coordenadas que não somente levasse em conta o carácter não dipolar do campo, mas também pudesse ser usado para organizar as medidas ao longo de L.F., conforme se torna necessário em estudos teóricos.

5.1 CONCHAS MAGNÉTICAS

No capítulo II verificamos que, supondo serem as variações no campo magnético lentas e com gradiente pequenos(em 1 raio de giro), o movimento de partículas carregadas aprisionadas em tal campo poderia ser caracterizada por 3 invariantes adiabáticas.

Momento dia magnético de partícula: $\mu = \frac{K1}{B}$

Invariante longitudinal:
$$J = \begin{cases} A^{9} & 1/2 \\ p \cdot ds = \begin{cases} A^{9} & 1/2 \\ P(1 - B/Bm) & ds(e I = J/p) \end{cases}$$

Invariante de fluxo:
$$\dot{\phi} = \int_{S} \vec{b} \cdot \vec{ds} = \int_{Y} \vec{A} \cdot \vec{dt}$$

Já vimos anteriormente que na ausência de campo elétrico os invariantes $\underline{\underline{u}}$ e $\underline{\underline{I}}$ são suficientes para especificar a superfície sôbre a qual se move a partícula, entre os pontos de espelhamento.

A constância de µ (e de K) permite determinar o valor do campo no espelhamento (Bm) em·função do ângulo de elevação (ou de passo) da partícula sôbre uma certa L.F. no equador.

Reunindo os pontos onde o campo geomagnético assume o mesmo valor Bm, teremos a superfície Bm = cte. Conhecido Bm a expressão de I permite determinar os pontos A e A^{\dagger} entre os quais I assume valores constantes. Reunindo estes pontos teremos as várias superfícies I = cte, como constantes. I da Fig. IV-23.

Os pontos do espaço com os mesmos valores de Bm e I estarão na interseção das duas superfícies, que serão anéis nos 2 hemisférios. Partículas carregadas que se espelham nêstes anéis permanecerão sôbre uma superfície invariante (ou "concha magnética") constituida pelos treches de 11 nhas de força que os conectam, como está na Fig. IV-24.

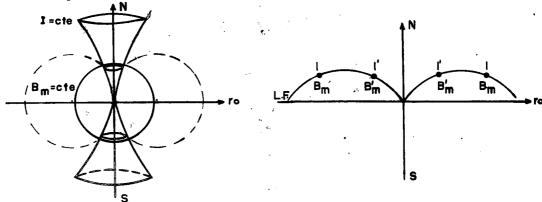


Fig. IV-23 - Superficies de I e Bm constante

Fig. IV-24 - Espelhamento de partículas

Em geral, duas partículas que inicialmente se espelham em diferentes va lores de Bm, logo têm diferentes ângulos de passo, ao longo de uma mesma L.F. não derivarão em longitude para as mesmas L.F. (isto so ocorre em campos axialmente simétricos, onde se 2 pares de superfícies (I,Bm) se interceptam na mesma L.F. em certa longitude, elas continuarão a se interceptar sobre esta mesma L.F., em tôdas as outras longitudes; consequentemente, as conchas nas quais as partículas se localizam não coincida dem. No campo terrestre, porém, tal efeito é relativamente pequeno.

Consideremos agora um fluxo de partículas aprisionadas numa dada concha magnética. Como o fluxo omnidirecional J é uma função somente de B, na ausência de processos de espalhamento o espectro de energias será o mes mo em todos os pontos do anel lugar geométrico dos pontos Bm = cte e I = cte, desde que as partículas estejam uniformemente distribuidas em longitude. Isto também se aplica ao fluxo direcional, de forma que o par (Bm, I) organiza perfeitamente as medidas de fluxos de partículas sob certas condições e em outros casos a organização ainda é melhor que a ob tida com outros parâmetros.

5.2 <u>DEFINIÇÃO DO PARÂMETRO DA CONCHA MAGNÉTICA (L)</u>

O fato de que todas as partículas que se acham sobre uma dada L.F. perma necem aproximadamente sobre a mesma concha, torna desejável se determinar um método de se caracterizar todos os pontos do espaço pertencentes a uma dada concha com um único número.

Infelizmente, a grandeza I não tem um significado ou um análogo físico simples. Dados plotados como função de <u>Bm</u> e <u>I</u> são difíceis de interpretar ou de mentalmente imaginar as suas dependências espaciais reais. É pois desejavel substituir I por alguma função de Bm e I tal que tenha um análogo físico simples, facilitando a interpretação dos dados e o entendimento da teoria.

Uma dada concha magnética é caracterizada por todos os pontos correspondentes a pares de valores (Bm, I), constituindo um anel em cada hemisfério. Consequentemente, qualquer parâmetro que seja uma função de Bm e I apresentará a correta variação em longitude que caracterize a concha. O problema de definir um parâmetro para a concha magnética reduz-se pois a achar uma função f (Bm,I) que seja constante ao longo das linhas de força.

Infelizmente, não há nenhuma função de Bm e I que seja constante ao longo de tôdas as L.F. do campo magnético terrestre. Entretanto existem fun ções que variam ligeiramente sobre elas.

No caso particular de um campo dipolar puro, existe uma classe de funções de Bm e I que é exatamente constante ao longo de tôdas as L.F., senão vejamos:

Para um campo dipolar puro teremos:

$$r \neq r_0 \cos^2 \lambda$$

$$B = \frac{M}{r_0^3 \cos^6 \lambda} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}$$

0 invariante I é dado por:
$$I = J/p = \int_{A}^{A^{\prime}} \sqrt{1 - B/Bm \ ds}$$

Fazendo-se Y = sen λ , o invariante integral num campo dipolar assume .a forma:

$$I = 2 r_0 \int_0^{Ym} \sqrt{1 - (\frac{1 + 3Y^2}{1 + 3Y^2})^2} \frac{\frac{1}{2}}{(1 - Y^2)^3} \sqrt{1 + 3Y^2} dy pois$$

$$ds = r_0 \sin \theta \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} d\theta$$

Consequentemente $I = r_0 f_1 (\lambda m)$

Da expressão do campo dipolar sái:
$$\lambda m = f_2$$
 $(\frac{r_o^3 Bm}{M})$

Logo I = r_0 f_3 ($\frac{r_0^3 \text{ Bm}}{M}$) ou, numa forma mais simétrica:

$$\frac{1^{3} \text{ Bm}}{M} = \frac{r_{o}^{3} \text{ Bm}}{M} \qquad \left[f_{s} \left(\frac{r_{o}^{3} \text{ Bm}}{M} \right) \right]^{3} \stackrel{?}{=} f_{n} \left(\frac{r_{o}^{3} \text{ Bm}}{M} \right)$$

Invertendo esta relação sái:

$$\frac{r_o^3 \quad Bm}{M} = F(\frac{1^3 \quad Bm}{M})$$

A relação funcional F está pois ligada à expressão dipolar do campo.

Definindo pois $L = r_0$ teremos L = f (Bm,I,M) . Portanto, para um dipolo estático existirá uma função de Bm e I que é precisamente constante ao longo de tôdas as L.F., uma vez que r_0 o é.

Em geral se prefere representar L por um número adimensional dando-o em têrmos de raios terrestres, isto é, $L = \frac{r_0}{R_m}$

No caso geral do campo geomagnético terrestre:

$$\stackrel{\rightarrow}{B}$$
 (r,λ,ψ) = Bd (r,λ) + Termos Multipolares (r,λ,ψ)

Em tal campo as linhas de força são somente aproximadamente da forma dipolar. O equador não mais é um plano, mas sim uma superfície distorcida
determinada pelo lugar geométrico de todos os pontos de intensidade de
campo mínimo em cada L.F.. Além disto, desaparece a simetria azimutal, fa
zendo com que passe a existir uma concha diferente para cada par (Bm,I).

Cada linha de força do campo terrestre tem de ser calculada numericamente, partindo-se da expansão do campo conforme indicada acima. Consequentemente, as superfícies Bm = cte e I = cte tem de ser também determinadas numericamente.

McIlwain (1961) verificou que se usasse valores reais para o campo e a partir dele obtivesse numericamente valores reais para I,Bm e para a con cha, os valores de um parâmetro L definido pela relação:

$$L^{3} = \frac{M}{Bm} \quad F \quad (\frac{I^{3} \quad Bm}{M})$$
 difeririam muito pouco (cêrca de 1%) quando calculadas sôbre uma

dada L.F., mesmo sendo a função F obtida a partir do campo dipolar puro, desde que se escolhesse para M um valor conveniente.

Assim sendo, embora não mais exista um parâmetro que seja uma função exatamente constante de Bm e I, existirá um que é aproximadamente (dentro de 1%). Assim sendo McIlwain definiu a "parâmetro da concha magnética" pela relação

$$L^3 = \frac{M}{Bm} \cdot F \left(\frac{I^3 Bm}{M} \right)$$

A unidade mais conveniente para expressar L \acute{e} em têrmos de raios terres tres, usando-se $R_{_{T\!P}}$ = 6371.2 km

- a) Bm e I seriam calculados usando-se a melhor representação disponível para o campo terrestre.
 - b) M é escolhido para minimizar a variação de L ao longo das L.F. reais. O valor M = 8.06×10^{25} gauss x cm³ = $0.311653 R_{\rm T}^3$, com $R_{\rm T}$ = 6.3712×10^8 cm, mostra-se satisfatório.
 - c) F é uma função calculada a partir do campo dipolar puro.

Definido desta forma, L é uma função do espaço. Os pontos L = cte sôbre uma superfície que difere cêrca de apenas 1% das conchas magnéticas reais, as quais em realidade se separam devido a diferentes ângulos de passo das partículas, como vemos na folha anterior.

Em geral retiramos o índice m de B. O par de parâmetros B-L é de grande utilidade porque:

- a) cada (B,L) caracteriza uma concha magnética onde o campo de espe lhamento tem valor Bm = B e na qual as L.F. são caracterizadas por um parâmetro aproximadamente constante L, (a constância só existe para partículas se espelhado exatamente no ponto Bm) o qual pode ser mentalmente encarado como sendo aproximadamente o raio e quatorial das L.F. constituintes da concha.
- b) Como os fluxos de partículas são constantes para um mesmo valor de B, desde que a distribuição de partículas seja homogênea em longitude, o sistema (B,L) permite organizar a contento as medidas experimentais.

5.3 CÁLCULO DE L E TRANSFORMAÇÃO PARA COORDENADAS POLARES INVARIANTES

Para calcular L a partir de valores dados por B e I, foram usados valores acurados da função F para gerar um conjunto de coeficientes a para a equação:

$$Y = \sum_{n=0}^{q} a_n X^n com$$

$$X = \lg \frac{L^3 B}{M} - 1$$

$$X = \lg \frac{L^3 B}{M}$$

Às vêzes se torna necessário obter I de B e L. Com êste propósito foram calculados os coeficientes b_n da relação inversa:

$$X = \sum_{n=0}^{q} b_n Y^n$$

O conjunto dos 48 coeficientes a_n e b_n acha \rightarrow se, apresentado nas pgs. 50 e 51 do livro McCormac B.M., 1966.

5.4 SISTEMAS DE COORDENADAS B - L

Nêste nôvo sistema de coordenadas, as 3 coordenadas geográficas (r,λ,ψ) são transformadas em 2 coordenadas B-L, onde:

- $B = valor escalar do campo em (r, \lambda, \psi)$
- L = parâmetro dado em unidades de R_T e que especifica a particular concha magnética que passa por (r,λ,ψ)

Num campo dipolar, L seria a distância geocêntrica à concha, medida no plano equatorial geomagnético.

Esta concha L será caracterizada num dipolo por um valor mínimo de L no equador geomagnético. Como para $B_m = B_o$ os 2 pontos de espelhamento coin cidem => I = 0, e como F(0) = 1 tiramos: $L_o^3 = \frac{M}{B_o}$. Num campo que somente

é dipolar aproximadamente, a mesma concha L tem o mesmo valor mínimo de B, mas o traço dêste mínimo na concha não é mais um círculo. O maior valor dêste sistema reside no fato de que o fluxo de partículas (na ausência de variações temporais e de distorções produzidas por causas internas) é o mesmo em todos os pontos com os mesmos valores B e L. Para um campo dipolar isto simplesmente equivaleria a dizer que o fluxo não depende da longitude magnética, mas sômente da latitude e distância. Esta propriedade do sistema de coordenadas torna possível a representação da intensidade de partículas em função de apenas duas coordenadas ao invês das três necessá rias para localizar um ponto no espaço.

A introdução do parâmetro L para cada ponto do campo geomagnético real nos permite executar uma transformação de coordenadas do sistema B-L para um sistema polar (R,Δ), no qual cada L.F. real é distorcida e transformada numa bela linha dipolar. Tal transformação nos fornece a possibilidade de uma vizualização geométrica simples dos contôrnos de intensidades de partículas nos cinturões de radiação em uma forma azimutalmente simétrica, o que é muito desejável para estudos qualitativos baseados na intuição.

Nêste novo sistema de coordenadas, naturalmente, a superfície da Terra e as coordenadas geográficas aparecerão totalmente irregulares. Portanto, de ve-se ter bastante cautela no uso das coordenadas (R, Δ) , porque embora as irregularidades do campo magnético tenham sido removidas, as coordenadas geográficas se transformarão de uma forma bem irregular em longitude.

A transformação (B,L) \rightarrow (R, Δ) é caracterizada pelas relações:

$$\begin{cases} R = L \cos^{2} \Delta \\ B = \frac{M}{R^{3}} (1 + 3 \sin^{2} \Delta) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} R = L \cos^{2} \Delta \\ B = \frac{M}{R^{3}} (4 - \frac{3R}{L}) \end{cases}$$

 (R, Δ) = Coordenadas Polares Invariantes

Um conjunto útil de tabelas relacionando R,A, B,L e outros parâmetros foi feito por Vette J. I. e Sylvia Porjes (1966).

6.0 CINTURÕES DE RADIAÇÃO DE VAN ALLEN

Embora a possibilidade de existência de radiação aprisionada no campo geo magnético fosse admitida há vários anos, sua presença real só foi estabelecida em 1958, quando Van Allen e seus colaboradores a detetaram com os instrumentos do Explorer I.

O têrmo "cinturões de radiação de Van Allen" tem sido usado para descrever somente aquelas partículas que possuem energia suficiente para serem detetadas individualmente pelos contadores adequados ao transporte em veículos espaciais. Este limiar um tanto arbitrário de energias é da ordem de 40 Kev para elétrons e 100 Kev para prótons. Assim sendo, as limitações inferiores de energia nos cinturões são artificiais, os espectros de energia de ambas as partículas se estendendo até as energias térmicas, nas quais uma densidade relativamente grande de protons, eletrons enche a exosfera. Vários ex-

perimentos iniciais indicaram a presença de dois cinturões naturais, ou seja de duas zonas principais de alta intensidade de partículas. Uma zo na interna, com máximo por volta de 1.5 $R_{\rm T}$ de distância geocêntrica e uma externa por volta dos 3.5 $R_{\rm T}$. Esta aparente estrutura era de natureza até certo ponto instrumental, e observações recentes mostram que esta di visão é menos nítida que se acreditava, mostrando que vários grupos de partículas apresentam dois picos cuja localização depende do grupo considerado , além de poder ser dependente com o tempo. (Assim, para protons com 40-110 Mev os máximos ocorrem em distâncias geocêntricas de 1.5 $R_{\rm T}$ e 2.2 $R_{\rm T}$).

A divisão em dois cinturões, com fronteira em L = 2, é mais aparente para eletrons de energia intermediária (> 100 kev), para os quais a divisão parece ser uma característica persistente dos cinturões.

A noção de zonas interna e externa retém, porém, muito de sua utilidade.

a) Zona Interna

1. A experiência indica que 99% do fluxo de partículas carregadas positivas, com altas energias, no cinturão interno se deve a protons com energias entre 1 e 700 Mev. Protons de menores energias estão mais afastados e o pico de intensidade dos protons de alta energia (> 40 Mev) ocorre entre L = 1.4 e L = 1.5 onde o fluxo omnidirecional dos protons no equador geomagnético é dado por:

N (> 40 Mev) =
$$2 \times 10^4$$
 protons/cm² x seg

Um fluxo de energia de 60 erg/cm² seg. esferoradiano devido a protons, ou ions, com igual rigidez magnética, com energias entre 0.5 e 1000 kev foi detetado pelo satélite polar Injun 1 a cêrca de 1000 km de altura no cinturão interno.

2. Eletrons naturais na zona interna foram mascarados por eletrons injetados artificialmente por detonações nucleares, antes que se pudesse

fazer medidas precisas de espectros de energia ou de intensidades. As medidas feitas indicam, entretanto, que eletrons com energia 2 Mev ou mais são relativamente menos abundantes que na zona externa e talvez até inexistentes.

3. Uma peculiaridade interessante do cinturão de protons interno é que êle varia muito como o tempo. Cuidadosas observações feitas recentemente mostram que ocorrem realmente mudanças, mas que estas não são tão grandes nem tão rápidas quanto as que ocorrem no cinturão externo.

b) Zona Externa

b.1) O espectro de energia dos protons "amolece" sistematicamente com a distancia radial no cinturão externo. Acredita-se que protons com dezenas ou centenas de Mev não podem ser aprisionados na zona externa pois êles violariam as condições de invariância adiabática, escapando rapidamen te do campo geomagnético. Protons de baixas energias (100 Kev a 4 Mev) foram encontrados com considerável abundância na zona externa pelos dectetores do Explorer X. O pico de intensidade destes protons na zona externa ocorre por volta de L = 3.5, onde a intensidade omnidirecional é:

j (100 Kev < E < 4.5 Mev) =
$$6 \times 10^7 \frac{\text{Protons}}{\text{cm}^2 \text{ seg esfe}}$$

O fluxo de ordem de 10⁸ protons/cm² seg constitue a maior densidade de par tículas energéticas já observada, constituindo cêrca de 10% da densidade de energia do campo magnético local.

b.2) A intensidade omnidirecional de eletrons nas proximidades do equador geomagnético, com energias 40 Kev é aproximadamente constante para L entre 2 e 10, com:

J (> 40 Kev)
$$\sim 10^7 \frac{\text{eletron}}{\text{cm}^2 \text{seg}}$$

Eletrons com energias de 1 a 5 Mev apresentam um pico de intensidade prosimo a L = 4, e o espectro de energia dos eletrons também "amolece" progressivamente para maiores distâncias radiais.

b.3) O cinturão externo apresenta uma variabilidade muito maior que o interno. Durante tempestades geomagnéticas a intensidade das partículas varia em ordens de magnitude* (que atinge a casa de 1000 nos eletrons de alta energia e de 10 naquelas acima de 40 Kev), e parece que o fluxo dos eletrons de baixa energia é aumentada durante a tempestade, enquanto que os de maior energia são perdidos. Mais tarde, conforme a tempestade amainece os eletrons de alta-energia reaparecem e os de menos energia retornam gradualmente ao nível inicial.

c) Fontes de Particulas

Sôbre as possíveis fontes de partículas consulte a parte de penetração de partículas carregadas, assunto já abordado no item 1 dêste capítulo.

d) Sumidouros de Partículas

A intensidade de protons e eletrons num dado instante e numa ce \underline{r} ta posição representa um balanceamento entre os mecanismos de fornecime \underline{n} to e de perda de partículas carregadas.

Embora a perda repentina para o espaço interplanetário de partícu las aprisionadas, durante grandes distorsões temporárias do campo geomagnético não possam ser-regradas, é mais provável que a maioria das partícu las carregadas sejam perdidas quando seus pontos de espelhamento são abaixados até o tôpo da atmosfera.

Alguns outros mecanismos são:

1) <u>Colisões com eletrons e ions</u> (espalhamento colombiano): atua com mais eficiência sobre eletrons (menores massas). As partículas espe

lhadas podem ter pontos de espelhamento mais baixo e se perdem na atmosfera.

2) Colisões com átomos neutros

- a) Perdas por energia de ionização: mais importante para espelha mento para protons, e menos importante para eletrons.
- b) Trocar de cargas: Protons tira eletrons de átomo neutro e se torna um rápido átomo neutro. É importante só para protons com E<200 Kev.
- 3) <u>Colisões Nucleares</u>: para protons com energias ~80 Mev êste <u>e</u> feito é mais importante que as perdas por ionização, porque estas dimin<u>u</u> em com o aumento de energia dos protons.
- 4) Espalhamento por Ondas HM: Ondas HM propagando-se na magnetopausa para dentro espalham protons de alta energia e estabelecem um valor máximo para a energia dos protons que podem ser aprisionados a um dado L (a existência dêste efeito ainda não foi verificada).
- 5) <u>Espalhamento por Radiação E.M. em VLF</u> (whistlers): espalha <u>e</u> letrons presos na L.F. em que se propagam, e podem mesmo acelerá-los se houver sincronismo entre a girofrequência e a frequência desviada-Doppler.
- 6) Aceleração por Campos Elétricos: Podem servir como fonte, sumi douro ou ambos. Êstes campos resultariam de separação de cargas ou instabilidades no plasma na exosfera, em fenômenos locais ou de larga escala. Devido aos baixos campos possíveis, o mecanismo só é importante para partículas de baixas energias.
- 7) <u>Perda por Radiação Syncroton:</u> A energia máxima de um eletron aprisionado é limitada pela emissão de radiação syncroton, sendo êste li-inguinte de ordem de dezenas de Mev nos cinturões de radiação.
- 8) <u>Violação das Invariantes Adiabáticos</u>: Difusão das partículas para conchas adjacentes, causará a perda de partículas no tôpo da atmosfera e no espaço interplanetário.

7. TEORIA DÍNAMO

7.1 Introdução

Conforme veremos adiante com mais detalhes, o campo magnético terrestre apresenta pequenas variações cíclicas, associadas às horas solar e lunar; além de outras de natureza um tanto irregular.

B. Stewart (1882) foi quem primeiro sugeriu a possibilidade de tais variações atribuidas a um sistema de correntes elétricas induzidas na ionosfera, que segundo sua sugestão resultariam do movimento de massas de ar, resultantes de aquecimento e atração gravitacional do Sol e da Lua, contendo par tículas ionizadas, através das L.F. do campo magnético terrestre. Esta hipótese recebeu o nome de "Teoria Dínamo" e foi desenvolvida quantitativamen te por Schuster (1908).

Quando a teoria Dinamo foi formulado matematicamente pela primeira vêz, pouco se sabia sobre a condutividade ou sobre os movimentos da alta atmosfera.
Conforme um maior número de dados sobre densidades eletrônicas foi sendo
colhido através de ionosondas, a teoria foi sendo revisada e atualmente se
crê que a ação dinamo principal se de na região E da ionosfera.

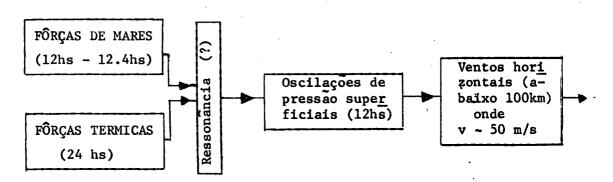
As etapas básicas de análise a serem consideradas serão:

- 1. O sol e a lua exercem forças gravitacionais sobre a atmosfera, cujos periodos são de metade do dia solar (24hs) e do dia lunar (24.8hs). Adicionalmente, teremos a presença de força de natureza solar, resultantes do fornecimento periódico de energia térmica (periodo fundamental de 24 hs).
- 2. Estas forças dão origem a ondas estacionárias na atmosfera abaixo de 100 km (mesopausa), as quais resultam em movimentos de massas de ar.

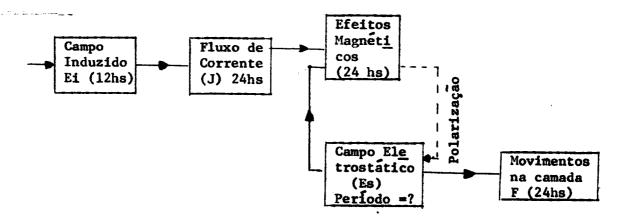
- 3. Poderá haver uma ressonância natural da atmosfera, com cêrca de 12 h de período, a qual amplia seletivamente a componente semidiurna solar.
- 4. O movimento do ar ionizado através do campo geomagnético induz forças eletromagnéticas, as quais originam correntes em níveis onde a condutividade elétrica é apreciável, principalmente na região E, as quais produzem as variações magnéticas $S_{\rm q}$ e L.
- 5. Em vista das variações <u>vertical</u> e <u>horizontal</u> de condutividade, não pode haver fluxo livre de correntes em todas as direções, haverá então o aparecimento de cargas de polarização, as quais modificarão o fluir de correntes, tornando-o praticamente horizontal.
- 6. Os campos eletrostáticos associados a estas cargas são transmitidos à região F, via Linha de Fôrça do campo geomagnético (altamente condutoras), onde dão origem a desvios eletromagnéticos "Traveling Ionosphere Disturbances".
 - (1), (2) e (3) são os estágios mecânicos da Teoria Dinamo
 - (4), (5) e (6) são os estágios <u>eletrodinâmicos</u> da Teoria Dínamo

Abaixo damos um diagrama de blocos da <u>teoria dinamo</u>, mostrando seus dois estágios, mecânico e eletrodinâmico, nos quais estão indicados entre parêntesis os períodos predominantes:

ESTÁGIO MECÂNICO



estágio eletrodinamico



Somente uma pequena fração de corrente total J é necessária para estabele cer e manter o campo eletrostático Es.

Nos itens seguintes faremos um estudo qualitativo dos estágios mecânico e eletrodinâmico.

7.2 Oscilações Atmosféricas

A energia gravitacional (Sol e Lunar) e térmica (Sol) são introduzidas primariamente ná baixa atmosfera, onde é maior a densidade desta.

Como esta energia apresenta uma variação periódica, observa-se uma oscilação de pressão ao nível do solo, num período de cêrca de <u>12 hs</u> e amplitude de 1 mb (baixa latitude) 10³ dinas/cm², sendo visível nos barômetros e barogra mas ordinarios. Nas latitudes médias ela é escondida por variações meteorológicas irregulares. Abaixo apresentamos amplitudes típicas de oscilações de pressão para regiões tropicais e latitudes médias.

TIPO DE OSCILAÇÃO

AMPLITUDE EM (MB)

	TROPICOS	LAT. MEDIAS	···-
Solar Diurna	0.8	0.3	
Solar semidiurna	1.3	0.4	
Lunar semidiurna	0.08	0.03	

As oscilações de pressão propagam-se para cima, aumentando em amplitude devido à diminuição de densidade, pois a densidade de energia se mantém constante, se não há dissipação. A propagação para cima desta "onda de maré" é interrompida por reflexão parcial nas alturas em que há inversão no gradien te de temperatura (gradiente-negativo). É de se esperar que esta reflexão seja tão pronunciada na mesosfera a cêrca de 60 a 80 km, pois surge um sistema de ondas estacionárias e a maior parte da energia de oscilação é aprisionada abaixo da mesopausa, embora haja um pequeno "vazamento".

Êste aprisionamento de energia abaixo da mesopausa dá origem à possibilidade de oscilações de ressonância. Os períodos de ressonância são muito sensíveis ao perfil de temperaturas e portanto devem variar com aposição e com
o tempo. Adicionalmente, a reflexão de energia é afetado por ventos na <u>estratosfera</u> e <u>mesosfera</u>; dêste modo, o cálculo dos períodos de ressonância
são bastante incertos.

60 a 90 km D:

90 a 120 km E:

140 a 250 km

250 a 600 km

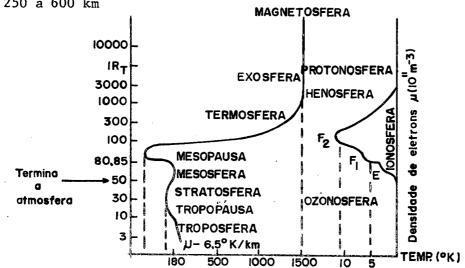


Fig. IV-25 - Distribuição da temperatura e densidade eletronica com a altura

Experimentalmente é observado um período de cêrca de 12 hs. Da mesma forma que nas mares oceanicas, a velocidade das mares de atmosfera são principalmente horizontais. Ao nivel do solo, a velocidade das mares da atmosfera sao principalmente horizontais; a velocidade dos ventos de mares são somente de cerca de 0.05 m/s e, portanto, muito dificeis de detetar frente aos ventos meteorologicos. Entretanto, a 100 km estas velocidades são da ordem de 50m/s, conforme medidas a partir das derivas das trilhas de meteoros, observadas pe lo radar entre 85 e 105 km. Surge a seguinte pergunta relativamente a dominância do período de 10 hs: se a fonte é gravitacional, porque a de mare da lua, que e a mais forte, não da origem a um periodo de 12.4 hs;se a fonte e termica, porque a componente dominante do fluxo de calor não da origem a um periodo solar de 24 hs?"

Kelvin aventou a hipótese de que a atmosfera podería ter um período natural de oscilação per volta das 12hs, podendo-se assim esperar uma resposta resso nante na presença de um mecanismo demi-diurno de excitação, a qual ampliaria anormalmente a oscilação resultante. A analise matematica desta sugestão ja for bastante estudada mais ainda esta incompleta. Na melhor das hipoteses, po de-se dizer que existe a possibilidade de uma ressonancia, suficiente para ampliar a oscilação de 12 horas tornando-a maior que a de 24 hs, mesmo quando as fontes termicas forem dominantes; entretanto, a preponderancia da componen te de 12 hs induzida por efeito solar sobre a de 12.4hs de efeito lunar, que ressonancia muito seletiva, parece bastante improvavel. exigiria

Em vista de evidência adicional de preponderância da oscilação solar <u>semidiurna</u>, obtida através da fase desta oscilação, e do fato de que ela não pode ser explicada em têrmos de uma excitação gravitacional pre ponderante, parece seguro se supôr que as fontes térmicas sejam de maior importância.

7.3 Condutividades

Antes de passarmos ao estudo do fluxo de correntes resultante da ação dinamo, devemos tecer algumas considerações sobre a condutividade elétrica da ionosfera, a qual é anisotrópica devido à presença do campo geomagnético.

Do estudo da MHD que fizemos no Cap. II, obtivemos uma equação do movimento válida para cada espécie de partículas

$${}^{N_{k}m_{k}}\frac{d\overrightarrow{u_{k}}}{dt} = N_{k}q_{k} (\overrightarrow{E} + \overrightarrow{u_{k}} \times \overrightarrow{B}) - N_{k}m_{k} \nabla \Phi - \nabla p_{k} + \overrightarrow{P_{k}}$$
 (1)

Antes de continuarmos, teçamos algumas considerações a respeito desta equação:

- a) Consideraremos o gás como formado de apenas 3 constituintes: eletrons, ions positivos e partículas neutras. Os ions negativos são ignorados, pois êles provavelmente não desempenham um papel importante na quelas alturas em que a condutividade é grande.
- b) Suporemos colisões apenas com as partículas neutras, desprezando as colisões eletrons-ions, isto é,

$$\vec{P}_k = \iiint_k \vec{v}_k (\frac{\partial f_k}{\partial t}) \cot^3 v = N_k m_k V_k (\vec{u}_n - \vec{u}_k)$$

Esta suposição é certamente permissível num gas fracamente ionizado, onde as colisões com as partículas neutras predominam sobre aquelas entre as partículas carregadas. Abaixo de cêrca de 150 km a ionosfera obedece êste critério; outros argumentos mostram que, para os fins dêste capítulo, desprezar as colisões eletron —ion permanece uma boa aproximação mesmo a alturas maiores.

c) No estudo que estamos fazendo, a equação (1) acima se aplica aqueles movimentos, em larga escala, da ionosfera terrestre, nos quais
as variações ocorrem muito lentamente. Nesta situação "quasi-estáti
ca", podemos desprezar as variações de uk ao longo do movimento, pois
estas se fazem muito lentamente.

Já vimos também que: $\vec{u}_k = \vec{u} + \langle \delta v_k^* \rangle$. Chamemos: $\vec{w}_k = \langle \delta v_k^* \rangle = \text{velocida-de média das partículas relativamente à velocidade do gás neutro <math>(\vec{u})$.

A equação (1) assumirá então a forma abaixo:

$$q_{k} (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} + \vec{w}_{k} \times \vec{B}) - m_{k} v_{k} \vec{w}_{k} - m_{k} \nabla \Phi - \frac{1}{N_{k}} \nabla p_{k} = 0$$
 (2)

a qual pode ser ainda escrita na forma:

$$\mathbf{m}_{k} \mathbf{v}_{k} \overset{\overrightarrow{\mathbf{w}}}{\mathbf{k}} - \mathbf{q}_{k} \overset{\overrightarrow{\mathbf{w}}}{\mathbf{w}}_{k} \times \overset{\overrightarrow{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}} = \overset{\overrightarrow{\mathbf{F}}}{\mathbf{k}} \tag{3}$$

onde
$$\vec{F}_k = q_k (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - m_k \nabla \Phi - \frac{1}{N_k} \nabla p_k$$
 (4)

a qual tem dimensão de força e é constituida por:

1) q_k $(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$: força exercida sobre um eletron por um campo elétrico

 $\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}$, que seria visto por um observador movendo-se com o gás neutro. A parcela $\vec{u} \times \vec{B}$ é chamada de <u>campo dínamo</u>, uma vez que ela corresponde ao campo elétrico que seria visto pela armadura de um dínamo movendo-se numa velocidade \vec{u} num campo \vec{B} .

- 2) $m_{k} \nabla \Phi = m_{k} \vec{g}$: força gravitacional atuante sobre a partícula
- 3) $-\frac{1}{N_k}$ ∇p_k : representa o efeito da pressão parcial e é importante no estudo da difusão ambipolar.

Se a fôrça \mathbf{F}_k é conhecida, a velocidade média de deriva das partículas da espécie \mathbf{k} pode ser obtida a partir de (3). Com efeito, tomando um referêncial onde $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ perpendicular a $\hat{\mathbf{f}}_k$, isto é $\hat{\mathbf{f}}_k$ no plano XZ, podemos escrever

$$\begin{cases} m_{k} v_{k} w_{k} - q_{k} B w_{ky} = F_{kx} \\ m_{k} v_{k} w_{ky} + q_{k} B w_{kx} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m_{k} v_{k} w_{kx} + \frac{q_{k}^{2} B^{2}}{m_{k} v_{k}} = F_{kx} \\ -\frac{m_{k}^{2} v_{k}^{2}}{q_{k}^{B}} w_{ky} - q_{k} B w_{ky} = F_{kx} \\ m_{k} v_{k} w_{kz} = F_{kz} \end{cases}$$

Donde:
$$\begin{cases} w_{kx} = \frac{F_{kx}}{m_k} & \frac{v_k}{v_k^2 + w_k^2} \\ w_{ky} = \frac{-F_{kx}}{m_k} & \frac{w_k}{v_k^2 + w_k^2} \\ w_{kz} = \frac{F_{kz}}{m_k v_k} \end{cases}$$
 (5) onde $w_k = \frac{q_k}{m_k} B$

A girofrequência para eletrons é:
$$|w_e| = 1.76 \times 10^7 \text{ B} \begin{cases} [B] = \Gamma \\ [w_e] = \text{seg}^{-1} \end{cases}$$
, logo nas

alturas ionosféricas B ~ 0.4 => $(w_e) = 7.10^6 \text{ seg}^{-1}$, logo $|w_e| \sim v_e$ a cêrca de 70 km.

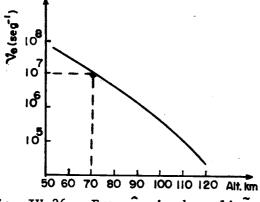


Fig. IV-26 - Frequência de colisão entre eletrons e particulas neutras

A figura ao lado respresenta a frequência de colisões entre eletrons e partículas neutras. Curva experimental média.

a) Para altura <70km temos $v_e >> v_e^3$, e as equações (5) podem ser escritos:

$$w_{kx} = \frac{F_{kx}}{m_k v_k}$$
; $w_{ky} = 0$; $w_{kz} = \frac{F_{kz}}{m_k v_k}$

Portanto, os eletrons derivão na direção da fôrça \vec{F}_e com uma velocidade inversamente proporcional a frequência de colisão. Para F_e constante, esta velocidade aumentará com a altura, pois ν_e diminui.

b) Para alturas < 70 km temos $v_e << |w_e|$ e as equações (5) ficarão

$$w_{ex} = 0$$
; $w_{ey} = -\frac{F_{ex}}{m_e w_e}$; $w_{ez} = \frac{F_{ez}}{m_e v_e}$

Portanto, os eletrons derivarão na direção da força F_e, ou melhor teremos um caso geral que:

$$h < h_k: \overrightarrow{w}_k = \frac{1}{m_k v_k} \overrightarrow{F}_k$$

$$\overrightarrow{F}_k = \frac{\overrightarrow{F}_k \times \overrightarrow{B}}{q_k B^2}$$

$$h > h_k$$
: $\overset{\rightarrow}{w_k} = \overset{\rightarrow}{w_{kd}} + \overset{\rightarrow}{w_{kz}}$ $\overset{\rightarrow}{w_{kz}} = \frac{1}{m_k v_k} \vec{F}_{kz}$

Portanto, w_{ez} continua a aumentar com a altura de 70 km. A componente transversal de \vec{F}_e , porém, dá origem a uma deriva que é perpendicular tanto a \vec{F}_e quanto a \vec{B} e que pouco varia com a altura (só através de \vec{F}_2).

c) O contínuo crescimento de w_{ez}/F_{ez} com a altura levará finalmente a uma condutividade elétrica infinitamente alta ao longo das L.F., confo<u>r</u> me veremos adiante. Na prática, entretanto as colisões entre partículas carregadas, que foram previamente desprezadas, limitarão esta condutividade em alturas acima de cêrca de 200 km. Apesar disto, mesmo con siderando as colisões <u>ion-eletrons</u>, a condutividade paralela ao campo permanece muitas ordens de grandeza maior que a perpendicular e, para os propositos de nosso estudo, a suposição de uma condutividade infinitamente alta ao longo da Linha de Força continua uma boa aproximação.

7.3.1 Obtenção das Condutividades

Através das equações (5) podemos calcular a condutividade da ionosfera em condições estacionárias:

Segundo a equação (4):

$$\vec{F}_k = q_k(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) - m_k \nabla \Phi - \frac{1}{N_k} \nabla p_k$$

Os dois últimos termos são desprezados, em vista de serem êles muito menores que o primeiro. Usaremos ainda a notação: $\vec{E}_t = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}$ onde \vec{E}_t é o "campo elétrico total" visto por um observador se deslocando com o gás neutro e re sultante da soma de duas parcelas:

 \vec{E} = campo eletrostático, devido as cargas de polarização \vec{u} x \vec{B} = campo dínamo

Neste caso as equações (5) assumem a forma:

$$w_{kx} = \frac{E_{tx}}{B} \frac{w_k v_k}{v_k^2 + w_k^2}$$

$$w_{ky} = -\frac{E_{ty}}{B} \frac{w_k^2}{v_k^2 + w_k^2}$$
 (6) onde
$$\begin{cases} \hat{z} = \hat{B} \\ e \hat{E}_t \text{ no plano } xz \end{cases}$$

$$w_{kz} = \frac{E_{tz}}{B} \frac{w_k}{v_k}$$

As alturas críticas h_e e h_i são aquelas para quais: v_e = w_e e v_i = w_i , no modêlo usado, representam transições nos movimentos das partículas.

a) abaixo da altura crítica h os ions se movem com relação ao gás neu tro com velocidade dada por:

$$\vec{\mathbf{w}}_{\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{q}_{\mathbf{i}}}{\mathbf{m}_{\mathbf{i}} \mathbf{v}_{\mathbf{i}}} \vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{t}}$$

enquanto que os eletrons se movem a velocidades muito maiores e na direção oposta, isto é:

$$\mathbf{w}_{\mathbf{e}}^{+} = -\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}_{\mathbf{e}}\mathbf{v}_{\mathbf{e}}} \stackrel{\neq}{\mathbf{E}}_{\mathbf{t}}$$

b) acima da altura crítica h, as partículas de ambos os sinais se movem com uma velocidade de deriva lateral comum dada por:

$$\vec{w}_e = \frac{\vec{E}_t \times \vec{B}}{B^2},$$

isto
$$\acute{e}$$
, $w_e = -\frac{E_{tx}}{B}$

numa direção perpendicular tanto a \vec{E}_t quanto a \vec{B} , além do movimento paralelo ao campo magnético, com velocidades opostas e que independem do mesmo (a menos de sua influência em \vec{E}_t), dado por:

$$\vec{\mathbf{w}}_{\mathbf{k}//} = \frac{\mathbf{q}_{\mathbf{k}}}{\mathbf{m}_{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{\mathbf{k}}} \quad \vec{\mathbf{E}}_{\mathbf{t}//}$$

c) na região intermediaria entre h_e e h_i , os eletrons se movem como em (b), ao passo que os ions o fazem de acordo com o exposto em (a).Co mo estamos assumindo neutralidade elétrica, $(N_e = ZN_i = N)$ a corrente de convecção é nula somente existindo a de condução, isto é:

$$\vec{J} = J_{CO} = N (F_{e} \vec{w}_{e} + q_{i} \vec{w}_{i})$$
 (7)

Denominamos:

Corrente longitudinal ou direta (J_L) a parcela da corrente ao longo das L.F.

Corrente transversal ou de Pedersen (J_p) a parcela de corrente ao longo da componente de \overrightarrow{E}_t perpendicular a \overrightarrow{B} .

Corrente de Hall (J_H) a parcela de corrente que flui perpendicularmente a \vec{B} , e a componente \vec{E}_{t} .

Portanto, introduzindo (6) em (7), vem:

$$J_{x} = E_{tx} \frac{Ne}{B} \frac{\frac{w_{i} v_{i}}{2 + v_{i}^{2}} - \frac{w_{e} v_{e}}{w_{e}^{2} + v_{e}^{2}} = \sigma_{1} E_{tx}$$

$$J_{y} = E_{tx} \frac{Ne}{B} \frac{\frac{w_{e}^{2}}{2 + v_{e}^{2}} - \frac{w_{i}^{2}}{w_{i}^{2} + v_{i}^{2}} = \sigma_{2} E_{tx}$$

$$J_{z} = E_{tz} \frac{Ne}{B} \frac{w_{i}}{v_{i}} - \frac{w_{e}}{v_{e}} = \sigma_{0} E_{tz}$$
(8)

Mantendo-se $\hat{z} = \hat{B}$, mas permitindo uma posição qualquer para E_t , isto \hat{e} , generalizando a posição de referencial, teremos:

$$\vec{J} = \tilde{\sigma} \cdot \vec{E}_t$$

onde
$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_p + \vec{J}_H$$

$$\vec{J}_L = \sigma_0 E_{tz} \hat{z}$$

$$\vec{J}_p = \sigma_1 (E_{tx} \hat{x} + E_{ty} \hat{y})$$

$$\vec{J}_H = \sigma_2 (-E_{ty} \hat{x} + E_{tx} \hat{y})$$

Logo

Designa-se então:

 σ_{o} = condutividade longitudinal

 σ_1 = condutividade Pedersen

 σ_2^- = conduticidade Hall

A figura abaixo mostra a variação das condutividades σ_0 , σ_1 e σ_2 com a altura.

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1}$$
 \(\text{\tilde{e}}\) a condutividade de Cowling.

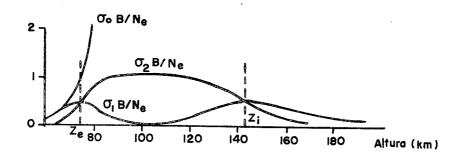


Fig. IV-27 - Dados de
$$\frac{\tau_{oB}}{N_e}$$
, $\frac{\tau_{1B}}{N_e}$ e $\frac{\tau_{2B}}{N_e}$ como funções da altura

Na região F e acima, σ_0 é extremamente grande, ao passo que σ_1 e σ_2 se tornam desprezivelmente nulos. Consequentemente, nestas regiões, E_t não pode ser mantido com nenhuma componente com valor substancial ao longo das L.F., as quais serão pois <u>linhas equipotenciais</u>. Portanto a camada F, reproduzindose com boa precisão em escalas de até pouco kilometros. Assim, as camadas E e F estão eletricamente acoplados.

7.3.2 Camada dinamo

Na região F e acima, qualquer corrente será carregada ao longo de tubos de fluxo, uma vez que há uma forte inibição para a corrente fluir curzando as L.F. e para fora do tubo (condutividade de Hall e Pedersen são muito baixas). Se se supuzer simetria em relação ao equador geomagnético, tanto aos sistemas de ventos quanto de condutividade, então, nenhuma corrente fluirá pelos tubos de fluxo na região F e acima; o sistema de correntes será pois obrigado a se restingir à fina camada esférica fornecida pelas regiões D e E esta principalmente, devido à maior condutividade.

Consideramos que por ação dinamo, seja induzido um campo elétrico $\vec{E}_i = \vec{u} \times \vec{B}$ na ionosfera. Como resultado, a corrente $\vec{J} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$; poderá conter uma componente vertical. Quando isto ocorre, haverá acúmulo de cargas nas fronteiras

da camada condutora, uma vez que a corrente não pode fluir em regiões de muito baixa condutividade ou perpendicularmente às L.F. nas maiores alturas. Es tas "cargas de polarização" irão modificar o campo E incluindo uma componente E (eletrostática), até que as correntes passem a fluir somente ha horizontal.

Portanto: "Camada ou Região Dínamo é uma fina camada esférica da ionosfera, constituida principalmente pela região E, na qual as correntes fluem horizon talmente".

Com a imposição de corrente vertical nula, podemos eleminar J_z e substituir o tensor 3 x 3 por um 2 x 2. A fim de fazer isto, façamos inicialmente a passagem para um sistema de coordenadas mais conveniente, no qual temos:

 \hat{x} - apontando para o Sol

ŷ - apontando para o Este

2 - apontando para o zenith

Considerando que I é o ângulo de inclinação magnética tomado positivo no he misfério norte, o tensor condutividade será escrito, no novo sistema, na forma:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \sin^2 I + \sigma_o \cos^2 I & \sigma_2 \sin I & (\sigma_o - \sigma_1) \sin I \cdot \cos I \\ -\sigma_2 \sin I & \sigma_1 & \sigma_2 \cos I \\ (\sigma_o - \sigma_1) \sin I \cos I & -\sigma_2 \cos I & \sigma_1 \cos^2 I + \sigma_o \sin^2 I \end{pmatrix}$$

Impondo $J_z = 0$ pode-se tirar o valor de E_{tz} da equação segundo \hat{z} obitda de: $\hat{J} = \hat{\sigma}.\hat{E}_t$

Substituindo este valor nas equações segundo \hat{x} e \hat{y} , obtemos uma relação bidimensional para as correntes horizontais, sendo:

$$\tilde{\sigma}_{h} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$$

onde

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_1 \sigma_0}{K}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma_2 \sigma_0 \text{ sen I}}{K}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_1 \sigma_0 \sin^2 I + \sigma_1 \sigma_3 \cos^2 I}{K}$$

$$K = \sigma_1 \cos^2 I + \sigma_0 \sin^2 I$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1}$$

e agora teremos:

$$\vec{J}_h = \sigma_h \cdot \vec{E}_{th}$$

a) No equdor magnético (I = 0) então
$$\Rightarrow \sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}$$

b) For ado equador, considerando que em geral $\sigma_0 >> (\sigma_1, \sigma_2)$ podemos escrever:

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_1}{\sin^2 x}$$
, $\sigma_{xy} = \frac{\sigma_2}{\sin x}$ e $\sigma_{yy} = \sigma_1$

Duas consequências resultam das expressões da condutividade no equador magnético:

- 1) A alta condutividade $\sigma_{xx} = \sigma_{0}$ ao longo das linhas de fôrça (I = 0) garante serem elas equipotenciais elétricas.
- 2) A condutividade W-E no equador é igual a condutividade de Cowling, a qual é bastante, alta sendo comparável a $_{\rm o}$. Esta faixa altamente condutora ao longo do equador magnético transporta uma grande corrente chamada "eletrojato equatorial", a qual está confinada a uma região de poucos graus de lar gura, onde $\sigma_{\rm o}$ sen 2 I $<<\sigma_{\rm l}$ cos 2 I, ou seja, a uma faixa de cêrca de 500 km e com intensidades da ordem de 50.000 A.

Os efeitos das correntes, conforme observados no solo são mais convenientemente calculadas através de parâmetros integrados em altura. Quando E_{th} independe da altura, a densidade horizontal de corrente integrada em altura $\int_{-\infty}^{\infty} dz$, relaciona-se com E_{th} através das condutividades integradas em altura:

 $\tilde{\Sigma}_{h} = \int \tilde{\sigma}_{h} dz$, onde a integral é feita sobre a região condutora.

Sobre a maior parte da Terra Σ_{xy} predomina, embora se anula no equador magnético, na proximidade do qual Σ_{xx} e Σ_{yy} assumem valores muitos grandes. Accredita-se serem estes altos valores os responsáveis pelos altos valores das

variações S_q e L próximo ao equador magnético.

Estes valores de condutividade são proporcionais ao conteúdo eletrônico, e a noite se tornam bem pequenos, pois a camada E praticamente desaparece.

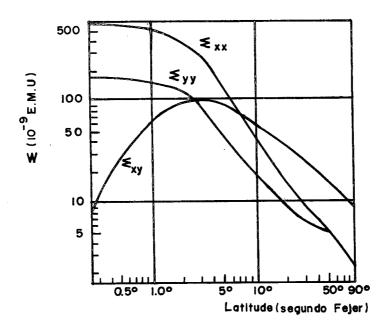


Fig. IV-28 - As condutividades integradas em altura, como função da latitude

7.3.3 Métodos de obtenção das condutividades ionosféricas

No item anterior, estudamos o comportamento das condutividades na ionosfera. Agora cumpre obter as correntes que fluem na mesma. A equação básica usado como ponto de partida é a equação bidimensional.

$$\vec{J}_{h} = \vec{\sigma}_{h} \cdot \vec{E}_{th}$$
 (1)

Existem 2 métodos teóricos básicos para atacar o problema:

- a) São feitos hípoteses sobre velocidades do vento e condutividades calculando-se em seguida o sistema de correntes resultante e as variações magnéticas.
- b) Usa-se as variações magnéticas observadas, como ponto de partida.fa zendo-se hipoteses sobre a distribuição de condutividades, calculando-se então: o sistema de correntes e o campo elétrico total necessário, e finalmente as velocidades dos ventos.

O primeiro método tem a desvantagem de que a dependência dos ventos nas altas camadas com a altura e posição geográfica não é bem conhecida. Esta des vantagem é evitada até certo ponto, no segundo método, o qual parte de dados magnéticos, muito melhor conhecido. Entretanto, êste método, também faz certas suposições arbitrárias acêrca da velocidade do vento e de sua dependência coma altura. Em ambos os casos, as incertezas sobre a distribuição de condutividades impõem limitações adicionais.

Sôbre o segundo método consulte Maeda and Murata (1965) e Maeda and Matsumoto (1962)

8. Eletrojato Equatorial

Na região equatorial a condutividade é bastante alta(condutividade de Cowling na direção E-W. Esta faixa altamente condutora ao longo do equador geomagnético (87° < θ < 93°) transporta uma grande corrente chamada "Eletrojato Equatorial". Abaixo daremos alguns resultados experimentais apresentados por Maynard N.C. (1966), Figura IV-29.

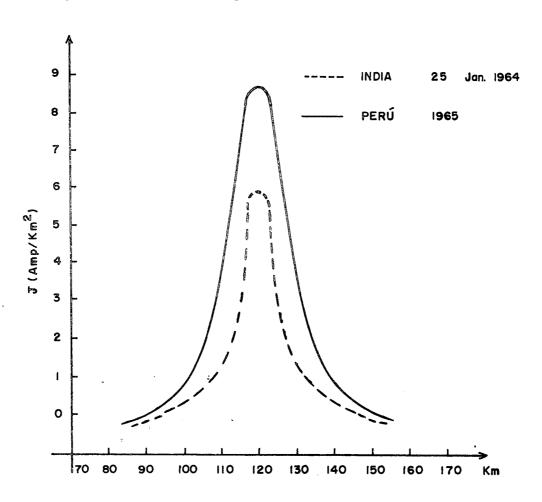


Fig. IV-29 - Densidade de corrente como função da altitude

India: Base 120 - 98 = 22 km; alt.: $5 \text{ Amp/km}^2 = J = 88 \text{ Amp/km} =$ = i = 44.000 A (largura 500 km)

Perú: Base 122 - 96 = 26 km; alt. 8 Amp/km² \Rightarrow J = 104 Amp/km => \Rightarrow i = 52.000 A (largura 500 km)

Parametros do Eletrojato Equatorial no Perú e Nigéria

LOCAL	ÉPOCA	LARGURA (km)	J(Amp/km)	INTENSIDADE TOTAL (A)
Nigéria	Dez 66	530	194	56.100
Perú	Equinocios 1957	920	236	, 114.000
Nigéria	Jun 62	920	83	46.100
Nigéria	Set 62	790	104	46.700

Tirado do Proc. Ind. Int.Equat.Symp.Aeronomy, S.J.dos Campos 1966

Dados apresentados por Onwumechilli and Ogbuehi (1965)

BIBLIOGRAFIA

- Akasofu, S.I. e S. Chapman "Magnetic Storms: The Simultaneous Development of the Main Phase (DR) and the Polar Sub-storms (DP)," J. Geophys. Res., 68, 3155, 1963.
- Akasofu, S.I. "A Source of Energy for Geomagnetic Storms and Auroras", Planet. Space Sci., 12, 801, 1964.
- Axford, W.I., "The Interaction between the Solar Wind and the Earth's Magneto sphere", J. Geophys. Res., 67, 3791, 1962.
- A. Kiepenheuer Astrophysical Journal 1953.
- Beard, D.B. "The Interaction of the Terrestrial Magnetic Field with the Solar Corpuscular Radiation", J. Geophys. Res., 65, 3559, 1960.
- Beard, D.B. "The Interaction of the Terrestrial Magnetic Field with the Solar Corpuscular Radiation, J. Geophys. Res., 67, 477, 1962.
- Brandt, J.C. and P.W. Hodge Solar System Astrophysics, New York, McGraw-hill
- Campbell, W.H. "Equatorial Studies of Rapid Fluctuations in the Earth's Magnetic Field" (Review paper), Proc. end. Intern. Symp. on Equat. Aeronomy, edited by Brazilian Space Commission, p. 495, 1965.
- Chapman, S. "Solar Plasma Geomagnetism and Aurora", Gordon and Breach, N.Y.,
- Chapman, S. e J. Bartels "Geomagnetism" (Vol. I e II), Claredon Press, Oxford, 1940.
- Duncan, R.A. "The Cause of Magnetic Storms and Bays", J. Geophys. Res., 65, 3589, 1960.
- Farley, T.A. and N.L. Sanders, Pitch Angle Distributions and Minor Point Densities in the Outer Radiation Zone, J. Geophys. Res. <u>56</u>, 3159, 1962.
- Fougere, P.S. "Spherical Harmonic Analysis 2.A new model derived from Magnetic Observatory Data from Epoch 1960", J. Geophys. Res., 70 (9), 2171, 1965.
- Fukushima, N. "Some Remarks on the Morphology of Geomagnetic Bays", J. Geomagn. Geoelect., 10, 164, 1959.

- Giovanelli Austrial J. Sci. Res., 1948.
- Hamlin, D.A., R. Karplus, R.C. Vick and K.M. Watson "Mirror and Azimuthal Drift Frequencies for Geomagnetically Trapped Particles", J. Geophys. Res., 66 (1), 1, 1961.
- Holt, E.H. and R.E. Haskell "Foundations of plasma Dynamics", Macmillan, N.Y. 1965.
- Hines, C.D., I. Paghis, T.R. Hartz e J.A. Fejer (ed.) "Physics of the Earth's Upper Atmosphere", Prentice Hall, N.Y., 1965.
- Hines, C.O., Paghis I., T.R. Hartz, J.A. Fejer (ed.) "Physics of the Earth's Upper Atmosphere", Prentice Hall, Englewood Chiffs N. J., 1965.
- H. Plaskett Vistas in Astronomy 1955.
- J. Jackson, J.D. "Classical Electrodynamics" (3rd. ed.) J. Willey, N.Y., 1963.
- Jager, C. "Emission of Gas from the Sun" Space Research III, p. 491, North Holland, 1963.
- J. Rösch -"L'Astronomie 71, 129, 1957.
- Kellogg, P.J. "Flow of Plasma around the Earth" Geophys. Research, 67, 3805, 1962.
- Kuiper, Gerard P., ed. "The Sun Chicago" The Univ. Press 1953
- Kundu, Mukul R. "Solar Radio Astronomy" New York, Interscience 1965
- Longmire, C.L. "Elementary Plasma Physics", Interscience, N.Y., 1963.
- Mackin, Jr. and M. Nengebauer, editors "The Solar Wind" Oxford, Pergamon Press 1966 .
- Maeda, K. e H. Matsumoto "Conductivity of the Ionosphere and Current System", Rep. Ionosph. Space Res. Japan, 16 (1), 1, 1962.
- Maeda, K. and H. Murata, "Ionospheric Dynamo Theory with Consideration for Magnetospheric Current along the Geomagnetic lines of Force," Report of Ion. and Space Res. in Japan, 19, 272, 1965.
- Maynard, N.C. "Measurements of Ionospheric Currents" (PhD, Thesis) Dep. Phys. Univ. of New Hampshire, 1966.
- McCormac, B.M. (ed.) "Radiation Trapped in the Earth's Magnetic Field", D. Reidel Pub. Co., Dordrecht-Holland, 1966.
- McIlwain C. "Coordinates for Mapping the Distribution of Magnetically Trapped Particles", J. Geophys. Res., 66 (11), 3681, 1961.

- McCormac, B.M., "Radiation Trapped in the Earth's Magnetic Field", D. Reidel Pub. Co. Dordrecht, Holland, 1966.
- Mead, G.D. "Deformation of the Geomagnetic Field by the Solar Wind" J. Geophys. Res., 69, 1181, 1964.
- Mead, G.D. and D.B. Beard, "Shape of the Geomagnetic Field Solar Wind Boundary" J. Geophys. Res., 69, 1.169, 1964.
- Ness, F.N., "Quasi-Stationary Corotating Structure in the Interplanetary Medium", J. Geophys. Res.,70,5793, 0965.
- Northrop, T.G. e E. Teller "Stability of the Adiabatic Motion of Charged Particles in the Earth's Field" Phys. Rev., 117 (1), 215, 1960.
- O'Brien, B.J.,"A Large Diurnal Variation of the Geomagnetically Trapped Radiation", J. Geophys. Res., 68, 989, 1963.
- Onwumechilli, A. and P.O. Ogbuehi, Proc. Sec. Int. Symp. Equatorial Aeronomy, São José dos Campos, 1965.
- Ortner, J. e H. Maseland (ed.) "Introduction to Solar Terrestrial Relations",
 D. Reidel Pub. Co., Dordrecht (Holland), 1965.
- Pikel'ner, S.B.-"Fundamentals of Cosmic Electrodynamics", NASA TTF. 175, Washington, 1964.
- Saito T., "Mechanism of Geomagnetic Continuous Pulsations and Physical States of the Exosphere", J. Geomagn. Geolect., 16, 116, 1964.
- Saito, T. "A Review of the Research on Geomagnetic Pulsations in Japan", ESSA Technical Report IER 15-ITSA 15, Boulder, 1966.
- Smith, H.J. e E.V.P. Smith "Solar Flares" Macmillan, N.Y., 1963.
- Spitzer, Jr., L. "Physics of Fully Ionized Gases", 2nd. ed., Interscience, N. Y., 1962.
- Spreiter, J.R. and Briggs, B.R. Analysis of the Effect of a Ring Current on Whistlers, J. Geophys. Res., 67, 3779, 1962.
- Spreiter, J.R. and Jones, W.P. "On the Effect of a Weak Interplanetary Magnetic Field", J. Geophys. Res., 68, 3555, 1963.
- "The Symposium on Magnetism of the Earth's Interior", J. Geomagn. Geoelec., $\underline{17}$ (3 4), 1965.
- William, D. and G.D. Mead, "Nightside Magnetosphere Configuration as obtained from Trapped Electrons at 1.100 kilometers", J. Geophys. Res., 70,3017, 1965.

- Valley, S.L. (ed.) "Handbook of Geophysics and Space Environments" AFCRL, Office of Aerospace Research, USAF, 1965.
- Van Allen, James A., "The Geomagnetically Trapped Corpuscular Radiation", J. Geophys. Res., 67, 1683, 1959.
- Vette, J.I. and S. Porjes, "Geomagnetic Geometry Tables", NASA CR-390,1966.

 Zirin, Harold "The Solar Atmosphere" Blaisdell Publishing Co. 1966.