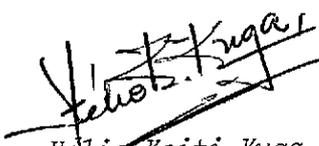


1. Publicação nº <i>INPE-2757-PRE/333</i>	2. Versão	3. Data <i>Maio, 1983</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa  <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DMC/DDO</i>	Programa <i>ORBAT</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>PROPAGAÇÃO DE ÓRBITA EXPRESSÕES ANALÍTICAS SIMPLIFICADAS TEORIA DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS</i>			
7. C.D.U.: <i>681.5.015.4:629.7.076.6</i>			
8. Título  <i>PROCEDIMENTO SEMI-ANALÍTICO BASEADO EM ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS PARA PROPAGAÇÃO DE ÓRBITAS DE SATÉLITES ARTIFICIAIS</i>		<i>INPE-2757-PRE/333</i>	10. Páginas: <i>11</i>
			11. Última página: <i>10</i>
9. Autoria <i>Atair Rios Neto Wilson Custódio Canesin da Silva</i>			12. Revisada por  <i>Helio Koiti Kuga</i>
Assinatura responsável 			13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor
14. Resumo/Notas  <i>Trata-se de um procedimento para propagar a órbita de satélites artificiais terrestres através de expressões matemáticas parametrizadas. Mediante o uso de dados simulados de observação, durante o intervalo de um período, e com o auxílio da Teoria de Estimação de Parâmetros, particularmente da técnica do filtro de Kalman, estimam-se os parâmetros das equações. Obtidas as equações que representam a variação no tempo dos elementos da órbita, esta pode ser propagada com considerável economia de esforços computacionais.</i>			
15. Observações <i>Este trabalho será apresentado no VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM 83 - Uberlândia, MG, de 13 a 16 de dezembro de 1983.</i>			

ANAIS	<b>COBEM 83</b>	PROCEEDINGS
	VII CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA	
	UBERLÂNDIA, 13 - 16 de dezembro de 1983	
TRABALHO PAPER	Nº	P.P.
		UFU

PROCEDIMENTO SEMI-ANALÍTICO BASEADO EM ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS  
PARA PROPAGAÇÃO DE ÓRBITAS DE SATÉLITES ARTIFICIAIS

ATAIR RIOS NETO

WILSON CUSTÓDIO CANESIN DA SILVA

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

SUMÁRIO

Trata-se de um procedimento para propagar a órbita de satélites artificiais terrestres através de expressões matemáticas parametrizadas. Mediante o uso de dados simulados de observação, durante o intervalo de um período, e com o auxílio da Teoria de Estimação de Parâmetros, particularmente da técnica do filtro de Kalman, estimam-se os parâmetros das equações. Obtidas as equações que representam a variação no tempo dos elementos da órbita, esta pode ser propagada com considerável economia de esforços computacionais.

SUMMARY

A procedure to propagate the orbit of terrestrial artificial satellites through parameterised mathematical expressions is presented. Simulated data of observations are used during one period, and with the help of Estimation Theory of Parameters and particularly the Kalman filter technique, the parameters of the equations are estimated. Obtained the time variation equations of the elements of the orbit, this can be propagated with considerable saving of computation efforts.

## 1. Introdução

O trabalho apresenta um procedimento para a propagação de órbitas de satélites artificiais terrestres. O objetivo é ter uma alternativa simples e viável, no caso de propagações por longos intervalos de tempo, em face das maneiras que até hoje têm sido adotadas, as quais basicamente são três: numericamente, integrando as equações do movimento do satélite pelo método de Cowell; analiticamente, usando as teorias conhecidas para as perturbações devidas ao geopotencial [1], [5] e para outras perturbações [3], [6] e [8]; e semi-analiticamente, calculando as variações médias, por período, das perturbações dissipativas e propagando a órbita por um certo tempo, como em [13] e [2]. No primeiro caso, embora haja a possibilidade de modelagens físicas sofisticadas, a integração é feita passo a passo, podendo onerar bastante o tempo de computação, assim como agravar o problema de erro numérico acumulado. Os dois últimos casos, embora bastante atraentes quanto ao tempo de computação e erro numérico acumulado, apresentam a limitação de utilizarem modelagens muito simplificadas para perturbações dissipativas, além de envolverem séries com grande número de termos para serem calculadas.

O procedimento proposto tem o intuito de manter a possibilidade de modelagens realistas para o movimento, simplificar as equações de propagação e, ainda assim, ter a capacidade de propagar a órbita por longos intervalos de tempo. Isto é feito utilizando expressões parametrizadas, análogas às da teoria de Brouwer [1], as quais buscam representar de forma aproximada a lei de variação no tempo dos elementos orbitais, ao longo de uma mesma região do espaço [12]. As expressões são ajustadas aos dados simulados numericamente (ou observados) e correspondentes a um período nodal da órbita. O ajuste é feito através de uma técnica de processamento sequencial, utilizando o filtro de Kalman [4].

A utilização de expressões parametrizadas para propagação de órbitas de satélites não é nova [14]. No entanto, as tentativas anteriores usam as expressões para extrapolar o movimento, utilizando-as com valores do tempo além do intervalo de interpolação usado no ajuste dos parâmetros. No procedimento apresentado, a partir da constatação de que o satélite

está, ao longo de períodos sucessivos, movimentando-se na mesma região do espaço, adota-se a hipótese de que a lei de variação dos elementos orbitais é aproximadamente periódica. Isto permite a utilização das expressões parametrizadas com valores da variável independente sempre dentro do intervalo de interpolação utilizado para ajustá-las (correspondente a um período nodal).

O trabalho está organizado de forma que na Seção 2 desenvolve-se a modelagem das expressões parametrizadas; na Seção 3 expõe-se o procedimento proposto para ajuste dos parâmetros; na Seção 4 apresenta-se um teste numérico e respectivos resultados; e na Seção 5 fazem-se os comentários e conclusões.

## 2. Modelagem Matemática Parametrizada

A expressão matemática adotada para descrever a variação do  $i$ -ésimo elemento da órbita tem a seguinte forma genérica:

$$h_i(Z_i; NT_n + \tau) = Z_{i1}(NT_n^+) + Z_{i2}\tau + Z_{i3}\tau^2 + Z_{i4} \begin{pmatrix} \cos \\ \text{sen} \end{pmatrix} (Z_{i5} + Z_{i6}\tau), \quad (2.1)$$

onde  $Z_i^T = [Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{i6}]$  é o vetor de parâmetros;  $0 \leq \tau \leq T_n$ , onde  $T_n$  é o período nodal da primeira revolução; e em cada período ao longo da propagação efetua-se a reinicialização (ver Seção 3.3):

$$Z_{i1}(NT_n^+) = h_i(NT_n) - Z_{i4} \begin{pmatrix} \cos \\ \text{sen} \end{pmatrix} (Z_{i5}), \quad N = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Observe que a Expressão (2.1) com termos seculares e periódicos está em quase perfeita analogia com as expressões de [1] que foram desenvolvidas para perturbações devidas ao campo gravitacional (zonal) terrestre. O único termo diferente é o que contém  $\tau^2$ , que aqui tenta representar perturbações seculares dissipativas, tal como o arrasto atmosférico. A escolha da Expressão (2.1) é bastante justificável, uma vez que os fenômenos que determinam o movimento e ocorrem no espaço numa

região vizinha de uma órbita média, fazem-no de forma a obedecer aproximadamente a uma lei periódica de ocorrência, de maneira que a lei de movimento e os parâmetros ajustados para uma revolução completa mantenham-se válidos para toda a região vizinha a esta órbita média em revoluções sucessivas, durante um certo tempo.

### 3. Procedimento Proposto

A estimação e ajuste dos parâmetros da Equação (2.1) é feita de maneira sequencial, simulando os dados para  $N = 0$ ,  $0 \leq \tau \leq T_n$ , por integração numérica das forças que atuam no satélite. Tal procedimento é bastante vantajoso pelo fato de poder incluir, de maneira modular, a perturbação que se deseja, atingindo assim alto grau de precisão nos dados simulados. A simulação é feita integrando numericamente a equação de movimento do satélite,  $\dot{X} = f(X; t)$ . Os vetores de estado correspondentes assim obtidos são  $X(0), X(t_1), \dots, X(t_{n_p})$ ,  $t_{n_p} = T_n$  e são transformados em  $Y(0), Y(t_1), \dots, Y(t_{n_p})$ , vetores dos elementos da órbita selecionados na modelagem matemática, representados genericamente pela Expressão (2.1).

Para cada  $t_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n_p$  montam-se as observações que serão dadas pela Equação:

$$Y_i(t_k) = h_i(Z_i, t_k) + \epsilon_i(t_k), \quad (3.1)$$

onde  $Y_i(t_k)$  é o  $i$ -ésimo elemento orbital para  $i = 1, 2, \dots, 6$ , e  $k$  caracteriza o tempo de observação.  $Z_i$  é o vetor (estado) de parâmetros utilizados para definir a função  $h_i$ , que se aproxima analiticamente do  $i$ -ésimo elemento, representado pela Expressão (2.1). O erro  $\epsilon_i$  que aparece na Expressão de observação (3.1) está relacionado com a precisão das observações e, no caso em que estas são simuladas por integração numérica, o ideal é ter um integrador numérico que dê informações sobre a ordem de grandeza do erro cometido [11]. No caso de não se ter tal informação, deve-se admitir que o erro seja mínimo (integrando-se em dupla precisão), de forma a poder atribuir um erro máximo de 10 a 50 m nas grandezas lineares e de  $10^{-8}$  a  $10^{-7}$  rd nas grandezas angulares. É usual escolher

$\epsilon_i$  com distribuição normal, ou seja,  $\epsilon_i \sim N(0, R_i)$  de média nula e variância definida. De início admitem-se os  $\epsilon_i$  (erros de observação) completamente independentes entre si, de forma que possa caracterizá-los como uma sequência gaussiana branca aleatória, tendo por estatística:

$$E\{\epsilon_i(t_k)\} = 0 ; E\{\epsilon_i(t_k)\epsilon_j^T(t_\ell)\} = T_i(t_k)\delta_{k\ell}\delta_{ij}, \quad (3.2)$$

onde  $\delta_{k\ell}$  e  $\delta_{ij}$  são os deltas de Kronecker.

### 3.1 Linearização das Observações

Substituindo na Expressão (3.1)  $Z_i(t_k)$  por  $(\bar{Z}_i(t_k) + \Delta Z_i(t_k))$ , onde  $\bar{Z}_i(t_k)$  é o valor nominal, e, em seguida, expandindo-a em série de Taylor em torno de  $\bar{Z}_i(t_k)$  e retendo até os termos de primeira ordem, obtém-se:

$$H_i(t_k)Z_i(t_k) + \epsilon_i(t_k) = y_i, \quad (3.3)$$

$$H_i(t_k) = \partial h_i(\bar{Z}_i(t_k)) / \partial Z_i \quad (3.4)$$

$$y_i = Y_i(t_k) - h_i(\bar{Z}_i(t_k), t_k) + H_i \bar{Z}_i(t_k),$$

onde  $Z_i(t_k)$  é de dimensão  $(\eta_i \times 1)$ ,  $\eta_i$  é o número de componentes dos parâmetros da expressão parametrizada para o  $i$ -ésimo elemento orbital.

### 3.2 Dinâmica do Processo

O vetor  $Z_i$  não evoluirá no tempo, é estacionário e, portanto, só terá reajustes durante o procedimento sequencial de estimação de parâmetros. A dinâmica do sistema será:

$$Z_i(k+1) = \phi_i(k+1, k)Z_i(k), \quad (3.5)$$

onde  $k$  está representando o instante  $t_k$  e  $\phi_i(k+1, k)$  é a matriz de transição unitária, logo:

$$Z_i(k+1) = Z_i(k). \quad (3.6)$$

### 3.3 Algoritmo

O procedimento sequencial que usa o filtro de Kalman [4] segue o seguinte roteiro: Dados os valores iniciais do vetor de estado  $\bar{Z}_i(0)$  e da covariância  $\bar{P}_i(0)$ , procede-se da forma:

#### a) Atualização

$$K_i(k) = \bar{P}_i(k)H_i^T(k) [R_i(k) + H_i(k)\bar{P}_i(k)H_i^T(k)]^{-1},$$
$$\hat{Z}_i(k) = \bar{Z}_i(k) + K_i(k)[y_i(k) - H_i(k)\bar{Z}_i(k)], \quad (3.7)$$
$$P_i(k) = \bar{P}_i(k) - K_i(k)H_i(k)\bar{P}_i(k).$$

#### b) Propagação

$$\bar{Z}_i(k+1) = \hat{Z}_i(k); \quad \bar{P}_i(k+1) = \phi_i(k+1, k)P_i(k)\phi_i^T(k+1, k) = P_i(k) \quad (3.8)$$

sendo  $\phi(k+1, k)$  a matriz de transição de estados.

#### c) Cálculo no novo estado

$$y_i(k+1) = Y_i(t_{k+1}) - h_i(\bar{Z}_i(k+1), t_{k+1}) + H_i(k+1)\bar{Z}_i(k+1), \quad (3.9)$$
$$H_i(k+1) = \partial h_i(\bar{Z}_i(k+1)) / \partial Z_i.$$

d) Troca-se  $k$  por  $k+1$  e repete-se a sequência, até que  $t_k = t_{np} = T_n$ .

Os valores iniciais das componentes da Expressão parametrizada (2.1) são calculados de acordo com os seguintes critérios:  $\bar{Z}_{i1} = Y_i(t_0)$ ;  $\bar{Z}_{i2} = \Delta Y_i(t_0) / \Delta t$ , isto força a curva ajustada a iniciar quase tangente à curva real;  $Z_{i3} = 0$ ;  $Z_{i4}$  é a amplitude da parte periódica, considerada como  $10^{-3} \bar{Z}_{i1}$ ;  $\bar{Z}_{i5}$  é considerado como duas vezes o argumento do perigeu e  $\bar{Z}_{i6}$  duas vezes o movimento médio. As covariâncias iniciais  $\bar{P}_i(0)$  são consideradas diagonais, como  $(\bar{P}_i)_{jj}(0) = (0, 1 \cdot \bar{Z}_{ij}(0))^2$ , onde  $(\bar{P}_i)_{jj}(k)$  é o  $i$ -ésimo termo da diagonal da matriz no instante  $t_k$ , correspondente ao  $i$ -ésimo elemento orbital.

### 3.4 Elementos da Órbita

Os elementos da órbita escolhidos para serem ajustados de acordo com a Expressão (2.1) são: a, semi-eixo maior da órbita; p, parâmetro das cônicas ("semilatus-rectum"); I, inclinação;  $v = \omega + f$ , argumento verdadeiro;  $\Omega$ , longitude do nodo ascendente e r, raio vetor.

As expressões obtidas por ajuste dos parâmetros nada mais são do que a história do fenômeno no tempo, isto é, sua lei de variação no intervalo de ajuste. Portanto, ao propagar a órbita de um satélite por vários períodos usando expressões ajustadas, deve-se admitir que a lei de variação mantenha-se válida após cada período propagado, isto é, que o satélite ao longo de cada revolução encontre-se na mesma região do espaço. Desta forma, o parâmetro  $Z_{i1}$  na Equação (2.1) comporta-se como uma constante de integração de uma equação diferencial, válida no intervalo de ajuste (1 período), e deve em consequência ser recalculado para o período seguinte, mediante a condição da Equação (2.2). Outra observação importante é que os erros de ajustamento das extremidades das curvas podem ser corrigidos de forma a fazer com que as curvas propagadas, após cada período, comecem corrigidas do erro de ajuste, da forma:

$$\hat{h}_i(NT_n^+) = \hat{h}_i(NT_n^-) + \Delta h_{ip} + \Delta h_{i0}, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (3.10)$$

$$\Delta h_{i0} = \hat{h}_i(t=0) - h_{\text{real}}(t=0); \quad \Delta h_{ip} = h_{\text{real}}(T_n) - \hat{h}_i(T_n), \quad (3.11)$$

onde  $\hat{h}_i$  representa a curva ajustada e com isso o parâmetro  $Z_{i1}$  para cada início de período será reinicializado por:

$$\hat{Z}_{i1}(NT_n^+) = \hat{h}_i(NT_n^-) + \Delta h_{ip} + \Delta h_{i0} - \hat{Z}_{i4} \begin{pmatrix} \cos \\ \text{sen} \end{pmatrix} (\hat{Z}_{i5}). \quad (3.12)$$

### 4. Caso Teste

O procedimento foi testado no satélite Tiros com as seguintes condições iniciais:

Época 16/08/1981, 20<sup>h</sup>12<sup>m</sup>17,999<sup>s</sup>

Fluxos solares  $\bar{F}_{10,7} = 176$  e  $F_{10,7} = 215$  ( $w/M^2H_z$ )

Índice geomagnético  $k_p = 1,89$

Período nodal = 101,2099 min

e vetor de estado em km e km/s de:

$$\underline{r}^T = [-875,6310; -6819,7526; -2153,0222],$$

$$\underline{\dot{r}}^T = [-1,442522; -2,022677; 7,005805],$$

que corresponde a uma órbita praticamente circular de 826 km de altitude e quase polar ( $I = 98^\circ$ ).

Os resultados obtidos após a propagação da órbita no intervalo de aproximadamente 2 dias são dados na tabela que se segue.

Tabela 1. Resultados de Teste

Época final 18/08/81, 19 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup> 23,999 <sup>s</sup>			
Valores do Bole tim APT Predict do Tiros (m e m/s)	Valores propaga dos com as ex pressões ajusta das	DESVIOS	
		em arco (máx)	
		m e m/s	
X = - 964462,4	X = - 963355,0	$\Delta X = 1107,36$	< 0,2 <sup>o</sup>
Y = - 7130652,2	Y = - 7128806,1	$\Delta Y = 1846,13$	
Z = - 337297,6	Z = - 333984,4	$\Delta Z = 3313,24$	
$\dot{X} = - 1155,806$	$\dot{X} = - 1157,723$	$\Delta \dot{X} = 1,92$	
$\dot{Y} = - 182,190$	$\dot{Y} = - 194,382$	$\Delta \dot{Y} = - 12,19$	
$\dot{Z} = 7342,971$	$\dot{Z} = 7344,298$	$\Delta \dot{Z} = 1,33$	

Os resultados são satisfatórios, uma vez que o erro exigido para apontamento de antenas é de tolerância superior ao erro angular (0,2<sup>o</sup>) aqui cometido.

### 5. Conclusões

As expressões analíticas simplificadas foram tratadas para satélites de média altitude; entretanto, não existe nenhuma restrição que impeça a aplicação do procedimento para satélites em outras faixas de altitude. Para satélites a grandes altitudes, caso em que as perturbações devidas ao campo gravitacional e ao arrasto atmosférico são bastante atenuadas, as variações dos elementos da órbita são mais suaves e

as expressões ajustadas deverão ser capazes de propagá-los por intervalos bastante longos. Por outro lado, quanto mais baixo estiver o satélite, maiores serão as perturbações e menor será o intervalo de validade das expressões ajustadas.

O gerador de órbitas disponível e utilizado neste trabalho [9], [7] para simular as observações é constituído de um modelo de forças simplificado, uma vez que contém apenas forças gravitacionais (até grau 4 para tesserais e grau 6 para os zonais), as devidas à atração do Sol e da Lua e as do arrasto atmosférico. Portanto, neste caso, os resultados estão sujeitos a dois tipos de erros; erro devido a falha do gerador de órbitas que simula as observações, e erro em se considerar constantes os coeficientes ajustados ao longo de vários períodos. O erro devido ao ajuste não se propaga em virtude do processo de recalculagem (ou reinicialização) da constante de integração  $Z_{11}$  da Equação (2.1).

O uso do processamento sequencial dos dados, através do filtro de Kalman, é vantajoso do ponto de vista numérico, pois elimina a necessidade de inversão de matrizes. No entanto, a escolha adequada da matriz de covariâncias  $\bar{P}_i(0)$  é essencial para o bom desempenho do procedimento. Para os resultados apresentados, esta escolha foi feita de maneira empírica. Para sistematizar a obtenção dessas dispersões iniciais de erro, poder-se-ia utilizar uma técnica de ruído adaptativo [10], de forma a torná-los compatíveis com os dados utilizados para ajuste ao longo de um período da órbita.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Brouwer, D., "Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory Without Drag", *Astronomical Journal*, 17(9):378-397, Nov. 1959.
- [2] Cefola, P.J., "On the Development of a Recursive Semianalytical Orbit Prediction Method", *Flight Mechanics Conference*, Greenbelt, MD, 1976.
- [3] Giacaglia, G.E.O., "Transformation of Spherical Harmonics and Applications to Geodesy and Satellite Theory", São José dos Campos, INPE, 1979. (INPE-1453-RPE/018).

- [4] Jazwinski, A.H., "Stochastic Process and Filtering Theory", New York, Academic, 1970.
- [5] Kaula, W.M., "Theory of Satellite Geodesy", London, Blaisdell, 1966.
- [6] King-Hele, D.G., "Theory of Satellite Orbits in an Atmosphere", London, Butterworths, 1964.
- [7] Kuga, H.K., "Estimação Adaptativa de Órbitas Aplicada a Satélites de Baixa Altitude", Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, SP, INPE. (INPE-2517-RPI/072), 1982.
- [8] Lautmann, D.A., "Perturbations of a Close-Earth Satellite Due to Sunlight Diffusely Reflected From the Earth", Cambridge, MA, SAO, 1975.
- [9] Negreiros de Paiva, R., "Simulação da Órbita e de Observações de um Satélite Artificial ao Redor da Terra", São José dos Campos, SP, INPE, 1980. (INPE-1955-RPE/269).
- [10] Rios Neto, A.; Kuga, H.K., "Estimação Adaptativa e em Tempo Real de Órbitas de Satélites Artificiais a Baixa Altitude. VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, dez. 1981.
- [11] Rios Neto, A.; Cardenuto, N.C., "A Stochastic Approach to Global Error Estimation in the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations", São José dos Campos, SP, INPE, Dec. 1981. (INPE-2290-PRE/065).
- [12] Silva, W.C.C., "Determinação de Expressões Analíticas Simplificadas para Cálculo e Propagação de Órbitas Mediante o Uso de Teoria de Estimação de Parâmetros", São José dos Campos, SP, INPE, fev. 1982. (INPE - 2320 - TDL/080).
- [13] Uphoff, C., "Numerical Averaging in Orbit Predictions", AIAA Journal, 11(11):1513-1516, Nov. 1973.
- [14] Veis, G.; Moore, C.H., "Improvement Orbit Program", Cambridge, MA, SAO, 1960.