



PALAVRAS CHAVES / KEY WORDS

AUTORES / AUTHORS

CONTROLE DE ATITUDE - TEORIA DO REGULADOR  
CONTROLE ÓTIMO - SATÉLITE ARTIFICIAL  
SISTEMA DE CONTROLE NÃO-LINEAR

AUTORIZADA POR / AUTHORIZED BY

Marco Antonio Raupp  
Diretor Geral

AUTOR RESPONSÁVEL / RESPONSIBLE AUTHOR

Luiz C. Gadelha de Souza

DISTRIBUIÇÃO / DISTRIBUTION

INTERNA / INTERNAL  
 EXTERNA / EXTERNAL  
 RESTRITA / RESTRICTED

REVISADA POR / REVISED BY

Marcelo L.O. de Souza

CDU/UDC

629.7.062.2

DATA / DATE

Outubro 1987

TÍTULO / TITLE	PUBLICAÇÃO Nº / PUBLICATION NO INPE-4407-TDL/304
	CONTROLE DE ATITUDE DE UM SATÉLITE ARTIFICIAL ATRAVÉS DA EXTENSÃO DA TEORIA DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO
AUTORES / AUTHORSHIP	Luiz Carlos Gadelha de Souza

ORIGEM / ORIGIN

PG/DMC

PROJETO / PROJECT

FRH/CEA

Nº DE PAG. / NO OF PAGES

83

ULTIMA PAG. / LAST PAGE

A.6

VERSÃO / VERSION

Nº DE MAPAS / NO OF MAPS

RESUMO - NOTAS / ABSTRACT - NOTES

Neste trabalho apresenta-se uma nova lei de controle de atitude para satélites artificiais. Esta lei baseia-se numa extensão da teoria do regulador linear quadrático para o caso em que a dinâmica é descrita por um sistema de equações não-lineares (equações de Euler). Focaliza-se o modo de operação em que os ângulos e as velocidades angulares do satélite são pequenas mas as velocidades angulares das rodas a reação usadas são quaisquer. Faz-se: 1) uma comparação entre esta lei e uma outra simulada sob as mesmas condições na literatura; 2) uma avaliação do comportamento das saídas do sistema quando sobre este atua o regulador e quando atua sua extensão, à medida em que as condições iniciais tornam-se grandes; 3) um estudo da sensibilidade do sistema de controle em relação a uma variação nos momentos de inércia do satélite, e do seu desempenho quando os erros nas estimativas são modelados como variáveis aleatórias. Os resultados obtidos sugerem que: 1) a lei de controle implementada reduz as velocidades angulares e os ângulos do satélite com rapidez maior do que a outra; 2) para a dinâmica considerada, a presença do termo não-linear na lei implementada torna-a mais robusta do que aquela baseada no regulador; 3) a sensibilidade do sistema de controle a variações nos momentos de inércia é baixa, e que o seu desempenho na presença dos erros nas estimativas é pouco alterado.

OBSERVAÇÕES / REMARKS

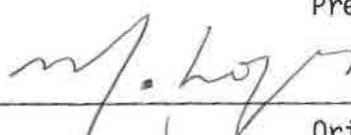
Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial, aprovada em 04 de setembro de 1987.

Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento a requisito exigido  
para a obtenção do Título de Mestre  
em Ciência Espacial

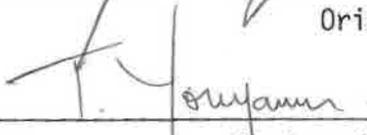
Dr. Atair Rios Neto

  
\_\_\_\_\_  
Presidente

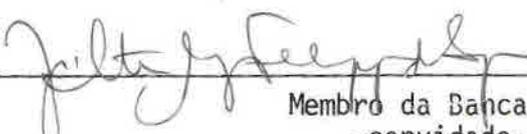
Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza

  
\_\_\_\_\_  
Orientador

Dr. Takashi Yoneyama

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca  
-convidado-

Dr. José Antonio M. Felipe de Souza

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca  
-convidado-

Dr. Agenor de Toledo Fleury

  
\_\_\_\_\_  
Membro da Banca

Candidato: Luiz Carlos Gadelha de Souza

São José dos Campos, 04 de setembro de 1987

## AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE que possibilitou a realização deste trabalho, através do projeto CAS (Controle de Atitude em 3 Eixos de Satélites).

Ao Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza pela orientação pautada principalmente pelo constante estímulo e dedicação durante o desenvolvimento dessa dissertação.

Aos membros da Banca Examinadora pelas sugestões oportunas por ocasião das apresentações preliminar e final do trabalho.

A todos que me apoiaram e encorajaram, em particular ao Dr. Wilson Custódio Canesin da Silva pelas sugestões iniciais quanto ao tema da pesquisa e ao colega Kondapalli Rama Rao pelo auxílio no uso das rotinas de integração numérica.

### ABSTRACT

In this work a new attitude control law for artificial satellites is presented. It is based on an extension of the linear quadratic regulator theory to the case where the dynamics is described by a weakly nonlinear system of equations (Euler's equations). It focuses the mode of operation in which the satellite has small angular velocities and angles but has arbitrary reaction wheel velocities. It includes: 1) a comparison between this law and other simulated under the same conditions in the literature; 2) an evaluation of the behavior of the system output under the regulator and under its extension, while the initial conditions become large; 3) a study of the control system sensitivity with respect to variations in the satellite moments of inertia, and of the system performance when the estimate errors are modeled as random variables. The results obtained suggest that: 1) the implemented control law reduces the angular velocities and angles faster than the other law; 2) The presence of the nonlinear term in the implemented law make it more robust than the law based on the regulator, for the dynamics considered; 3) The sensitivity of the control system with respect to a variation in the moments of inertia is small, and its performance in the presence of estimate errors is changed slightly.

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS .....	ix
LISTA DE TABELAS .....	xi
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xiii
<u>CAPÍTULO 1 - GENERALIDADES</u> .....	1
1.1 - Introdução .....	1
1.2 - Motivações .....	1
1.3 - Organização .....	2
<u>CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</u> .....	3
2.1 - O regulador linear quadrático .....	3
2.1.1 - Introdução .....	3
2.1.2 - Teoria .....	3
2.2 - A extensão do regulador linear quadrático .....	6
2.2.1 - Introdução .....	6
2.2.2 - Teoria .....	7
<u>CAPÍTULO 3 - SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE</u> .....	13
3.1 - Modos do controle de atitude .....	13
3.2 - Torques ambientais .....	15
3.3 - Dinâmica do movimento do satélite .....	16
3.4 - Torques de controle .....	23
<u>CAPÍTULO 4 - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA</u> .....	29
4.1 - Seleção das matrizes peso Q e R .....	29
4.2 - Métodos numéricos empregados .....	30
4.3 - Valores iniciais e parâmetros .....	32
4.4 - Sensibilidade .....	35
4.5 - Cálculo da sensibilidade .....	38
4.6 - Cálculo do Índice de desempenho .....	41

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO 5 - RESULTADOS E CONCLUSÕES</u> .....	43
5.1 - Resultados .....	43
5.2 - Conclusões .....	56
5.3 - Comentários e Sugestões .....	56
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	59
APÊNDICE A - PARTE NÃO-LINEAR DA LEI DE CONTROLE	9

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Atuador a roda a reação (a) e sua função de transferência aproximada (b).....	14
3.2 - Torques ambientais em função da altura .....	15
3.3 - Referencial inercial .....	17
3.4 - Referencial orbital .....	17
3.5 - Referencial móvel .....	18
3.6 - Desvios angulares do satélite .....	20
3.7 - Diagrama de blocos do sistema de controle do satélite..	26
4.1 - Fluxograma do Programa Implementado .....	31
4.2 - Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada .....	35
4.3 - Diagrama de blocos do sistema de controle sem os termos não-lineares .....	36
4.4 - Resposta em frequência da função S1.....	39
4.5 - Resposta em frequência da função S2 .....	40
4.6 - Resposta em frequência da função S3 .....	40
5.1 - Comportamento de W1, W2 e W3 em função do tempo ao se empregar o controle clássico e o ótimo para o conjunto de pesos $\lambda_1$ a $\lambda_9$ .....	44
5.2 - Comportamento de $\theta_1$ , $\theta_2$ e $\theta_3$ em função do tempo ao se empregar o controle clássico e o ótimo para o conjunto de pesos $\lambda_1$ a $\lambda_9$ .....	45
5.3 - Comportamento de W1, W2 e W3 em função do tempo ao se empregar o controle clássico e o ótimo para o conjunto de pesos $\lambda_{10}$ a $\lambda_{18}$ .....	46
5.4 - Comportamento de $\theta_1$ , $\theta_2$ e $\theta_3$ em função do tempo ao se empregar o controle clássico e o ótimo para o conjunto de pesos $\lambda_{10}$ a $\lambda_{18}$ .....	47
5.5 - Comportamento de W1, W2 e W3 em função do tempo ao se empregar o regulador e sua extensão para C11.....	49
5.6 - Comportamento de $\theta_1$ , $\theta_2$ e $\theta_3$ em função do tempo ao se empregar o regulador e sua extensão para C11.....	50
5.7 - Comportamento de W1, W2 e W3 em função do tempo ao se empregar o regulador e sua extensão para C12.....	51

Pág.

5.8 - Comportamento de $\theta_1$ , $\theta_2$ e $\theta_3$ em função do tempo ao se empregar o regulador e sua extensão para CI2.	52
5.9 - Comportamento de $W_1$ , $W_2$ e $W_3$ em função do tempo na presença de erros nas suas estimativas .....	54
5.10 - Comportamento de $\theta_1$ , $\theta_2$ e $\theta_3$ em função do tempo na presença de erros nas suas estimativas.....	55

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 - Constantes, Ganhos e Condições Iniciais Empregadas na Simulação .....	33
4.2 - Pesos, Momentos de Inércia e Erros nas Estimativas Empregados na Simulação .....	34
5.1 - Tempo de Estabilização de $W$ e $\theta$ .....	48
5.2 - Comparação entre os Torques Empregados .....	53

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $A(t)$  - Função matricial relacionada com o estado.
- $A$  - Matriz relacionada com o estado.
- $a_j$  - Razão  $j$  entre o torque externo e a inércia do satélite.
- $B(t)$  - Função matricial relacionada com o controle.
- $B$  - Matriz relacionada com o controle.
- $b_j$  - Razão  $j$  entre as inércias do satélite.
- $CI$  - Condição inicial.
- $CT_j$  - Constante de tempo  $j$  da roda a reação.
- $D(t)$  - Função matricial que representa os termos não-lineares da lei de controle.
- $F(t)$  - Função vetorial que representa a planta do sistema.
- $f(t)$  - Função que contém os termos não-lineares de  $F$ .
- $f_j$  - Termo giroscópico  $j$  devido ao produto entre velocidades angulares.
- $G(t)$  - Função escalar que representa o integrando do índice de desempenho.
- $g(t)$  - Função que contém os termos não-lineares de  $G$ .
- $G_j$  - Ganho  $j$  da roda a reação.
- $G(s)$  - Ganho da planta linear do sistema.
- $H$  - Matriz peso relacionada como estado final.
- $H(s)$  - Ganho do controle.
- $h(t)$  - Função que contém os termos não-lineares da lei de controle.
- $I$  - Matriz de inércia do satélite.
- $I_j$  - Momento principal de inércia do satélite.

- J(.) - Índice de desempenho a ser minimizado.
- $J_v$  - Matriz de inércia da roda a reação.
- $J_v j$  - Momento principal de inércia  $j$  do volante.
- $j(t)$  - Função que representa os termos não-lineares do Índice de desempenho.
- $K(t)$  - Solução da equação diferencial matricial de Riccati.
- $K_0$  - Valor inicial utilizado na solução da equação algébrica matricial de Riccati.
- $K$  - Solução da equação algébrica matricial de Riccati.
- $K_{aj}$  - Ganho do sistema em velocidade.
- $L$  - Transformada de Laplace.
- $L_s$  - Vetor momento angular do satélite.
- $L_v$  - Vetor momento angular da roda a reação.
- $Q(t)$  - Matriz peso variante no tempo relacionada com o estado.
- $Q$  - Matriz peso invariante no tempo relacionada com o estado.
- $q(t)$  - Representa os torques externos na notação de variáveis de estado.
- $R(t)$  - Matriz peso variante no tempo relacionada com o controle.
- $R$  - Matriz peso invariante no tempo relacionada com o controle.
- $s$  - Representa o produto matricial  $B^T \cdot RB$ .
- $S$  - Função Sensibilidade.
- $S_j$  -  $j$ -ésima função Sensibilidade.
- $SE_j$  - Sinal elétrico  $j$  aplicado à roda a reação.
- $T_j$  - Soma  $j$  dos torques externos e internos.
- $TV_{ij}$  - Torque  $j$  produzido pelo volante.
- $T_{dmj}$  - Torque  $j$  devido ao meio externo.
- $T_a$  - Ganho do sistema em ângulo.

- t - Tempo.
- $t_0$  - Instante inicial.
- $t_f$  - Instante final.
- $U(t)$  - Lei de controle.
- $\lambda_k$  - Pesos das matrizes R e Q.
- $X(t)$  - Vetor de estado.
- $X_1$  - Componente 1 do vetor de estado.
- X,Y,Z - Eixos do referencial inercial.
- $X_0, Y_0, Z_0$  - Eixos de referencial orbital.
- x,y,z - Eixos principais de inércia do satélite.
- W - Vetor velocidade angular do satélite.
- $W_j$  - j-ésima componente da velocidade angular do satélite.
- $W_{jRE}$  - j-ésima componente de referência da velocidade angular do satélite.
- $\theta$  - desvio angular do satélite.
- $\theta_j$  - j-ésimo desvio angular do satélite.
- $\theta_{jRE}$  - j-ésimo desvio angular de referência do satélite.
- $\omega$  - Vetor velocidade angular da roda a reação em relação ao sistema móvel.
- $\omega_I$  - Vetor velocidade angular da roda a reação em relação ao sistema inercial.
- $\omega_{Ij}$  - j-ésima componente da velocidade angular da roda a reação em relação ao sistema inercial.
- $\omega_j$  - j-ésima componente da velocidade angular da roda a reação em relação ao sistema móvel.
- $\rho$  - significa o posto de uma matriz.
- a - parâmetro do sistema.

- .
- Indica derivada em relação ao tempo.
- T - Indica transposição.
- \*
- Indica extremante.
- $\sigma$  - desvio padrão
- $\beta$  - desvio angular do satélite em relação ao eixo x.
- $\psi$  - desvio angular do satélite em relação ao eixo y.
- $\phi$  - desvio angular do satélite em relação ao eixo z.

NOTA: Nesta notação  $j=1$  a 3,  $k=1$  a 18 e  $l=1$  a 6.

## CAPÍTULO 1

### GENERALIDADES

Neste Capítulo introduz-se o problema a ser abordado neste estudo, a teoria nele utilizada, as suas motivações e, por fim, a sua organização.

#### 1.1 - INTRODUÇÃO

O movimento de um satélite artificial fica totalmente conhecido a partir da determinação de sua posição, velocidade, atitude e da variação desta no tempo (velocidade angular). As duas primeiras grandezas descrevem o movimento (translacional) do centro de massa do satélite (objeto de estudo da Mecânica Celeste). As duas últimas descrevem o movimento (rotacional) do satélite em torno do seu centro de massa, cuja prévia determinação é essencial para o controle desse movimento. O crescente uso de processadores de bordo nesta determinação e neste controle representa um dos fatores responsáveis pelos avanços alcançados nas missões espaciais desta década. Particularmente, o controle de atitude de um satélite artificial realizado à bordo usa sensores, estimadores e atuadores ligados por meio de controladores (uma lei ou uma estratégia de controle) os quais podem ser implementados via um processador de bordo (microcomputador). Atuadores comumente utilizados neste controle são rodas a reação e jatos a gás, o primeiro sendo a fonte dos torques empregados no sistema estudado neste trabalho. Através da implementação deste sistema apresenta-se uma nova lei de controle em malha fechada, a qual está baseada numa extensão do regulador linear quadrático a certos sistemas não-lineares.

#### 1.2 - MOTIVAÇÕES

As principais motivações para o desenvolvimento deste estudo são: 1) a utilização de uma modelagem mais realista (a qual considera os termos não lineares das equações que descrevem a dinâmica do saté

lite); 2) o uso de um critério que permita avaliar a eficiência de uma lei de controle em efetuar manobras, bem como em manter um satélite artificial numa determinada atitude; 3) a possibilidade de otimizar grandezas físicas como combustível e/ou energia (os quais são fatores que têm influência direta no custo e no tempo de operação daquele controle).

A opção pelo uso do controle ótimo através da teoria do regulador linear quadrático, particularmente da sua extensão a sistemas não-lineares, deve-se ao fato desta permitir a modelagem e a otimização desejadas.

### 1.3 - ORGANIZAÇÃO

No Capítulo 2 resume-se a teoria do Regulador Linear Quadrático e apresenta-se sua extensão, a qual foi iniciada por Al'brekht (1962), Lukes (1969) e Willemstein (1975). Uma primeira tentativa de aplicá-la no controle da atitude de um satélite artificial foi feita por Dabbous&Ahmed (1982), visando apenas a redução da velocidade angular do satélite, sem se importar com o comportamento e a possível redução dos ângulos (relevantes para o controle de atitude). No Capítulo 3 apresenta-se a dinâmica do sistema e faz-se o seu equacionamento. No Capítulo 4 faz-se a implementação numérica do problema e compara-se a eficiência desta lei de controle com a de outra, simulada por Souza (1981), tendo como critérios: 1) o tempo de estabilização, (segundo o critério de 2%); 2) as magnitudes dos torques empregados na redução dos ângulos e das velocidades angulares do satélite. Comparam-se também as saídas do sistema quando sobre ele atua a extensão do regulador e quando só atua o regulador, e faz-se um estudo de sensibilidade do sistema de controle a variações nos momentos de inércia do satélite. Finalmente avalia-se o desempenho do sistema ao se modelar os erros nas estimativas de  $\theta_e$  e  $\dot{\theta}_e$  como variáveis aleatórias com distribuição gaussiana de média nula. No Capítulo 5 apresentam-se os resultados, as conclusões e algumas sugestões para a continuação deste trabalho.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO DA LITERATURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste Capítulo resume-se a teoria do regulador linear quadrático e apresenta-se a sua extensão a sistemas não-lineares mas analíticos em torno da origem. Mostra-se que a lei de controle ótimo obtida através dessa extensão pode ser expressa por meio de uma série de potências, a qual é função não-linear e variante no tempo do estado do sistema. Esta lei, sob as mesmas condições do caso linear, torna-se invariante no tempo simplificando assim a sua determinação. Isto é utilizado na ilustração do método feita no final do Capítulo, para o caso de um sistema controlável, invariante no tempo e com horizonte infinito.

#### 2.1 - O REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

##### 2.1.1 - INTRODUÇÃO

A teoria de controle ótimo e, em particular, a do regulador linear quadrático supõem a adoção de um índice de desempenho através do qual é possível otimizar grandezas físicas. A separação das condições de contorno e a sofisticação dos índices de desempenho (expresso por exemplo a minimização de tempo, combustível e energia) contribuem para o aparecimento das maiores dificuldades na determinação da solução do problema, principalmente na forma analítica. Entretanto, naquele caso particular, tal solução pode ser obtida e possui a vantagem de poder ser expressa em função do estado. Para explicar sua extensão (na Seção 2.2) apresenta-se a seguir um resumo daquela teoria.

##### 2.1.2 - TEORIA

A planta do regulador linear quadrático variante no tempo é dada pelo sistema de equações:

$$\forall t \in [t_0, t_f], \dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (2.1)$$

$$X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^N$$

onde  $A(t)$  e  $B(t)$  são funções matriciais, variantes no tempo, de dimensão  $n \times n$  e  $n \times m$ , contínua e contínua por partes em relação a  $t$ , respectivamente.

O índice de desempenho a ser minimizado é dado por:

$$J(X_0, U(\cdot), t_0, t_f) = 1/2 \cdot X^T(t_f) \cdot H \cdot X(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (X^T(t)Q(t)X(t) + U^T(t)R(t)U(t)) dt \quad (2.2)$$

onde:  $t_0$  é o instante inicial;  $t_f$  é o instante final;  $H$  é uma matriz,  $Q(t)$  e  $R(t)$  são funções matriciais, as 3 reais, simétricas, sendo as duas primeiras semi-definidas positivas e a última definida positiva, todas contínuas por partes em relação a  $t$ . Esta teoria foi iniciada por Kalman (1960) e pode ser encontrada com mais detalhes em livros como Kirk (1970), Kwakernaak e Sivan (1972) e Kailath (1980).

Os valores selecionados para as matrizes  $H$ ,  $Q(t)$  e  $R(t)$  representam as penalizações impostas ao estado final, ao estado obtido e ao controle empregado ao longo do tempo, respectivamente. Como não há um processo sistemático para a escolha destes pesos, ela se torna trabalhosa e difícil, sendo normalmente feita por tentativa e erro. No Capítulo 4 apresentam-se alguns critérios que facilitam esta seleção.

Prova-se que a lei de controle que satisfaz a Equação 2.1 e minimiza a Equação 2.2 é dada por:

$$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t) \quad (2.3)$$

onde  $P(t)$  é o vetor de variáveis adjuntas ou co-estado. Nela, a existência de  $R^{-1}(t)$  é assegurada, pois  $R(t)$  é uma matriz definida positiva. Essa lei de controle representa a solução do problema em malha aberta. Prova-se também que  $P(t)$  pode ser dado por:

$$P(t) = K(t)X(t) \quad (2.4)$$

onde  $K(t)$  é a solução da equação diferencial matricial de Riccati, dada na sua forma geral por:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \quad (2.5)$$

com condição de contorno final  $K(t_f) = H$ .

Substituindo a Equação 2.4 na Equação 2.3 obtém-se:

$$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t) \quad (2.6)$$

que exprime  $U(t)$  como função linear, variante no tempo do estado do sistema, e representa a lei de controle ótimo em malha fechada.

---

*NOTA: A equação diferencial escalar de Riccati foi primeiramente estudada em 1700 por Jacopo Francesco, conde Riccati e James Bernoulli; e foi primeiramente chamada equação de Riccati por D'Alembert em 1763. Legendre introduziu a equação de Riccati no cálculo variacional em 1786 mas quem primeiro a empregou na teoria de controle foi R. Bellman em 1957. Em 1960 R. E. Kalman introduziu sua versão matricial e mostrou a importância das noções de controlabilidade e observabilidade no estudo das propriedades da equação de Riccati que surge no problema do regulador linear quadrático.*

A situação onde o processo é controlável para um intervalo de duração infinita merece uma atenção especial. Kalman (1960) mostrou que se em adição: 1) o sistema é completamente controlável, 2)  $H = 0$  e 3)  $A$ ,  $B$ ,  $R$  e  $Q$  são matrizes constantes, então a solução  $K(t)$  da Equação 2.5 tende para um valor constante  $K$ , para quando  $t_f \rightarrow \infty$ . As implicações práticas deste resultado são muito importantes uma vez que  $K(t) = 0$  facilita a solução da Equação 2.5 que, neste caso, fica na forma:

$$0 = -KA - A^T.K - Q + KBR^{-1}.B^T.K \quad (2.7)$$

que é a equação algébrica matricial de Riccati. No Capítulo 4 apresentam-se alguns métodos de solução desta equação a qual, uma vez obtida, é utilizada na extensão do regulador linear quadrático apresentada a seguir.

## 2.2 - A EXTENSÃO DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

### 2.2.1 - INTRODUÇÃO

Sabemos que, por excelência, a Natureza não é linear. Portanto o seu estudo por meio de um modelo linear pode conduzir a uma solução que é apenas uma primeira aproximação da solução real do problema. Logo, à medida que se deseja representar um fenômeno ou um sistema de forma mais real, o modelo utilizado deve (sempre que necessário e possível) incluir os termos não-lineares envolvidos.

A solução de problemas de controle ótimo com sistemas lineares é bem conhecida e estudada. Entretanto, quando o sistema não é linear, esta solução torna-se bem mais complicada. Com o objetivo de contornar parcialmente isto, Al'brekht (1962) estudou o problema de controle ótimo de maneira geral considerando um sistema de equações não-lineares mas analíticas e invariantes no tempo. Lukes (1969) uti

lizou tais conceitos e estendeu a teoria do regulador linear quadrático a sistemas não-lineares mas analíticos em torno da origem, variantes no tempo e com horizonte infinito. Willemstein (1975) mostrou que tal extensão também é válida para sistemas não-lineares mas analíticos em torno da origem, variantes no tempo e com horizonte finito. Um resumo desta última é apresentado a seguir.

### 2.2.2 - TEORIA

Considerando:

i) um sistema dado por:

$$\forall t \in [t_0, t_f] , \dot{X}(t) = F(X(t), U(t), t) \quad (2.8)$$

$$X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^N$$

com:

$$F(X(t), U(t), t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) + \\ + f(X(t), U(t), t)$$

onde:  $A(t)$  e  $B(t)$  são funções matriciais, reais, contínuas em relação a  $t$ , de dimensão  $n \times n$  e  $n \times m$ , respectivamente; e  $f(X(t), U(t), t)$  é uma função contínua em relação a  $t$  que contém os termos não-lineares do sistema em relação a  $X(t)$ ,  $U(t)$  e  $t$ .

ii) um índice de desempenho dado por:

$$J(X_0, U(\cdot), t_0, t_f) = 1/2 X^T(t_f) H X(t_f) + \\ + 1/2 \int_{t_0}^{t_f} G(X(t), U(t), t) dt \quad (2.9)$$

com:

$$G(X(t), U(t), t) = X^T(t)Q(t)X(t) + U^T(t)R(t)U(t) + \\ + g(X(t), U(t), t)$$

onde:  $H$  é uma matriz,  $Q(t)$  e  $R(t)$  são funções matriciais, reais, sendo as duas primeiras semi-definidas positivas e a última definida positiva, todas contínuas em relação a  $t$ . A função  $g(X(t), U(t), t)$  também é contínua em relação a  $t$ , e contém termos não-lineares do sistema em relação a  $X(t)$ ,  $U(t)$  e  $t$ .

iii) uma lei de controle dada por:

$$U(t) = D(t)X(t) + h(X(t), t) \quad (2.10)$$

onde:  $D(t)$  é uma função matricial, real, contínua em relação a  $t$ , de dimensão  $n \times n$  e  $h(X(t), t)$  é também uma função contínua em relação a  $t$ , a qual contém os termos não-lineares do controle em relação a  $X(t)$  e  $t$ .

iv) funções  $F(X(t), U(t), t)$ ,  $G(X(t), U(t), t)$  e  $U(t)$  sejam analíticas em torno de  $X(t) = 0$  e  $U(t) = 0$ , possibilitando suas expansões em séries de potências (Al'brekht, 1962).

Prova-se, por meio do Teorema 2.1 apresentado por Willemstein (1977) e do Teorema 1.1 apresentado por Lukes (1969), que para um processo de controle em  $R^N$ , existe uma única lei de controle ótimo  $U^*(t)$  (onde  $*$  indica extremante) solução da equação funcional:

$$\begin{aligned} & F_U \Big| (X(t), U^*(t), t) \Big|^T \cdot J_{\dot{X}}(X(t), U^*(t), t, t_f) + \\ & + G_U \Big| (X(t), U^*(t), t) \Big| = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

para pequenos valores do módulo de  $X(t)$ .

Nestas condições a lei de controle ótimo e o índice de desempenho são dados respectivamente por:

$$U^*(t) = D^*(t)X(t) + h^*(X(t), t) \quad (2.12)$$

$$J(X_0, U^*(.), t_0, t_f) = X_0^T K^*(t_0) X_0 + j^*(X_0, t_0) \quad (2.13)$$

e vão depender da expansão em série feita no problema (onde  $D^*(t)$  e  $K^*(t_0)$  são  $> 0$ ). Nelas  $h^*(X(t), t)$  e  $j^*(X_0, t_0)$  representam os termos não-lineares em relação a  $X(t)$  e a  $X_0$ , com termos iniciais de segunda e terceira ordens, respectivamente.

OBS.: Visando uma notação menos carregada são adotadas as seguintes convenções:

$$X = X(t)$$

$$U = U^*(t)$$

$$J(X, U, t) = J^*(X(t), U^*(t), t, t_f)$$

Como as funções  $U$  e  $J(X, U, t)$  são analíticas em torno de  $X = 0$  e  $U = 0$ , pode-se então expandi-las em séries de potências, na forma:

$$U = U(1) + U(2) + U(3) + \dots \quad (2.14)$$

$$J(X,U,t) = J(2)(X,U,t) + J(3)(X,U,t) + J(4)(X,U,t) + \dots \quad (2.15)$$

onde:

$$U(1) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X \quad (2.16)$$

$$J(2)(X,U,t) = X^T K(t)X \quad (2.17)$$

O método usado por Lukes (1969) e Willemstein (1975) para o cálculo dos termos não-lineares de  $U$  e  $J(X,U,t)$  baseia-se no fato de que  $U$  e  $J$  são soluções das duas seguintes equações funcionais:

$$F(X,U,t)^T \cdot J_X(X,U,t) + J_t(X,U,t) + G(X,U,t) = 0 \quad (2.18)$$

$$F_U(X,U,t) \cdot J_X(X,U,t) + G_U(X,U,t) = 0 \quad (2.19)$$

Substituindo as Equações 2.14 e 2.15 nas Equações 2.18 e 2.19, e igualando os coeficientes de mesma ordem, obtêm-se os termos  $U(k)$  e  $J(m)(X,U,t)$  através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} & \left| A'(t)X \right|^T \cdot \left| J(m)(X,U,t) \right|_X + \left| J(m)(X,U,t) \right|_t = \\ & - \sum_{k=3}^{m-1} \left| B(t)U(m-k+1) \right|^T \cdot \left| J(k)(X,U,t) \right| - \\ & - \sum_{k=2}^{m-1} \left| f(m-k+1) \right|^T \cdot \left| J(k)(X,U,t) \right|_X - \\ & - 2 \cdot \sum_{k=2}^{(m-1)/2} \left| U(k) \right|^T \cdot \left| R(t)U(m-k) \right| - \end{aligned}$$

$$- \left[ U(m/2) \right]^T \cdot \left[ R(t)U(m/2) \right] -$$

$$- g(m)(X,U,t) \tag{2.20}$$

e

$$U(k) = -1/2 \cdot R^{-1}(t) \cdot \left\{ B^T(t) \left[ J(k+1) \right]_X + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \left[ f_{U(j)}(X,U,t) \right] \cdot \left[ J(k+1) \right]_X +$$

$$\left. + g_U(k)(X,U,t) \right\} \tag{2.21}$$

onde:  $m = 3,4,5, \dots$ ;  $k = 2,3,4, \dots$ ;  $A'(t) = A(t)+B(t)D(t)$  e  $(k)$  representa a parte inteira de  $k$ . Os valores ímpares de  $m$  presentes em  $U(m)$  são desprezados. Os somatórios  $\sum_{\ell}^k$  em que  $k < \ell$  são iguais a zero. Provas e detalhes a respeito deste método podem ser encontrados nos trabalhos de Lukes (1969) e Willemstein (1975).

Como ilustração do método considera-se o caso de um sistema controlável, invariante no tempo ( $t_0 = 0$ ), com horizonte infinito ( $t_f \rightarrow \infty$ ) e com a lei de controle e o índice de desempenho expandidos somente até os respectivos segundos termos:

$$U = U(1) + U(2) \tag{2.22}$$

$$J = J(2) + K(3) \tag{2.23}$$

onde:

$$U(1) = -R^{-1}B^T K X \tag{2.24}$$

$$J(2) = X^T K X \quad (2.25)$$

K é a matriz solução da equação algébrica de Riccati 2.7.

Os segundos termos das duas séries não são lineares e são encontrados fazendo  $m = 3$  e  $k = 2$  nas Equações 2.20 e 2.21 respectivamente, de onde se obtêm:

$$A' \cdot X \cdot \left. \frac{\partial J(3)}{\partial X} \right|_X = - f(2)(X) \left. \frac{\partial J(2)}{\partial X} \right|_X \quad (2.26)$$

$$U(2) = -1/2 \cdot R^{-1} B^T \left. \frac{\partial J(3)}{\partial X} \right|_X \quad (2.27)$$

onde  $A' = A^T - BR^{-1}B^T K$  e  $f(2)(X)$  contém os termos do segundo grau em  $X$  presentes em  $F(X,U,t)$ .

O termo  $\left. \frac{\partial J(3)}{\partial X} \right|_{X=X(t)}$  representa a derivada parcial de  $J(3)$  em relação a  $X$ , avaliada em  $X(t)$ , e é encontrado através de uma expansão em série, da forma:

$$J(3) = \sum_{\ell=0}^n \alpha_{\ell} \cdot X_i \cdot X_j \cdot X_k \quad (2.28)$$

onde  $n$  é o número de todas as combinações possíveis entre as variáveis de estados no termo  $X_i \cdot X_j \cdot X_k$  e os  $\alpha_{\ell}$  são constantes determinadas por meio de um sistema de equações lineares resultantes da Equação 2.26. (ver Apêndice A).

Desta forma observa-se que a expressão dada pela Equação 2.22 representa uma lei de controle ótimo não-linear em malha fechada, e que, neste caso, a determinação da matriz  $K$  e dos  $\alpha$ 's, soluções das Equações 2.7 e 2.26 respectivamente, torna-se mais simples por se tratar de equações algébricas. Utilizam-se estas simplificações ao se fazer o equacionamento do problema, no Capítulo seguinte.

## CAPÍTULO 3

### SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE

Neste Capítulo descrevem-se alguns aspectos dos modos de operação do controle de atitude de um satélite artificial, citando o tipo de atuador empregado em cada um destes. Em seguida faz-se um primeiro equacionamento da dinâmica do satélite considerando os torques ambientais e giroscópicos, onde estes últimos são inicialmente devidos apenas à velocidade angular do satélite. Finalmente apresenta-se um diagrama de blocos do sistema de controle incluindo também os torques giroscópicos devidos às velocidades angulares das rodas a reação e faz-se o seu equacionamento.

#### 3.1 - MODOS DO CONTROLE DE ATITUDE

A finalidade com que um satélite é lançado e usado determina o tipo de sistema de controle de atitude que deve ser empregado. Este, por sua vez, pode ser classificado como passivo (por exemplo: estabilização por "spin", gradiente de gravidade) ou ativo (por exemplo: jatos a gás, rodas a reação e bobinas magnéticas).

A colocação e a manutenção de um satélite na sua atitude de operação e as eventuais correções nesta implicam um conjunto de modos nos quais se aplicam várias leis de controle. Exemplos de alguns destes modos são: redução da velocidade angular do satélite, aquisição de uma determinada atitude (através do apontamento - grosso ou fino - de um ou mais eixos do satélite) e operação normal (na qual procura-se manter o satélite na sua atitude de operação).

A redução da velocidade angular do satélite pode ser conseguida por meio de atuadores que gerem torques opostos a essas velocidades. Neste modo e no de aquisição é comum o emprego de um atuador do tipo liga-desliga (por exemplo: jatos a gás). No modo de operação normal deve ser empregado um atuador linear (por exemplo: rodas a reação),

uma vez que a velocidade envolvida é pequena, o que permite a utilização de uma lei de controle aproximadamente linear em relação ao estado. Além disso, o atuador empregado na fase de operação normal deve ser capaz de absorver os torques externos que atuam sobre o satélite e ser alimentado por uma fonte de energia renovável. Esta absorção de torques externos pode elevar a velocidade angular de uma roda ao seu máximo valor, exigindo que esta seja "dessaturada". Isto pode ser feito utilizando-se jatos a gás ou bobinas magnéticas.

Como o atuador aqui empregado é linear, este trabalho compreende o estudo do modo de operação normal, onde as velocidades do satélite são pequenas. O funcionamento daquele é detalhado por Souza (1981) e sua configuração é mostrada na Figura 3.1. Basicamente seu funcionamento consiste na geração de torques graças à aceleração de uma roda a reação, ligado ao rotor de um motor elétrico, em relação ao seu estator que é fixo à estrutura do satélite. O princípio de funcionamento é o da conservação do momento angular do conjunto satélite/roda, pois o torque do motor apenas incrementa as respectivas parcelas com quantidades simétricas, fazendo com que o satélite gire de modo a reduzir o ângulo de erro. Espera-se que a roda opere em torno de velocidade (relativa) nula ou que, ao menos, a média desta ao longo de um período orbital o seja. Se isto não acontecer, tal média aumentará ao longo de vários períodos acabando por demandar a dessaturação da roda anteriormente citada.

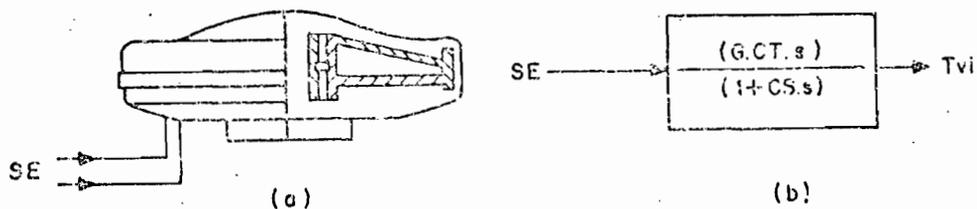


FIG. 3.1: - Atuador a roda a reação (a) e sua função de transferência aproximada (b).

O atuador a roda a reação apresenta as seguintes vantagens: 1) produz torques de baixíssimo valor e proporcionais aos ângulos de erro; 2) consome energia elétrica (renovável) e não massa (não renovável) como é o caso do atuador a jatos a gás; 3) na presença de torques externos cíclicos, opera com velocidade média de rotação aproximadamente constante constituindo-se por isto no sistema adequado para a operar. E as seguintes desvantagens: 1) necessidade de redução da velocidade angular da roda (dessaturação) para que esta não atinja o seu limite máximo pré-estabelecido; 2) o aparecimento de torques giroscópicos devidos ao acoplamento entre os eixos, fazendo com que a correção da atitude em torno de um eixo gere torques em torno dos outros dois eixos (desalinhando-os).

### 3.2 - TORQUES AMBIENTAIS

A simulação da atitude requer uma modelagem dos torques ambientais que atuam sobre o satélite. Para a integração numérica das Equações de Euler, os torques ambientais devem ser modelados como função do tempo, da posição e da atitude do satélite. Como ilustração desta relação a Figura 3.2 mostra uma estimativa dos principais torques terrestres em função da posição de um satélite do tipo Sputnik III (Beletskii, 1966).

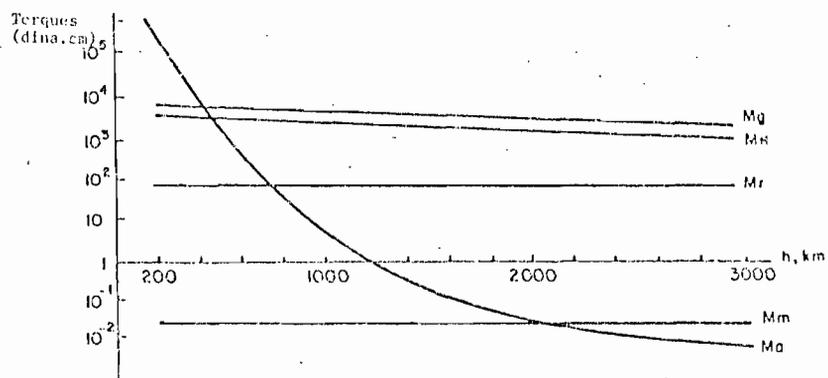


Fig. 3.2 - Torques ambientais em função da altura.

onde:  $M_g$  = Torque gravitacional,  
 $M_a$  = Torque aerodinâmico,  
 $M_h$  = Torque magnético,  
 $M_r$  = Torque de radiação,  
 $M_n$  = Torque de impacto de micrometeoritos.

Na integração das equações de Euler realizada neste trabalho utiliza-se uma modelagem dos torques externos feita por Carrara (1982). Nesta, em consequência da baixa altitude da órbita (aproximadamente 500 km) do satélite considerado (TD-1A), os torques ambientais considerados são: o aerodinâmico, o magnético e o gradiente de gravidade, cuja soma é incorporada à dinâmica do movimento do satélite através dos termos Tdm 1, 2 e 3. Estes estão presentes no equacionamento feito na seção seguinte.

### 3.3 - DINÂMICA DO MOVIMENTO DO SATÉLITE

Três sistemas de referência são relevantes no controle de atitude de um satélite artificial. O primeiro, chamado "referencial (quase) inercial" é um sistema com origem no centro de massa da Terra e cujo eixo: X aponta para o Equinócio Vernal (na intersecção do plano do equador terrestre com o plano da eclíptica); Z aponta na direção e sentido do vetor velocidade angular terrestre; Y forma o triedro direto XYZ, (ver Figura 3.3).

O segundo, chamado "referencial orbital" é um sistema com origem no centro de massa da Terra, coincidente com um dos focos da elipse formada e cujos eixos  $X_o$  e  $Y_o$  estão contidos no plano da órbita do satélite sendo:  $X_o$  na direção e sentido daquele foco para o perigeu;  $Y_o$  no sentido direto do movimento do satélite e  $Z_o$  formando o triedro direto  $X_oY_oZ_o$ , (ver Figura 3.4).

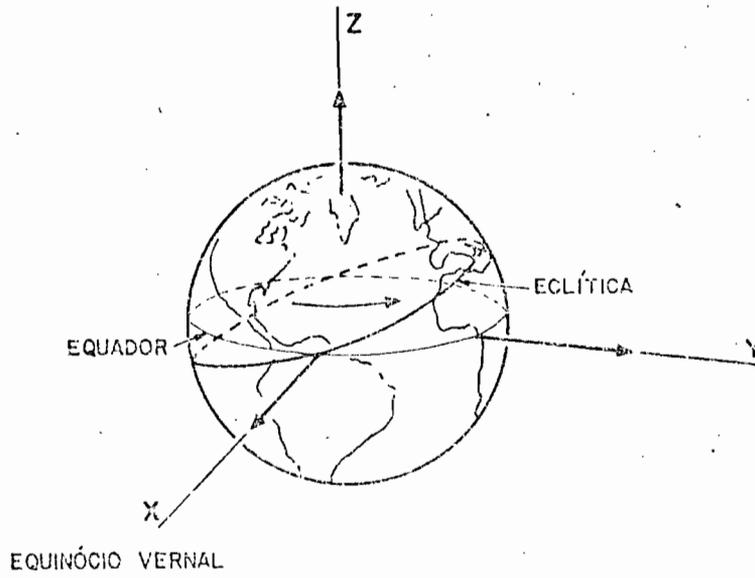


Fig. 3.3 - Referencial inercial.

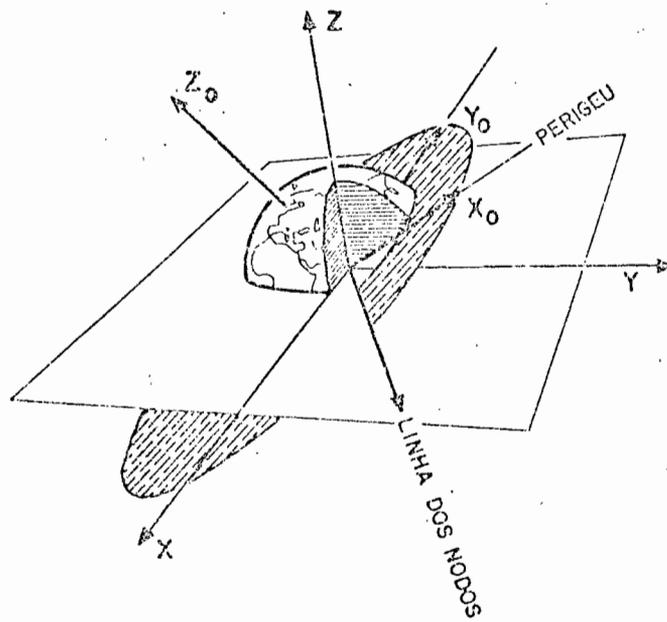


Fig. 3.4 - Referencial orbital.

O terceiro, chamado "referencial móvel" é um sistema com origem no centro de massa do satélite, com os eixos x, y e z mutuamente perpendiculares, fixos no corpo do satélite e dirigidos segundo os seus três eixos principais de inércia (ver Figura 3.5).

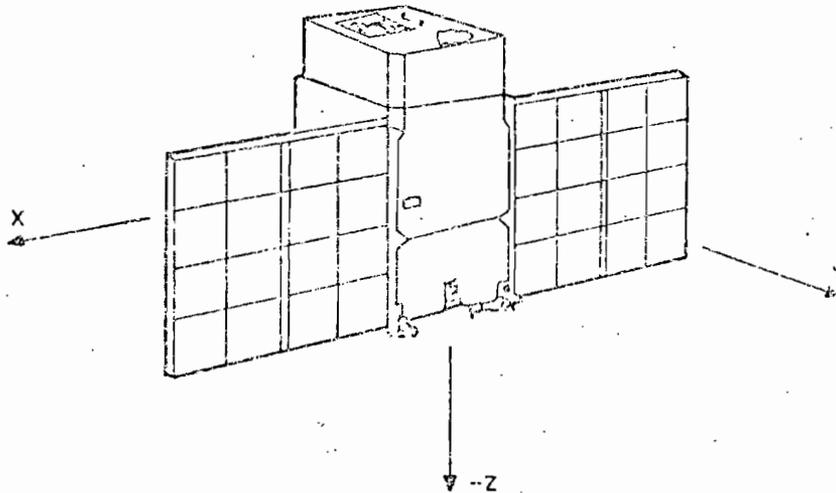


Fig. 3.5 - Referencial móvel.

As equações que descrevem a dinâmica do movimento do satélite em relação ao referencial inercial (X,Y,Z), são obtidas considerando que a soma dos torques devidos ao meio ( $T_{dm}$ ) que atuam sobre o satélite é igual à taxa de variação do seu momento angular ( $L_s$ ), ou seja:

$$\frac{dL_s}{dt} = T_{dm}; \quad (3.1)$$

que, reescritas em coordenadas do referencial móvel (x,y,z), são dadas por:

$$\frac{dL_s}{dt} + W \times L_s = T_{dm} \quad (3.2)$$

onde  $\vec{W}$  é a velocidade angular do satélite em relação ao referencial inercial.

Admitindo o satélite como um corpo rígido e com os eixos principais de inércia coincidentes com o sistema móvel, tem-se:

$$\vec{W} = W_1 \hat{i} + W_2 \hat{j} + W_3 \hat{k} \quad (3.3)$$

$$\vec{L}_S = I \cdot \vec{W}_S = I_1 W_1 \hat{i} + I_2 W_2 \hat{j} + I_3 W_3 \hat{k} \quad (3.4)$$

onde  $I$  é a matriz de inércia do satélite.

Substituindo as equações 3.3 e 3.4 em 3.2, obtêm-se as equações que descrevem a dinâmica do satélite em relação ao referencial inercial (Equações de Euler):

$$\begin{aligned} I_1 \dot{W}_1 + W_2 \cdot W_3 (I_3 - I_2) &= T_{dm1}, W_1(0) = W_{01} \\ I_2 \dot{W}_2 + W_1 \cdot W_3 (I_1 - I_3) &= T_{dm2}, W_2(0) = W_{02} \\ I_3 \dot{W}_3 + W_1 \cdot W_2 (I_2 - I_1) &= T_{dm3}, W_3(0) = W_{03} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Onde:  $W_1$ ,  $W_2$  e  $W_3$  representam as velocidades angulares em relação ao referencial inercial;  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os momentos principais de inércia do satélite e  $T_{dm1}$ ,  $T_{dm2}$  e  $T_{dm3}$  são os torques externos (devidos ao meio).

Os desvios angulares do satélite  $\beta$ ,  $\psi$  e  $\phi$  (Figura 3.6), os quais representam a sua atitude em relação ao referencial móvel, são dados pelas Equações 3.6 (Wertz, 1978).

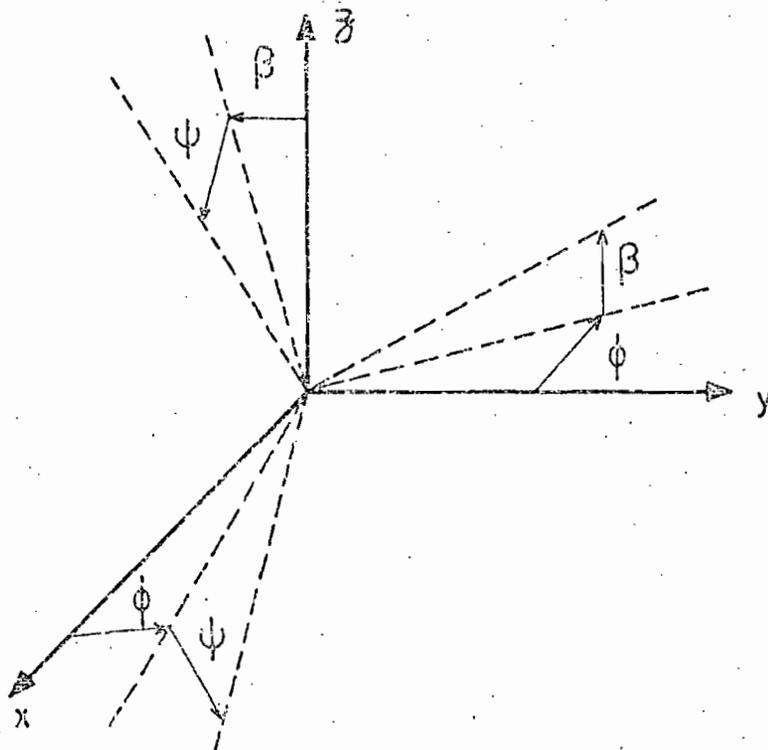


Fig. 3.6 - Desvios angulares do satélite.

$$\dot{\beta} = W_1 \cos \psi + W_3 \sin \psi$$

$$\dot{\psi} = W_2 - (W_3 \cos \psi - W_1 \sin \psi) \tan \beta \quad (3.6)$$

$$\dot{\phi} = (W_3 \cos \psi - W_1 \sin \psi) \cot \beta$$

Como os desvios angulares são pequenos, tem-se:

$$\dot{\beta} = W_1$$

$$\dot{\psi} = W_2$$

$$\dot{\phi} = W_3$$

e se  $\theta_1 \Delta \beta$ ,  $\theta_2 \Delta \psi$  e  $\theta_3 \Delta \phi$ :

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= W_1 ; \quad \theta_1(0) = \theta_{10} \\ \dot{\theta}_2 &= W_2 ; \quad \theta_2(0) = \theta_{20} \\ \dot{\theta}_3 &= W_3 ; \quad \theta_3(0) = \theta_{30}\end{aligned}\tag{3.7}$$

As Equações 3.5 podem ser reescritas na forma:

$$\begin{aligned}\dot{W}_1 &= U_1 + b_1.f_1 + a_1 ; \quad W_1(0) = W_{10} \\ \dot{W}_2 &= U_2 + b_2.f_2 + a_2 ; \quad W_2(0) = W_{20} \\ \dot{W}_3 &= U_3 + b_3.f_3 + a_3 ; \quad W_3(0) = W_{30}\end{aligned}\tag{3.8}$$

onde:  $a_1 = T_{dm1}/I_1$ ,  $a_2 = T_{dm2}/I_2$  e  $a_3 = T_{dm3}/I_3$  são termos relacionados com os torques externos;  $f_1 = W_2.W_3$ ,  $f_2 = W_1.W_3$  e  $f_3 = W_1.W_2$  são termos não lineares;  $b_1 = (I_3 - I_2)/I_1$ ,  $b_2 = (I_1 - I_3)/I_2$  e  $b_3 = (I_1 - I_2)/I_3$  são coeficientes constantes; e finalmente  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$  são termos relacionados com os controles, encontrados por meio da expansão em série de potências (Equação 2.14) os quais serão identificados ao se inserir os efeitos das rodas a reação na dinâmica do satélite (Seção 3.4).

Definindo as seguintes variáveis de estado:

$$\begin{aligned}X_1 &= W_1 & X_4 &= \theta_1 \\ X_2 &= W_2 & X_5 &= \theta_2 \\ X_3 &= W_3 & X_6 &= \theta_3\end{aligned}\tag{3.9}$$

reescrevem-se as Equações 3.5 e 3.7 na forma:

$$\dot{X} = A.X + B.U + f(X) + q(t) \quad (3.10)$$

$$X(t_0) = X_0$$

onde:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad f(X) = \begin{vmatrix} b_1.f_1 \\ b_2.f_2 \\ b_3.f_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Nesta notação  $f(X)$  representa os termos não-lineares,  $q(t)$  os torques externos,  $X$  as variáveis de estado e  $U$  as variáveis de controle.

Escrevendo o índice de desempenho na forma:

$$J(X_0, U(\cdot)) = 1/2 \cdot \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt \quad (3.11)$$

tem-se:

$$Q = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{vmatrix} \quad R = \begin{vmatrix} \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 \end{vmatrix}$$

que representam os pesos relacionados com o estado e com o controle, respectivamente.

A controlabilidade do sistema linear pode ser verificada através da expressão  $\rho \mid B, AB, \dots, A^{n-1} \cdot B \mid = n$  onde  $\rho$  representa o posto e  $n$  a dimensão do sistema. No caso,  $\rho = n = 6$ . É importante ressaltar que o problema de controle ótimo aqui colocada caracteriza um regulador fracamente não-linear, quadrático e invariante no tempo.

### 3.4 - TORQUES DE CONTROLE

Considerando os efeitos das rodas a reação na dinâmica do satélite na Equação 3.2, tem-se:

$$\frac{d}{dt} (L_S + L_V) + W \times (L_S + L_V) = T_{dm} \quad (3.12)$$

onde:

$L_V = J_V \cdot \omega_I$  é o momento angular das rodas a reação, em relação ao referencial inercial.

$J_V = \bar{J}$  é a matriz de inércia das rodas a reação.

$\omega_I = \omega + W$  é a velocidade angular das rodas a reação em relação ao referencial inercial.

$\omega = \bar{\omega}$  é a velocidade angular das rodas a reação em relação ao referencial móvel.

Substituindo estas expressões na Equação 3.12, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 I \cdot \dot{W} + J_V \cdot \dot{\omega}_I + Wx \left| I \cdot W + J_V \cdot \omega_I \right| &= T_{dm} \\
 I \cdot \dot{W} + J_V \cdot (\dot{\omega} + \dot{W}) + Wx \left| I \cdot W + J_V \cdot (\omega + W) \right| &= T_{dm} \\
 (I + J_V) \cdot \dot{W} + J_V \cdot \dot{\omega} + Wx \left| (I + J_V) \cdot W + J_V \cdot \omega \right| &= T_{dm} \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

onde  $J_V \cdot \omega$  representa os torques das rodas a reação ( $T_{Vi}$ ) como sinal trocado.

Considerando que  $J_V \ll I$  na Equação 3.13, tem-se:

$$I \cdot \dot{W} + Wx \left| I \cdot W + J_V \cdot \omega \right| = T_{dm} + T_{Vi} \quad (3.14)$$

onde:

$$Wx (I \cdot W) = W_2 W_3 (I_3 - I_2) \hat{i} + W_1 W_3 (I_1 - I_3) \hat{j} + W_1 W_2 (I_2 - I_1) \hat{k}$$

$$Wx (J_V \cdot \omega) = (J_{V3} \omega_3 W_1 - J_{V2} \omega_2 W_3) \hat{i} + (J_{V1} \omega_1 W_3 - J_{V3} \omega_3 W_1) \hat{j} + (J_{V2} \omega_2 W_1 - J_{V1} \omega_1 W_2) \hat{k}$$

que, substituído na Equação 3.14, produz finalmente:

$$I_1 \dot{W}_1 + W_2 W_3 (I_3 - I_2) + J_{V3} \omega_3 W_2 - J_{V2} \omega_2 W_3 = T_1$$

$$W_1(0) = W_{10}$$

$$I_2 \dot{W}_2 + W_1 W_3 (I_1 - I_3) + J_{V1} \omega_1 W_3 - J_{V3} \omega_3 W_1 = T_2 \quad (3.15)$$

$$W_2(0) = W_{20}$$

$$I_3 \dot{W}_3 + W_1 W_2 (I_2 - I_1) + J_{V2} \omega_2 W_1 - J_{V1} \omega_1 W_2 = T_3$$

$$W_3(0) = W_{30}$$

onde  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  são as componentes dos torques devidos ao meio ( $T_{dm}$ ) e dos torques de controle ( $T_{vi}$ ).

Os torques de controle  $T_{vi}$  1, 2 e 3 são gerados em torno dos eixos principais de inércia de satélite por meio da aceleração das rodas a reação. As velocidades das rodas e os sinais elétricos a serem aplicados às rodas, para produzir tais torques, são calculados através das seguintes equações, respectivamente:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= -T_{vi1}/J_{v1} \quad , \quad \omega_1(0) = \omega_{10} \\ \dot{\omega}_2 &= -T_{vi2}/J_{v2} \quad , \quad \omega_2(0) = \omega_{20} \\ \dot{\omega}_3 &= -T_{vi3}/J_{v3} \quad , \quad \omega_3(0) = \omega_{30}\end{aligned}\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}SE1 &= (T_{vi1} + J_{v1}\dot{\omega}_1/CT1)/G1 \\ SE2 &= (T_{vi2} + J_{v2}\dot{\omega}_2/CT2)/G2 \\ SE3 &= (T_{vi3} + J_{v3}\dot{\omega}_3/CT3)/G3\end{aligned}\tag{3.17}$$

onde:  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  são as velocidades angulares;  $J_{v1}$ ,  $J_{v2}$  e  $J_{v3}$  são os momentos principais de inércia;  $G1$ ,  $G2$  e  $G3$  são os ganhos;  $CT1$ ,  $CT2$  e  $CT3$  são as constantes de tempo; e  $SE1$ ,  $SE2$  e  $SE3$  são os sinais elétricos, todos relacionados com as rodas a reação.

A Figura 3.7 mostra o diagrama de blocos do sistema de controle para cada um dos eixos do satélite e seus respectivos acoplamentos. Estes são responsáveis pelas não-linearidades do sistema e provocam o aparecimento dos efeitos giroscópicos. Este diagrama de blocos contém a dinâmica do satélite (Equações de Euler), os atuadores (rodas a reação) e os sensores (de velocidade e de ângulos).

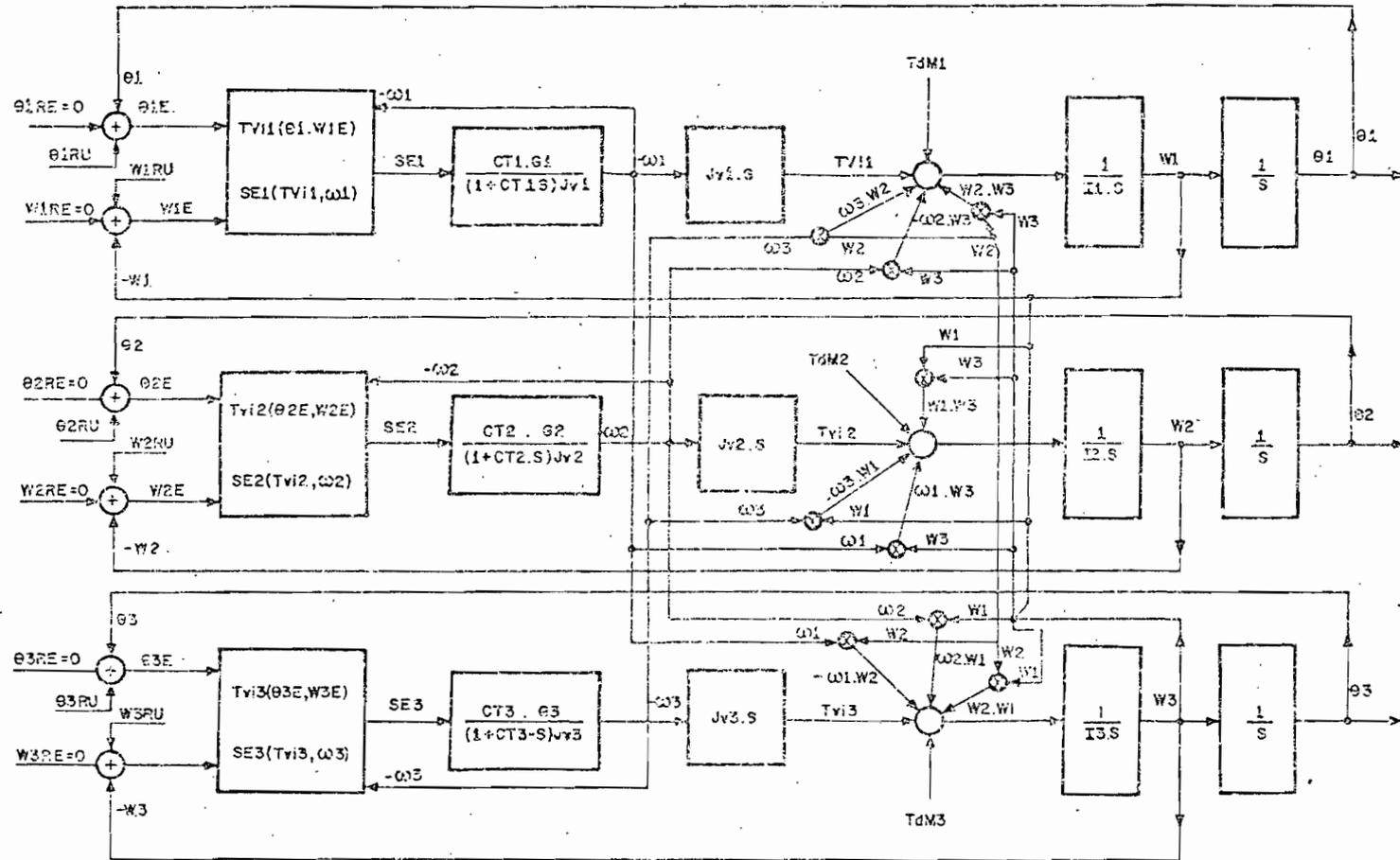


Fig. 3.7 - Diagrama de blocos do sistema de controle do satélite.

Na prática  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  seriam medidos por tacômetros;  $T_{vi1}$ ,  $T_{vi2}$  e  $T_{vi3}$  seriam fornecidos pelos controladores; e  $SE_1$ ,  $SE_2$  e  $SE_3$  seriam calculados através das Equações 3.16. Para isto basta que a relação entre  $SE_j$  e  $T_{vi_j}$  seja biunívoca (para cada  $\omega_j$ ), e não necessariamente linear como expresso anteriormente (e detalhado por White e Hansen (1961)).

As velocidades angulares das rodas a reação não foram inseridas como variáveis de estado nas Equações 3.10, pois esta inserção obrigaria (erroneamente) a redução simultânea (através da teoria do regulador) das velocidades angulares (e ângulos) do satélite e das velocidades angulares das rodas, utilizando para isso somente torques internos, o que violaria o princípio de funcionamento do conjunto satélite/roda, que é o da conservação do momento angular. Entretanto estas velocidades são inseridas na dinâmica do problema através dos termos não-lineares provenientes dos produtos destas com as velocidades angulares do satélite representadas nas Equações 3.10 pelo termo  $f(X)$ .

A implementação numérica realizada no Capítulo seguinte consiste basicamente na integração das Equações 3.10 (obtendo-se as velocidades angulares e ângulos do satélite), e da Equação 3.16 (obtendo-se as velocidades das rodas) as quais, substituídas nas Equações 3.17, permitem determinar os sinais elétricos aplicados nas rodas a reação, que por sua vez geram os torques que tendem a reduzir as velocidades e os ângulos do satélite.

## CAPÍTULO 4

### IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste Capítulo apresentam-se alguns critérios para a seleção das matrizes peso  $Q$  e  $R$ . Discutem-se as soluções numéricas: da equação algébrica matricial de Riccati 2.7; do sistema algébrico formado a partir da Equação 2.26; e da integração da Equação 3.15. Em seguida apresentam-se: um fluxograma do programa implementado, os valores iniciais e as constantes utilizadas nesta implementação. Finalmente, faz-se o cálculo da Sensibilidade do sistema e discute-se o cálculo do Índice de desempenho.

#### 4.1 - SELEÇÃO DAS MATRIZES PESO $Q$ e $R$

Com o objetivo de melhor compreender a minimização realizada na Equação 3.6, coloca-se a seguinte questão: Por que razão, as matrizes  $Q$  e  $R$  estão inseridas no integrando de  $J(X_0, U(\cdot), t_0, t_f)$ ? A resposta a esta questão fica clara quando se observa que uma redução arbitrariamente rápida do estado pode ser conseguida às custas de um aumento correspondentemente grande do controle empregado, implicando contudo uma impossibilidade prática na implementação de tal solução. Por outro lado, uma redução arbitrariamente grande no controle pode provocar uma grande elevação do estado, situação indesejável num processo de controle de atitude. Logo, o que se deseja ao se incluir  $Q$  e  $R$  no integrando é um compromisso dos valores destas matrizes com a realidade prática do problema.

Quando se utiliza o critério quadrático, a seleção das matrizes peso torna-se um processo extremamente trabalhoso. Usualmente esta seleção consiste em verificar, após várias simulações do problema, quais os valores destas matrizes que melhor satisfazem a certos critérios (como por exemplo, porcentagem de sobrelevação, máximo controle e tempo de estabilização), que, quando alcançados, refletem um melhor de

sempenho do sistema. Isto se deve ao fato de não existir um método sistemático para tal seleção. É usual adotar-se a forma diagonal para  $Q$ ,  $R$ , pois esta possibilita que as componentes do estado e do controle sejam penalizadas individualmente, facilitando o ajuste e a interpretação física destas. A sistemática empregada neste trabalho para a seleção das matrizes pesos consistiu inicialmente de várias simulações. Nestas, por meio de tentativas e erros, foram selecionados os valores das matrizes peso que melhor satisfizeram os critérios relacionados com o tempo de estabilização e com a magnitude dos torques empregados no controle. Uma segunda etapa correspondeu ao aperfeiçoamento dos valores obtidos na primeira, de forma a melhorar principalmente o tempo de estabilização. É interessante ressaltar que esta seleção está diretamente relacionadas com: i) a equação (diferencial ou algébrica) matricial de Riccati e ii) a lei de controle  $U = -R^{-1}B^T K + \dots$  determinada. Maiores detalhes quanto a esta seleção podem ser encontrados nos livros de Bryson e Ho (1969), Kwakernaak e Sivan (1972) e D'Azzo e Houpis (1975).

#### 4.2 - MÉTODOS NUMÉRICOS EMPREGADOS

A solução numérica implementada pode ser dividida basicamente em três etapas. A primeira corresponde à solução da equação algébrica matricial de Riccati 2.7. Uma vez determinados os valores de  $K$  nesta etapa, passa-se à segunda que consiste na determinação dos valores das constantes  $\alpha$  por meio da solução do sistema algébrico formado pela Equação 2.26. A terceira e última etapa é a integração numérica da Equação 3.15. Na Figura 4.1 apresenta-se um fluxograma destas três etapas.

Existem vários métodos numéricos para a solução da equação algébrica matricial de Riccati. Entre eles pode-se citar: integração direta, Kalman-Englar, diagonalização e Newton-Raphson (Kwakernaak e Sivan, 1972). Utilizou-se neste trabalho o método de Newton-Raphson (Merriam, 1978), que pelo fato de ser um método iterativo necessita de um valor inicial ( $K_0$ ), o qual deve satisfazer a condição de que a matriz  $A-SK_0$  (onde  $S = BR^{-1}B^T$ ) tenha autovalores com parte real negativa,

(Kwakernaak e Sivan (1972)), a qual representa a condição necessária e suficiente para que o correspondente sistema seja assintoticamente estável.

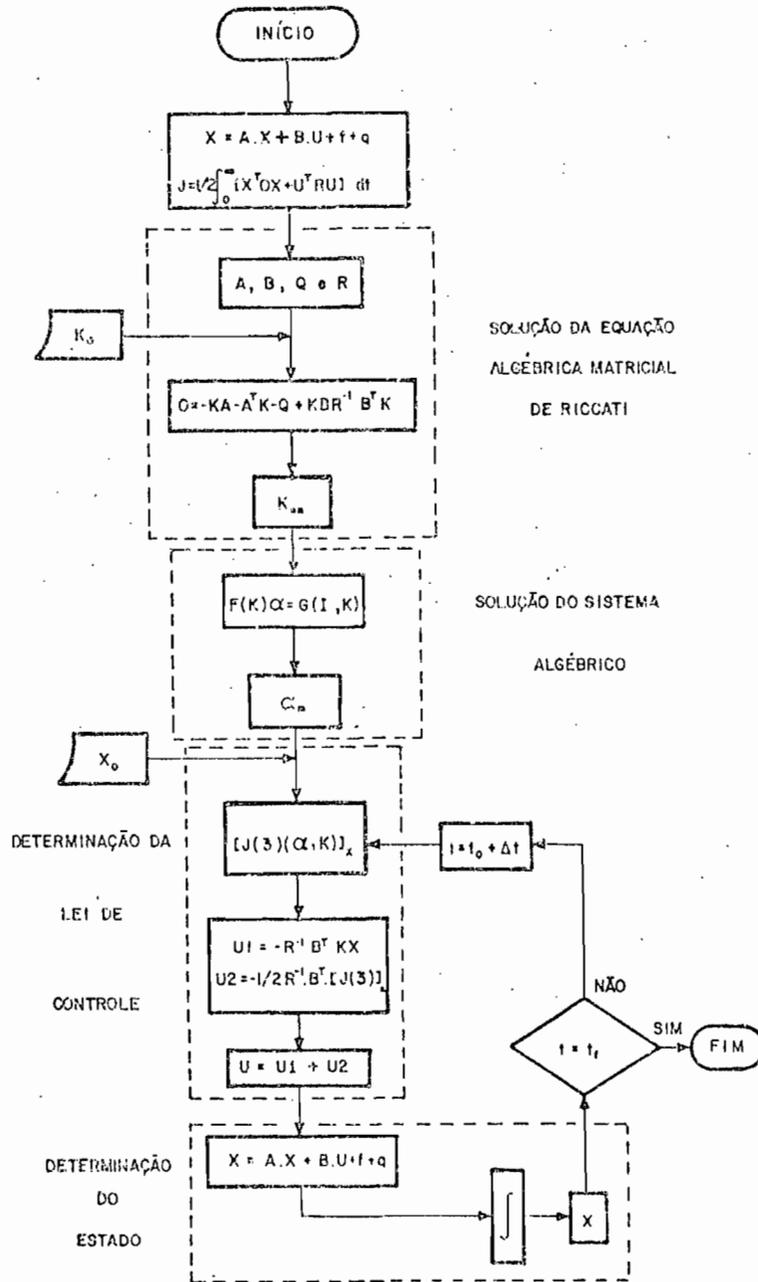


Fig. 4.1 - Fluxograma do programa implementado.

Ao se montar o sistema algébrico a partir da Equação 2.26 verificou-se que a matriz contida neste é esparsa. Devido a este fato, utilizou-se na solução deste sistema um método direto (eliminação de Gauss, dado por Forsythe e outros, 1977) ao invés de um método iterativo (por exemplo Gauss-Siedel), pois o primeiro aproveita o grande número de zeros da matriz esparsa com o objetivo de economizar tempo de processamento e memória. Para a integração das equações diferenciais do Sistema 3.15, utilizou-se um método de Runge-Kutta de ordem 4(5) detalhado por Forsythe e outros (1977).

#### 4.3 - VALORES INICIAIS E PARÂMETROS

Neste trabalho realizam-se três implementações numéricas. Na primeira faz-se uma comparação da lei de controle aqui determinada (chamada ótima), com outra (chamada clássica) simulada por Souza (1981). Estas implementações foram feitas no computador Burroughs B-6800 do INPE. Com o objetivo de manter os resultados obtidos comprometidos com a realidade, as constantes de tempo, os ganhos e os valores iniciais para os ângulos e para as velocidades angulares foram retirados da missão TD-1A, particularmente do modo 5 (fase final de apontamento, e operação normal) da simulação feita por Souza (1981) para o mesmo satélite. Estes valores e a matriz inicial  $K_0$  são dados na Tabela 4.1. Já na Tabela 4.2 são fornecidos os valores dos erros nas estimativas de  $\theta_e$  e  $W_e$ , as inércias e as matrizes peso  $Q$  e  $R$  relacionadas com o índice de desempenho.

Na segunda simulação faz-se uma comparação do comportamento das saídas do sistema (velocidade angular de erro e ângulo de erro) quando sobre o sistema atua a extensão do regulador e quando só atua o regulador, a medida em que as condições iniciais (CI) são elevadas.

Na terceira simulação modelam-se os erros nas estimativas de  $\theta_e$  e  $W_e$  como variáveis aleatórias com distribuição gauss

siana de média nula e desvio padrão  $\sigma$  dados respectivamente por:  $\theta_{ei}/3$  e  $W_{ei}/3$  com  $i = 1,2,3$ . (Ver Tabela 4.2).

TABELA 4.1

CONSTANTES, GANHOS E CONDIÇÕES INICIAIS EMPREGADAS NA SIMULAÇÃO

CTES. DE TEMPO (S)	GANHOS (N.m/V)	MATRIZ $K_0$
$CT_1 = 20$	$G_1 = 8,9013 \times 10^{-3}$	1 0 1 0 1 0
$CT_2 = 20$	$G_2 = 8,9013 \times 10^{-3}$	0 1 0 1 0 1
$CT_3 = 20$	$G_3 = 8,9013 \times 10^{-3}$	1 0 1 0 1 0
		0 1 0 1 0 1
		1 0 1 0 1 0
		0 1 0 1 0 1

$\theta_0$ (rad)	$W_0$ (rad/s)	$\omega_0$ (rad/s)
$\theta_{01} = 9,70402 \times 10^{-3}$		$W_{01} = -1,90080 \times 10^{-4}$
$\theta_{02} = 2,98003 \times 10^{-2}$		$W_{02} = 1,37536 \times 10^{-3}$
$\theta_{03} = 2,18882 \times 10^{-3}$		$W_{03} = 3,13759 \times 10^{-4}$

CI1	CI2
$\theta_{01} = 0,085$	$\theta_{01} = 0,075$
$\theta_{02} = 0,085$	$\theta_{02} = 0,075$
$\theta_{03} = 0,085$	$\theta_{03} = 0,075$
$W_{01} = 0,085$	$W_{01} = 0,075$
$W_{02} = 0,085$	$W_{02} = 0,075$
$W_{03} = 0,085$	$W_{03} = 0,075$
$\omega_{01} = 100,0$	$\omega_{01} = 500,0$
$\omega_{02} = 100,0$	$\omega_{02} = 500,0$
$\omega_{03} = 100,0$	$\omega_{03} = 500,0$

TABELA 4.2

PESOS, MOMENTOS DE INÉRCIA E ERROS NAS ESTIMATIVAS EMPREGADOS NA SIMULAÇÃO

PESOS		
$\lambda_1 = 0,1$	$\lambda_7 = 1,0$	$\lambda_{13} = 0,1$
$\lambda_2 = 0,01$	$\lambda_8 = 0,1$	$\lambda_{14} = 0,01$
$\lambda_3 = 1,0$	$\lambda_9 = 1,0$	$\lambda_{15} = 0,1$
$\lambda_4 = 0,01$	$\lambda_{10} = 0,001$	$\lambda_{16} = 1,0$
$\lambda_5 = 0,00001$	$\lambda_{11} = 0,00001$	$\lambda_{17} = 0,1$
$\lambda_6 = 0,01$	$\lambda_{12} = 0,001$	$\lambda_{18} = 1,0$

MOMENTOS DE INÉRCIA (Kg. m <sup>2</sup> )	
$I_1 = 225$	$J_{v1} = 0,017$
$I_2 = 207$	$J_{v2} = 0,017$
$I_3 = 121$	$J_{v3} = 0,017$

ERROS NAS ESTIMATIVAS DE $\theta_e$ (GRAUS) E $\omega_e$ (GRAUS/S)	
$\theta_{e1} = 0,3$	$\omega_{e1} = 0,005$
$\theta_{e2} = 0,3$	$\omega_{e2} = 0,007$
$\theta_{e3} = 0,3$	$\omega_{e3} = 0,008$

PRECISÃO DE APONTAMENTO (GRAUS)	TAXA DE VARIAÇÃO DE ATITUDE (GRAUS/S)
< 0,7	< 0,02

#### 4.4 - SENSIBILIDADE

As perturbações ambientais, os ruídos nos sensores, bem como as variações em certos parâmetros são fatores que podem interferir no desempenho de um sistema de controle. No último caso, uma variação numa característica de um componente acarreta uma variação na função de transferência e, conseqüentemente, na grandeza controlada. Tal efeito pode ser expresso em termos de uma Função Sensibilidade(S). Esta é uma medida da variação porcentual na resposta do sistema (c) devida a uma variação porcentual em um parâmetro (a), e é dada por (D'Azzo e Houpis, 1975):

$$S = \left| \frac{dc/c}{da/a} \right|_{\substack{c = c_0 \\ a = a_0}} \quad (4.1)$$

onde  $c_0$  e  $a_0$  representam os valores nominais de  $c$  e  $a$ .

A variação porcentual em  $c(s)$  devida a uma variação porcentual em  $G(s)$  para um sistema de controle em malha fechada (Figura 4.2) em que a excitação  $r(t)$  e sua transformada  $R(s)$  são fixas é dada por:

$$\frac{dc(s)}{c(s)} = \left( \frac{1}{1+G(s).H(s)} \right). \frac{dG(s)}{G(s)} \quad (4.2)$$

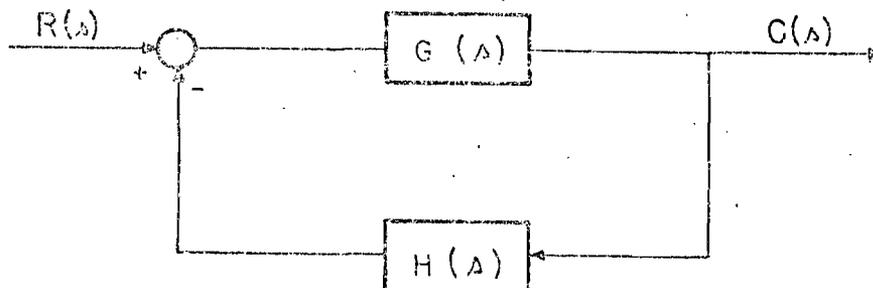


Fig. 4.2 - Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha fechada.

Excluindo os termos não-lineares da dinâmica do nosso problema, o diagrama de blocos deste para cada eixo é dado como na Figura 4.3, onde:

$$H(s) = L(Tv_i(t))/L(\theta_e(t)) \quad (4.3.a)$$

$$G(s) = 1/I \cdot s^2 \quad (4.3.b)$$

$$R(s) = T_{dm}(s) \quad (4.3.c)$$

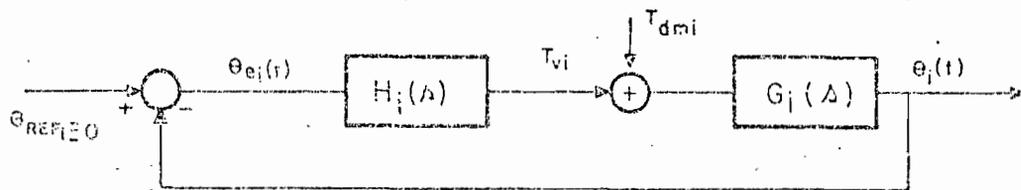


Fig. 4.3 - Diagrama de blocos do sistema de controle sem os termos não-lineares.

Particularmente, para se avaliar a influência de uma variação no momento de inércia do satélite ( $I$ ) sobre a saída do sistema ( $c(t) = \theta(t)$ ) a Equação 4.2 pode ser escrita na forma:

$$dc(s)/c(s) = \left| \frac{1}{1+G(s)H(s)} \right| \left| \frac{dG(s)}{dI} \right| \left| \frac{I}{G(s)} \right| \left| \frac{dI}{I} \right| \quad (4.4.a)$$

onde:

$$dG(s)/dI = -1/I^2 \cdot s^2 \quad (4.4.b)$$

$$I/G(s) = I^2 \cdot s^2 \quad (4.4.c)$$

Considerando um controlador proporcional mais derivativo tal que:

$$Tvi(t) = C_{jj} \cdot \theta e(t) + C_{j1} \cdot \dot{\theta} e(t).$$

com  $j = 1, 2, 3$  e  $l = 3+j$ ,

tem-se:

$$L(Tvi(t)) = (C_{jj} + C_{j1} \cdot s) \theta e(s) \quad (4.5.a)$$

$$= C_{jj} \cdot ((C_{j1}/C_{jj}) \cdot s + 1) \theta e(s) \quad (4.5.b)$$

Logo:

$$H_i(s) = K_{aj} \cdot (T_{aj} \cdot s + 1) \quad (4.6)$$

$$\text{onde: } K_{aj} = C_{jj}, \text{ e} \quad (4.7.a)$$

$$T_{aj} = C_{j1}/C_{jj}. \quad (4.7.b)$$

Substituindo as Expressões 4.3.b, 4.4.b, 4.4.c e 4.5.c em 4.4.a, temos:

$$S_j = -s^2 / (s^2 + (K_{aj} \cdot T_{aj}) \cdot s / I_j + K_{aj} / I_j) \quad (4.8)$$

As constantes  $K_{aj}$  e  $T_{aj}$  são determinadas a partir da lei de controle  $U(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot K \cdot X(t)$  implementada, pois esta representa o torque  $Tvi(t)$  das rodas sobre o satélite. Fazendo o produto  $R^{-1} \cdot B^T \cdot K$ , tem-se:

$$R^{-1} \cdot B^T \cdot K = \begin{vmatrix} 404 & 0 & 0 & 31,6 & 0 & 0 \\ 0 & 103 & 0 & 0 & 3,16 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

logo:

$$C11 = 404 \quad , \quad C14 = 31,6$$

$$C22 = 103 \quad , \quad C25 = 3,16$$

$$C33 = 110 \quad , \quad C36 = 10$$

Aplicando-se então as Relações 4.7.a e 4.7.b, e observando os sinais, tem-se:

$$Ta1 = 0,08 \quad , \quad Ka1 = -404.$$

$$Ta2 = 0,03 \quad , \quad Ka2 = -103$$

$$Ta3 = 0,09 \quad e \quad Ka3 = -110.$$

Finalmente através da resposta em frequência da Equação 4.8 é possível avaliar a sensibilidade da resposta do sistema em relação a uma variação do momento de inércia do satélite. Esta é feita com o auxílio da subrotina FRESP (a qual determina e traça a resposta em frequência para um certo intervalo) retirada do livro de Melsa e Jones (1973), e seus resultados são apresentados a seguir.

#### 4.5 - CÁLCULO DA SENSIBILIDADE

Substituindo os respectivos valores de  $K_{aj}$ ,  $T_{aj}$  e  $J_{vi}$  na Expressão 4.8, obtêm-se para cada um dos eixos as seguintes Funções Sensibilidade:

$$S1 = -s^2/(s^2 - 0,144 \cdot s - 1,8) \quad (4.9)$$

$$S2 = -s^2/(s^2 - 0,015 \cdot s - 0,5) \quad (4.10)$$

$$S3 = -s^2/(s^2 - 0,083 \cdot s - 0,9) \quad (4.11)$$

Utilizando então a subrotina FRESP num intervalo de frequência compreendido entre a velocidade orbital ( $1,094823E10^{-03}$  rad/s) e o dobro desta, (pois as frequências dos torques ambientais são desta ordem). Verifica-se através das Figuras 4.4, 4.5 e 4.6 que as amplitudes das Funções Sensibilidade S1, S2 e S3 são bem pequenas indicando que uma variação nos momentos principais de inércia do satélite não afeta de forma significativa a resposta do sistema  $c(t) = \theta(t)$ . A mesma análise pode ser repetida para outros parâmetros do satélite.

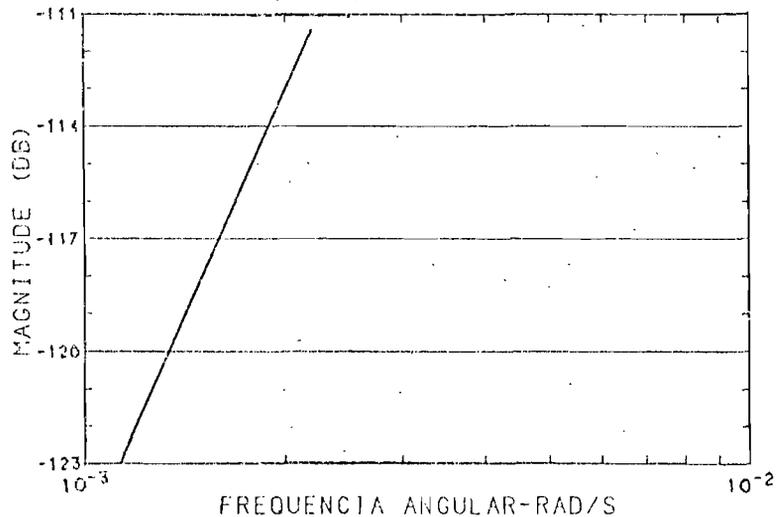


Fig. 4.4 - Resposta em frequência da função S1.

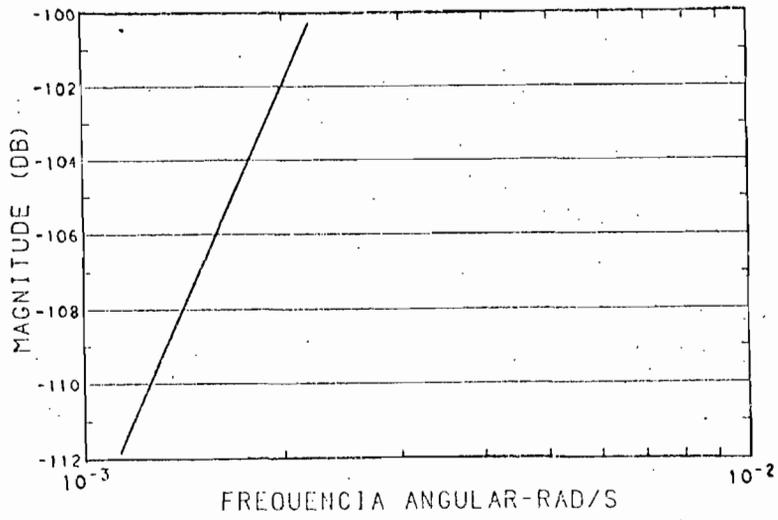


Fig. 4.5 - Resposta em frequência da função S2.

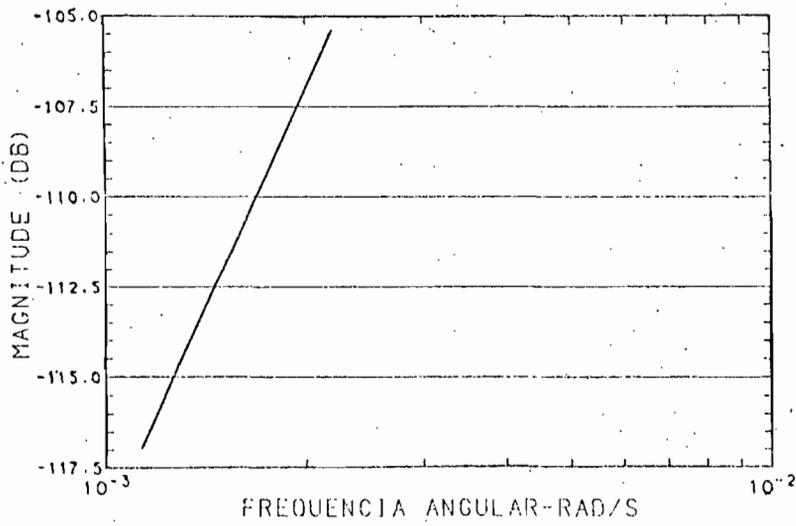


Fig. 4.6 - Resposta em frequência da função S3.

A seguir faz-se uma breve discussão sobre o cálculo do índice de desempenho.

#### 4.6 - CÁLCULO DO ÍNDICE DE DESEMPENHO

Discutem-se a seguir duas maneiras de se fazer este cálculo:

A primeira é apresentada por Kwakernaak e Sivan (1972) os quais mostram que se o sistema 2.8 é estabilizável e detectável, então o índice de desempenho assume o valor  $X_0^T K X_0$ . Este é função apenas do estado inicial  $X_0$  do sistema, e inclui a parcela  $1/2 \cdot X_0^T Q X_0$  (o qual pode ser interpretado como a agitação do estado), além da parcela desejada  $1/2 \cdot U^T R U$ , ambas presentes na integral do índice de desempenho. Logo, e embora simples,  $X_0^T K X_0$  é apenas uma estimativa por excesso para esta última.

A segunda é através da integração numérica da parcela  $1/2 \cdot U^T R U$ , excluindo-se assim a influência da parcela  $1/2 \cdot X_0^T Q X_0$  no valor obtido. Este é exato, embora não tenha expressão algébrica e aumente o trabalho numérico. É importante observar que este cálculo pode constituir um dos critérios mais importantes para a comparação da eficiência de uma lei de controle, principalmente se o índice de desempenho for expresso em função de uma grandeza física mensurável, como por ex.: potência (Skaar e Kraige, 1984).

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS E CONCLUSÕES

Neste Capítulo apresentam-se os resultados e as conclusões obtidas a partir das simulações implementadas no Capítulo 4. Fazem-se também algumas sugestões para a continuação deste trabalho. Inicialmente são feitas duas comparações: a primeira, entre o desempenho da lei de controle aqui determinada (e chamada ótima) com outra simulada por Souza (1981) (e chamada clássica, a qual é proporcional, integral e derivativa em relação ao ângulo de erro), para as mesmas condições iniciais; a segunda, no comportamento das saídas do sistema (velocidade de erro e ângulo de erro) quando sobre este atua a extensão do regulador e quando atua o regulador, à medida em que as condições iniciais são elevadas. Finalmente na terceira simulação avalia-se o desempenho do sistema de controle ao se modelar os erros nas estimativas de  $\theta_e$  e  $W_e$  como variáveis aleatórias com distribuição gaussiana de média nula e desvio padrão  $\sigma$  como nas Tabelas 4.1 e 4.2.

#### 5.1 - RESULTADOS

As Figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 apresentam os gráficos das componentes da velocidade angular  $W$  e das componentes do ângulo  $\theta$  do satélite em função do tempo, ao se empregar a lei de controle ótima e clássica, para as mesmas condições iniciais (ver Tabelas 4.1 e 4.2). Os seis primeiros gráficos correspondem a simulação realizada com o conjunto de pesos  $\lambda_1$  a  $\lambda_9$ , e os seis últimos ao se utilizar o conjunto de pesos  $\lambda_{10}$  a  $\lambda_{18}$ . Observando estes gráficos conclui-se que: 1) a seleção das matrizes peso tem influência direta no desempenho da lei controle, pois o tempo de estabilização da primeira é superior ao da segunda (ver Tabela 5.1). 2) a lei de controle ótima reduz a velocidade angular e o ângulo do satélite mais rapidamente do que a lei de controle clássica (ver Tabela 5.1).

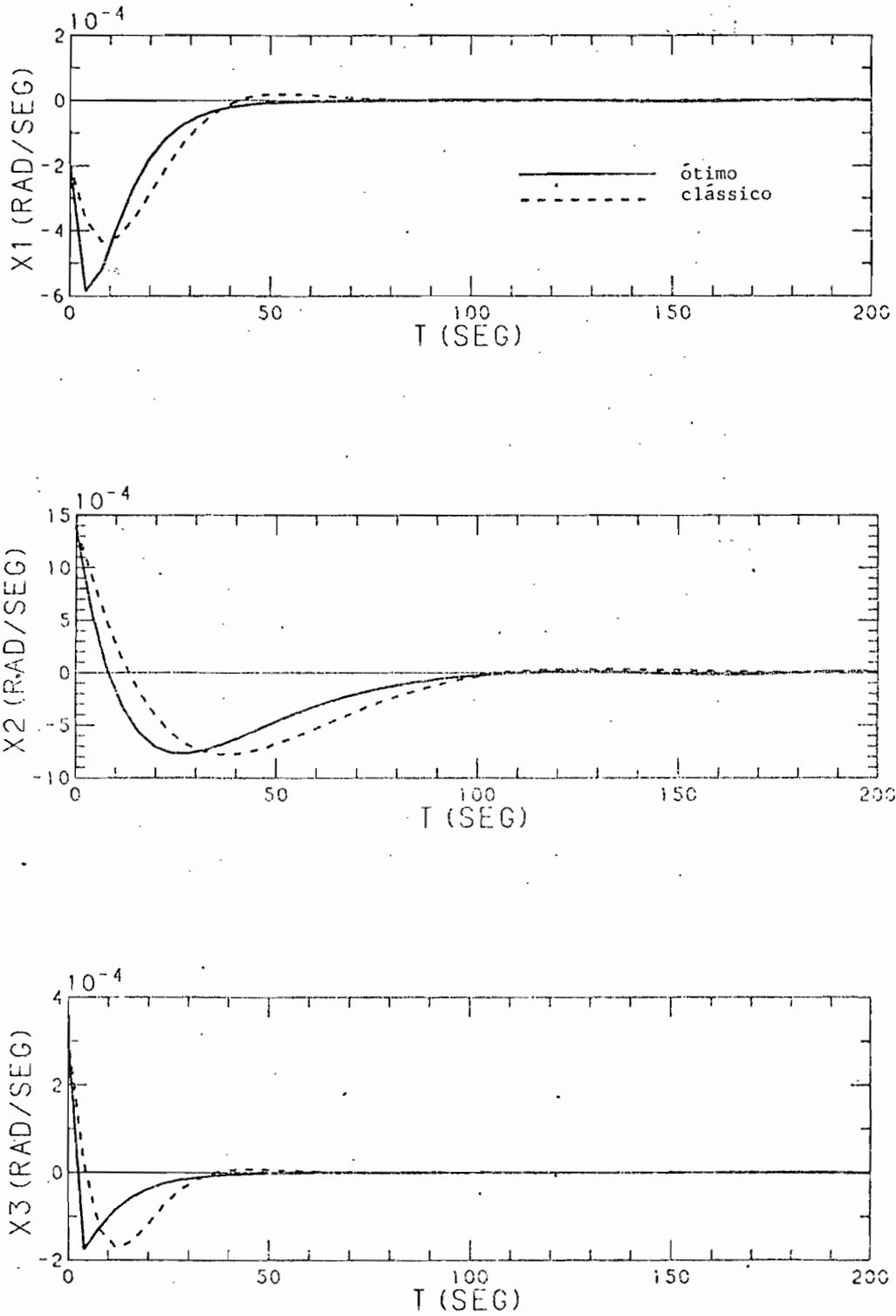


Fig. 5.1 - Comportamento de W1, W2 e W3 em função do tempo ao se empregar o controle clássico e o ótimo para o conjunto de pesos  $\lambda_1$  a  $\lambda_9$ .

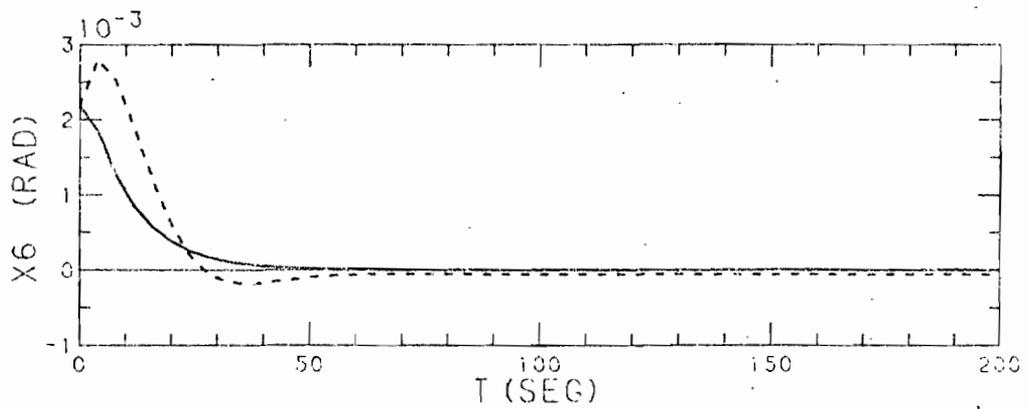
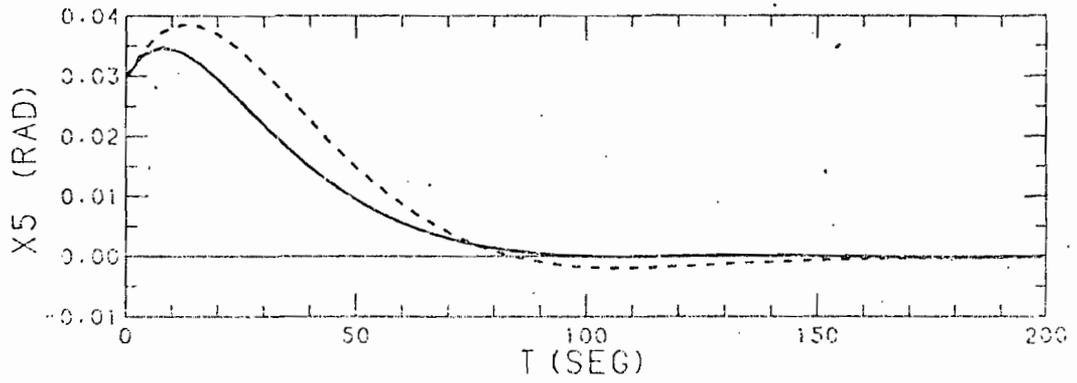
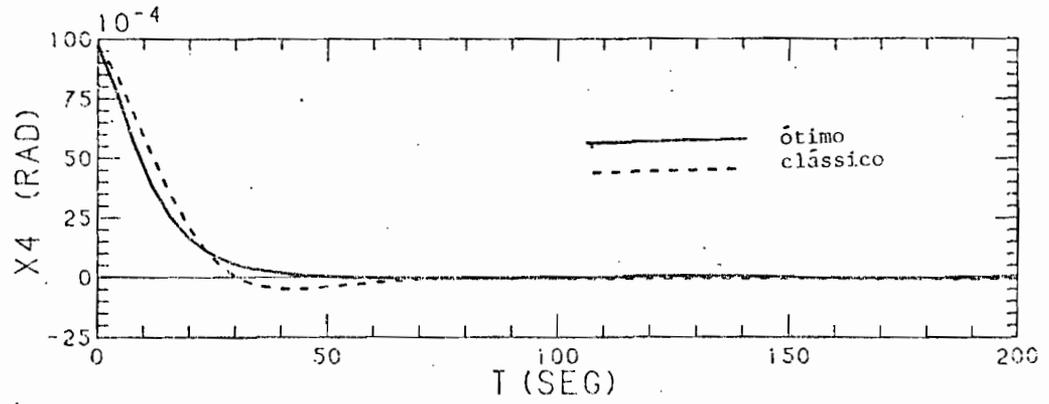


Fig. 5.2 - Comportamento de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  em função do tempo ao se empregar o controle clássico e o ótimo para o conjunto de polos  $\lambda_1$  a  $\lambda_9$ .

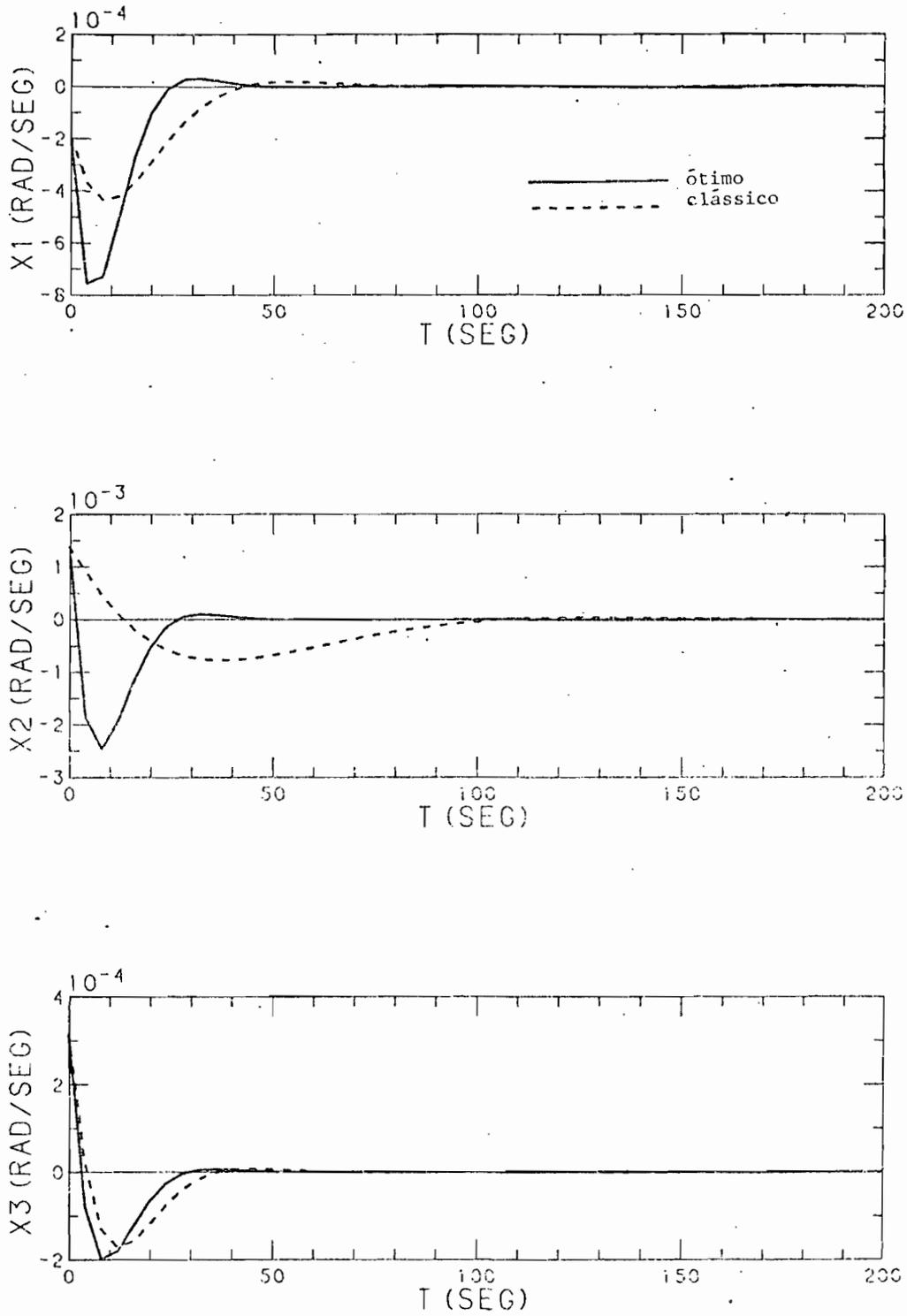


Fig. 5.3 - Comportamento de W1, W2 e W3 em função do tempo ao se empregar o controle clássico e o ótimo para o conjunto de pesos  $\lambda_{10}$  a  $\lambda_{18}$ .

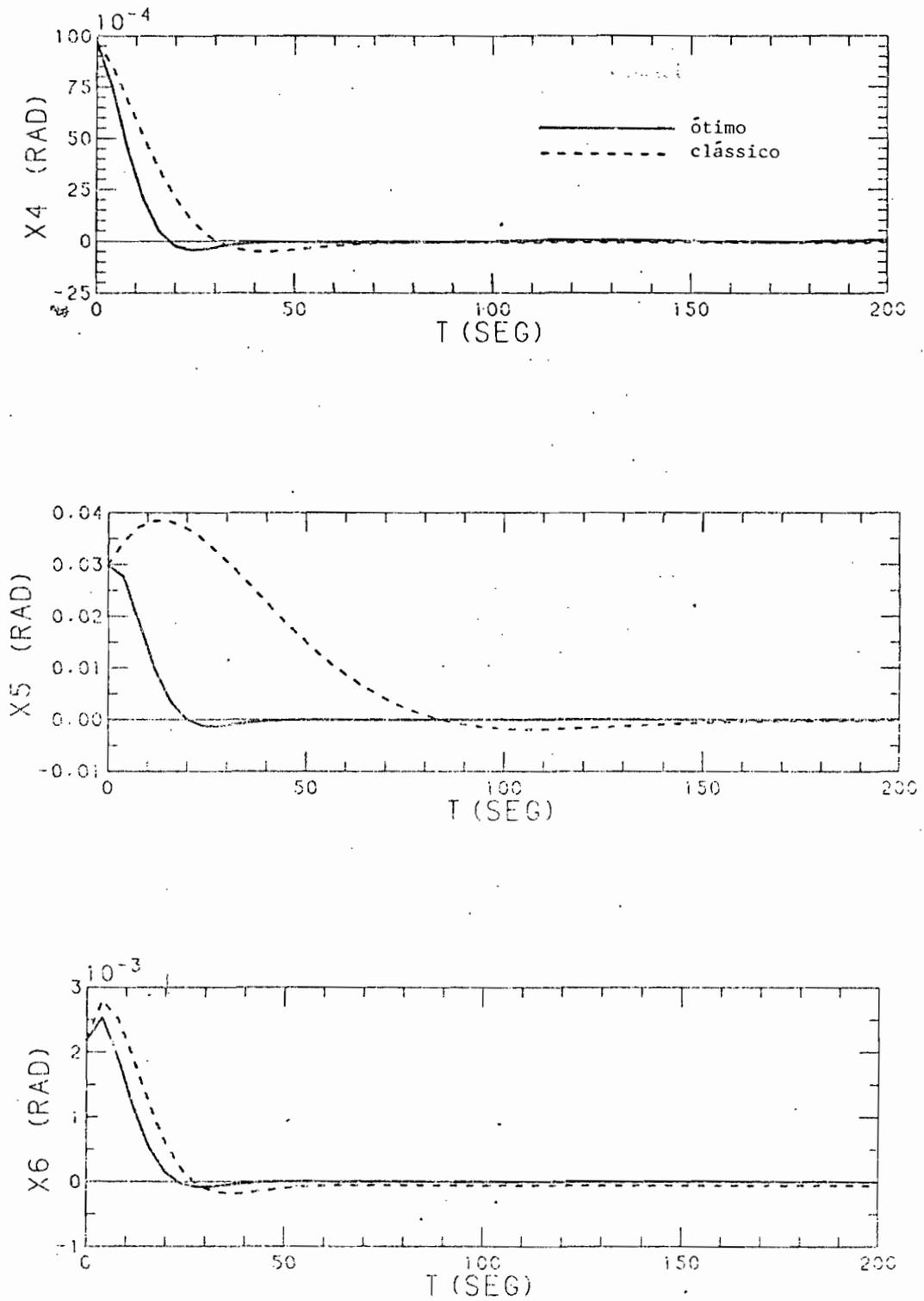


Fig. 5.4 - Comportamento de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  em função do tempo ao se empregar o controle clássico e o ótimo para o conjunto de polos  $\lambda_{10}$  a  $\lambda_{18}$ .

TABELA 5.1

TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO DE  $\dot{W}$  E  $\theta$

	Tempo de Estabilização (S)		
	Clássico	p/ $\lambda 1$ a $\lambda 9$	p/ $\lambda 10$ a $\lambda 18$
X1	80	60	28
X2	160	108	32
X3	60	40	26
X4	68	44	18
X5	164	104	25
X6	-	44	22

As Figuras 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 apresentam o comportamento das saídas do sistema (ângulo de erro e velocidade de erro) quando sobre este atua o regulador e quando atua sua extensão. Os seis primeiros gráficos correspondem às condições iniciais 1 (CI1) e os seis últimos às condições iniciais 2 (CI2) (Ver Tabela 4.1). O comportamento destes gráficos sugere que ao tornar as condições iniciais do sistema (principalmente as velocidades angulares das rodas a reação) elevadas (tornando os termos não-lineares mais relevantes), o desempenho da extensão do regulador na redução destas, é mais eficiente do que o do regulador.

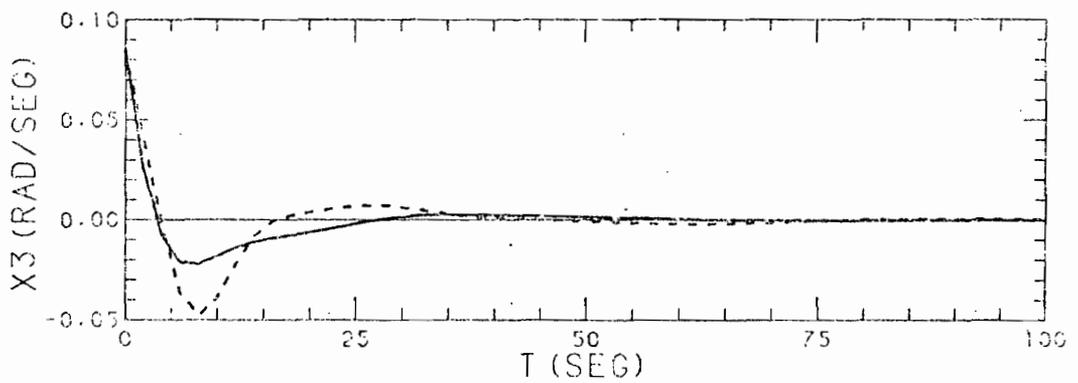
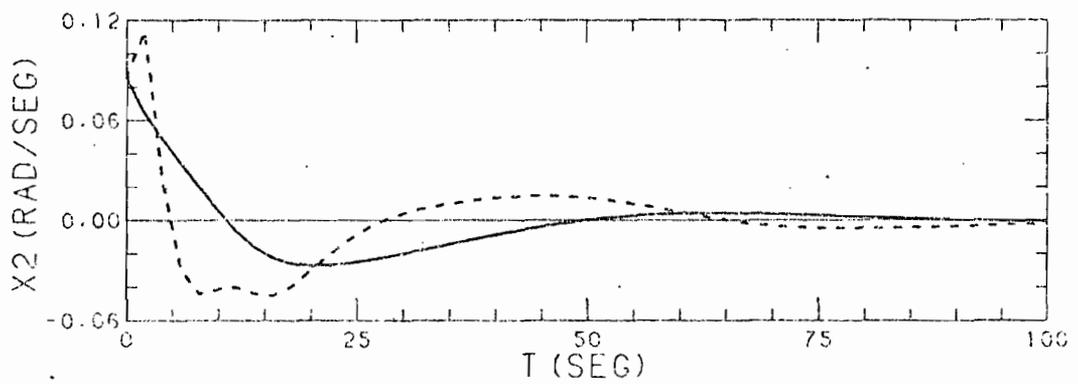
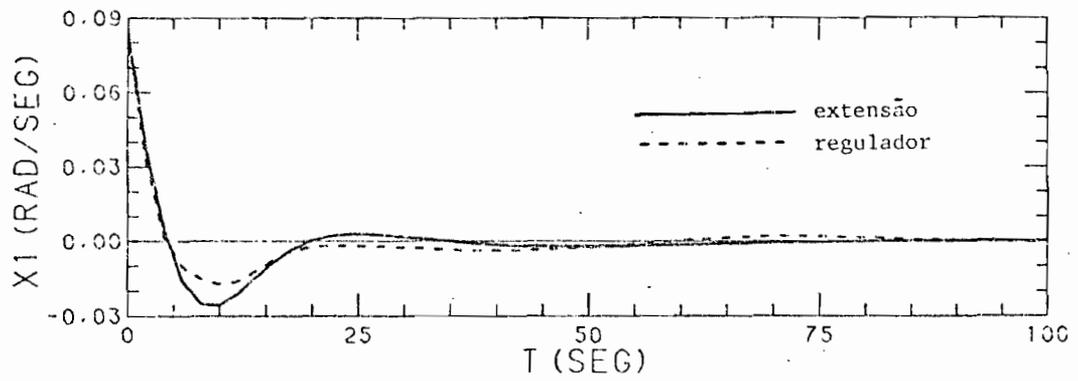


Fig. 5.5 - Comportamento de  $W_1$ ,  $W_2$  e  $W_3$  em função do tempo ao se em pregar o regulador e sua extensão para CII.

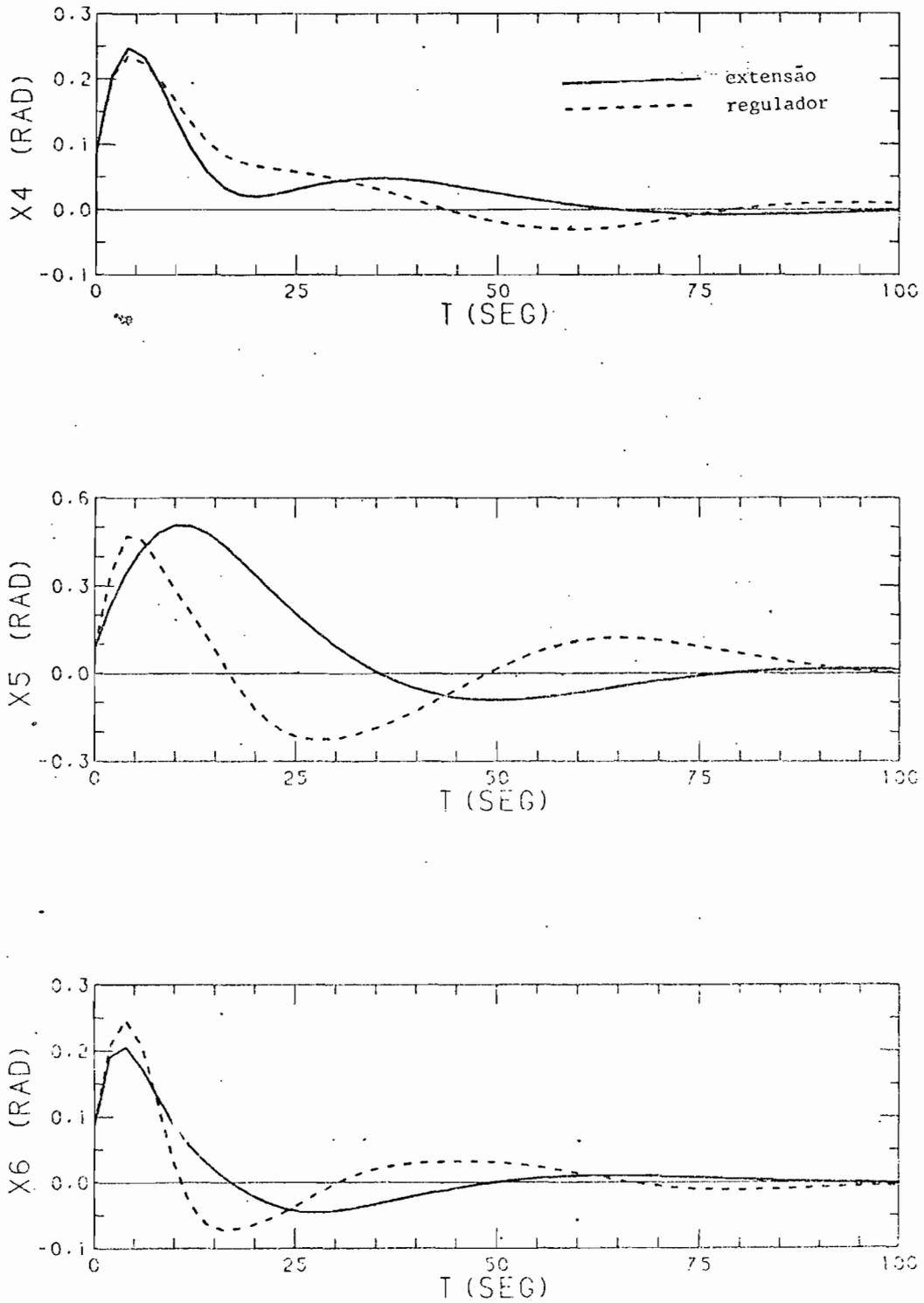


Fig. 5.6 - Comportamento de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  em função do tempo ao se empregar o regulador e sua extensão para CII.

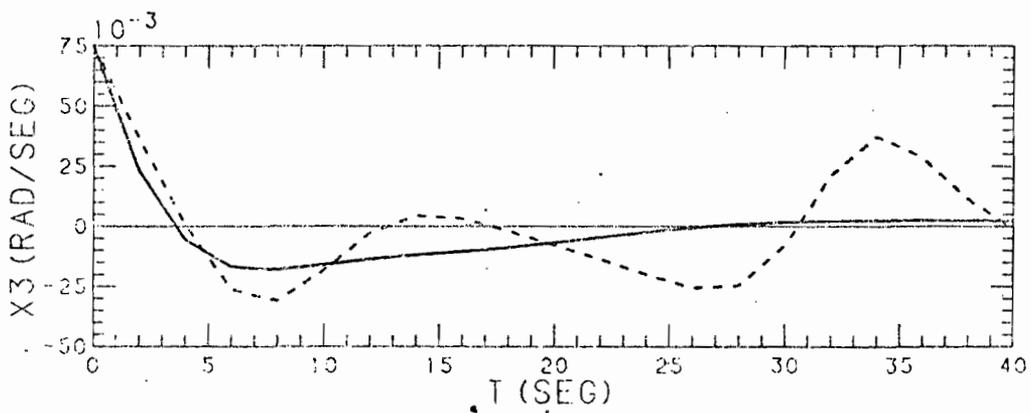
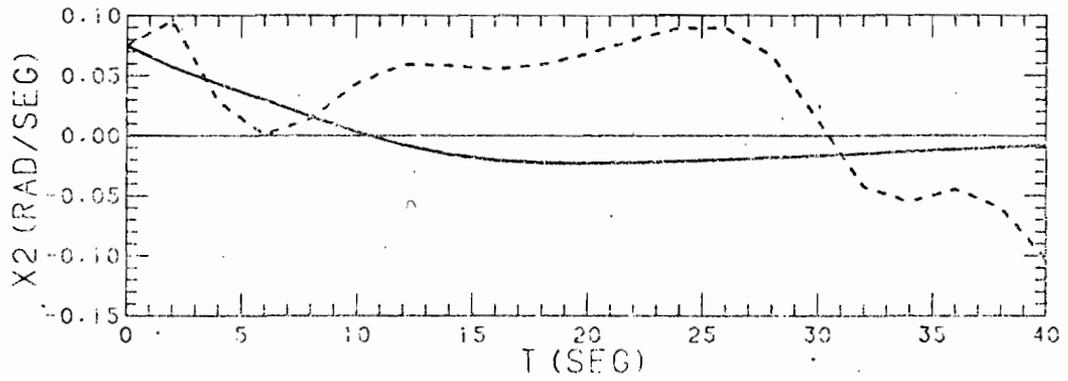
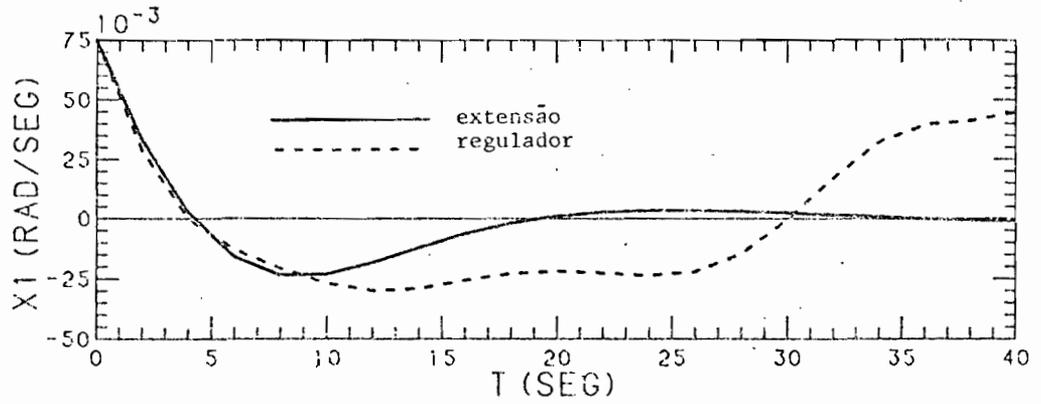


Fig. 5.7 - Comportamento de  $W_1$ ,  $W_2$  e  $W_3$  em função do tempo ao se em pregar o regulador e sua extensão para CI2.

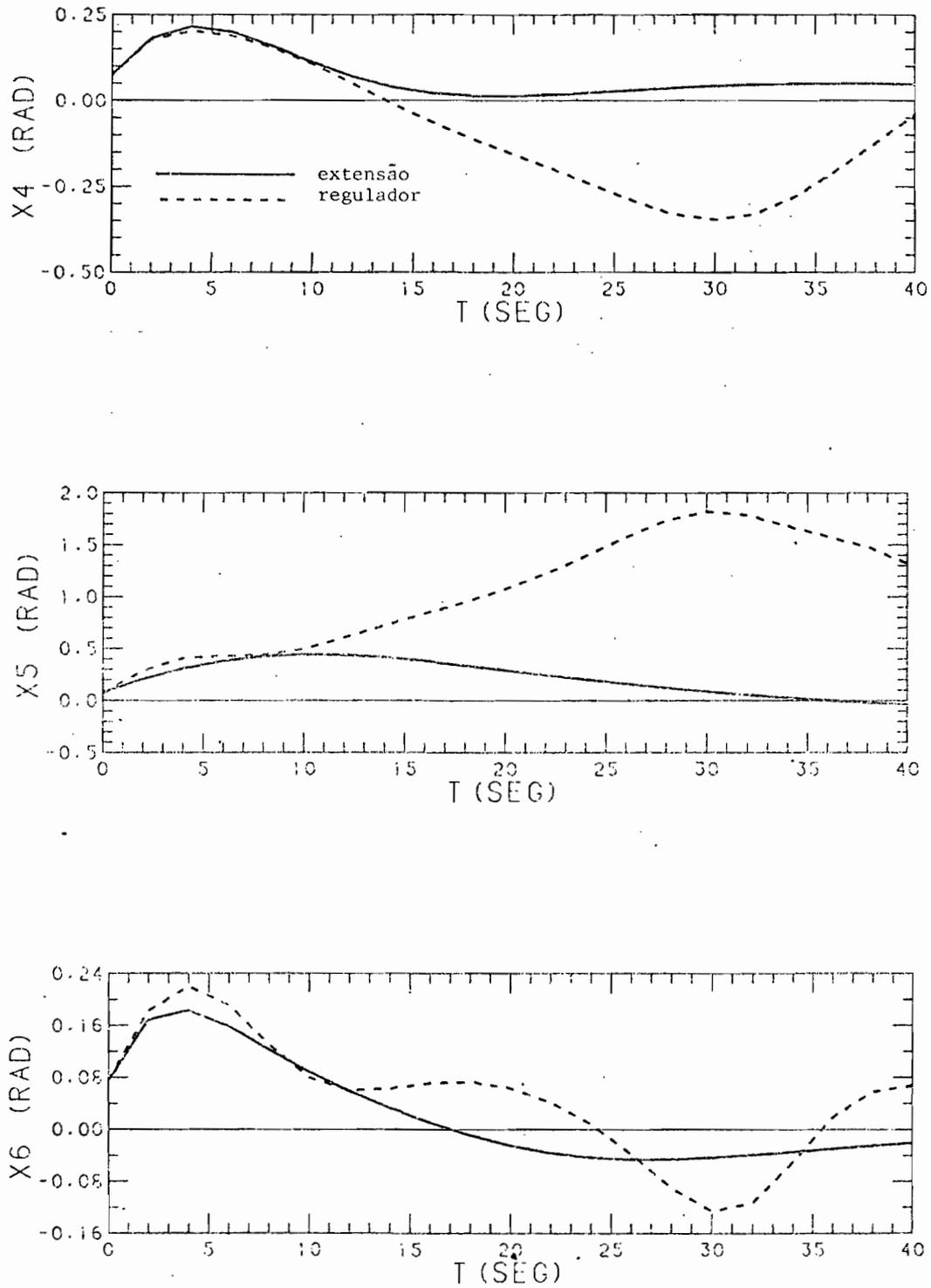


Fig. 5.8 - Comportamento de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  em função do tempo ao se em pregar o regulador e sua extensão para CI2.

Ao se utilizar a lei de controle ótima, verificou-se que os torques empregados atingem magnitudes ligeiramente maiores que as dos torques que empregam a lei de controle clássica no mesmo intervalo de tempo, embora se mantenham inferiores aos valores máximos permitidos; e que uma maior eficiência da lei de controle (através de uma melhor seleção das matrizes pesos), não implica um aumento dos torques inicialmente empregados neste controle (ver Tabela 5.2).

Por fim as Figuras 5.9 e 5.10 mostram o comportamento das saídas do sistema ao se modelar os erros nas estimativas como variáveis aleatórias, (ver Tabela 4.2), através das quais, verifica-se que o desempenho do sistema de controle não é alterado significativamente.

TABELA 5.2

COMPARAÇÃO ENTRE OS TORQUES EMPREGADOS

	Máximo	Clássico	$p/\lambda_1$ a $\lambda_9$	$p/\lambda_{10}$ a $\lambda_{18}$
TORQUES 1 (N.m)	0,1335	0,0105	0,0476	0,0510
TORQUES 2 (N.m)	0,1335	0,0269	0,0528	0,0979
TORQUES 3 (N.m)	0,1335	0,0113	0,0680	0,0783

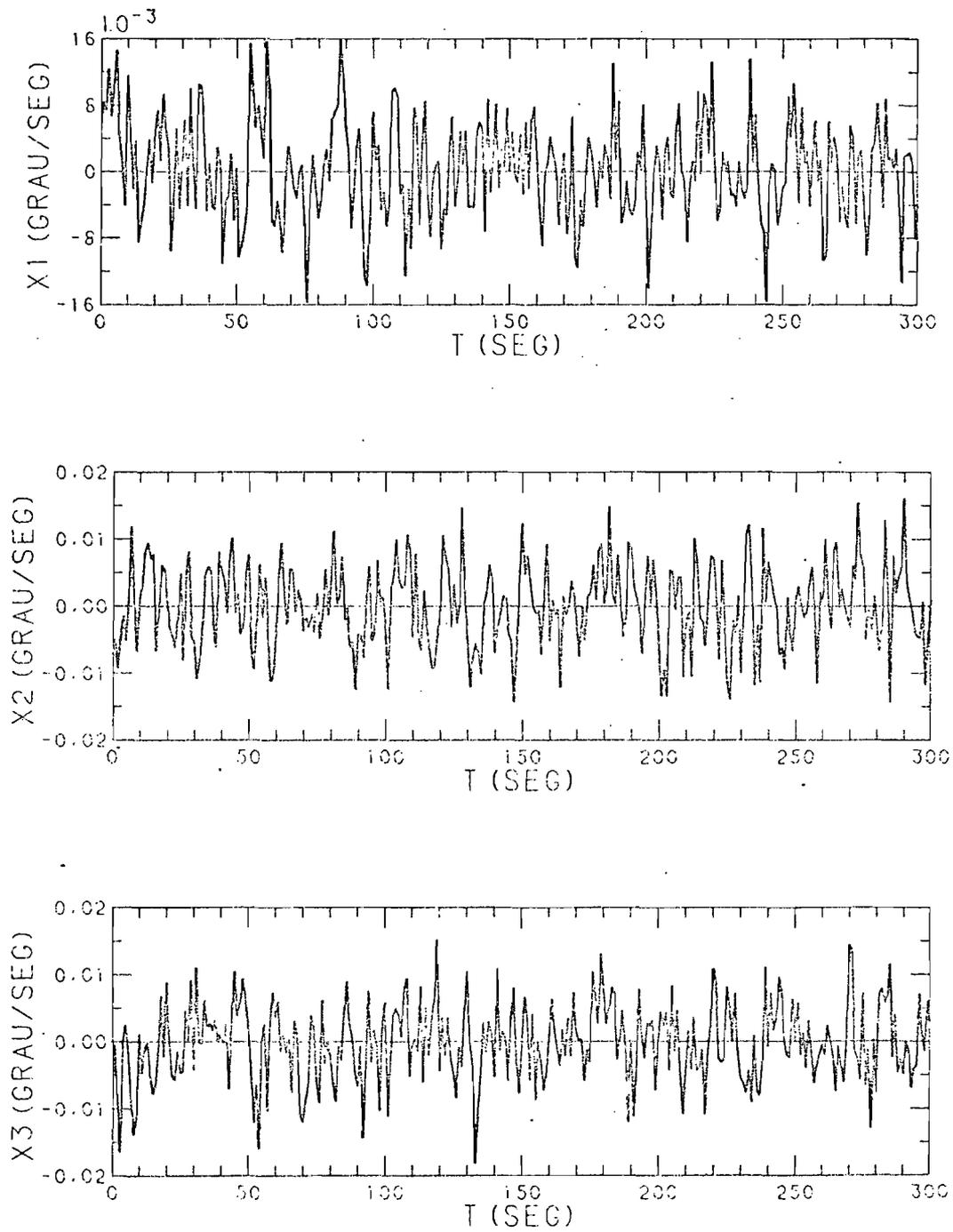


Fig. 5.9 - Comportamento de  $W_1$ ,  $W_2$  e  $W_3$  em função do tempo na presença de erros nas suas estimativas.

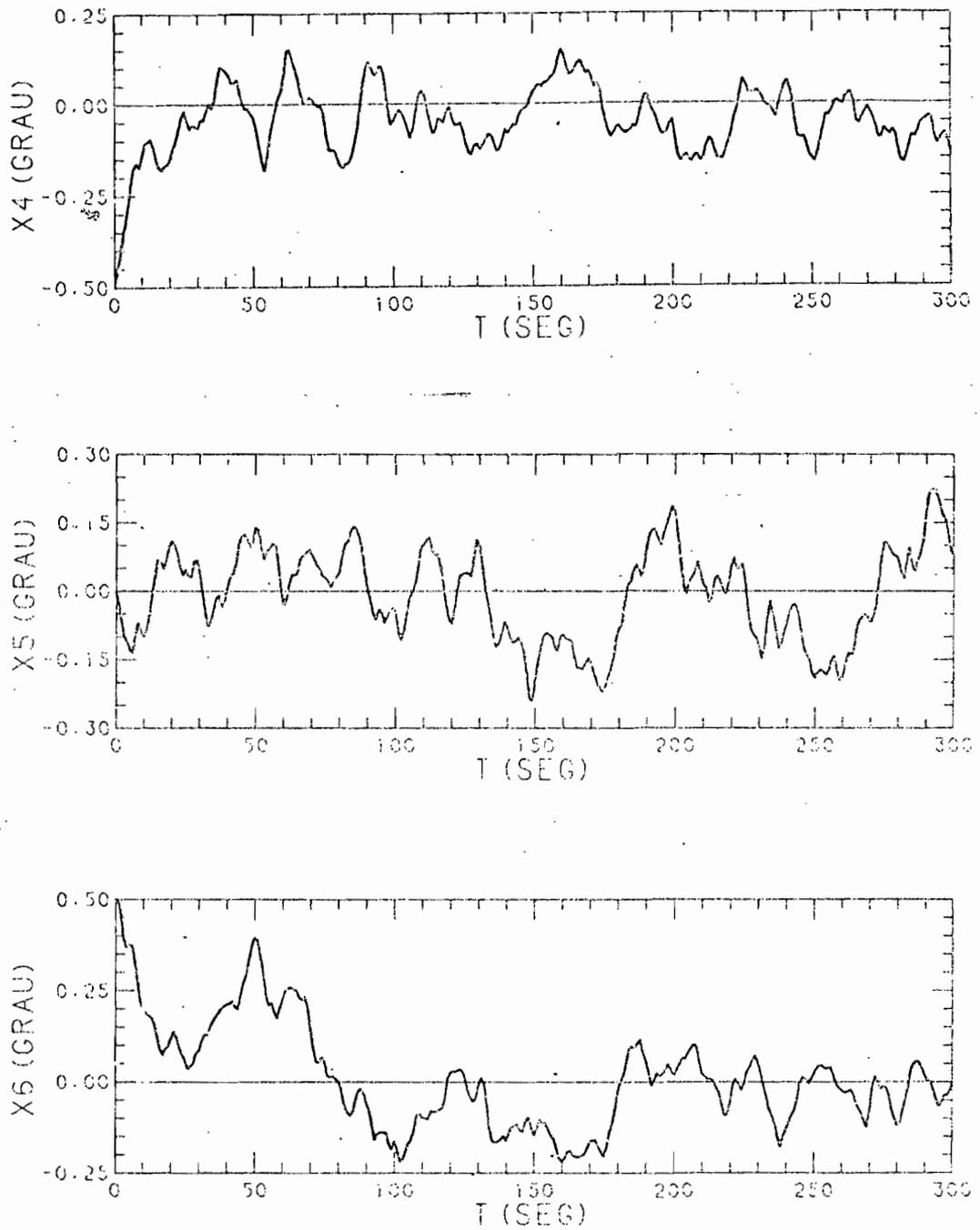


Fig. 5.10 - Comportamento de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  em função do tempo na presença de erros nas suas estimativas.

## 5.2 - CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se uma lei de controle para satélites artificiais baseada numa extensão do regulador linear quadrático a certos sistemas não-lineares. Verificou-se que a seleção das matrizes peso tem influência direta no desempenho da lei de controle ótimo determinada e que esta reduz os ângulos e as velocidades angulares do satélite mais eficientemente do que a lei de controle clássica com a qual a primeira foi comparada. Os resultados obtidos também sugerem que a presença do termo não-linear na lei de controle da extensão do regulador torna-a mais robusta do que a do regulador.

Verificou-se ainda que as Funções Sensibilidade do sistema de controle são baixas, demonstrando que uma variação nos momentos de inércia do satélite não afeta de forma significativa o desempenho da lei de controle, e que este mesmo desempenho também não é alterado significativamente ao se modelar os erros nas estimativas como variáveis aleatórias com distribuição gaussiana de média nula e desvio padrão  $\sigma$ .

## 5.3 - COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Finalmente é importante ressaltar que a implementação em computadores de bordo da lei de controle produzida pela extensão da teoria do R.L.Q. pode acarretar cálculos computacionais mais lentos e complicados, em troca da vantagem de modelar e controlar a dinâmica do satélite de forma mais completa, implicando o aumento da complexidade do sistema de controle. Uma maneira de diminuir tal complexidade é calcular sempre os parâmetros que não variam, em Terra (off-line), como foi o caso da determinação das constantes  $K$  e  $\alpha$  no Capítulo 4.

Para continuação e aperfeiçoamento deste trabalho sugere-se ao leitor: 1) expandir a série que dá origem à lei de controle a termos de ordem superior a 2 e comparar sua eficiência com a atual; 2) adotar índices de desempenho que representem grandezas físicas comumen

te mensuráveis (por exemplo potência) e associar este índice com a energia gasta no processo de controle; 3) aplicar esta teoria a outros modos de operação do sistema de controle de atitude do satélite, (por exemplo ao modo de: redução da velocidade angular inicial, aquisição do Sol, aquisição da Terra, etc.) eventualmente usando atuadores do tipo liga-desliga. Para isto necessita-se aproximar esta não linearidade por uma função da classe  $C1$ ; 4) Incluir na malha de controle um modelo mais realista da roda a reação de modo a melhor precisar a corrente elétrica que a fará produzir o torque desejado (calculado a partir do estado do satélite); 5) Incluir também um estimador do estado do satélite.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AL'BREKHT, E.G. On the Optimal Stabilization, of Non-linear Systems. *Journal of Applied Mathematics Mechanics*, 25(5):1254-1266, 1962.
- BELLMAN, R. *Dynamic programming*. New Jersey, Princeton University Press, 1957.
- BRYSON, A.E.; HO, Y.C. *Applied optimal control*. New York, John Wiley & Sons, 1969.
- CARRARA, V. *Modelagem das forças e torques atuantes nos satélites*. Dissertação de Mestrado em Ciências Espaciais, São José dos Campos, INPE, 1982 (INPE-2454-TDL/094).
- DABBOUS, T.E.; AHMED, N.V. Nonlinear feedback regulation of satellite angular moments. *IEEE Transaction on Aero-space and Electronic Systems*. 8(1):2-10, 1981.
- D'AZZO, J.; HOUPIS, C.H. *Linear control systems analysis and design*. New York, McGraw-Hill, 1981.
- FORSYTHE, G.E.; MALCOLM, M.A.; MOLER, C.B. *Computer methods for mathematical computations*. New Jersey, Prentice-Hall, 1977.
- MEÍSA, J.L.; JONES, S.K. *Computers programs for computational assistance in the study of linear control theory*. New York. McGraw-Hill, 1973.
- MERRIAM III, C.W. *Fortran computer programs*. Toronto, D.C. Heath, 1978.
- KAILATH, T. *Linear systems*. New York, Prentice-Hall, 1980.
- KALMAN, R.E. Contributions to the theory of optimal control. *Boletim da Sociedade de Matemática Mexicana*, 2(5):102-119, 1960.
- KIRK, D.E. *Optimal control theory*. New Jersey, Prentice-Hall, 1970.
- KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. *Linear optimal control systems*. New York, John Wiley, 1972.

- LUKES, D.L. Optimal regulation of nonlinear dynamical systems. *SIAM JOURNAL*, 7(1):75-100, 1969.
- SOUZA, M.L.O. *Estudo e desenvolvimento de um sistema de controle de atitude ativo em três eixos para satélites artificiais usando atuadores pneumáticos a gás frio e volantes a reação*. Tese de Mestrado, São José dos Campos, INPE, 1981 (INPE-2000-TDL/042).
- SKAAR, S.B.; KRAIGE, L.G. Large-angle spacecraft maneuvers using an optimal reaction wheel power criterion. *The Journal of Astronautical Sciences*, 32(1):47-61.
- WERTZ, J.R. *Spacecraft attitude determination and control*. D. Reidel, London, 1978.
- WILLEMSTEIN, A.P. Optimal regulation of nonlinear dynamical systems on a finite interval. *SIAM JOURNAL*, 15(6):1050-1069, 1977.
- WHITE, J.S.; HANSEN, Q.M. *Study of systems using inertia wheels for precise attitude control of a satellite*. Washington, D.C., NASA, 1961. (NASA TND-691).

## APÊNDICE A

### PARTE NÃO-LINEAR DA LEI DE CONTROLE

A determinação da parte não-linear ( $U(2)$ ) da lei de controle consiste inicialmente na solução do sistema algébrico formado a partir da equação 2.26:

$$A'X \left| J(3) \right|_x = - f(2)^T(x) \left| J(2) \right|_x \quad (A.1)$$

A solução deste sistema produz as constantes ( $\alpha_\ell$ ) presentes no polinômio homogêneo (Equação 2.28):

$$J(3) = \sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell \cdot x_i \cdot x_j \cdot x_k \quad (A.2)$$

Derivando então  $J(3)$  em relação a  $X$ , obtêm-se o termo não-linear da lei de controle:

$$U(2) = - 1/2 \cdot R^{-1} B^T \left| J(3) \right|_x \quad (A.3)$$

#### EXPRESSÃO À ESQUERDA DA EQUAÇÃO A.1

Como são 6 variáveis de estado (3 ângulos e 3 velocidades angulares), o número  $n$  de combinações possíveis entre estas é 56. Logo da equação A.2, tem-se:

$$\begin{aligned}
 J(3) &= \sum_{\ell=1}^{56} \alpha_{\ell} x_i \cdot x_j \cdot x_k \\
 &= \alpha_1 X_1^3 + \alpha_2 X_2^3 + \alpha_3 X_3^3 + \alpha_4 X_4^3 + \alpha_5 X_5^3 + \alpha_6 X_6^3 + \alpha_7 X_1^2 X_2 + \alpha_8 X_1^2 X_3 + \alpha_9 X_1^2 X_4 + \alpha_{10} X_1^2 X_5 + \\
 &+ \alpha_{11} X_1^2 X_6 + \alpha_{12} X_2^2 X_1 + \alpha_{13} X_2^2 X_3 + \alpha_{14} X_2^2 X_4 + \alpha_{15} X_2^2 X_5 + \alpha_{16} X_2^2 X_6 + \alpha_{17} X_3^2 X_1 + \\
 &+ \alpha_{18} X_3^2 X_2 + \alpha_{19} X_3^2 X_4 + \alpha_{20} X_3^2 X_5 + \alpha_{21} X_3^2 X_6 + \alpha_{22} X_4^2 X_1 + \alpha_{23} X_4^2 X_2 + \alpha_{24} X_4^2 X_3 + \\
 &+ \alpha_{25} X_4^2 X_5 + \alpha_{26} X_4^2 X_6 + \alpha_{27} X_5^2 X_2 + \alpha_{28} X_5^2 X_3 + \alpha_{29} X_5^2 X_4 + \alpha_{30} X_5^2 X_6 + \alpha_{31} X_6^2 X_5 + \\
 &+ \alpha_{32} X_6^2 X_1 + \alpha_{33} X_6^2 X_2 + \alpha_{34} X_6^2 X_3 + \alpha_{35} X_6^2 X_4 + \alpha_{36} X_6^2 X_5 + \alpha_{37} X_1 X_2 X_3 + \\
 &+ \alpha_{38} X_1 X_2 X_4 + \alpha_{39} X_1 X_2 X_5 + \alpha_{40} X_1 X_2 X_6 + \alpha_{41} X_1 X_3 X_4 + \alpha_{42} X_1 X_3 X_5 + \\
 &+ \alpha_{43} X_1 X_3 X_6 + \alpha_{44} X_1 X_4 X_5 + \alpha_{45} X_1 X_4 X_6 + \alpha_{46} X_1 X_5 X_6 + \alpha_{47} X_2 X_3 X_4 + \\
 &+ \alpha_{48} X_2 X_3 X_5 + \alpha_{49} X_2 X_3 X_6 + \alpha_{50} X_2 X_4 X_5 + \alpha_{51} X_2 X_4 X_6 + \alpha_{52} X_2 X_5 X_6 + \\
 &+ \alpha_{53} X_3 X_4 X_5 + \alpha_{54} X_3 X_4 X_6 + \alpha_{55} X_3 X_5 X_6 + \alpha_{56} X_4 X_5 X_6
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

O produto  $A'X$  (onde  $A' = A \cdot R^{-1} \cdot B^T K$ ) é:

$$A'X = - \frac{1}{\lambda_3} \begin{vmatrix} X_1 K_{11} + X_2 K_{12} + X_3 K_{13} + X_4 K_{14} + X_5 K_{15} + X_6 K_{16} \\ X_1 K_{21} + X_2 K_{22} + X_3 K_{23} + X_4 K_{24} + X_5 K_{25} + X_6 K_{26} \\ X_1 K_{31} + X_2 K_{32} + X_3 K_{33} + X_4 K_{34} + X_5 K_{35} + X_6 K_{36} \\ - X_1 \lambda_3 \\ - X_2 \lambda_3 \\ - X_3 \lambda_3 \end{vmatrix} \tag{A.5}$$

Para se obter  $\left. J(3) \right|_X$ , faz-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(3)}{\partial X_1} &= 3\alpha_1 X_1^2 + 2\alpha_7 X_1 X_2 + 2\alpha_8 X_1 X_3 + 2\alpha_9 X_1 X_4 + 2\alpha_{10} X_1 X_5 + 2\alpha_{11} X_1 X_6 + \\ &+ \alpha_{12} X_2^2 + \alpha_{17} X_3^2 + \alpha_{22} X_4^2 + \alpha_{27} X_5^2 + \alpha_{32} X_6^2 + \alpha_{37} X_2 X_3 + \alpha_{38} X_2 X_4 + \\ &+ \alpha_{39} X_2 X_5 + \alpha_{40} X_2 X_6 + \alpha_{41} X_3 X_4 + \alpha_{42} X_3 X_5 + \alpha_{43} X_3 X_6 + \alpha_{44} X_4 X_5 + \\ &+ \alpha_{45} X_4 X_6 + \alpha_{46} X_5 X_6 \end{aligned} \quad (A.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(3)}{\partial X_2} &= 3\alpha_2 X_2^2 + \alpha_7 X_1^2 + 2\alpha_{12} X_2 X_1 + 2\alpha_{13} X_2 X_3 + 2\alpha_{14} X_2 X_4 + 2\alpha_{15} X_2 X_5 + \\ &+ 2\alpha_{16} X_2 X_6 + \alpha_{18} X_3^2 + \alpha_{23} X_4^2 + \alpha_{28} X_5^2 + \alpha_{33} X_6^2 + \alpha_{37} X_1 X_3 + \alpha_{38} X_1 X_4 + \\ &+ \alpha_{39} X_1 X_5 + \alpha_{40} X_1 X_6 + \alpha_{47} X_3 X_4 + \alpha_{48} X_3 X_5 + \alpha_{49} X_3 X_6 + \alpha_{51} X_4 X_6 + \\ &+ \alpha_{52} X_5 X_6 + \alpha_{50} X_4 X_5 \end{aligned} \quad (A.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(3)}{\partial X_3} &= 3\alpha_3 X_3^2 + \alpha_8 X_1^2 + \alpha_{13} X_2^2 + 2\alpha_{17} X_3 X_1 + 2\alpha_{18} X_3 X_2 + 2\alpha_{19} X_3 X_4 + \\ &+ 2\alpha_{20} X_3 X_5 + 2\alpha_{21} X_3 X_6 + \alpha_{24} X_4^2 + \alpha_{29} X_5^2 + \alpha_{34} X_6^2 + \alpha_{37} X_1 X_2 + \\ &+ \alpha_{41} X_1 X_4 + \alpha_{42} X_1 X_5 + \alpha_{43} X_1 X_6 + \alpha_{47} X_2 X_4 + \alpha_{48} X_2 X_5 + \alpha_{49} X_2 X_6 + \\ &+ \alpha_{53} X_4 X_5 + \alpha_{54} X_4 X_6 + \alpha_{55} X_5 X_6 \end{aligned} \quad (A.8)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J(3)}{\partial X_4} = & 3\alpha_4 X_4^2 + \alpha_9 X_1^2 + \alpha_{14} X_2^2 + \alpha_{19} X_3^2 + 2\alpha_{22} X_4 X_1 + 2\alpha_{23} X_4 X_2 + \alpha_{24} X_4 X_3 + \\
 & + 2\alpha_{25} X_4 X_5 + 2\alpha_{26} X_4 X_6 + \alpha_{30} X_5^2 + \alpha_{35} X_6^2 + \alpha_{38} X_1 X_2 + \alpha_{41} X_1 X_3 + \\
 & + \alpha_{44} X_1 X_5 + \alpha_{45} X_1 X_6 + \alpha_{47} X_2 X_3 + \alpha_{50} X_2 X_5 + \alpha_{51} X_2 X_6 + \\
 & + \alpha_{53} X_3 X_5 + \alpha_{54} X_3 X_6 + \alpha_{56} X_5 X_6
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J(3)}{\partial X_5} = & 3\alpha_5 X_5^2 + \alpha_{10} X_1^2 + \alpha_{15} X_2^2 + \alpha_{20} X_3^2 + \alpha_{25} X_4^2 + 2\alpha_{27} X_5 X_1 + 2\alpha_{28} X_5 X_2 + \\
 & + 2\alpha_{29} X_5 X_3 + 2\alpha_{30} X_5 X_4 + 2\alpha_{31} X_5 X_6 + \alpha_{36} X_6^2 + \alpha_{39} X_1 X_2 + \alpha_{42} X_1 X_3 + \\
 & + \alpha_{44} X_1 X_4 + \alpha_{46} X_1 X_6 + \alpha_{48} X_2 X_3 + \alpha_{50} X_2 X_4 + \alpha_{52} X_2 X_6 + \alpha_{53} X_3 X_4 + \\
 & + \alpha_{55} X_3 X_6 + \alpha_{56} X_4 X_6
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J(3)}{\partial X_6} = & 3\alpha_6 X_6^2 + \alpha_{11} X_1^2 + \alpha_{16} X_2^2 + \alpha_{21} X_3^2 + \alpha_{26} X_4^2 + \alpha_{31} X_5^2 + 2\alpha_{32} X_6 X_1 + \\
 & + 2\alpha_{33} X_6 X_2 + 2\alpha_{34} X_6 X_3 + 2\alpha_{35} X_6 X_4 + 2\alpha_{36} X_6 X_5 + \alpha_{40} X_1 X_2 + \\
 & + \alpha_{43} X_1 X_3 + \alpha_{45} X_1 X_4 + \alpha_{46} X_1 X_5 + \alpha_{49} X_2 X_3 + \alpha_{51} X_2 X_4 + \\
 & + \alpha_{52} X_2 X_5 + \alpha_{54} X_3 X_4 + \alpha_{55} X_3 X_5 + \alpha_{56} X_4 X_5
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

A expressão  $A'X \left| J(3) \right|_x$  é obtida fazendo o produto dos termos da matriz coluna proveniente da Equação A.5 pelos termos da matriz linha formada pelas expressões A.6, A.7, A.8, A.9, A.10 e A.11.

EXPRESSÃO À DIREITA DA EQUAÇÃO A.1

Esta expressão é determinada fazendo a derivada de  $J(2)$  em relação a  $X$  (onde  $J(2) = X^T KX$ ), ou seja:

$$\left| \frac{J(2)}{X} \right| = \left| X^T KX \right| = 2KX$$

$$\left| \frac{J(2)}{X} \right| = 2 \begin{pmatrix} X_1K_{11}+X_2K_{12}+X_3K_{13}+X_4K_{14}+X_5K_{15}+X_6K_{16} \\ X_1K_{21}+X_2K_{22}+X_3K_{23}+X_4K_{24}+X_5K_{25}+X_6K_{26} \\ X_1K_{31}+X_2K_{32}+X_3K_{33}+X_4K_{34}+X_5K_{35}+X_6K_{36} \\ X_1K_{41}+X_2K_{42}+X_3K_{43}+X_4K_{44}+X_5K_{45}+X_6K_{46} \\ X_1K_{51}+X_2K_{52}+X_3K_{53}+X_4K_{54}+X_5K_{55}+X_6K_{56} \\ X_1K_{61}+X_2K_{62}+X_3K_{63}+X_4K_{64}+X_5K_{65}+X_6K_{66} \end{pmatrix} \quad (A.12)$$

e calculando o produto  $f(2)^T(X) \left| \frac{J(2)}{X} \right|$  (onde  $f(2)^T(X) =$

$$\left| \begin{matrix} b_1X_2X_3 & b_2X_1X_3 & b_3X_1X_2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right| \text{ que é:}$$

$$f(2)^T(X) \left| \frac{J(2)}{X} \right| = 2 \begin{pmatrix} b_1(X_1X_2X_3K_{11}+X_2^2X_3K_{12}+X_2X_3^2K_{13}+X_2X_3X_4K_{14}+ \\ \quad \quad \quad +X_2X_3X_4K_{15}+X_2X_3X_6K_{16}) \\ b_2(X_1^2X_3K_{21}+X_1X_2X_3K_{22}+X_1X_3^2K_{23}+X_1X_3X_4K_{24}+ \\ \quad \quad \quad +X_1X_3X_5K_{25}+X_1X_3X_6K_{26}) \\ b_3(X_1^2X_2K_{31}+X_1X_2^2K_{32}+X_1X_2X_3K_{33}+X_1X_2X_4K_{34}+ \\ \quad \quad \quad +X_1X_2X_5K_{35}+X_1X_2X_6K_{36}) \end{pmatrix}$$

Iguälando os termos semelhantes provenientes de  $A^T X | J(3) |_x$  e  $f(2)^T(x) | J(2) |_x$  forma-se o sistema algébrico, cuja solução fornece as constantes  $\alpha_\lambda$  ( $\lambda = 56$ ).

Substituindo finalmente estas constantes nas expressões A.6, A.7, A.8, A.9, A.10 e A.11, e estas por sua vez, na equação A.3, obtêm-se as três componentes da parte não linear da lei de controle.