

1. Publicação nº <i>INPE-2258-PRE/040</i>	2. Versão	3. Data <i>Nov., 1981</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DGA/DII</i>	Programa <i>IONO</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>QUANTIDADES CLASSIFICADAS, VETORES ABSTRATOS, ESPAÇOS VETORIAIS ABSTRATOS.</i>			
7. C.D.U.: <i>519.6</i>			
8. Título <i>QUANTIDADES CLASSIFICADAS E SUAS APLICAÇÕES</i>		10. Páginas: <i>17</i>	
		11. Última página: <i>19</i>	
		12. Revisada por <i>Luz A. V. D. S.</i> <i>Luiz Alberto Vieira Dias</i>	
9. Autoria <i>Carlos José Zambutti</i>		13. Autorizada por <i>Parada</i> <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor</i>	
Assinatura responsável <i>[assinatura]</i>			
14. Resumo/Notas <i>Apresenta-se uma forma alternativa para a caracterização de vetores, num sentido abstrato. A conceituação fundamenta-se no processo de Cantor para a extensão de conjuntos numéricos. Incluem-se, para exemplificação, aplicações simples para a utilização em Computação e Análise Numérica.</i>			
15. Observações <i>Este trabalho será submetida aos Anais do IV Congresso Brasileiro de Matemática Aplicada e Computacional e publicado na Revista Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.</i>			

QUANTIDADES CLASSIFICADAS E SUAS APLICAÇÕES

C.J. ZAMLUTTI

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

12200 São José dos Campos, S.P., Brasil

SUMÁRIO

Apresenta-se uma forma alternativa para a caracterização de vetores, num sentido abstrato. A conceituação fundamenta-se no processo de Cantor para a extensão de conjuntos numéricos. Incluem-se, para exemplificação, aplicações simples para a utilização em Computação e Análise Numérica.

1 - INTRODUÇÃO

Na elaboração de conceitos matemáticos, podem-se distinguir duas correntes: a primeira recorre à intuição e a segunda a um formalismo mais rigoroso. A forma intuitiva fundamenta-se no processo usado por Cantor (MacDuffe, 1940), para a criação de conjuntos numéricos, mais completos, a partir de conjuntos numéricos já estabelecidos. O exemplo clássico deste método encontra-se na conceituação de número real, baseando-se na impossibilidade de existir um número racional para representar $\sqrt{2}$. Assim originariamente (Dedekind, 1963) os números reais foram definidos como limites de sequências de números racionais. A segunda forma, de origem grega, foi empregada por Peano (Landau, 1951) e estabelece as entidades matemáticas a partir de um conjunto de axiomas. No exemplo mencionado da conceituação de número real, o método axiomático utiliza-se de um conjunto de "regras" que constituem os cortes de Dedekind (Rudin, 1964).

Do ponto de vista de aplicação pode-se considerar a forma intuitiva como a maneira direta de definição. O método axiomático constitui, pela sua própria natureza, um processo indireto de definição.

Neste trabalho, utilizar-se-á uma recorrência semelhante a de Cantor. para a conceituação de vetores, de matrizes e de tensores, dentro de um contexto abstrato. A definição aqui estabelecida apresenta a vantagem de permitir, ao pesquisador em Análise Numérica, a utilização dos espaços vetoriais abstratos como extensão dos conhecimentos de vetores da Física e da Geometria. O tratamento alternativo, pela forma

axiomática, exige a introdução de espaços como os de Hilbert, Banach e Sobolev para o desenvolvimento dos métodos numéricos na resolução de problemas, aumentando assim a complexidade dos processos dedutivos.

Alguns exemplos de aplicações foram inseridos no final do trabalho com o intuito de dar ao leitor maior familiaridade com a aproximação aqui sugerida.

2 - QUANTIDADES CLASSIFICADAS

Historicamente, as limitações dos conjuntos numéricos (inteiros, racionais, reais e complexos) apareceram quando se tentava exprimir certas grandezas da Física como a força, a velocidade etc. Estes tipos de grandeza requeriam, para sua total especificação, além de uma parte "quantitativa" (módulo) outra, de certa forma, "qualitativa" (direção e sentido). Apareceram, assim, as primeiras quantidades classificadas, cujos processos de tratamento, formalizados pela Matemática, receberam o nome de Análise Vetorial.

Baseando-se nessa limitação, adotar-se-ão as seguintes definições como conjuntos numéricos "mais completos".

Definição 1 - Entende-se por vetor toda entidade constituída por duas partes, um "quantitativa", pertencente a qualquer conjunto numérico, e outra "qualitativa", que será chamada propriedade, qualidade ou classificação. Adotar-se-á a representação simbólica:

$$\underline{v} = q \hat{e}$$

para expressar que \underline{v} é um vetor constituído por um valor numérico, q , e uma propriedade identificadora, \hat{e} .

Definição 2 - Denomina-se versor o vetor cuja quantidade é unitária para determinada propriedade. Utilizar-se-á a representação simbólica:

$$\underline{e} = 1 \hat{e}$$

Definição 3 - Denomina-se vetor nulo o vetor cuja quantidade q é nula para determinada propriedade. Representa-se esse vetor simbolicamente por:

$$\underline{0} = 0 \hat{e}$$

O conceito de vetor, assim estabelecido, é bastante amplo, englobando também quantidades classificadas, como por exemplo:

$$\underline{y} = 10 \text{ lápis,}$$

identificado pela quantidade 10 e pelo "qualificativo" lápis. Se a "qualidade" fosse dezena de lápis escrever-se-ia:

$$\underline{y} = 1 \text{ dezena de lápis,}$$

sendo, neste caso, versor da qualidade dezena de lápis.

No caso em que a propriedade especifica uma orientação (direção e sentido) o vetor, assim definido, pode representar um grandeza física.

Em termos de teoria de conjuntos, a definição aqui adotada pode ser interpretada como a grandeza que representa numericamente o "conteúdo" de elementos do conjunto especificado pela propriedade \hat{e} .

A extensão do conceito estabelecido de vetor é imediata, resultando, assim, mais duas definições.

Definição 4 - Denomina-se matriz toda entidade constituída por uma quantidade e duas propriedades. Uma matriz escreve-se como:

$$\underline{A} = q \hat{e}_a \hat{e}_b$$

Definição 5 - Entende-se por tensor toda entidade constituída por uma quantidade e três ou mais propriedades. Pode-se usar a notação:

$$t_{abcd} = q \hat{e}_a \hat{e}_b \hat{e}_c \hat{e}_d$$

A distinção aqui adotada é puramente formal, pois é possível considerarem-se vetores e matrizes como casos particulares de tensores. Neste tipo de abordagem, o tensor é considerado como qualquer entidade uniclassificada ou multiclassificada.

A definição, aqui proposta, apresenta uma íntima semelhança com a geração de matrizes e de tensores por meio de diádicas e poliádicas (Friedman, 1966; Mathews and Walker, 1970).

3 - OPERAÇÃO COM VETORES - ADIÇÃO E PRODUTO POR ESCALAR

No estabelecimento das operações que envolvem vetores, deve-se novamente invocar a relação entre eles e a teoria de conjuntos. Assim, dados dois vetores

$$\underline{v}_1 = v_1 \hat{e}_1 \quad \text{e} \quad \underline{v}_2 = v_2 \hat{e}_2$$

com propriedades distintas, a união resultante será dada pela composição:

$$\underline{v} = v_1 \hat{e}_1 \cup v_2 \hat{e}_2.$$

Quando dois vetores são de mesma espécie (a propriedade

dos dois é a mesma), a união deles transforma-se numa adição. Note-se que composição é diferente de adição. Sejam

$$\underline{v}_1 = v_1 \hat{e}_1 \quad \text{e} \quad \underline{w}_1 = w_1 \hat{e}_1$$

esses vetores. A soma, \underline{v} , deles será expressa por:

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{w}_1 = (v_1 + w_1) \hat{e}_1$$

Este último resultado permite definir o produto por escalar através da relação:

$$\underline{v} = a \underline{v}_1 = (a v_1) \hat{e}_1$$

Dentro do contexto apresentado, a regra do paralelogramo constitui uma regra para composição de vetores, considerado o caráter geométrico, não sendo uma forma de adição de vetores. Outro exemplo da composição de vetores é:

$$\underline{v} = 10 \text{ bananas} \cup 2 \text{ laranjas} = 12 \text{ frutas}$$

que mostra a flexibilidade do conceito estabelecido.

As regras de composição só têm sentido quando os vetores são, de mesma natureza, embora de diferentes espécies. Diz-se que esses vetores são homogêneos. Todos os exemplos acima envolvem composição de vetores homogêneos. Quando os vetores são de natureza diferente (heterogêneos), por exemplo, um vetor geométrico e o vetor 10 bananas, o vetor composto funciona como dois vetores isolados. Nestes casos, não se estabelecem regras de composição, embora exista o vetor composto.

Quando o produto por escalar é definido podem-se usar in distintamente as notações $\underline{v} = v \hat{e}$ ou $\underline{v} = v \underline{e}$. Esta última notação é a mais popular em Análise Vetorial.

Essas operações estendem-se também analogamente para matrizes e tensores.

4 - COMPONENTE DE UM VETOR SEGUNDO UMA PROPRIEDADE

Seja V_1 um conjunto de elementos com a propriedade \hat{e}_1 , cujo conteúdo é medido pelo vetor $\underline{v}_1 = v_1 \hat{e}_1$, e seja \hat{e}_2 uma propriedade considerada. Denomine-se V_1' a intersecção do conjunto V_1 com o universo E_2 , da propriedade \hat{e}_2 . A medida do conteúdo dessa intersecção, $\underline{v}_1' = v_1' \hat{e}_2$, será chamada componente de \underline{v}_1 segundo \hat{e}_2 .

Como exemplo considere-se o vetor $\underline{v}_1 = 2$ bicicletas e seja $\hat{e}_2 =$ roda. A intersecção do vetor dado com o universo do conjunto de rodas contém 4 elementos. Assim, $\underline{v}_1' = 4$ rodas.

Um exemplo geométrico permitirá estabelecer a ligação entre a conceituação aqui proposta e a já estabelecida na Geometria. Seja \underline{v}_1 um vetor definido por um segmento de reta AB, orientado de A para B. Seja \hat{e}_2 uma direção e um sentido dados. O conjunto de pontos V_1' será dado pelas intersecção de todas retas paralelas a \hat{e}_2 , que cortam o segmento AB. A Figura 4.1 ilustra essa configuração geométrica. Do triângulo ABC dessa figura resulta imediatamente $v_1' = v_1 \cos \theta$. A componente de \underline{v}_1 segundo \hat{e}_2 é $\underline{v}_1' = v_1 \cos \theta \hat{e}_2$, resultado este que coincide com o da Geometria. Na determinação do comprimento AC pode-se considerar que a reta r_b deslocou-se para baixo e nela foram marcados todos os pontos de intersecção com o segmento AB até ser atingida a posição da reta r_a .

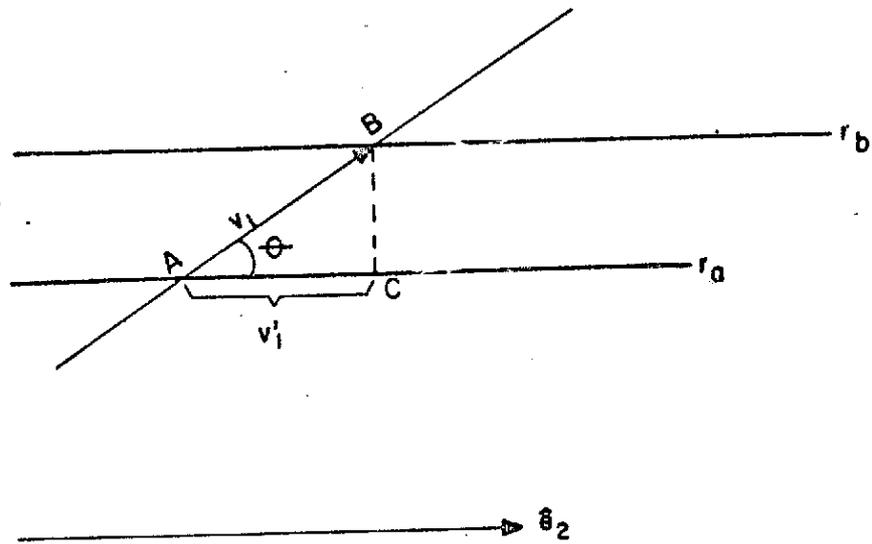


Fig. 4.1 - Representação geométrica do processo para a determinação da projeção de um vetor sobre outro.

Em analogia com esse último exemplo, a relação v_1' / v_1 é por vezes denominada coseno diretor e é basicamente uma medida da influência quantitativa da propriedade. Dessa forma, do ponto de vista operacional, tanto a parte "quantitativa", como a "qualitativa" participam ativamente.

Quando $v_1' = 0$ diz-se que os vetores \underline{v}_1 e \underline{v}_2 são ortogonais, mantendo-se ainda, como no último parágrafo, a nomenclatura usada na Geometria.

5 - PRODUTO ESCALAR OU CONTRAÇÃO

Sejam $\underline{v}_1 = v_1 \hat{e}_1$ e $\underline{v}_2 = v_2 \hat{e}_2$ dois vetores cuja única propriedade comum¹ entre eles é \hat{e} . Considerem-se $v_1' = v_1 \hat{e}$ e $v_2' = v_2 \hat{e}$ como as respectivas componentes dos vetores segundo \hat{e} . Define-se como produto escalar de \underline{v}_1 por \underline{v}_2 , $v_1' v_2'$, cuja notação é

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = v_1' v_2'$$

Dessa definição a propriedade da comutatividade decorre imediatamente.

No caso particular em que $\hat{e} = \hat{e}_2$ tem-se:

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = v_1' v_2$$

A extensão do produto escalar para vetores compostos é uma consequência imediata da definição. Assim, se $\underline{v} = \sum_i v_i \hat{e}_i$ e $\underline{u} = u \hat{e}$, onde \hat{e} é a propriedade comum dos vetores, o produto escalar será dado

¹ A existência de propriedades comuns a dois vetores não requer a multi-classificação. Assim 10 frutas é um vetor que pode possuir a propriedade de "laranjas" e comum com outro vetor 8 "frutas cítricas".

por:

$$\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = u \sum v'_i$$

sendo $\underline{v}'_i = v'_i \hat{e}_i$ as componentes de $v_i \hat{e}_i$ segundo \hat{e} .

A adoção desse conceito para entidades multiqualificadas (matrizes e tensores) requer certo cuidado, uma vez que s \hat{o} quantidades de mesma esp \acute{e} cie s \hat{a} o envolvidas no produto. Para exemplificar considerem-se as duas matrizes compostas:

$$\underline{v} = U U v \quad \hat{e} \hat{b} = U v \hat{b}$$

$$- \quad j \quad i \quad ji \quad i \quad j \quad j \quad j \quad j$$

$$\underline{q} = U U q \quad \hat{e}_i \hat{d}_k = U q \hat{d}$$

$$- \quad k \quad i \quad ki \quad i \quad k \quad k \quad k$$

o produto matricial (ou contração) das propriedades \hat{e}_i escreve-se como:

$$\underline{p} = U U \langle \underline{v}_j, \underline{q}_k \rangle \hat{b}_j \hat{d}_k$$

$$- \quad j \quad k$$

Pode-se notar que, especificadas as propriedades correspondentes a cada quantidade, o produto matricial reduz-se a um produto escalar. Essa notação evita os cuidados especiais que devem ser tomados com respeito \hat{a} ordem de execução do produto $\underline{p} = \underline{v} \underline{q}$ como soma de produtos de linhas por colunas (Gantmacher, 1959). Este ponto ser \hat{a} retomado oportunamente.

A redução do produto matricial a um produto escalar j \hat{a} \acute{e} conhecida do tratamento de matrizes representadas por di \hat{a} dicas. A incluso das propriedades pode ent \hat{a} o ser considerada como passo seguinte no sentido de generalização do conceito.

6 - VETORES QUE CONTÊM INFINITAS COMPONENTES

Na Seção 3 mostrou-se como dois vetores são combinados para produzir um vetor composto. A combinação de infinitos vetores permite que funções contínuas, ou com descontinuidade de primeira espécie, definidas num intervalo (a,b), possam ser tratadas com os recursos da Análise Vetorial. Seja $f(x)$ uma função que satisfaz essas condições. Considerando-se cada posição x do intervalo (a,b) como uma propriedade distinta, \hat{x} , e cada versor \underline{x} ortogonal a todos os demais do mesmo intervalo, pode-se construir o vetor composto:

$$\underline{v} = \int_a^b f(x) \underline{x} \quad x \in (a,b)$$

O vetor, assim definido, só tem significado no sentido de distribuições (Lighthill, 1964) e o versor \underline{x} é representado por:

$$\underline{x} = \left[\int_a^b \delta(t-x) dt \right] \hat{x}$$

onde $\delta(t-x)$ é a função delta de Dirac.

O produto escalar para os vetores assim constituídos é calculado por (Friedman, 1966; Mathews, and Walker, 1970):

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$$

Este resultado está relacionado com a forma de composição (Seção 3) associada a este tipo de vetores.

7 - FORMA ESTRUTURAL PARA VETORES E MATRIZES

Para simplificar a notação de vetores, pode-se eliminar a explicitação da propriedade, estando subentendido que o índice da quantidade está em correspondência biunívoca com a propriedade e ele correspondente, que consta de uma lista ordenada. Esta forma apresenta o inconveniente de requerer regras rígidas para sua implementação.

Originalmente, os vetores e matrizes eram escritos em formas estruturais como: linhas e colunas para vetores e formas retangulares para matrizes. Nestas estruturas, a ordem convencional era orientada da esquerda para a direita e de cima para baixo. Isto implicava uma grande dependência posicional, requerendo operações adicionais, como a "transposição", para coerência da convenção adotada. Assim, o produto escalar que deveria ser executado seguindo essa orientação tornava-se não comutativo. O esquema abaixo ilustra este fato.

$$(\longrightarrow) \begin{pmatrix} \downarrow \\ \downarrow \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{pmatrix} (\downarrow \dots \downarrow)$$

Para consistência da comutatividade do produto escalar das parcelas com a posição invertida fazia-se então necessária uma prévia transposição. Assim, para coerência, definia-se o produto escalar pela multiplicação de um vetor na forma de linha por um vetor na forma de coluna.

Outra forma possível para a omissão das propriedades é convencional, como na Análise Tensorial, que a contração é executada sobre o índice comum. Utilizando-se o mesmo exemplo da Seção 5, escrever-

se-ia com esta conveção:

$$p_{jk} = \langle \underline{v}_j, \underline{q}_k \rangle = \sum_i v_{ji} q_{ki}$$

onde p_{ji} é o elemento genérico da matriz \underline{P}

Deve-se enfatizar que se os índices carregam a informação sobre a propriedade, i.e., $k = k_1, \dots, k_n$ ao invés de $k=1, \dots, n$, interessam apenas as naturezas i e k por exemplo, sendo indiferente a ordem $i k$ ou $k i$. Infelizmente, não se pode manter esta flexibilidade na implementação em computadores. Neste caso, deve ser respeitada a ordem $i k$ ou $k i$ dependendo da forma como foram armazenados os valores q_{ki} .

8 - ESPAÇOS VETORIAIS ABSTRATOS

Qualquer coleção de propriedades distintas $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ pode ser considerada como um conjunto. Associando-se a essas propriedades quantidades pertencentes a um conjunto numérico obtêm-se vetores com a forma genérica:

$$\underline{v} = \sum_i U_{ij} \hat{e}_j$$

Fazendo-se agora os q_i assumirem todos os valores possíveis do conjunto numérico resultará uma coleção (finita ou infinita) de vetores, cujo conjunto é chamado espaço vetorial abstrato.

O número n de propriedades é chamado dimensão do espaço. Quando $n \rightarrow \infty$, diz-se que o espaço é infinito.

Denomina-se base do espaço vetorial qualquer conjunto de vetores que satisfaçam, as condições:

- a) Qualquer vetor do conjunto possui pelo menos uma propriedade distinta das propriedades de todos os outros vetores do conjunto.
- b) O conjunto de vetores possui todas as propriedades distintas, as quais caracterizam o espaço vetorial.

Algumas consequências importantes resultam dessa conceituação:

- a) As características do espaço vetorial dependem essencialmente das características do conjunto numérico a ele associado.
- b) Somente são definidas operações que resultem num vetor pertencente ao espaço vetorial.

9 - DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DE ESPAÇO VETORIAL

A definição axiomática (Kwen and Wang, 1976) de espaços vetoriais requer a existência de 3 elementos para a sua constituição. Esses elementos são:

- a) um grupo abeliano aditivo V ;
- b) um campo F ;
- c) uma função $f: F \times V \rightarrow V$, chamada multiplicação por escalar.

A multiplicação por escalar deve satisfazer às relações:

$$f(a, f(b, \underline{v})) = f(ab, \underline{v})$$

$$f(a+b, \underline{u}) = f(a, \underline{u}) + f(b, \underline{u})$$

$$f(a, \underline{u+v}) = f(a, \underline{u}) + f(a, \underline{v})$$

$$f(1, \underline{v}) = \underline{v}$$

para todo $a, b \in F$ e todo $\underline{u}, \underline{v} \in V$. O vetor \underline{e} é então definido como um elemento do espaço vetorial.

Via de regra o grupo aditivo abeliano é constituído pelo campo F associado à operação adição. Com esta ressalva a definição axiomática implica necessariamente que as propriedades do espaço vetorial sejam ditadas pelas características do campo F .

Comparando-se as duas definições vê-se que a adotada neste trabalho é mais flexível, pois não exige que o conjunto numérico associado forme necessariamente um campo.

Restringindo-se à generalidade da definição de espaço vetorial, proposta neste trabalho, pela exigência de que a quantidade pertença a um campo F e que as operações adição e produto por escalar sejam sempre possíveis, recuperam-se as características da definição axiomática.

A definição tradicional também não permite a utilização de vetores heterogêneos por não constituírem um grupo abeliano aditivo. Considerando-se apenas vetores homogêneos, a formulação axiomática engloba a composição e a adição de vetores numa única forma que constitui a "regra de adição" (denominada mais apropriadamente "regra de composição", neste trabalho).

10 - APLICAÇÕES

A mais simples das aplicações em computação está certamente no controle de estoque para firmas comerciais. Tomando-se cada mercadoria como a quantidade obtêm-se vetores \underline{v}_i , associados a cada espécie diferente do estoque. Denominando-se \underline{w}_i o vetor correspondente a venda é \underline{u}_i o vetor correspondente a compra da i -ésima mercadoria, a atualização do estoque será feita para cada item pela relação:

$$(\underline{v}_i) \text{ atualizado} = \underline{v}_i + \underline{u}_i - \underline{w}_i$$

Outras aplicações semelhantes podem ser encontradas na utilização da linguagem PL/I, como por exemplo em Pollack and Sterling, (1969). É importante observar que para utilização como controle de estoque, censo demográfico etc., o conjunto numérico associado pode ser o dos números inteiros que obviamente não constituem um campo. Em geral, também só a operação adição é utilizada nessas aplicações e os vetores compostos são heterogêneos.

Em Análise Numérica, a aplicação principal, do material aqui exposto, encontra-se na teoria das aproximações. Assim, é possível provar que funções, como polinômios, podem ser integradas, diferenciadas etc., "exatamente" por métodos numéricos (Zamlutti, 1981):

Outra aplicação, mais simples, consiste no estabelecimento do critério para avaliação da qualidade de uma aproximação, $g(x)$, para a função, $f(x)$, dentro de um intervalo (a,b) , considerado o efeito do conjunto de erros. Chamando-se $r(x)$ a diferença individualizada:

$$r(x) = g(x) - f(x), \quad x \in (a,b)$$

e considerando-se $w(x)$ como medida da importância relativa dessa diferença, uma avaliação do conjunto de erros será dada por:

$$E [g(x)] = \left\langle \int_X r(x) \hat{x}, \int_X w(x) \hat{x} \right\rangle$$

O critério de utilizar a função $g(x)$ que minimiza $E [g(x)]$ é conhecido como "critério dos resíduos ponderados" (Connor and Brebbia, 1978). Quando $w(x)=r(x)$, esse critério é conhecido como critério dos mínimos quadrados, utilizado no ajuste de curvas.

AGRADECIMENTOS

O apoio dos colegas Drs. L.A. Vieira Dias e A.E. Costa Pereira foi uma valiosa contribuição para o desenvolvimento deste trabalho. O autor gostaria também de agradecer à Direção do INPE, que possibilitou sua publicação.

REFERÊNCIAS

- Bowen, R.M. and Wang, C.C. "Introduction to Vectors and Tensors Linear and Multilinear Algebra", New York, Plenum Press, 1976.
- Connor, J.J. and Brebbia, C.A. "Finite Element Techniques for Fluid Flow". London, Newnes Butterworth, 1978
- Dedekind, R. "Essays on the Theory of Numbers". New York, Dover, 1963.
- Friedman, B. "Principles and Techniques of Applied Mathematics". New York, Wiley, 1966.
- Gantmacher, F.R. "The Theory of Matrices, Vol. 1, Chelsea. New York, 1959.
- Landau, E. "Foundation on Analysis". F. Steinhardt, Translator. New York Chelsea, 1951.
- Lighthill, F.R.S.-, M.J. "Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions". New York, Cambridge, 1964.
- MacDuffee, C.C. "Introduction to Abstract Algebra" John Wiley and Sons New York, 1940 Chapter VI.
- Mathews, J. and Walker, R.L. "Mathematical Methods of Physics". New York, W.A. Benjamin, 1970.
- Pollack, S.V. and Sterling, T.D. "A Guide to PL/I". New York, Holt Rinehart and Winston, Inc., 1969.
- Rudin, W. "Principles of Mathematical Analysis". New York, Mac-Graw-Hill, 1964.
- Zanlutti, C.J. "Fundamentos de Análise Numérica para Computadores Digitais, vol. II. INPE - (no prelo), 1981.