1. Publicação nº	2. Versão	3. Data	5. Distribuição
INPE-2447-PRE/146		*Junho, 1982*	☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita
4. Origem *DMC/DGC*	Programa *CONTAT*		

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)
SENSIBILIDADE *EQUAÇÃO DE RICCATI*
OBSERVADORES *DUALIDADE*

7. C.D.U.: *681.5.07*

8. Título *INPE-2447-PRE/146*

REDUÇÃO DE SENSIBILIDADE DE OBSERVADORES PARA SISTEMAS LINEARES

10. Páginas: *04*

11. Última página: *03*

12. Revisada por

Agenor de Toledo Fleury

13. Autorizada por

Parada

Nelson de Jesus Parada
Diretor

9. Autoria *Antonio Felix Martins Neto*

Assinatura responsável Antonio Felix Martins Neto

14. Resumo/Notas

Um método para a redução da sensibilidade de observadores para sistemas lineares é apresentado. Partindo-se de um projeto inicial de observador de Luenberger, uma equação de Riccati é construída. A solução desta equação permite a obtenção de um novo observador, para o qual um índice de desempenho do tipo integral de uma forma quadrática do erro da saída do do observador é diminuído ou, na pior das hipóteses, seu valor permanece constante. Este resultado confirma a existência de dualidade entre o problema de observadores e o problema de sensibilidade de sistemas.

15. Observações *Este trabalho será apresentado no 4º Congresso Brasileiro de Automática, a se realizar de 14 a 17 de setembro de 1982, em Campinas, SP.*

REDUÇÃO DA SENSIBILIDADE DE OBSERVADORES PARA SISTEMAS LINEARES

Antonio Felix Martins Neto

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq
Caixa Postal 515
12200 - São José dos Campos - SP - Brasil

Resumo

Um método para a redução da sensibilidade de observadores para sistemas lineares é apresentado. Partindo-se de um projeto inicial de observador de Luenberger, uma equação de Riccati é construída. A solução desta equação permite a obtenção de um novo observador, para o qual um índice de desempenho do tipo integral de uma forma quadrática do erro da saída do observador é diminuído ou, na pior das hipóteses, seu valor permanece constante. Este resultado confirma a existência de dualidade entre o problema de observadores e o problema de sensibilidade de sistemas.

Sensitivity Reduction in Linear System Observers

Abstract

A method is presented for reducing the sensitivity of linear system observers. Starting with an initial design for a Luenberger observer, a Riccati equation is established. Its solution permits the acquisition of a new observer for which the integral of a quadratic form of the observer error is decreased or, in the worst case, is kept unchanged. This result confirms the existence of duality between the observer problem and the sensitivity problem of systems.

1. INTRODUÇÃO

Porter (1977) mostrou que existe uma interrelação entre a teoria dos observadores e a teoria de sensibilidade de sistemas. O problema do observador e o problema da sensibilidade são duais.

O objetivo deste trabalho é apresentar um resultado dual, obtido por Sundararajan e Cruz (1972), para sistemas com realimentação linear. Como consequência, é possível sugerir um procedimento para melhorar o projeto de um observador sob o ponto de vista da sensibilidade.

2. COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se um sistema que satisfaz às mesmas condições impostas por Porter (1977), a saber:

$$\dot{x} = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \tag{2.1}$$

$$y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t),\quad t \geq 0 \tag{2.2}$$

onde y, x, u tomam valores em R^m, R^n e R^ℓ, respectivamente, e as matrizes A(t), B(t), C(t) e D(t) são $n \times n$, $n \times \ell$, $m \times n$ e $m \times \ell$, respectivamente. Supõe-se que as matrizes têm propriedades convenientes para um mapeamento $L_2^\ell \to L_2^m$ no intervalo de interesse. O estado inicial x(0) é desconhecido, e os valores nominais das matrizes são conhecidos e denominados, respectivamente, $\overline{A}(t)$, $\overline{B}(t)$, $\overline{C}(t)$ e $\overline{D}(t)$.

Seja um obervador para o sistema onde foram considerados os valores nominais das matrizes:

$$\dot{p}(t) = \overline{A}(t)\,p(t) + \overline{B}(t)\,u(t) - v(t) \tag{2.3}$$

$$\overline{y}(t) = \overline{C}(t)\,p(t) + \overline{D}(t)\,u(t) \tag{2.4}$$

$$v(t) = \overline{B}(t)\,K(t)\,\{y(t) - \overline{y}(t)\}, \tag{2.5}$$

onde K é a matriz de ganho do observador e tem dimensão $\ell \times m$, e p(0) é a condição inicial do observador.

Chamando-se $\phi = x - p$, obtém-se:

$$\dot{\phi}(t) = [\overline{A}(t) + \overline{B}(t)K(t)\overline{C}(t)]\,\phi(t) + \pi(t), \tag{2.6}$$

onde:

$$\pi(t) = [\delta A(t) + \overline{B}(t)K(t)\;\delta C(t)]\;x(t) + [\delta B(t) + \overline{B}(t)K(t)\;\delta D(t)]\;u(t) \tag{2.7}$$

$$\phi(0) = x(0) - p(0) \tag{2.8}$$

$$\delta A(t) \triangleq A(t) - \overline{A}(t) \tag{2.9}$$

$$\delta B(t) \triangleq B(t) - \overline{B}(t) \tag{2.10}$$

$$\delta C(t) \triangleq C(t) - \overline{C}(t) \tag{2.11}$$

$$\delta D(t) \triangleq D(t) - \overline{D}(t) \tag{2.12}$$

Fazendo-se as seguintes hipóteses:

a) $\delta D = 0$, pois, além da transmissão direta não estar sempre presente, $D(t)$ é a matriz mais facilmente testável;

b) $\delta C = 0$, pois, se C e $\overline{C}$ têm a mesma classe, é sempre possível obter uma variação equivalente a $\delta C(t)$ em $A(t)$ e $B(t)$,

pode-se considerar que:

$$\pi(t) = \delta A(t)\ x(t) + \delta B(t)\ u(t) \tag{2.13}$$

3. MÉTODO PARA MELHORAR A SENSIBILIDADE DO OBSERVADOR

Dado um observador do sistema proposto, ou, equivalentemente, uma matriz K_1, deseja-se melhorá-lo, de modo que seja menos sensível às variações dos parâmetros. Seja $K_2(t)$ o ganho do novo observador. Nestas condições, usando-se as Equações 2.6 e 2.13, chega-se a:

$$\frac{d}{dt}\,\Delta\phi(t) = [\overline{A}(t) + \overline{B}(t)\ K_1(t)\ \overline{C}(t)]\ \Delta\phi + \overline{B}(t)[K_2(t) - K_1(t)]\ \overline{C}(t)\ \phi_2(t) \tag{3.1}$$

$$\Delta\phi(0) = 0,$$

onde:

$$\phi_2(t) = x - p_2$$

$$\phi_1(t) = x - p_1 \tag{3.2}$$

$$\Delta\phi(t) = \phi_2 - \phi_1$$

Seja $\mathcal{L}$ o operador linear $\beta = \mathcal{L}\alpha$, determinado pela equação diferencial:

$$\dot{\beta}(t) = [\overline{A}(t) + \overline{B}(t)\ K_1(t)\ \overline{C}(t)]\ \beta(t) + \alpha(t), \quad t \geq 0 \tag{3.3}$$

$$\beta(0) = 0$$

Baseando-se nesta definição, resulta:

$$\Delta\phi = \mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2,$$

onde:

$$\Delta K \triangleq K_2 - K_1.$$

Desta maneira,

$$\phi_2 - \phi_1 = \mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2 \tag{3.4}$$

$$\phi_1 = (I - \mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C})\phi_2. \tag{3.5}$$

Seja a equação de Riccati:

$$\dot{Q}(t) = V_1(t) - Q(t)\ \overline{C}^T(t)\ V_2^{-1}(t)\ \overline{C}(t)\ Q(t) + Q(t)\ [\overline{A}(t) + \overline{B}(t)\ K_1(t)\ \overline{C}(t)]^T + [\overline{A}(t) + \overline{B}(t)\ K_1(t)\ \overline{C}(t)]\ Q(t), \tag{3.6}$$

onde $V_1(t)$, $V_2(t)$ e Q são matrizes simétricas positivas definidas para todo t de dimensões $n \times n$, $m \times m$ e $n \times n$, respectivamente.

Supondo-se que $[\overline{A}(t), \overline{C}(t)]$ é observável, $[\overline{A}(t) + \overline{B}(t)\ K_1(t)\ \overline{C}(t), \overline{C}(t)]$ também é observável, e a Equação 3.6 tem uma solução única positiva definida.

Nestas condições, é fácil mostrar que:

$$\frac{dQ^{-1}(t)}{dt} + Q^{-1}(t)\,V_1(t)\ Q^{-1}(t) - \overline{C}^T(t)\,V_2^{-1}(t)\,\overline{C}(t) + [\overline{A}(t) + \overline{B}(t)\,K_1(t)\,\overline{C}(t)]^T\,Q^{-1}(t) + Q^{-1}(t)\,[\overline{A}(t) + \overline{B}(t)\,K_1(t)\,\overline{C}(t)] = 0 \tag{3.7}$$

$$Q^{-1}(0) = Q_0^{-1}$$

Multiplicando-se a Equação 3.7 à esquerda por: $(\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T$ e à direita por: $(\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)$, obtém-se:

$$(\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\,\frac{dQ^{-1}}{dt}\,(\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) + (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\,Q^{-1}(t)\,.\,V_1(t)\,Q^{-1}(t)\ (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) - (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\ \overline{C}^T(t)\ V_2^{-1}\,.\,\overline{C}(t)\ (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) + (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T[\overline{A}(t) + \overline{B}(t)\,K_1(t)\,.\,\overline{C}(t)]^T\,Q^{-1}(\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) + (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\,Q^{-1}[\overline{A}(t) + \overline{B}(t)\,.\,K_1(t)\ \overline{C}(t)]\ (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T = 0 \tag{3.8}$$

Então:

$$\frac{d}{dt}[(\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T Q^{-1}(\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)] = (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T[\overline{A}(t) + \overline{B}(t)K_1(t)\ \overline{C}(t)]^T\ Q^{-1}(t)\ (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) + \phi_2^T\overline{C}^T(t)\,.\,(\Delta K)^T\ \overline{B}^T(t)\ Q^{-1}(t)\ (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) + (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\,.\,\frac{dQ^{-1}}{dt}\ (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) + (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)\,Q^{-1}(t)\ \overline{B}(t)\ \Delta K(t)\,.\,\overline{C}(t)\ \phi_2(t) + (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\,Q^{-1}[\overline{A}(t) + \overline{B}(t)\ K_1(t)\,.\,\overline{C}(t)]\ (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2), \tag{3.9}$$

onde se utilizou:

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) = [\overline{A}(t) + \overline{B}(t)\ K_1\ \overline{C}(t)](\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) + \overline{B}(t)\ \Delta K\overline{C}(t)\ \phi_2. \tag{3.10}$$

Usando-se a Equação 3.9 na Equação 3.8, chega-se a:

$$\frac{d}{dt}[(\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\,Q^{-1}(\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)] + (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\,Q^{-1}(t)\,.\,V_1(t)\,Q^{-1}(t)\ (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) = (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\,\overline{C}^T(t)V_2^{-1}(t)\,.\,\overline{C}(t)\ (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) + \phi_2^T(t)\,\overline{C}^T(t)\ (\Delta K)^T\overline{B}^T(t)\,Q^{-1}(t)\,.\,(\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) + (\mathcal{L}\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)\ Q^{-1}(t)\ \overline{B}(t)\ \Delta K\overline{C}(t)\,.\,\phi_2(t) \tag{3.11}$$

Escolhendo-se $\overline{B}(t)\ \Delta K = -Q(t)\ \overline{C}^T(t)\ V_2^{-1}(t)$, simplifica-se a Equação 3.11 para:

$$\frac{d}{dt}[(L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\ Q^{-1}(L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)] + (L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)\ Q^{-1}(t).$$
$$V_1(t)\ Q^{-1}(t)(L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) = (L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\overline{C}^T(t)V_2^{-1}(t)\overline{C}(t).$$
$$(L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) - \phi_2^T(t)\ \overline{C}^T(t)\ V_2^{-1}(t)\ \overline{C}(t)\ (L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) -$$
$$-\ (L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\overline{C}^T(t)\ V_2^{-1}(t)\ \overline{C}(t)\ \phi_2(t) \qquad (3.12)$$

Usando-se a Relação 3.5, pode-se escrever:

$$\frac{d}{dt}[(L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T\ Q^{-1}(t)(L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)] + (L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2).$$
$$Q^{-1}(t)\ V_1(t)\ Q^{-1}(t)(L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) = [(I - L\overline{B}\Delta K\overline{C})\ \phi_2]^T.$$
$$\overline{C}^T(t)\ V_2^{-1}(t)\ \overline{C}(t)[(I - L\overline{B}\Delta K\overline{C})\ \phi_2] - \phi_2^T(t)\ \overline{C}^T(t).$$
$$V_2^{-1}(t)\ \overline{C}(t)\ \phi_2(t) = \phi_1^T(t)\overline{C}^T(t)V_2^{-1}(t)\overline{C}(t)\ \phi_1(t) -$$
$$-\ \phi_2^T(t)\ \overline{C}^T(t)\ V_2^{-1}(t)\ \overline{C}(t)\ \phi_2(t). \qquad (3.13)$$

definindo-se:

$$\overline{C}(t)\ \phi_1(t) = \overline{C}(t)\ x(t) - \overline{C}(t)\ p_1(t) \triangleq \lambda_1(t), \quad (3.14)$$

$$\overline{C}(t)\ \phi_2(t) = \overline{C}(t)\ x(t) - \overline{C}(t)\ p_2(t) \triangleq \lambda_2(t), \quad (3.15)$$

tem-se que λ_1 e λ_2 representam o erro no vetor saída para os dois observadores no caso $\delta C = 0$. Integrando-se a Equação 3.13, chega-se a:

$$(L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T Q^{-1}(t)(L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2) + \int_0^t (L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)^T Q^{-1}(\tau).$$
$$V_1(\tau)Q^{-1}(\tau)(L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2)d\tau = \int_0^t \lambda_1^T(\tau)V_2^{-1}(\tau)\lambda_1(\tau)d\tau$$
$$-\int_0^t \lambda_2^T(\tau)V_2^{-1}(\tau)\ \lambda_2(\tau)d\tau \qquad (3.16)$$

O lado esquerdo da Equação 3.16 é positivo ou nulo, pois as matrizes envolvidas são positivas definidas; portanto:

$$\int_0^t \lambda_1^T(\tau)\ V_2^{-1}(\tau)\ \lambda_1(\tau)d\tau \geq \int_0^t \lambda_2^T(\tau)\ V_2^{-1}(\tau).$$
$$\lambda_2(\tau)d\tau \qquad (3.17)$$

para todo $t \geq 0$.

Isto significa que o novo observador é menos sensível (ou pelo menos tão sensível) às variações de parâmetros quanto o observador original.

No caso em que a desigualdade se transforma em igualdade, tem-se necessariamente $L\overline{B}\Delta K\overline{C}\phi_2 = 0$ para todo t, o que implica, da Equação 3.5, que $\phi_1 \equiv \phi_2$ e, por conseguinte, $\lambda_1 \equiv \lambda_2$, não havendo redução de sensibilidade.

Do exposto, pode-se então propor o seguinte procedimento com vista a melhoria da sensibilidade do projeto de observadores:

a) Especificado $K_1(t)$, isto é, o observador inicial, e dadas as matrizes $V_1(t)$, $V_2(t)$ e Q_0 positivas definidas para todo $t \geq 0$, calcula-se a solução $Q(t)$ da Equação 3.6.

b) Faz-se $\overline{B}(t)\ \Delta K = -Q(t)\ \overline{C}^T(t)\ V_2^{-1}(t)$

c) Com este valor faz-se um acréscimo no ganho.

$$\overline{B}(t)\ K_2(t) = \overline{B}(t)\ K_1(t) + \overline{B}(t)\ \Delta K.$$

O novo observador de ganho $K_2(t)$ é menos sensível ou, na pior das hipóteses, de sensibilidade igual ao anterior.

4. COMENTÁRIOS

O procecimento sugerido pode ser comparado com o proposto por Sundararajan e Cruz (1972) para sistemas lineares ótimos. Verifica-se então que a equação de Riccati envolvida é igual à que aparece em problemas de sistemas lineares ótimos, enquanto a Equação 3.6 é igual à relacionada com o problema do observador ótimo (filtro de Kalman). Assim sendo, existe uma dualidade entre os dois resultados.

Além disso, a Condição 3.17 implica que a tranformação $\phi_2 = (I - \overline{B}\Delta K\overline{C})^{-1}\phi_1$ define uma contração causal e, portanto, o processo proposto leva à obtenção de observadores monótonos (Porter, 1977).

5. REFERÊNCIAS

Porter, W.A., (1977). "The Interrelationship Between Observers and System Sensitivity". IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-22, nº2: 144-146.

Sundararajan, N. & Cruz, J.B., (1972). "Sensitivity Reduction in Time - Varying linear and nonlinear systems", Int. J. Control, Vol. 15, nº 5: 937-943.

1. Publication Nº

2. Version

3. Date

5. Distribution

☐ Internal ☐ External

☐ Restricted

4. Origin

Program

6. Key words - selected by the author(s)

7. U.D.C.:

8. Title

10. Nº of pages:

11. Last page:

12. Revised by

9. Authorship

Responsible author

13. Authorized by

14. Abstract/Notes

15. Remarks