

INPE-5357-TDI/464

SOLUÇÃO DE UM MODELO DE ABLAÇÃO UNIDIMENSIONAL

Nerbe José Ruperti Junior

INPE
São José dos Campos
Novembro de 1991

536.24

RUPERTI JR., N.J.

Solução de um modelo de ablação
unidimensional / N.J. Rupert Jr. --
São José dos Campos: INPE, 1991. 100p.
(INPE-5357-TDI/464)

1. Ablação. 2. Proteção térmica. 3.
4. Transferência de calor. 5. Título

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Ciência Espacial

Dr. Ralf Gielow



Presidente

Dr. Edson Luiz Zaparoli



Orientador

Dr. Renato Machado Cotta



Orientador

Dr. Alexandre José da Silva



Membro da Banca
- Convidado -

Dr. Paulo Moraes Júnior



Membro da Banca
- Convidado -

Dr. Jerônimo dos Santos Travelho



Membro da Banca

Candidato: Nerbe José Rupertí Júnior

“Cada conquista, cada passo em frente no conhecimento é consequência da coragem, da dureza contra si mesmo...”

Friedrich Wilhelm Nietzsche

A Norma, pela compreensão e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, ao Instituto Politécnico do Rio de Janeiro e à Universidade Federal do Rio de Janeiro pelas facilidades concedidas à realização deste trabalho.

Aos Doutores Edson Luiz Zaparoli e Renato Machado Cotta pela orientação prestada no conteúdo deste trabalho, transmitindo entusiasmo e segurança nos momentos mais difíceis.

Ao Engenheiro Júlio Wilson Ribeiro pela orientação prestada no início deste trabalho.

Aos Doutores Eduardo Gomes do Carmo e Augusto César Galeão pela indicação precisa da técnica numérica utilizada.

Aos membros da Banca Examinadora, por suas sugestões, durante a apresentação preliminar.

Ao apoio financeiro do Instituto Politécnico do Rio de Janeiro e das bolsas de estudo do CNPq e da FAPESP (90/1530-0).

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

No presente trabalho analisa-se o problema da ablação unidimensional em meios compostos por múltiplas camadas. É empregada uma técnica de elementos finitos que usa uma formulação *Streamline Upwind/Petrov-Galerkin* (SU/PG) com uma malha móvel que se adapta à posição da fronteira móvel em cada instante de tempo. A formulação SU/PG é usada para evitar as oscilações causadas por derivadas de primeira ordem na equação de energia. São resolvidos problemas de ablação com fluxos de calor que dependem do tempo e um exemplo típico de aplicação aeroespacial de proteções térmicas. São feitas comparações com resultados de diferenças finitas recentemente obtidos através de uma técnica de volumes de controle com diferenciação exponencial. A técnica da transformada integral generalizada (TTIG) é usada como uma solução alternativa para o problema da ablação em meios de múltiplas camadas e para validar os resultados obtidos pelo método de elementos finitos. Os autovalores necessários para a solução via TTIG são determinados simultaneamente com as temperaturas transformadas pela redefinição das equações transcendentais associadas em equações diferenciais ordinárias.

SOLUTION OF A ONE-DIMENSIONAL ABLATION MODEL

ABSTRACT

This work deals with ablation in multilayered one-dimensional media. A finite element technique using a Streamline Upwind/Petrov-Galerkin (SU/PG) formulation is employed with a moving mesh which adapts itself to the moving boundary at each time step. The SU/PG formulation is used to avoid oscillations caused by first order derivatives in the energy equation. Ablation problems with time-dependent heat fluxes and a typical example in aerospace thermal protection applications are solved. Critical comparisons are made with finite differences results recently obtained through the control volume approach with exponential differencing. The generalized integral transform technique (GITT) is used as an alternative solution to ablation in multilayered media and to validate the results obtained by the finite element method. The eigenvalues needed in the GITT solution are determined simultaneously with the transformed temperatures by rewriting the associated transcendental equations into ordinary differential equations.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	xvii
LISTA DE SÍMBOLOS	xix
 <u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	 1
 <u>CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</u>	 3
 <u>CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO</u>	 23
3.1 - Período de condução	24
3.2 - Período de ablação	24
 <u>CAPÍTULO 4 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FI- NITOS</u>	 27
4.1 - A formulação SU/PG para problemas de convecção e difusão	27
4.2 - Problema proposto	30
4.3 - Distribuição de nós utilizada	34
4.4 - Solução	35
4.4.1 - Período de pré-ablação	36
4.4.2 - Período de ablação	39
4.5 - Movimento da fronteira móvel	42
4.6 - Comentários sobre o código computacional	43
4.7 - Simulações computacionais	44
4.8 - Conclusões	56
 <u>CAPÍTULO 5 - A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ABLAÇÃO EM MÚLTIPLAS CAMADAS</u>	 57
5.1 - A técnica da transformada integral generalizada	57
5.2 - Formulação do problema	59
5.3 - Problema auxiliar de autovalor	61
5.4 - Solução do problema auxiliar de autovalor	62

5.5 - Solução geral	64
5.6 - Simulação de um problema de ablação em um meio composto por duas camadas	69
5.7 - Resultados e discussão	76
5.8 - Conclusão	79
 <u>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÃO</u>	 81
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 83

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Representação dos fenômenos físicos envolvidos durante a reentrada de um veículo espacial.....	10
2.2 - Esquema da ablação de um material carbonizável.....	11
2.3 - Esquema do fenômeno da ablação com fusão da superfície.....	15
3.1 - Meio composto por n camadas.....	23
4.1 - Sistema fixo de coordenadas.....	30
4.2 - Esquemas de discretizações que acompanham o domínio móvel: (a) eliminação de nós; (b) transformação de coordenadas.....	32
4.3 - Sistema de coordenadas utilizado.....	33
4.4 - Distribuição de nós na primeira camada.....	35
4.5 - Comparação entre a função peso SU/PG e a função peso de Galerkin para o nó A.....	39
4.6 - Esquema do problema de ablação em uma placa composta por duas camadas.....	44
4.7 - Comparação de resultados para o fluxo de calor consumido pela ablação entre o método de diferenças finitas (Blackwell, 1988) e elementos finitos.....	46
4.8 - Instante em que começa a haver divergência de resultados na Figura 4.7.....	47
4.9 - Perfis de temperatura em 6 instantes de tempo para $N = 20$	47
4.10 - Comparação entre o método de elementos finitos com e sem a contribuição SU/PG e o método de diferenças finitas (Blackwell, 1988).....	49
4.11 - Teste de convergência variando-se o número de nós da malha.....	50
4.12 - Teste de convergência de resultados variando-se o intervalo de integração no tempo.....	50
4.13 - Comparações dos perfis de temperatura para diferentes malhas computacionais em $t = 0,2s$, $t = 3,0s$ e $t = 5,0s$	51
4.14 - Comparação de resultados para a posição da fronteira móvel com $Q(\tau) = 2$	53
4.15 - Comparação de resultados para a velocidade da fronteira móvel com $Q(\tau) = 2$	53
4.16 - Comparação de resultados para a posição da fronteira móvel com $Q(\tau) = 10\tau$	54

4.17 - Comparação de resultados para a velocidade da fronteira móvel com $Q(\tau) = 10\tau$	54
4.18 - Comparação de resultados para a posição da fronteira móvel com $Q(\tau) = 10\tau^2$	55
4.19 - Comparação de resultados para a velocidade da fronteira móvel com $Q(\tau) = 10\tau^2$	55
5.1 - Esquema do problema de ablação	70
5.2 - Fluxo de calor rejeitado por mudança de fase na superfície.....	77
5.3 - Comparação dos perfis de temperatura para séries com diferentes números de termos em $t = 0,2s$, $t = 3,0s$ e $t = 5,0s$	78
5.4 - Distribuição de temperaturas para um desenvolvimento em série de 40 termos.....	78
5.5 - Comparação de resultados para o fluxo de calor rejeitado entre 3 métodos: TTIG, MDF e MEF	79

LISTA DE SÍMBOLOS

c_p	- Calor específico a pressão constante, J/kgK
h	- Coeficiente de transferência de calor, W/m^2K
k	- Condutividade térmica, W/mK
L	- Espessura da placa, m
n	- Número de camadas da placa
N	- Número total de elementos da malha computacional utilizada no capítulo 4
N'	- Número de elementos na camada que sofre ablação no capítulo 4
N	- Número de termos nos desenvolvimentos em séries do capítulo 5
N	- Normas definidas no capítulo 5
p	- Contribuição descontínua para a função peso $\tilde{v}$
q''	- Fluxo de calor, kW/m^2
q''_{RP}	- Fluxo de calor rejeitado pela ablação em regime permanente, kW/m^2
Q	- Fluxo de calor adimensional
Q^*	- Calor de ablação, J/kg
s	- Posição da fronteira móvel
s^*	- Posição da fronteira móvel adimensional
t	- Tempo, s
t_0	- Tempo de início do processo de ablação, s
T	- Temperatura, K
T^*	- Temperatura durante o período de condução, K
T'	- Temperatura na camada que sofre ablação considerando-se o sistema de coordenadas η , K
T_0	- Temperatura inicial da placa, K
T_{ab}	- Temperatura de ablação, K
T_e	- Temperatura dos gases fora da camada limite, K
T_w	- Temperatura dos gases na parede, K
v	- Função peso contínua
v'	- Função peso contínua usada nos elementos da camada que sofre ablação
$\tilde{v}$	- Função peso descontínua
w	- Capacidade térmica, ρc_p , J/m^3K
x	- Sistema de coordenadas, m
$\bar{x}$	- Espessura da camada da placa que sofre ablação, m
α	- Difusividade térmica, $k/\rho c_p$, m/s^2

Δs	- Diferença entre a posição da fronteira móvel em um passo de integração no tempo e no passo anterior, m
Δt	- Passo de integração no tempo, s
η	- Sistema adimensional de coordenadas
θ	- Temperatura adimensional
θ^*	- Temperatura adimensional correspondente ao período de condução
$\bar{\theta}$	- Temperatura na superfície resultante de uma interpolação de Lagrange, K
μ	- Autovalores
ν	- Inverso do número de Stefan
ξ	- Distribuição de nós
ρ	- Massa específica, kg/m^3
τ	- Tempo adimensional
τ_0	- Tempo adimensional de início do processo de ablação
ϕ	- Funções base utilizadas na solução por elementos finitos
ψ	- Valores das temperaturas nos nós da malha computacional no capítulo 4
ψ	- Autofunções utilizadas no capítulo 5

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A transferência de calor em regime transiente em um sólido envolvendo a presença de fronteiras móveis, representa uma classe de problemas de grande importância tecnológica. Exemplos de aplicações incluem a formação de ligas eutéticas, a fusão de gelo e a conservação de alimentos, entre outras. Na área espacial, dentro desta classe de problemas, destaca-se a ablação que ocorre em veículos espaciais de reentrada atmosférica e na tubeira de foguetes. Este tipo de problema é não-linear e envolve uma fronteira móvel cuja localização é normalmente desconhecida "a priori".

Entre os sistemas de proteção térmica para altas temperaturas os mais eficientes são os ablativos, que mostraram ser uma solução prática, frequentemente indispensável para muitos dos problemas de reentrada de vôos espaciais tripulados ou não-tripulados. Os sistemas de proteção térmica por ablação foram empregados nos programas Apollo, Viking, X-15, Titan, PRIME, entre outros. No caso de veículos de reentrada, o escudo térmico chega a representar entre 20% a 30% do peso total do módulo de reentrada, motivando o estudo de novos sistemas de proteção térmica.

O presente trabalho tem como objetivo formular e resolver problemas unidimensionais de ablação em uma placa plana composta por múltiplas camadas e com temperatura prescrita na superfície.

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica sobre os fenômenos físicos envolvidos na ablação e a classificação de certos materiais conforme as suas respostas em ambientes de alta temperatura. São feitos comentários sobre algumas aproximações e considerações no projeto de sistemas ablativos.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação geral dos problemas que serão resolvidos nos Capítulos 4 e 5, juntamente com as hipóteses assumidas.

No Capítulo 4 é usado o método de elementos finitos para resolver problemas de ablação em meios de múltiplas camadas e com o fluxo de calor incidente na superfície que depende do tempo. O método de elementos finitos foi usado em conjunto com uma técnica SU/PG (streamline upwind/ Petrov-Galerkin),

particularmente apropriada para a resolução de problemas de transporte difusivo-convectivo, com forte preponderância dos efeitos de convecção. No fim do capítulo são feitos testes de convergência para algumas discretizações espaciais, e alguns passos de integração no tempo. Os resultados apresentados são o fluxo de calor rejeitado pelo processo de ablação na superfície e os perfis de temperatura em alguns instantes de tempo. São feitas comparações com os resultados apresentados na literatura e nota-se em um problema a divergência entre os resultados obtidos por elementos finitos e os obtidos por diferenças finitas.

No Capítulo 5 aplica-se a técnica da transformada integral generalizada (TTIG) à análise de problemas unidimensionais de ablação em meios de múltiplas camadas baseando-se em recentes avanços conseguidos em problemas de ablação em uma única região. A TTIG é usada para resolver um problema apresentado no Capítulo 4, validar os resultados obtidos com elementos finitos e explicar a divergência destes com os encontrados na literatura com diferenças finitas. Testa-se a convergência da solução híbrida numérico-analítica para diferentes ordens de truncamento dos desenvolvimentos em série.

No Capítulo 6 são tiradas conclusões e feitas sugestões sobre possíveis desenvolvimentos que podem ser feitos como extensões do presente trabalho.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O desenvolvimento de sistemas de proteção térmica para altas temperaturas ganhou uma grande motivação com o progresso nos campos da exploração espacial, em aplicações que envolvem o uso de veículos de reentrada atmosférica e em sistemas propulsivos de foguetes. A necessidade de proteções especiais tornou-se óbvia quando proteções térmicas convencionais mostraram-se incapazes de absorver cargas térmicas em meios sujeitos a altas temperaturas.

O projeto de uma proteção térmica para altas temperaturas é um procedimento complexo que envolve a interação entre muitas áreas técnicas. Embora o principal resultado dos cálculos seja a espessura necessária do escudo térmico, parâmetros adicionais (gradientes de temperatura, perfis de temperatura na face posterior, e a perda de massa com o tempo) são necessários para outros especialistas envolvidos no projeto.

O projeto de um veículo de reentrada está associado com a integridade do conjunto escudo térmico e estrutura. Num veículo de reentrada o objetivo do escudo térmico é manter a estrutura numa temperatura compatível com a sua capacidade em condições de operação. Por outro lado, as tensões na estrutura devem ser compatíveis com as tensões admissíveis no escudo térmico para garantir que não sejam induzidas falhas. Além disso, estando o escudo térmico e a estrutura sujeitos a grandes variações de temperatura durante a reentrada, tensões induzidas termicamente podem causar falhas no escudo térmico ou mesmo falhas estruturais sem considerar-se as tensões induzidas por cargas externas.

Em muitos projetos é comum que o escudo térmico seja colado à estrutura por intermédio de um adesivo rígido resistente a altas temperaturas. Para um projeto de um escudo térmico deste tipo, é necessário considerar-se as seguintes possibilidades de falhas:

- a) falha devido aos gradientes de temperatura no escudo térmico;
- b) falha no escudo térmico devido a incompatibilidades térmicas entre a estrutura e o escudo térmico à medida em que a estrutura é aquecida;

- c) falhas no escudo térmico devido às altas tensões na estrutura relativas às cargas concentradas;
- d) falhas na cola entre a estrutura e o escudo térmico devido a incompatibilidades térmicas;
- e) falhas no escudo térmico ou na estrutura devido a uma combinação entre cargas térmicas induzidas e cargas aplicadas.

Um dos fatores mais importantes em um projeto dessa natureza é o grau de acoplamento entre a expansão térmica do escudo térmico e a expansão térmica da estrutura como uma função da temperatura quando uma cola rígida é utilizada. Se uma cola flexível é usada, o problema de compatibilidade de tensões é reduzido e a exigência de uma compatibilidade entre as expansões térmicas é muito menor. Entretanto, a disponibilidade de colas flexíveis em largas faixas de temperatura é extremamente limitada. Pode-se concluir daí que a temperatura máxima de resistência da cola é um dos principais vínculos de projeto.

Algumas considerações devem ser feitas no projeto de um veículo de reentrada atmosférica. Deve-se considerar os níveis de temperatura admissíveis e os gradientes térmicos durante os períodos nos quais ocorre um aquecimento aerodinâmico significativo. Várias possibilidades de uso de sistemas de proteção térmica devem ser analisadas, assim como a compatibilidade com a estrutura e com a cola, se for usada.

O sistema de proteção térmica é constituído por um escudo térmico ou por um dispositivo responsável pela remoção de calor agindo segundo um princípio de dissipação de calor. Os cálculos térmicos e dinâmicos necessários seguem um número de aspectos importantes que podem ser resumidos a seguir:

- 1) Análise de trajetória.
- 2) Cálculo do campo de escoamento não viscoso (ondas de choque).
- 3) Cálculos de camada limite.
- 4) Interações entre a superfície do veículo e a camada limite.

5) Resposta no interior do escudo térmico.

O cálculo completo da resposta térmica transiente do veículo durante um determinado período de tempo, envolveria o cálculo acoplado de todas as cinco fases, onde cada fase forneceria as condições de contorno que dependem do tempo para as fases adjacentes. As fases 3 e 4 não possuem soluções gerais, devendo ser modeladas para resolver problemas específicos. Somando-se a isto, não existem códigos computacionais que façam o acoplamento entre as fases 3, 4 e 5. Existem códigos que acoplam as fases 4 e 5, mas estão limitados a solução unidimensional para a resposta térmica no interior do material.

O acoplamento das cinco fases para formar um único código computacional não é viável. O código não poderia ser generalizado e levaria a um grande custo computacional. Uma alternativa para superar estas dificuldades é buscar uma solução mais detalhada para uma ou duas fases, e soluções aproximadas para as outras fases. O código computacional resultante incluiria os importantes efeitos de acoplamento e daria uma solução detalhada em pelo menos uma fase do problema total.

Os sistemas de proteção térmica são convenientemente classificados como absorptivos ou radiativos, dependendo do princípio básico utilizado para dissipar a energia térmica incidente. Os sistemas absorptivos são classificados em sumidouros de calor, sistemas de refrigeração por transpiração ou por filme, ablativos e convectivos. Outras possibilidades básicas de sistemas de proteção térmica são os materiais isolantes e os sistemas internos de refrigeração convectiva.

O sistema de proteção térmica por radiação é um meio seguro para uma larga faixa de condições de operação. O sistema é normalmente passivo e não envolve perdas significativas de massa. Os painéis radiativos são separados da parte protegida termicamente por meio de algum tipo de isolante (no caso do Space Shuttle utiliza-se cerâmica como isolante térmico) e podem ser aperfeiçoados com o uso de um sistema ativo de refrigeração. Os sistemas radiativos foram o principal meio de proteção térmica para o avião X-15 e para áreas submetidas a um baixo fluxo de calor em quase todos os veículos espaciais tripulados. As suas principais vantagens são a simplicidade e a possibilidade de reutilização (muito importante nos atuais veículos espaciais). O princípio de operação é a rejeição de calor por radiação utilizando-se para isso uma camada de material com alta emissividade térmica e com a menor espessura possível.

Apesar de uma boa resposta para a quantidade total de calor incidente, os sistemas radiativos estão limitados a uma taxa máxima admissível de aquecimento (devido ao limite imposto pela temperatura de operação).

Entre os sistemas os mais eficientes estão os ablativos. Os sistemas ablativos mostraram-se uma solução prática, frequentemente indispensável, para muitos dos problemas de reentrada de vôos espaciais tripulados e não -tripulados.

Durante a década de 50 os programas de desenvolvimento de mísseis balísticos levaram a um grande progresso no campo da ablação. Nessa época começaram a ser desenvolvidos nos Estados Unidos os mísseis de médio alcance Thor e Jupiter. O Exército desenvolvia um sistema de proteção térmica por ablação para o míssil Jupiter, enquanto a Força Aérea mantinha o sumidouro de calor para o Thor.

Em agosto de 1957, o míssil Jupiter entrou com sucesso na atmosfera depois de percorrer 2.000 km, levando uma carta do General Medaris para o presidente Eisenhower, informando ter sido este o primeiro objeto recuperado do espaço. Com o sucesso obtido, a proteção térmica por ablação foi definitivamente aceita como o sistema mais eficiente em aplicações de reentrada. Houve então uma mudança nos planos da Força Aérea e um programa passou a ser desenvolvido em conjunto com a General Electric e a Avco. As duas empresas desenvolveram sistemas de proteção térmica por ablação para o veículo de reentrada RVX-1 usando materiais diferentes. O primeiro protótipo a ser lançado foi o desenvolvido pela Avco que reentrou com sucesso em abril de 1959 depois de percorrer 8.000 km. Posteriormente o protótipo da G.E. também obteve sucesso. O protótipo da Avco usava fibras de sílica contra as fortes fibras de vidro usadas no RVX-1 da G.E.. As fibras de sílica mantiveram-se juntas e sofreram um menor desgaste, como havia sido previsto.

A proteção térmica por ablação difundiu-se rapidamente passando a ser empregada em diversos tipos de veículos espaciais, tendo sido utilizada nos programas Apollo, Gemini, Viking, X-15, Titan, PRIME, entre outros.

Durante a década de 70 foram feitos estudos com o objetivo de viabilizar o uso de naves espaciais reutilizáveis. Em (1) são apresentados os resultados de um projeto de proteção térmica para o *Space Shuttle*, baseando-se no uso de isolantes de superfície reutilizáveis (ISR). Nesta nova concepção de um sistema de

proteção térmica, uma camada de material ablativo é ligada mecanicamente a uma camada de isolante térmico fixa à estrutura do veículo. Este procedimento tem a finalidade de preparar o *Space Shuttle* para uma nova missão dentro de um curto intervalo de tempo, permitindo ainda um maior controle de impurezas, o que não poderia ser conseguido caso a camada de material ablativo fosse colada diretamente à estrutura. Nos sistemas com ISR o material ablativo é colado a uma placa ligada mecanicamente ao isolamento térmico do veículo.

Em (1) são mostrados os critérios de projeto utilizados tais como: fatores de segurança (entre 1,15 e 1,5); temperatura da cola (533 K) e temperaturas máximas da estrutura (311 K no início da reentrada e 450 K no final). Também é feita uma estimativa de custo que, para uma dada configuração, considerando-se os custos operacionais e de produção do material ablativo e penalizando-se o peso da proteção térmica, resultou em 1,17 milhões de dólares por voo.

Embora o *Space Shuttle* represente um avanço significativo na reutilização de sistemas, para futuras aplicações será necessário aumentar a eficiência e a durabilidade de estruturas, de forma a viabilizar o uso comercial de vôos espaciais de reentrada. O aumento da durabilidade poderá ser conseguido com o uso de superfícies metálicas e com estruturas cada vez mais resistentes a altas temperaturas.

Estudos feitos sobre as futuras necessidades de vôos espaciais identificaram três configurações básicas para futuros sistemas de transporte espacial:

1) Lançamento horizontal e aterrissagem horizontal.

O veículo deve ter asas relativamente grandes para suportar o seu peso com o tanque cheio de combustível. Isto resulta numa baixa intensidade de aquecimento e numa trajetória de reentrada de longa duração que permite o uso de superfícies metálicas. As superfícies metálicas acomodam cargas térmicas totais relativamente altas irradiando parte do calor incidente, mas não podem suportar temperaturas extremamente altas.

2) Lançamento vertical e aterrissagem horizontal.

O veículo deve suportar um aquecimento relativamente alto devido a trajetória de curta duração, o que leva ao uso de materiais resistentes a altas

temperaturas na superfície, como os cerâmicos (utilizados nos *Space Shuttles*), que protegem a estrutura do veículo.

3) Lançamento vertical e aterrissagem vertical.

O veículo descreve uma trajetória balística ou semi-balística e, portanto, vai experimentar um aquecimento mais intenso e de menor duração. As altas temperaturas atingidas ultrapassam os limites admissíveis dos materiais conhecidos e estes devem ser utilizados em conjunto com algum tipo de sistema de refrigeração.

A ablação é definida em (2) e (3) como um “processo autoregulável de transferência de calor e massa, provocado por processos termoquímicos e mecânicos onde a energia térmica incidente é removida com o sacrifício de material”. Apesar de uma definição simples não se deve considerar o problema da ablação somente como a remoção de massa fora do contexto do problema global, que envolve a resposta do material, os mecanismos pelo qual o calor é absorvido ou rejeitado, os fenômenos que ocorrem na camada limite, e o balanço de massa e de energia na superfície. Devido à complexidade do problema, não se pode fazer a recomendação definitiva de fórmulas, equações e soluções para os vários regimes de transferência de calor e massa encontrados na ablação.

Há três aproximações comumente empregadas para a solução do problema da ablação, sendo dadas a seguir:

1) Técnicas baseadas no calor de ablação.

São técnicas empíricas cuja maior vantagem é a economia de tempo. Essas técnicas dependem de dados obtidos em determinadas condições de teste, e não devem ser extrapoladas para situações muito diferentes, devido aos acoplamentos altamente não-lineares que existem entre os fenômenos simultâneos que ocorrem entre a camada limite e a superfície da proteção térmica.

2) Coeficientes acoplados de transferência de calor e massa.

Os produtos da dissociação do ar reagem instantaneamente com os produtos da ablação numa região confinada à superfície (quando se supõe velocidade infinita de reação). Quando não há interação entre as espécies gasosas da

camada limite com os produtos da ablação então assume-se que a dissociação e a recombinação de gases na camada limite estão em equilíbrio. Quando é possível assumir-se que o número de Lewis é unitário, as equações de energia e de concentração de espécies ficam desacopladas, resultando num coeficiente de transferência de calor por convecção completamente independente da transferência de massa e das reações químicas.

A análise da ablação no escudo térmico faz uso da solução numérica transiente da equação diferencial parabólica de transferência de calor (4-5). Em problemas de ablação com carbonização, alguns termos devem ser adicionados para modelar a transferência de energia por depolimerização e pirólise, a transferência de energia por deposição na camada carbonizada, e finalmente a transferência de calor por radiação devido à transparência da camada carbonizada. O processo real é altamente dependente da pressão e dos gradientes de pressão, mas foi admitido em algumas soluções que os equilíbrios térmico e químico possam ser mantidos entre a camada porosa e os gases de pirólise que passam.

Neste tipo de aproximação é possível o uso de soluções mistas (analíticas e numéricas).

3) Modelos teóricos gerais.

Considera-se agora que as reações químicas ocorram numa velocidade finita através da camada limite. Considera-se também que ocorram transpiração para os efeitos de soprimento de massa (6-7), camadas limites cinzas, mudança de fase e degradação mecânica da superfície (8), e não-equilíbrio químico entre os gases de pirólise e a camada porosa.

Ao contrário das outras aproximações onde a generalização do problema permite soluções de engenharia, as opções dadas pelo modelo teórico geral são usualmente escolhidas para manter um compromisso entre a complexidade e a realidade. Quanto mais completo for o modelo utilizado, mais próxima a simulação se encontrará dos fenômenos físicos que ocorrem na realidade; no entanto, maior será o tempo computacional necessário. Uma representação esquemática dos fenômenos físicos envolvidos durante a reentrada de um veículo espacial na atmosfera pode ser vista na Figura 2.1.

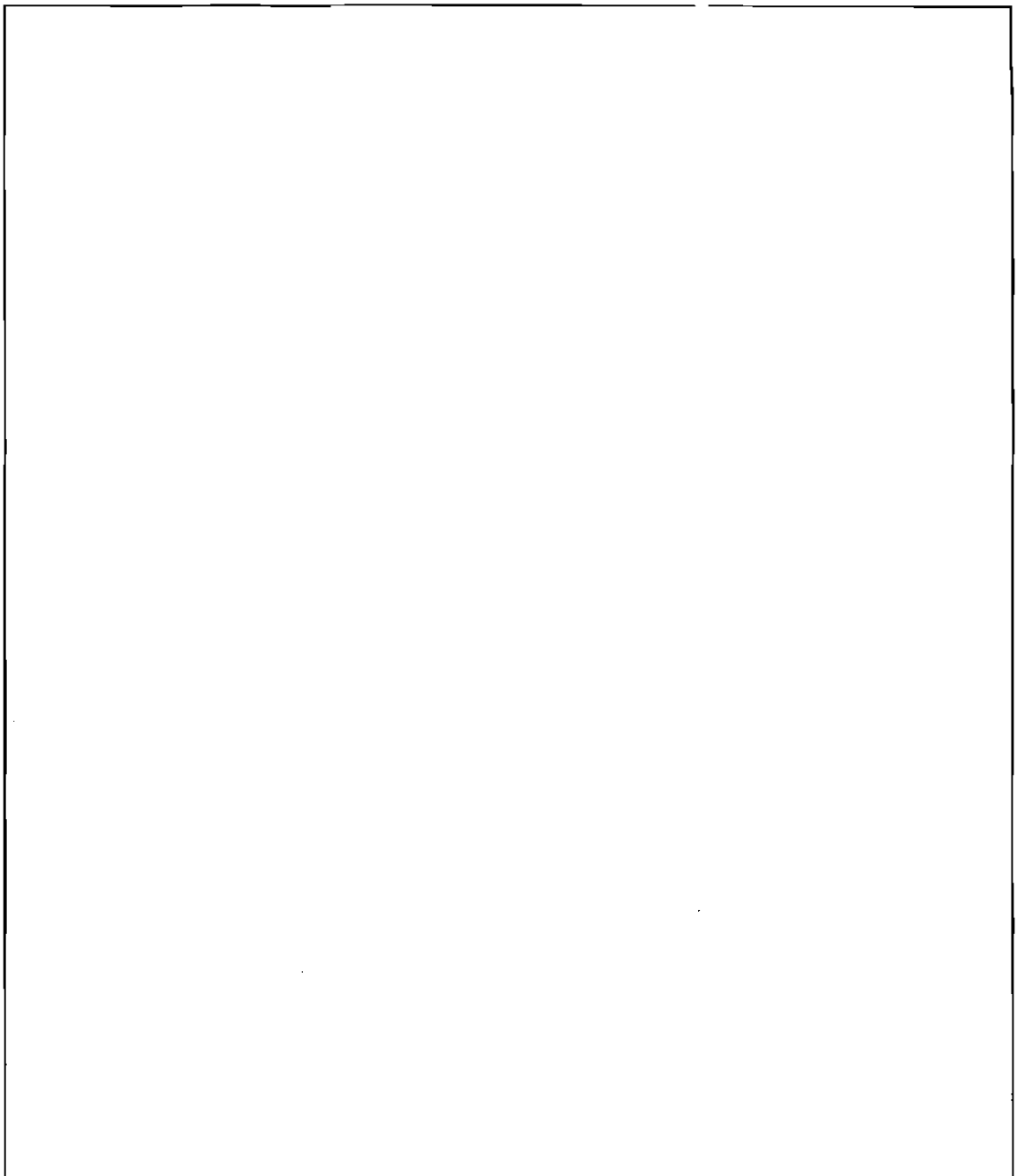


Fig. 2.1 - Representação dos fenômenos físicos envolvidos durante a reentrada de um veículo espacial.

FONTE: (9), p. 7.

Uma das abordagens mais completas para formular os fenômenos físicos envolvidos é apresentada em (9). Em (10) é apresentado um trabalho recente que simula um fluxo hipersônico considerando o não -equilíbrio térmico e químico.

A necessidade de minimizar o peso frequentemente leva à escolha de materiais que sofrem reações internas endotérmicas, levando à formação de uma camada carbonizada quando aquecidos e cuja superfície passa por um processo de mudança de fase devido à exposição ao escoamento hipersônico. A absorção de energia, juntamente com a redução do coeficiente de transferência de calor, resultado da injeção dos produtos de degradação e de mudança de fase da superfície dentro da camada limite, mostrou ser um sistema de proteção térmica extremamente eficiente. A representação da ablação de um material carbonizável pode ser vista na Figura 2.2.

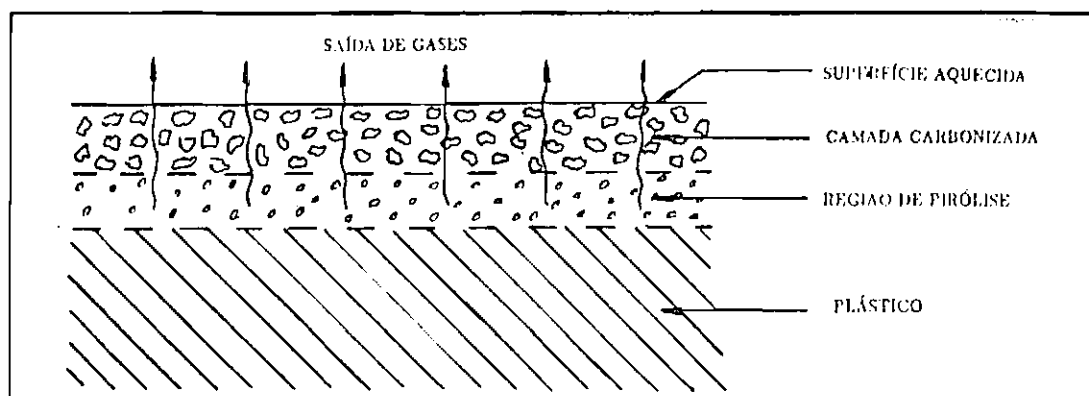


Fig. 2.2 - Esquema da ablação de um material carbonizável.

FONTE: (5), p. 2.

É necessário para um projeto eficiente, ter uma descrição matemática precisa dos complexos fenômenos de transferência de calor e massa que ocorrem dentro do material que sofre ablação e um método numérico eficiente para realizar os cálculos que se baseiam no modelo matemático. Os fenômenos de ablação são mais frequentemente encontrados em situações onde os seus parâmetros são funções não-lineares do tempo. Além disso, o fato do escudo térmico ter uma espessura finita faz com que os cálculos devam ser feitos considerando-se o regime transiente.

Embora a solução do problema transiente possa garantir um certo grau de segurança; para testar combinações de fenômenos físicos com materiais diferentes é mais adequada uma solução em regime permanente. Frequentemente, em fases preliminares de projetos onde muitas das informações geradas não são usadas no projeto final, os custos computacionais associados com a análise transiente não se justificam. Este tipo de análise também pode ser utilizada em veículos espa-

ciais que reentram na atmosfera a partir de uma determinada órbita e se mantêm numa altitude constante com desacelerações mínimas. Quando o fluxo de calor é menor que 850 kW/m^2 a velocidade de desgaste da superfície para alguns materiais (11) é da ordem de $0,025 \text{ mm/s}$ podendo ser desprezada em certos casos. Em relação à capacidade de isolamento do material, a formação da camada carbonizada e a influência da pirólise sobre as propriedades do material podem não ser consideradas. Isto se deve ao fato de que, embora haja o bloqueio da transferência de calor convectiva pelos gases de pirólise, a condutividade térmica da camada carbonizada é maior. Baseando-se no que foi exposto acima pode-se utilizar um modelo simples de ablação em regime permanente para fazer estimativas rápidas antes de um projeto.

Os problemas apresentados em um projeto de um sistema de proteção térmica por ablação para o sistema propulsor de um foguete são similares aos apresentados para um veículo espacial de reentrada. A principal diferença entre o fluxo de calor incidente para as duas situações pode ser vista considerando-se a equação de fluxo convectivo

$$q'' = h(T_e - T_w) \quad (2.1)$$

onde T_e é a temperatura dos gases fora da camada limite, T_w é a temperatura dos gases na parede e h é o coeficiente de transferência de calor.

Para um veículo espacial de reentrada, o valor máximo do coeficiente de transferência de calor é da ordem de $630 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ enquanto T_e é aproximadamente 11.300 K . Na tubeira de foguetes, entretanto, o valor de h é da ordem de $3.150 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ enquanto T_e é aproximadamente 3.300 K . Pode-se notar então, que pouco pode ser feito para diminuir q'' para as condições de reentrada através do aumento da resistência do material a altas temperaturas, enquanto que para a tubeira de foguetes uma temperatura de parede suficientemente alta pode ser responsável por uma grande redução do fluxo convectivo. Esta é a razão pela qual materiais que resistem a altas temperaturas são mais eficientes em aplicações em sistemas propulsivos mesmo quando consideradas as suas altas condutividades térmicas. Este também é o motivo pelo qual o conhecimento da temperatura de ablação é fundamental e porque é desejável que sejam atingidas altas temperaturas na parede.

Já em aplicações de reentrada, outros tipos de materiais são utilizados. Neste caso procura-se tirar proveito dos benefícios que são conseguidos pela transpiração dos gases resultantes do processo de ablação. Os gases serão responsáveis pelo bloqueio parcial do aquecimento aerodinâmico convectivo, diminuindo assim o valor de h . Devido ao grande valor de $T_e - T_w$ uma pequena redução do valor de h pode causar uma grande redução do fluxo convectivo.

Foi mostrado em (12-14) que, para taxas moderadas de transferência de massa, a eficiência da transferência de massa para bloquear o aquecimento aerodinâmico é aproximadamente uma função linear da entalpia do escoamento fora da camada limite. Entretanto, é mostrado em (14) e (15) que essa aproximação pode levar a sérios erros se a superfície for exposta a um fluxo de calor por radiação, tal como aqueles experimentados por veículos espaciais que reentram em velocidades parabólicas e hiperbólicas.

Em (4) são consideradas as teorias de ablação e de transpiração na equação que faz o acoplamento entre os fenômenos de superfície e a transferência de calor transiente no interior do escudo térmico. Utiliza-se uma função de segundo grau como aproximação da eficiência da transpiração em bloquear o fluxo de calor convectivo (teoria da transpiração). Em (5) e em (11) são apresentados modelos para o cálculo do coeficiente de transferência de calor considerando-se o bloqueio que os produtos de ablação exercem sobre o fluxo convectivo para escoamentos laminares e turbulentos.

Os mecanismos de ablação conhecidos como sublimação, fusão e/ou vaporização, são representados por reações de mudança de fase da superfície com absorção de energia. A sublimação e a vaporização estão geralmente associadas com as reações químicas entre os componentes da camada limite, os gases de pirólise e o material que sofre mudança de fase. Consequentemente o calor de mudança de fase frequentemente é incluído nas entalpias de formação dos componentes da fase condensada da camada carbonizada. As reações de mudança de fase efetivamente diminuem as entalpias de reações químicas.

O mecanismo de ablação conhecido como erosão mecânica inclui a remoção da camada líquida (formada pela fusão do material), a fragmentação mecânica e o cisalhamento mecânico da superfície. A fragmentação de materiais carbonizáveis pode ser causada pelas pressões internas dos gases que atravessam a camada carbonizada. As tensões podem fazer com que parte da camada car-

bonizada se separe do material ainda não carbonizado. A ablação por cisalhamento mecânico é caracterizada por pequenas partículas sólidas da camada carbonizada que deixam a superfície devido a forças de cisalhamento superficial. Os dois processos são intensificados pela incidência de pequenas partículas sólidas como costuma ocorrer na tubeira de foguetes. A ablação por cisalhamento mecânico está normalmente associada com condições de operação mais severas e com camadas carbonizadas pouco espessas.

A ablação com formação de uma camada líquida pode ser considerada um processo intermediário entre a ablação somente com transferência de massa (como o que foi exposto acima) e o processo mais complexo que envolve a decomposição no interior do material. Este caso deve ser considerado quando a camada líquida formada pela fusão do material que sofre ablação não é removida imediatamente da superfície ou não se vaporiza totalmente na interface líquido-gás para o caso de materiais com alta viscosidade.

Os casos em que ocorrem fusão e evaporação combinadas de materiais vítreos, onde a camada líquida escoar sobre a superfície do corpo e evapora, necessitam de modelos mais complexos. Soluções exatas para o problema transiente considerando-se velocidades arbitrárias e gradientes de temperatura na camada líquida são dadas em (16). É importante considerar-se a distribuição de temperaturas na camada líquida devido à grande influência da temperatura sobre a viscosidade. Uma representação do fenômeno da ablação com fusão da superfície é feita na Figura 2.3.

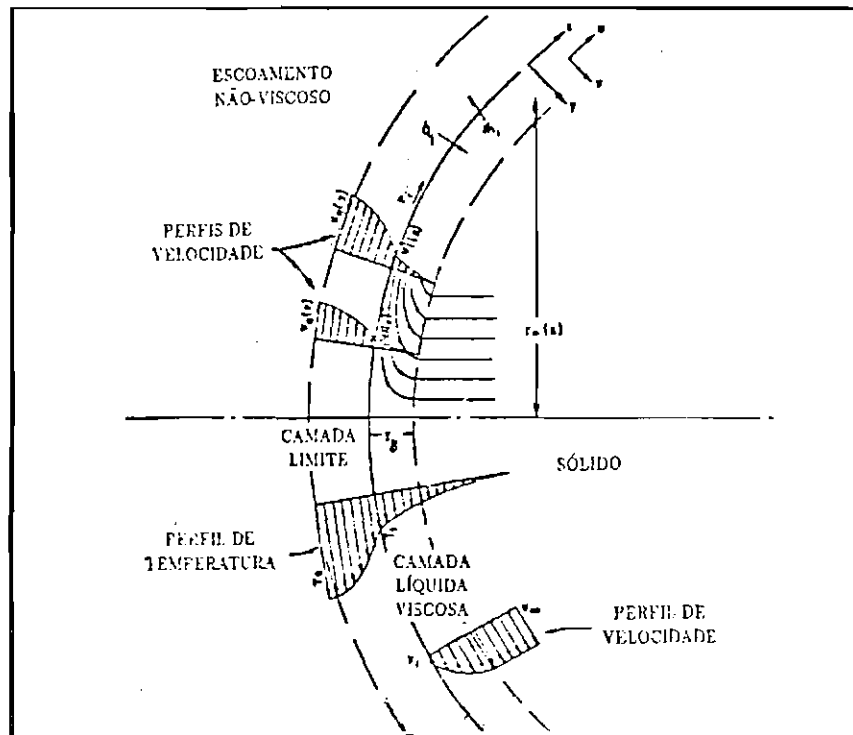


Fig. 2.3 - Esquema do fenômeno da ablação com fusão da superfície.

FONTE: (17), p. 7.

A eficiência de sistemas ablativos está particularmente associada ao desempenho dos materiais utilizados. Considerando-se que a maioria das aplicações necessitam de materiais especializados e que cada ambiente interage distintamente com o material ablativo, pode-se concluir que cada teoria de ablação é ampliada pelo desenvolvimento de novos materiais.

Embora não haja materiais que possuam uma aceitação geral, estes podem ser normalmente classificados em quatro classes principais com base em estudos feitos de materiais ablativos. Esta classificação abrange os:

- a) plásticos carbonizáveis, monolíticos ou reforçados pelo uso de materiais orgânicos, nylon ou materiais inorgânicos (quartzo, grafites, metais);
- b) termoplásticos, como Teflon, que sublimam passando diretamente para a fase gasosa;
- c) óxidos refratários como o quartzo, que fundem e escoam sob a influência do cisalhamento causado pela ação de gases quando expostos a ambientes

de alta entalpia e alto fluxo de calor;

- d) materiais cerâmicos refratários como o grafite, que sofrem ablação devido aos processos de oxidação e de sublimação e são afetados pela transferência de massa e por reações heterogêneas que ocorrem na superfície.

Os plásticos carbonizáveis normalmente consistem de uma resina reforçada por fibras orgânicas ou refratárias em proporções e orientações variadas. Algumas das resinas apropriadas para uso em escudos térmicos são as resinas fenólicas, aquelas compostas por silicone ou melamina. Reforços apropriados incluem nylon, vidro, Refrasil (uma forma de sílica), sílica, carbono e grafite.

O desempenho destes materiais varia significativamente com o tempo e com o aquecimento. Quando as taxas de aquecimento são muito baixas, como as que ocorrem no início da reentrada, a energia transferida para o material simplesmente aumenta a sua temperatura, isto é, o material funciona como um sumidouro de calor. Quando as taxas de aquecimento são elevadas, a temperatura na superfície do plástico continua a aumentar até o momento em que o plástico começa a se decompor numa velocidade significativa (para muitos plásticos, decomposições significativas ocorrem aproximadamente a 530 K).

Para plásticos reforçados por nylon, a decomposição e a pirólise dão origem à formação de uma mistura complexa de espécies gasosas de alto e baixo peso molecular, como metano, etileno, acetileno, e hidrogênio, formando uma camada carbonizada porosa não homogênea, através da qual os gases passam até atingirem a superfície externa do material. Estas espécies gasosas, produzidas durante a pirólise, reagem quimicamente com o oxigênio presente na camada limite nas formas atômica e molecular, e dependendo da quantidade de gás reativo presente, uma quantidade de oxigênio pode difundir até a superfície e passar por reações heterogêneas com a camada carbonizada.

A camada carbonizada, um material altamente refratário, pode suportar temperaturas muito altas na superfície, irradiando assim uma grande parte do calor incidente de volta para o ambiente. Além disso, os gases que atravessam esta camada quente são decompostos nos seus menores pesos moleculares e maiores volumes. Estes gases, como consequência, tornam a camada limite mais espessa, reduzindo assim a transferência de calor por convecção para a superfície.

Para materiais reforçados com materiais inorgânicos como o Refrasil fenólico, o processo de ablação inclui uma fase adicional. Há a formação de uma camada fina do material de reforço na superfície da camada carbonizada. Depois disso, produtos da pirólise difundem através desta camada e ocorre a vaporização parcial da camada liquefeita de material de reforço. Para reforços refratários como o carbono ou o grafite fenólico, a ablação da superfície é controlada basicamente pelas reações do reforço e dos resíduos da camada carbonizada com as espécies da camada limite.

Os materiais termoplásticos são aqueles como o Teflon, nylon, celulose, Celcon, e Delrin, que são monômeros químicos (não há formação de resíduos sólidos de carbono como resultado de sua degradação térmica). O desempenho destes materiais é principalmente uma função dos pesos moleculares dos seus produtos gasosos de decomposição (efeito de transferência de massa) e de suas energias de decomposição, isto é, a mudança da fase sólida para a gasosa. A temperatura de mudança de fase é normalmente menor que 1.100 K , de modo que eles são frequentemente definidos como "materiais ablativos de baixa temperatura". Devido à maior eficiência da adição de massa em escoamentos laminares comparada com a adição de massa em escoamentos turbulentos eles são próprios para serem usados em ambientes onde o escoamento é laminar.

Os óxidos refratários são caracterizados por materiais como o quartzo, na forma opaca ou transparente. A condutividade térmica do quartzo é alta e na forma transparente permite a passagem de energia radiativa da onda de choque e do quartzo já aquecido na superfície, para o quartzo ainda não aquecido no interior da estrutura. Os fenômenos envolvidos são a liquefação, o escoamento (sob forças cisalhantes suficientemente altas), e a vaporização de acordo com as condições locais de temperatura e pressão do gás e da temperatura da camada liquefeita.

O material mais significativo da classe de materiais cerâmicos refratários é o carbono na forma de (1) grafite comercial ou pirolítico; (2) camadas carbonizadas com alto conteúdo de carbono. A última, resultado da decomposição de materiais que formam uma camada carbonizada como carbono/grafite fenólico, ou podendo ocorrer sob condições de baixa tensão de cisalhamento junto à superfície causada pelo escoamento aerodinâmico. A predição do desempenho do carbono (na forma de grafite) foi feita para camadas limites laminares e turbulentas para temperaturas até 5.250 K . A oxidação de carbono ocorre em dois regimes

básicos, os regimes controlados pela taxa de reação e pela difusão. A taxa de oxidação nestes regimes depende da temperatura da superfície, da reatividade do tipo de grafite utilizado e dos processos de difusão nos gases da camada limite.

Para temperaturas muito altas na superfície devem ser feitas considerações não apenas para as reações químicas homogêneas e heterogêneas que ocorrem entre o oxigênio presente na camada limite e o carbono, mas também para o nitrogênio. Neste regime que ocorre em temperaturas muito altas, a sublimação do grafite é o mecanismo de perda de massa. O limite para a aplicação da teoria da camada limite convencional é determinado na temperatura máxima em que a taxa de sublimação do grafite começa a induzir gradientes de pressão normais à interface gás-sólido.

O exame de dados experimentais indicam que no regime controlado por taxas de reação, o processo de oxidação segue uma lei de variação que pode ser escrita como uma expressão de Arrhenius (4 e 18).

No regime controlado por difusão costumam ser empregados seis componentes para a modelagem do gás, incluindo CO e CO₂, mais as quatro espécies principais encontradas no ar dissociado em altas temperaturas (isto é, O, O₂, N, N₂). No regime de sublimação, três espécies adicionais (C, C₃ e CN) são incluídas, levando a nove o número total de espécies químicas. A transferência de massa é independente da entalpia de estagnação, mas varia inversamente com a raiz quadrada do raio do nariz do veículo e varia diretamente com a raiz quadrada da pressão de estagnação. Os produtos da ablação neste regime são CO₂ nas temperaturas mais baixas e CO nas temperaturas mais altas.

A determinação precisa do campo de escoamento não viscoso que envolve o veículo é necessária para dar as condições de contorno para o cálculo do aquecimento convectivo. Em formas simples como esferas, cunhas e cones, as condições de contorno para a camada limite podem ser obtidas em (19) (gás ideal) e (20) (gás real).

Um dos principais métodos para calcular as taxas de aquecimento em um veículo baseia-se na aproximação da entalpia de referência de Eckert. A variação de entalpia através da camada limite faz com que o problema seja decidir em qual temperatura ou entalpia serão avaliadas as propriedades do gás. Segundo Eckert (21) a transferência de calor pode ser calculada numa camada limite

compressível usando as relações de fluxo incompressível se todas as propriedades dependentes da temperatura forem avaliadas numa dada condição (entalpia de referência). A entalpia de referência é uma média ponderada da entalpia local, a entalpia na parede, e uma entalpia de recuperação.

Na literatura podem ser encontradas referências (22-24) que descrevem meios rápidos para estimar a transferência de calor em configurações simples de veículos.

Um fator relevante que ocorre na ablação é a mudança da forma da superfície de um corpo com simetria axial. A medida em que ocorre um desgaste na superfície, há uma diminuição da área, e consequentemente, uma alteração das taxas de aquecimento e distribuição de pressão. Este problema é resolvido em (18) e (25) para materiais anisotrópicos e corpos com simetria axial.

Se a curvatura ao longo do corpo não for muito acentuada e desde que a taxa de aquecimento não esteja sujeita a gradientes muito elevados ao longo da curvatura, o problema poderá ser aproximado pelo uso de um modelo unidimensional de ablação. Em (26) é feita uma comparação entre uma solução unidimensional e uma solução bidimensional para o mesmo problema de ablação.

Durante as décadas de 60 e 70 alguns códigos computacionais foram desenvolvidos com o objetivo de calcular a resposta no interior dos escudos térmicos e que serviriam de ferramenta para o projeto de veículos espaciais de reentrada quando acoplados com as soluções de camada limite e com as reações químicas na superfície. O código mais conhecido dessa época é o programa CMA cuja descrição (5) é apresentada no segundo de uma série de seis trabalhos publicados simultaneamente em junho de 1968. O objetivo do programa CMA é calcular as taxas de desgaste e os perfis de temperatura de materiais ablativos carbonizáveis, podendo ser acoplado com outros dois códigos descritos na mesma sequência de trabalhos. No programa CMA as equações unidimensionais de transferência de calor são resolvidas usando o método de diferenças finitas, com a origem do sistema de coordenadas fixa ao primeiro nó da malha computacional, que acompanha o desgaste da superfície através da eliminação sucessiva dos últimos nós. Para modelar a carbonização do material ablativo assume-se que o material se decompõe formando uma camada porosa de material carbonizado (de menor densidade e com maior condutividade térmica) e gases que vão atravessar a camada porosa. Considera-se que os gases que passam pela camada porosa estejam na mesma tem-

peratura desta, sendo responsáveis pela adição de um termo convectivo na equação de transferência de calor. Outro termo convectivo surge devido ao movimento do sistema de coordenadas.

Outra solução para a transferência de calor no interior de um escudo térmico carbonizável pode ser encontrada em (4), onde a pirólise ocorre numa temperatura fixa, o que faz com que o problema tenha duas fronteiras móveis. Para o movimento da superfície são adotados alguns modelos de oxidação. O problema é resolvido utilizando-se o método de diferenças finitas com uma malha computacional que se adapta aos contornos móveis em cada instante de tempo mantendo um número fixo de nós.

Em (27) é resolvido um problema de ablação com carbonização utilizando-se um procedimento semelhante ao empregado em (4) para adaptar a malha computacional as fronteiras móveis. No interior do material ocorre pirólise numa determinada temperatura, como é feito em (4), e na superfície ocorre sublimação também numa temperatura fixa. Para a solução é usado o método de elementos finitos, que volta a ser utilizado em (28) para resolver o problema de ablação em corpos com simetria axial.

Uma solução mais recente é apresentada em (29), onde a eliminação de nós é feita de uma forma semelhante ao que é feito em (5). É utilizado o método de diferenças finitas com um esquema de diferenciação exponencial para ponderar os termos convectivos a montante do escoamento.

No presente trabalho é desenvolvido um código computacional para a solução de problemas de transferência de calor unidimensionais transientes com ablação sem carbonização em uma placa plana. O código permite o cálculo da taxa de desgaste e dos perfis de temperatura no interior de um escudo térmico que pode ser constituído por múltiplas camadas, onde considera-se que apenas a primeira camada sofra ablação. A formulação do problema, que é resolvido nos Capítulos 4 e 5, é apresentada no Capítulo 3 juntamente com as considerações e as hipóteses assumidas.

Neste trabalho utiliza-se o método de elementos finitos com uma técnica do tipo Petrov-Galerkin desenvolvida em (30), particularmente apropriada para a resolução de problemas de transporte difusivo-convectivo, com forte preponderância dos efeitos de convecção. O uso de elementos finitos tem como

objetivo criar um código computacional com uma estrutura adequada para expansões futuras, podendo ser modificado para resolver problemas mais complexos e para ser acoplado a outros códigos. O uso da técnica de Petrov-Galerkin tem como objetivo eliminar as oscilações causadas pelos termos convectivos (muito influentes quando há carbonização), sendo neste trabalho causados pelo movimento da malha (semelhante ao que ocorre em (27)).

No Capítulo 5 desenvolve-se uma solução alternativa à solução por elementos finitos. Utiliza-se a técnica da transformada integral generalizada para resolver problemas de ablação em meios de múltiplas camadas. É resolvido um problema de aplicação aeroespacial, onde os autovalores necessários para a solução são determinados simultaneamente com as temperaturas transformadas pela redefinição das equações transcendentais associadas em equações diferenciais ordinárias. Pela solução do sistema acoplado resultante de equações diferenciais ordinárias torna-se desnecessária a solução das equações transcendentais para o cálculo dos autovalores.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO

Algumas hipóteses devem ser feitas para a formulação do problema de ablação que é resolvido nos Capítulos 4 e 5. Neste trabalho resolve-se o problema unidimensional de ablação em uma placa plana composta por n camadas, onde apenas a primeira sofre ablação. Um meio composto por n camadas é representado na Figura 3.1, juntamente com o sistema de coordenadas utilizado.

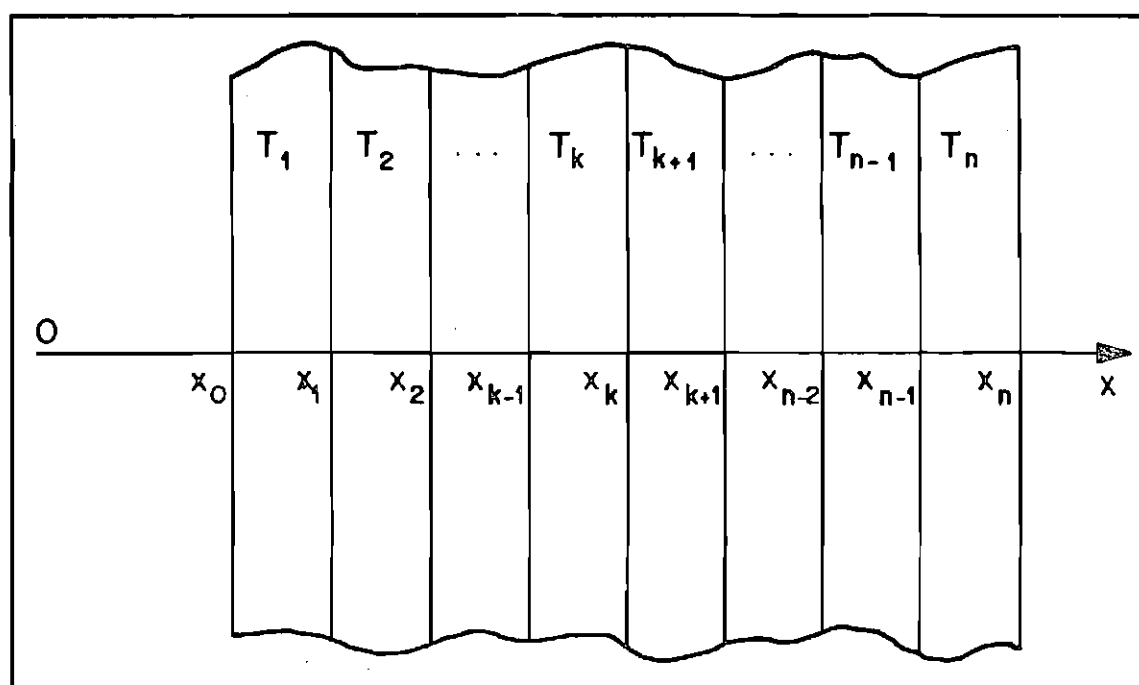


Fig. 3.1 - Meio composto por n camadas.

Assume-se como condições de contorno que a ablação ocorra numa temperatura fixa (temperatura de ablação, T_{ab}) e que a última camada da placa esteja isolada termicamente. Antes que T_{ab} seja atingida ocorre condução de calor na placa, tendo como condição de contorno o fluxo de calor especificado na superfície. O fluxo de calor que incide na superfície não é uma condição de contorno do problema de ablação, e será utilizado para o cálculo do movimento da fronteira móvel. O fluxo de calor será considerado um parâmetro de entrada, resultado dos cálculos de camada limite durante a reentrada e sendo, portanto, dependente do tempo.

Considera-se que as n camadas estão em perfeito contato térmico e que todos os coeficientes são constantes.

3.1 - PERÍODO DE CONDUÇÃO

Antes de começar a ocorrer ablação, a placa, inicialmente a uma temperatura T_0 , passa por uma período onde ocorre apenas condução de calor. As equações de condução de calor em cada camada são dadas a seguir

$$w_k \frac{\partial T_k^*(x, t)}{\partial t} = k_k \frac{\partial^2 T_k^*(x, t)}{\partial x^2}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

com as condições iniciais, de contorno e de interface dadas, respectivamente, por

$$T_k^*(x, 0) = T_0, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

$$k_n \frac{\partial T_n^*(x_n, t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0 \quad (3.3)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1^*(x_0, t)}{\partial x} = q''(t), \quad t > 0 \quad (3.4)$$

$$k_k \frac{\partial T_k^*(x_k, t)}{\partial x} = k_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}^*(x_k, t)}{\partial x}, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1), \quad t > 0 \quad (3.5)$$

$$T_k^*(x_k, t) = T_{k+1}^*(x_k, t), \quad k = 1, 2, \dots, (n-1), \quad t > 0 \quad (3.6)$$

3.2 - PERÍODO DE ABLAÇÃO

Considera-se que a ablação começa em $t = t_0$, quando a condição de contorno na superfície, $x = x_0$, deixa de ser de segundo tipo passando a ser de primeiro tipo (temperatura especificada). As equações de transferência de calor para as n camadas passam a ser escritas como

$$w_k \frac{\partial T_k(x, t)}{\partial t} = k_k \frac{\partial^2 T_k(x, t)}{\partial x^2}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad t > t_0 \quad (3.7)$$

com as condições iniciais, de contorno e de interface dadas, respectivamente, por

$$T_k(x, t_0) = T_k^*(x, t_0), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

$$k_n \frac{\partial T_n(x_n, t)}{\partial x} = 0, \quad t > t_0 \quad (3.9)$$

$$T_1(s(t), t) = T_{ab}, \quad t > t_0 \quad (3.10)$$

$$k_k \frac{\partial T_k(x_k, t)}{\partial x} = k_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}(x_k, t)}{\partial x}, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1), \quad t > t_0 \quad (3.11)$$

$$T_k(x_k, t) = T_{k+1}(x_k, t), \quad k = 1, 2, \dots, (n-1), \quad t > t_0 \quad (3.12)$$

Em $t = t_0$ começa a haver o desgaste da superfície como resultado da ação do mecanismo de ablação considerado. O fluxo de calor que é conduzido para dentro das camadas é igual ao fluxo de calor incidente menos o fluxo de calor que é absorvido pelo processo de ablação. A velocidade da fronteira móvel é calculada a partir do balanço de energia na superfície, sendo dada pela seguinte equação

$$\rho_1 Q_1^* \frac{ds(t)}{dt} = q''(t) - k_1 \frac{\partial T_1(s(t), t)}{\partial x}, \quad t > t_0 \quad (3.13)$$

O calor de ablação será considerado constante, não sendo considerados os efeitos de bloqueio do fluxo de calor convectivo devido a transpiração dos gases resultantes da ablação. Na solução de um problema real deve ser considerado o efeito de soprimento dos gases na camada limite, e o calor de ablação deverá ser obtido de tabelas onde ele é uma função da diferença das entalpias do gás na parede e fora da camada limite. A solução de um problema real de ablação vai depender da solução do escoamento na camada limite em cada instante. Embora não seja o objetivo do presente trabalho, para resolver um problema real deve-se adicionar um termo correspondente à irradiação de calor da superfície na Equação (3.13).

A partir das hipóteses assumidas poderão ser resolvidos problemas de ablação em materiais que sublimam ou se decompõe passando diretamente da fase sólida para a fase gasosa como os termoplásticos (Teflon, nylon, celulose) e em

materiais que fundem e escoam imediatamente sob a influência do cisalhamento aerodinâmico como os materiais vítreos de baixa viscosidade.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo utiliza-se o método de elementos finitos para resolver o problema apresentado no Capítulo 3. O uso do método de elementos finitos na solução de problemas unidimensionais de ablação, tem neste trabalho, o objetivo de gerar um código computacional que possa ser acoplado a outros códigos ou ser ampliado para resolver problemas de ablação mais complexos (ablação com carbonização ou com a formação de uma camada de material liquefeito na superfície). Devido à estrutura adequada de programação, um código unidimensional de elementos finitos pode ser estendido para resolver problemas tridimensionais de ablação.

Antes de aplicar o método de elementos finitos à solução do problema apresentado no Capítulo 3, é feita uma mudança de coordenadas de modo que a malha computacional gerada se adapte ao movimento da fronteira móvel em cada passo de integração no tempo.

No final do capítulo são feitas comparações com os resultados obtidos na literatura e um caso típico de aplicação envolvendo o uso de materiais empregados na indústria aeroespacial, é resolvido.

4.1 - A FORMULAÇÃO SU/PG PARA PROBLEMAS DE CONVECÇÃO E DIFUSÃO

O método de elementos finitos é uma valiosa ferramenta na solução de muitos problemas em Engenharia. O método de elementos finitos é frequentemente empregado em situações onde as equações são conhecidas, mas uma geometria complicada ou condições de contorno levam a soluções analíticas difíceis ou impossíveis de obter. O método faz uso da discretização espacial e da formulação por resíduos ponderados para chegar a um sistema de equações matriciais. A solução das equações matriciais leva a uma solução aproximada do problema de valor de contorno original.

A formulação mais comumente empregada de resíduos ponderados tem sido o método de Galerkin, no qual as funções de interpolação e as funções peso são da mesma classe. O método de Galerkin, quando aplicado à maioria

dos problemas de condução de calor, leva a matrizes de rigidez simétricas. Nesse caso, pode ser mostrado que a solução possui a propriedade de “melhor aproximação”. Isto é, a diferença entre a solução por elementos finitos e a solução exata é minimizada com respeito a uma determinada norma.

Formulações iniciais de elementos finitos para problemas de transporte convectivo usaram o método de Galerkin. No entanto, na transferência de calor convectiva, a matriz associada ao termo convectivo não é simétrica, e como resultado, a propriedade de “melhor aproximação” é perdida.

Na prática, as soluções são frequentemente prejudicadas por oscilações numéricas. Algumas dessas instabilidades costumam ocorrer quando há uma forte preponderância dos efeitos de convecção (alto número de Peclet associado à malha computacional) provocados pelas derivadas de primeira ordem. Uma maneira de eliminar essas oscilações é refinar a malha computacional, diminuindo assim o número de Peclet associado à malha, de modo que a convecção não domine mais o processo de transferência de calor. Normalmente o refinamento da malha é necessário em regiões onde uma representação precisa da solução é necessária. Entretanto, muitas vezes apenas a solução global é necessária, e nesse caso o refinamento da malha é desejável somente para evitar oscilações. Isso motivou o desenvolvimento de uma alternativa para a formulação de Galerkin que evite oscilações sem o refinamento da malha levando a soluções globais com uma economia de tempo computacional.

É conhecido que o método de elementos finitos de Galerkin leva a aproximações do tipo de diferenças centradas de operadores diferenciais. Sabe-se também que as oscilações causadas pelos termos com derivadas de primeira ordem atingem soluções de diferenças finitas que usam diferenças centradas.

Foi descoberto que a diferenciação *upwind* do termo convectivo em diferenças finitas leva a uma solução livre das oscilações mencionadas anteriormente. A diferenciação é feita aproximando as derivadas convectivas por diferenças descentradas com valores tomados a montante do escoamento. O problema é que as diferenças *upwind* têm uma precisão de primeira ordem enquanto as diferenças centradas têm uma precisão de segunda ordem. A perda de precisão manifesta-se como soluções apresentando efeitos excessivos de difusão. A diferenciação *upwind* pode ser vista como a construção de um esquema de diferenças centradas mais uma difusividade artificial.

Torna-se aparente que uma combinação de diferenças centradas e *upwind*, baseada no número de Peclet, é melhor que as diferenças *upwind* ou centradas sozinhas. Para um problema simples unidimensional foi possível selecionar a combinação que resultou na solução exata nos nós da malha computacional.

Muitas formulações *upwind* de elementos finitos são encontradas na literatura (31-36). Algumas dessas formulações (31-32), levam ao mesmo sistema de equações matriciais e dão soluções exatas nos nós, como no método de diferenças finitas. Infelizmente, quando generalizadas para situações mais complexas, essas formulações podem distanciar-se muito da solução ótima.

Há formulações que empregam funções peso modificadas para conseguir o efeito *upwind*. Em essência, o elemento a montante de um nó é ponderado mais fortemente do que o elemento a jusante. Quando a função peso é aplicada a todos os termos das equações, esta formulação passa a ser denominada de método de resíduos ponderados de Petrov-Galerkin.

Em problemas multidimensionais, as soluções frequentemente apresentam excessiva difusão numérica perpendicular à direção do escoamento. Resultados com excessiva difusão numérica também aparecem em problemas transientes, ou quando os termos fonte estão presentes. Somando-se a isto, em muitos casos a formulação de Galerkin dá soluções livres de oscilações que são mais precisas que as soluções *upwind*.

É claro que resultados como estes fazem com que as técnicas *upwind* sejam vistas com uma certa cautela. Alguns pesquisadores acreditam que o uso da formulação de Galerkin, juntamente com uma malha adaptativa, é o único meio possível de conseguir soluções que são precisas e livres de oscilação.

A técnica SU/PG (*streamline upwind / Petrov-Galerkin*) foi introduzida em (37). Neste método, o operador de "difusividade artificial" é construído para agir somente na direção do escoamento e é aplicado a todos os termos da equação. A teoria de métodos de Petrov-Galerkin com funções peso descontínuas (necessárias no método SU/PG) é abordada em (38).

Neste capítulo será utilizada uma formulação SU/PG desenvolvida em (30) para a resolução de um problema de ablação em uma placa composta por múltiplas camadas. A técnica somente será utilizada na camada que sofre ablação,

isto é, naquela que possui o domínio variável e consequentemente derivadas de primeira ordem. Nas outras camadas será utilizado o método de Galerkin. O uso de uma formulação SU/PG tem como objetivo fazer uma comparação com os resultados obtidos em (29), onde é utilizado o método de diferenças finitas com uma diferenciação exponencial *upwind*.

4.2 - PROBLEMA PROPOSTO

Para resolver os problemas de ablação e de condução de calor apresentados no Capítulo 3 usando elementos finitos discretiza-se o domínio representado na Figura 3.1 em N elementos e adota-se um sistema inercial de coordenadas x . Esta discretização é mostrada na Figura 4.1, onde os primeiros N' elementos correspondem à primeira camada, e é feita de forma que as propriedades térmicas dentro de cada elemento possam ser admitidas como constantes.

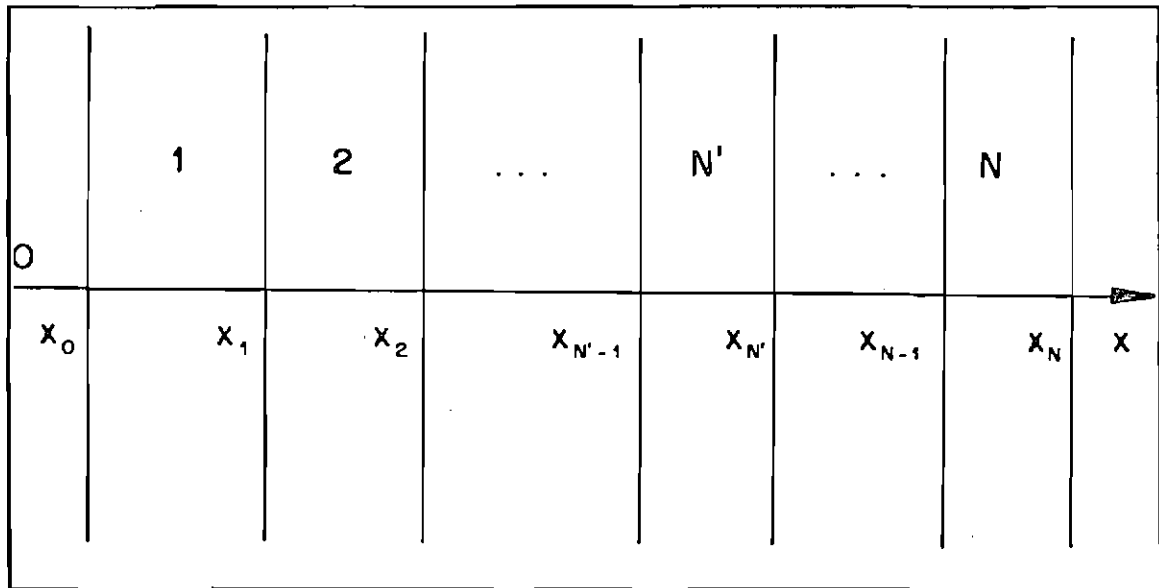


Fig. 4.1 - Sistema fixo de coordenadas.

Considerem-se os problemas apresentados no Capítulo 3. A equação correspondente ao período de condução de calor, considerando-se os N sub-domínios representados na Figura 4.1, é dada por

$$w(x) \frac{\partial T^*(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T^*(x, t)}{\partial x} \right), \quad x_0 \leq x \leq x_N, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

com as condições de contorno

$$k_n \frac{\partial T^*(x_N, t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0 \quad (4.2)$$

$$k_1 \frac{\partial T^*(x_0, t)}{\partial x} = q''(t), \quad t > 0 \quad (4.3)$$

e com a condição inicial

$$T^*(x, 0) = T_0, \quad x_0 \leq x \leq x_N \quad (4.4)$$

A equação de transferência de calor correspondente ao período de ablação é dada por

$$w(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right), \quad s(t) \leq x \leq x_N, \quad t > t_0 \quad (4.5)$$

com as condições de contorno

$$k_n \frac{\partial T(x_N, t)}{\partial x} = 0, \quad t > t_0 \quad (4.6)$$

$$T(s(t), t) = T_{ab}, \quad t > t_0 \quad (4.7)$$

e com as condições iniciais

$$T(x, t_0) = T^*(x, t_0), \quad x_0 \leq x \leq x_N \quad (4.8)$$

e

$$s(t_0) = x_0 \quad (4.9)$$

O movimento da fronteira móvel é dado pela equação a seguir

$$\rho_1 Q_1^* \frac{ds(t)}{dt} = q''(t) - k_1 \frac{\partial T(s(t), t)}{\partial x}, \quad t > t_0 \quad (4.10)$$

onde Q_1^* é o calor de ablação da primeira camada que pode incluir a mudança de fase da superfície e o efeito de transpiração de gases dentro da camada limite, que é uma função linear da diferença de entalpias dos gases fora da camada limite e na parede.

Uma das formas de resolver um problema de fronteiras móveis por diferenças finitas ou por elementos finitos, é fazer uma discretização espacial do domínio, que considere o movimento da fronteira. Para acompanhar o domínio variável é necessário acrescentar ou eliminar os nós da malha computacional. Outra forma é acompanhar o movimento da fronteira utilizando-se um número fixo de nós ou elementos através de uma transformação de coordenadas, gerando uma malha que se adapta ao domínio. Uma comparação entre a eliminação de elementos da malha com uma malha que se adapta ao domínio à cada momento é mostrado na Figura 4.2.

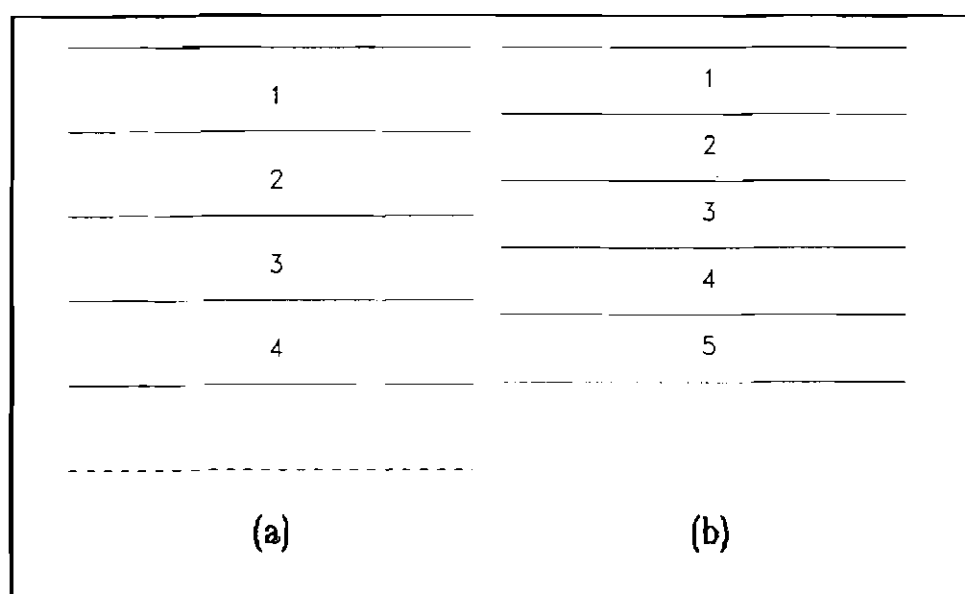


Fig. 4.2 - Esquemas de discretizações que acompanham o domínio móvel: (a) eliminação de nós; (b) transformação de coordenadas.

Neste trabalho será utilizada uma malha computacional baseando-se no que foi feito em (4) com o objetivo de manter um número fixo de elementos enquanto a malha ajusta-se ao domínio móvel em cada instante de tempo.

Assume-se então um novo sistema de coordenadas, representado na Figura 4.3, para substituir o antigo sistema inercial somente na primeira camada que possui o contorno móvel. Faz-se a seguinte modificação

$$\eta = \frac{x - s(t)}{x(t)}, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (4.11)$$

onde $s(t) \leq x \leq x_{N'}$ e $x(t)$ é a espessura da primeira camada que diminui com o tempo.

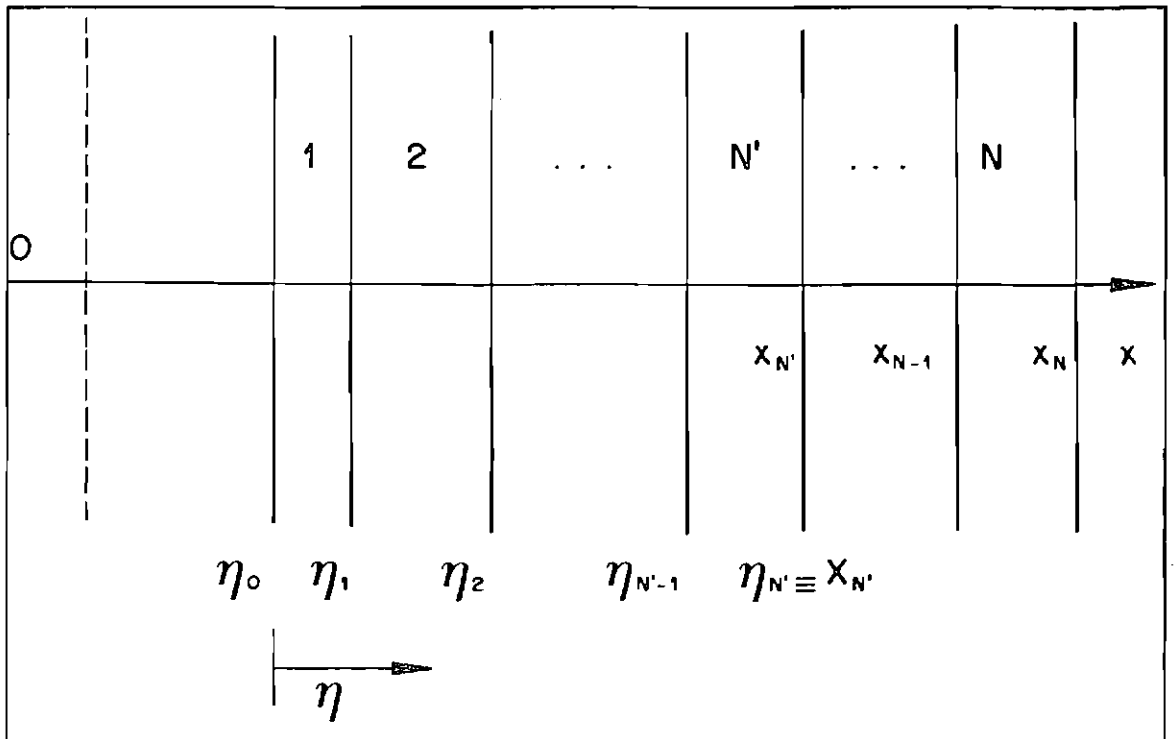


Fig. 4.3 - Sistema de coordenadas utilizado.

Reescrevendo a Equação (4.5) utilizando-se o novo sistema de coordenadas somente na primeira camada, obtém-se

$$w_1 \frac{\partial T'(\eta, t)}{\partial t} + \frac{w_1(\eta - 1)}{x(t)} \cdot \frac{ds(t)}{dt} \cdot \frac{\partial T'(\eta, t)}{\partial \eta} - \frac{k_1}{x^2(t)} \cdot \frac{\partial^2 T'(\eta, t)}{\partial \eta^2} = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad t > t_0 \quad (4.12)$$

com as condições de contorno

$$T'(0, t) = T_{ab}, \quad t > t_0 \quad (4.13)$$

na superfície da primeira camada, e

$$\frac{k_1}{\bar{x}(t)} \frac{\partial T'(1, t)}{\partial \eta} = k(x_{N'}) \frac{\partial T(x_{N'}, t)}{\partial x}, \quad t > t_0 \quad (4.14)$$

$$T'(1, t) = T(x_{N'}, t), \quad t > t_0 \quad (4.15)$$

na interface com a segunda camada.

A velocidade da fronteira móvel quando reescrita considerando o sistema não inercial, é dada por

$$\rho_1 Q_1^* \frac{ds(t)}{dt} = q''(t) - \frac{k_1}{\bar{x}(t)} \cdot \frac{\partial T'(0, t)}{\partial \eta}, \quad t > t_0 \quad (4.16)$$

Para as outras camadas é mantido o mesmo sistema inercial de coordenadas. Então a Equação (4.5) pode ser reescrita para $x_{N'} \leq x \leq x_N$, ou seja

$$w(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right), \quad x_{N'} \leq x \leq x_N, \quad t > t_0 \quad (4.17)$$

com a condição de contorno na última camada

$$k_N \frac{\partial T(x_N, t)}{\partial x} = 0, \quad t > t_0 \quad (4.18)$$

4.3 - DISTRIBUIÇÃO DE NÓS UTILIZADA

No problema proposto apenas a primeira camada está sujeita à receber um alto fluxo de calor incidente. Consequentemente, altos gradientes de temperatura poderão ser encontrados nessa região. Para evitar que ocorram erros numéricos na solução por elementos finitos, será utilizada uma discretização espacial refinada próxima à superfície que sofre ablação da primeira camada. A distribuição de nós utilizada é dada por

$$\xi_i = 1 - \cos \left[\frac{\pi(x_i - x_0)}{2\bar{x}(t)} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N', \quad t = 0 \quad (4.19)$$

podendo ser vista na Figura 4.4.

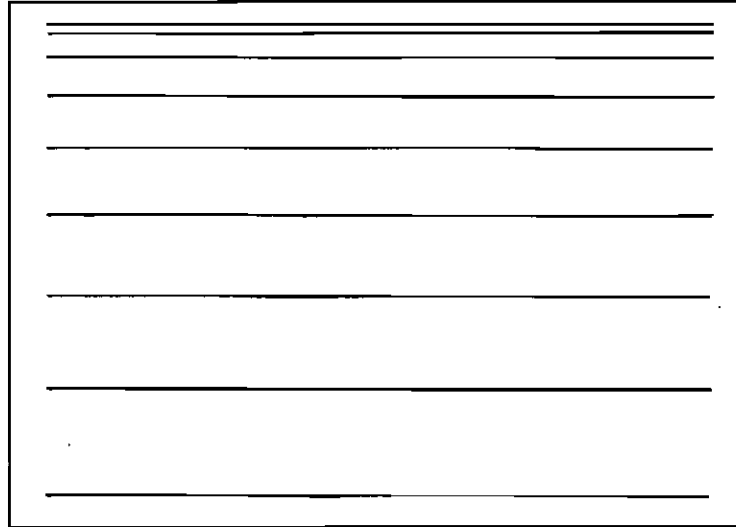


Fig. 4.4 - Distribuição de nós na primeira camada.

Esta distribuição tem como objetivo não só refinar a malha computacional próximo à superfície, mas também aumentar gradativamente as espessuras dos elementos da primeira camada.

4.4 - SOLUÇÃO

Antes de começar a ocorrer ablação, há um período no qual ocorre simplesmente condução de calor na placa. Esse período é necessário para que a placa atinja a temperatura de ablação e comece assim a fundir ou sublimar. O problema divide-se então em duas fases:

- solução do problema de condução e cálculo do tempo de início do período de ablação;
- solução do problema de ablação tendo como condição inicial o perfil de temperatura calculado no período de condução.

4.4.1 - PERÍODO DE PRÉ-ABLAÇÃO

Um problema de valor inicial correspondente ao período de condução de calor consiste em achar uma função $T^*(x, t)$ que satisfaça a Equação (4.1) em $x_0 \leq x \leq x_N$ para $0 < t \leq t_0$, as condições de contorno (4.2) e (4.3), e a condição inicial (4.4).

Uma formulação fraca para o problema de condução consiste em encontrar $T^*(x, t)$ que satisfaça (4.1), como mostrado a seguir

$$\int_{x_0}^{x_N} \left[w(x) \frac{\partial T^*(x, t)}{\partial t} v(x) + k(x) \frac{\partial T^*(x, t)}{\partial x} \frac{dv(x)}{dx} \right] dx + k(x_0) \frac{\partial T^*(x_0, t)}{\partial x} v(x_0) - k(x_N) \frac{\partial T^*(x_N, t)}{\partial x} v(x_N) = 0, \quad \forall v(x) \in H^1 \quad (4.20)$$

Como no período de pré-ablação não há termos convectivos pode-se usar diretamente o método de Galerkin que tem a propriedade de "melhor aproximação" da solução $T^*(x, t)$ em H^1 para problemas de condução de calor. O método de Galerkin consiste em achar uma solução aproximada de (4.20) em um sub-espaço de dimensão finita H^h do espaço H^1 . Busca-se então uma solução aproximada $T^*(x, t)$ em H^h da forma

$$T^*(x, t) = \sum_{i=1}^N \psi_i(t) \phi_i(x) \quad (4.21)$$

e para as funções teste

$$v(x) = \sum_{i=1}^N \beta_i \phi_i(x) \quad (4.22)$$

Na formulação utilizada os espaços de funções teste e de funções admissíveis coincidem; conseqüentemente, pode-se escolher apenas um conjunto de funções base $\phi_i(x)$. Foram escolhidas funções base lineares da classe C^0 .

Substituindo as funções (4.21) e (4.22) na Equação (4.20), obtém-se

$$C \frac{d\Psi(t)}{dt} + K\Psi(t) = F(t) \quad (4.23)$$

onde

$$C_{ij} = \int_{x_0}^{x_N} w(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (4.24)$$

$$K_{ij} = \int_{x_0}^{x_N} k(x) \frac{d\psi_i(x)}{dx} \frac{d\psi_j(x)}{dx} dx \quad (4.25)$$

$$F_i(t) = \begin{cases} q''(t), & i = 0 \\ 0, & 0 < i \leq N \end{cases} \quad (4.26)$$

O sistema de Equações diferenciais ordinárias (4.23) deve ser integrado em relação ao tempo para chegar-se aos perfis de temperatura no final de cada instante de tempo. É feita uma aproximação com o objetivo de substituir as derivadas temporais em (4.23) por um esquema de diferenças finitas do tipo *backward differencing*. As derivadas temporais são então substituídas por

$$\frac{d\psi(t + \Delta t)}{dt} = \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} \quad (4.27)$$

Usando esta aproximação por diferenças finitas em (4.23), chega-se ao sistema implícito de equações algébricas

$$(C + \Delta t K)\Psi(t + \Delta t) = C\Psi(t) + \Delta t F(t + \Delta t) \quad (4.28)$$

Quando são utilizados pequenos intervalos de tempo na integração poderão aparecer oscilações numéricas no campo de temperaturas próximo à superfície no início do problema de condução (27). Para evitar que isto aconteça deve-se refinar a discretização espacial próximo à superfície, ou buscar uma solução analítica até o instante de tempo em que seja possível começar a resolver numericamente o problema sem que ocorram oscilações.

Uma das formas de evitar este tipo de erro numérico é usar a solução analítica para o problema de condução na primeira camada até que gradientes de temperatura atinjam a interface entre a primeira e a segunda camada. Pode-se considerar neste intervalo de tempo que ocorra condução de calor na placa com temperatura prescrita ($T(x_{N'}, t) = T_0$) ou fluxo de calor nulo em $x = x_{N'}$. No presente trabalho foi utilizada a técnica da transformada integral clássica (39) que para o problema de condução de calor numa placa isolada termicamente, dá a solução exata

$$T^*(x, t) = T_0 + \frac{1}{w_1} \int_0^t q''(t') dt' + \frac{2}{w_1} \sum_{i=1}^{\infty} \cos \left[\frac{i\pi(x - x_0)}{(x_{N'} - x_0)} \right] \cdot e^{-\frac{\mu_i^2 t k_1}{w_1}} \int_0^t q''(t') e^{\frac{\mu_i^2 t' k_1}{w_1}} dt' \quad (4.29)$$

onde

$$\mu_i = i\pi \quad (4.30)$$

Para o cálculo do tempo de início do período de ablação, deve-se observar que $T^*(x, t_0) = T_{ab}$, o que leva à equação transcendental

$$T_{ab} = T_0 + \frac{1}{w_1} \int_0^{t_0} q''(t') dt' + \frac{2}{w_1} \sum_{i=1}^{\infty} \cos \left[\frac{i\pi(x - x_0)}{(x_{N'} - x_0)} \right] e^{-\frac{\mu_i^2 t_0 k_1}{w_1}} \int_0^{t_0} q''(t') e^{\frac{\mu_i^2 t' k_1}{w_1}} dt' \quad (4.31)$$

Neste trabalho é feito um teste para saber se os gradientes térmicos atingem a segunda camada antes do início da ablação. Se os gradientes térmicos atingirem a interface entre a primeira e a segunda camada antes de começar a ablação, as Equações (4.30) e (4.31) não poderão mais ser empregadas e a solução até o final do período de condução deverá ser conseguida via elementos finitos. Caso a ablação inicie antes que os gradientes térmicos atinjam a segunda camada, inicia-se o período de ablação que é resolvido por elementos finitos.

4.4.2 - PERÍODO DE ABLAÇÃO

No método de resíduos ponderados de Galerkin, as funções peso são consideradas contínuas entre elementos adjacentes. A formulação SU/PG, entretanto, necessita de funções peso descontínuas da forma

$$\tilde{v}(x) = v(x) + p(x) \quad (4.32)$$

onde $v(x)$ é uma função peso contínua, e $p(x)$ é uma contribuição descontínua que pondera a solução sempre a montante do escoamento. Considera-se $v(x)$ e $p(x)$ funções regulares no interior dos elementos e um exemplo pode ser visto na Figura 4.5.

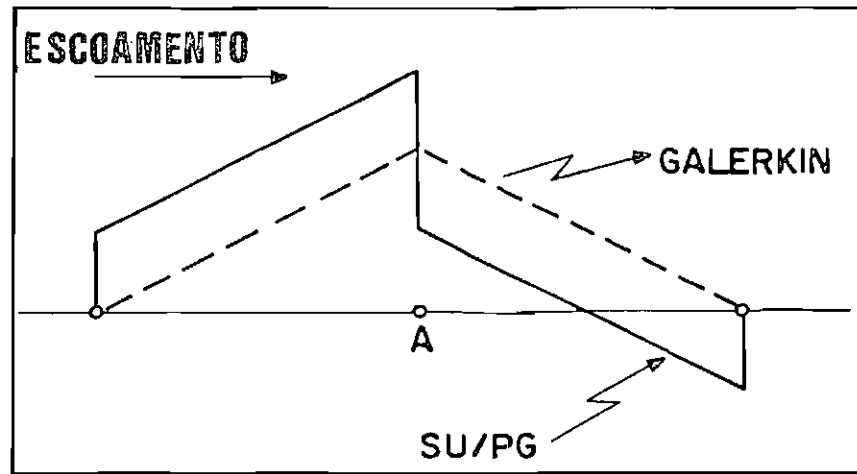


Fig. 4.5 - Comparação entre a função peso SU/PG e a função peso de Galerkin para o nó A.

O problema consiste em encontrar as funções $T(x, t)$ e $T'(\eta, t) \in H^1$ para $t_0 < t \leq t_f$ de modo que as Equações (4.12) e (4.17) sejam satisfeitas no sentido de médias ponderadas, juntamente com as condições de contorno (4.13) e (4.18) e a condição inicial (4.8). Tem-se então para a primeira camada

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left[w(\eta) \frac{\partial T'(\eta, t)}{\partial t} v(\eta) - \frac{w(\eta)(1-\eta)}{\bar{x}(t)} \frac{ds(t)}{dt} \frac{\partial T'(\eta, t)}{\partial \eta} v(\eta) + \right. \\
& \left. + \frac{k_1}{\bar{x}^2(t)} \frac{\partial T'(\eta, t)}{\partial \eta} \frac{dv(\eta)}{d\eta} \right] d\eta + \sum_{i=1}^{N'} \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} \left[w(\eta) \frac{\partial T'(\eta, t)}{\partial t} p(\eta) - \right. \\
& \left. - \frac{w(\eta)(1-\eta)}{\bar{x}(t)} \frac{ds(t)}{dt} \frac{\partial T'(\eta, t)}{\partial \eta} p(\eta) \right] d\eta - \frac{k_1}{\bar{x}^2(t)} \frac{\partial T'(1, t)}{\partial \eta} v(1) = 0, \\
& 0 \leq \eta \leq 1 \quad (4.33)
\end{aligned}$$

e em $x_{N'} \leq x \leq x_N$

$$\begin{aligned}
& \int_{x_{N'}}^{x_N} \left[w(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} v(x) + k(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \frac{dv(x)}{dx} \right] dx + k(x_{N'}) \frac{\partial T(x_{N'}, t)}{\partial x} = 0, \\
& x_{N'} \leq x \leq x_N \quad (4.34)
\end{aligned}$$

para todo $v(x)$ e $v'(\eta) \in H^1$ e com $v'(0) = 0$.

Empregando a contribuição *upwind* utilizada em (30), onde $p(\eta) = \frac{\tilde{k}}{u} \cdot \frac{dv'(\eta)}{d\eta}$, obtém-se a função peso

$$\tilde{v}'(\eta) = v'(\eta) + \frac{\tilde{k}}{u} \cdot \frac{dv'(\eta)}{d\eta} \quad (4.35)$$

onde

$$u = -\frac{(1-\eta)}{\bar{x}} \cdot \frac{ds(t)}{dt}$$

$$\tilde{k} = \frac{uh_i}{\sqrt{15}} \xi$$

$$h_i = \eta_i - \eta_{i-1}$$

$$K = \frac{k}{\bar{x}w}$$

$$\xi = \frac{\cosh(\alpha)}{\sinh(\alpha)} - \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{uh_i}{2K} = -(1-\eta) \frac{h_i w}{2k} \cdot \frac{ds(t)}{dt}$$

Fazendo $T^v(\eta, t) = \sum_{j=0}^{N'} \psi'_j(t) \phi'_j(\eta)$ e $v'(\eta) = \sum_{i=0}^{N'} \beta_i \phi'_i(\eta)$ para a primeira camada e $T(x, t) = \sum_{j=N'}^N \psi_j(t) \phi_j(x)$ e $v(x) = \sum_{i=N'}^N \beta_i \phi_i(x)$ para as camadas restantes e substituindo nas Equações (4.32) e (4.33), resulta o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$C(t + \Delta t) \frac{d\Psi(t)}{dt} + K(t + \Delta t) \Psi(t) = F(t + \Delta t) \quad (4.36)$$

onde, para $1 \leq i < N'$ e $1 \leq j \leq N'$

$$C_{ij} = \int_0^1 w(\eta) \phi'_i(\eta) \phi'_j(\eta) d\eta + \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_{i+1}} \frac{\bar{k}}{u} w(\eta) \frac{d\phi'_i(\eta)}{d\eta} \phi'_j(\eta) d\eta \quad (4.37)$$

$$K_{ij} = \int_0^1 \left[\frac{k}{x^2(t)} \frac{d\phi'_i(\eta)}{d\eta} \cdot \frac{d\phi'_j(\eta)}{d\eta} - \frac{w(\eta)(1-\eta)}{x(t)} \cdot \frac{ds(t)}{dt} \phi'_i(\eta) \frac{d\phi'_j(\eta)}{d\eta} \right] d\eta + \\ + \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_{i+1}} \frac{\bar{k}(\eta)}{x^2(t)} \frac{d\phi'_i(\eta)}{d\eta} \cdot \frac{d\phi'_j(\eta)}{d\eta} d\eta \quad (4.38)$$

para $i = N'$ e $N' - 1 \leq j \leq N' + 1$

$$C_{ij} = \int_0^1 w(\eta) \phi'_{N'}(\eta) \phi'_j(\eta) d\eta + \int_{\eta_{N'-1}}^{\eta_{N'}} w(\eta) \frac{d\phi'_{N'}(\eta)}{d\eta} \phi'_j(\eta) d\eta + \\ + \int_{x_{N'}}^{x_N} w(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned}
K_{ij} = & \int_0^1 \left[\frac{k}{\bar{x}^2(t)} \frac{d\phi'_{N'}(\eta)}{d\eta} \cdot \frac{d\phi'_j(\eta)}{d\eta} - \frac{w(\eta)(1-\eta)}{\bar{x}(t)} \cdot \frac{ds(t)}{dt} \phi'_{N'}(\eta) \frac{d\phi'_j(\eta)}{d\eta} \right] d\eta + \\
& + \int_{\eta_{N'-1}}^{\eta_{N'}} \frac{\tilde{k}(\eta)}{\bar{x}^2(t)} \frac{d\phi'_{N'}(\eta)}{d\eta} \cdot \frac{d\phi'_j(\eta)}{d\eta} d\eta + \int_{x_{N'}}^{x_N} k(x) \frac{d\phi_i(x)}{dx} \cdot \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx \quad (4.40)
\end{aligned}$$

para $N' < i \leq N$ e $N' \leq j \leq N$

$$C_{ij} = \int_{x_{N'}}^{x_N} w(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (4.41)$$

$$K_{ij} = \int_{x_{N'}}^{x_N} k(x) \frac{d\phi_i(x)}{dx} \cdot \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx \quad (4.42)$$

e no lado direito da Equação (4.36), devido à condição de contorno de primeiro tipo em η_0 , tem-se que

$$F_i = \begin{cases} -T_{ab} \cdot \left\{ \int_{\eta_0}^{\eta_1} \left[\frac{k}{\bar{x}^2(t)} \frac{d\phi'_1(\eta)}{d\eta} \frac{d\phi'_0(\eta)}{d\eta} - \frac{w(\eta)(1-\eta)}{\bar{x}(t)} \cdot \frac{ds(t)}{dt} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \phi'_1(\eta) \frac{d\phi'_0(\eta)}{d\eta} + \tilde{k}(\eta) \frac{d\phi'_1(\eta)}{d\eta} \frac{d\phi'_0(\eta)}{d\eta} \right] d\eta \right\}, & i = 1 \\ 0, & 1 < i \leq N \end{cases} \quad (4.43)$$

Utilizando-se a aproximação por diferenças finitas segundo (4.27), chega-se ao sistema algébrico de equações

$$\begin{aligned}
(C(t + \Delta t) + \Delta t K(t + \Delta t)) \Psi(t + \Delta t) = & C(t + \Delta t) \Psi(t) + \\
& + \Delta t F(t + \Delta t) \quad (4.44)
\end{aligned}$$

4.5 - MOVIMENTO DA FRONTEIRA MÓVEL

Para conseguir uma melhor aproximação no cálculo da velocidade da fronteira móvel, foi feita uma interpolação de Lagrange (40) nos quatro primeiros nós de forma a representar com maior precisão o fluxo de calor que é conduzido

para dentro da primeira camada. Utilizando um polinômio de terceiro grau para interpolar a temperatura nos quatro primeiros nós, substituindo a derivada em $\eta = 0$ na Equação (4.16), e aproximando $\frac{ds(t)}{dt}$ por um esquema de diferenças finitas, chega-se à

$$\rho_1 Q_1^* \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = q''(t) - \frac{k_1}{\bar{x}(t)} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}(0, t)}{\partial \eta}, \quad \eta = 0 \quad (4.45)$$

4.6 - COMENTÁRIOS SOBRE O CÓDIGO COMPUTACIONAL

Para resolver problemas de condução de calor e de ablação, foram feitas modificações no código computacional apresentado em (41), que resolve problemas elípticos unidimensionais de condução de calor. Foram feitas modificações, aproveitando a estrutura do programa, de forma que fosse possível ao código resolver problemas parabólicos unidimensionais utilizando um esquema implícito de integração.

Como o problema é unidimensional e como as funções de interpolação utilizadas são polinômios de Lagrange lineares da classe C^0 , foi possível chegar a matrizes tridiagonais, como as encontradas em soluções por diferenças finitas. De modo a usar menos memória computacional, foi feita uma modificação no código apresentado em (41) para transformar a matriz tridiagonal $C(t+\Delta t) + \Delta t K(t+\Delta t)$ de dimensão $N \times N$ numa matriz $N \times 3$. Para a solução dos sistemas algébricos de Equações (4.28) e (4.44) são feitas eliminações gaussianas nas matrizes obtidas.

As integrais nas Equações (4.24) a (4.26) e (4.37) a (4.43) são avaliadas numericamente utilizando-se quadratura gaussiana de segunda ordem (41).

Todos os cálculos realizados foram feitos em dupla precisão e uma descrição das principais etapas do algoritmo desenvolvido é dada a seguir:

- a) calcular tempo de início do período de ablação, resolvendo a Equação transcendental (4.31) através do método da secante, ou o sistema de Equações (4.28) até atingir t_0 ;
- b) calcular a velocidade e a posição da fronteira móvel em $t + \Delta t$ através da Equação (4.45);

- c) calcular o perfil de temperatura em $t + \Delta t$ através da Equação (4.44);
- d) fazer $t = t + \Delta t$ e voltar para b.

4.7 - SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Nesta seção são resolvidos dois exemplos de ablação e os resultados obtidos são comparados com os obtidos na literatura. No primeiro exemplo, apresentado a seguir, é feita uma análise dos perfis de temperatura e do fluxo de calor rejeitado pela mudança de fase da superfície (mecanismo responsável pela ablação). Não é considerado o efeito do bloqueio do fluxo de calor convectivo causado pela transpiração dos gases resultantes da mudança de fase da superfície.

Primeiro considera-se um exemplo típico de proteção térmica em veículos aeroespaciais apresentado em (29), onde o sistema de proteção térmica é constituído por uma camada de Teflon (material que vai sofrer ablação) ligada a uma camada de alumínio (estrutura) com um isolamento térmico perfeito em sua outra face, como mostrado na Figura 4.6

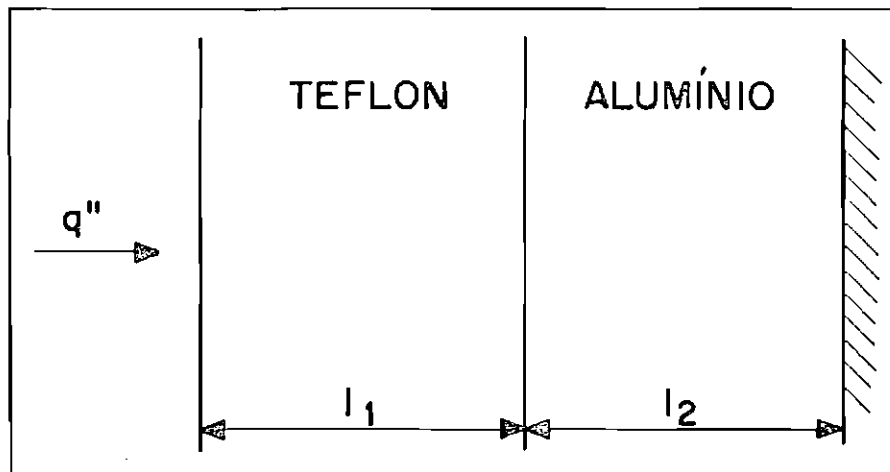


Fig. 4.6 - Esquema do problema de ablação em uma placa composta por duas camadas.

O sistema de proteção térmica, inicialmente a uma temperatura de 298 K , é submetido a um fluxo de calor constante igual a 2.838 kW/m^2 durante 5 s . Foram usadas as propriedades térmicas apresentadas em (29), como mostrado a seguir

Teflon:

$$l_1 = \frac{L}{2} = 0,254 \text{ mm}$$

$$k_1 = 0,22 \text{ W/mK}$$

$$\rho_1 = 1.922 \text{ kg/m}^3$$

$$c_{p1} = 1.256 \text{ J/kgK}$$

$$\alpha_1 = 9,29 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Q_1^* = 2,326 \times 10^6 \text{ J/kg}$$

$$T_{ab} = 833 \text{ K}$$

Alumínio:

$$l_2 = \frac{L}{2} = 0,254 \text{ mm}$$

$$k_2 = 156 \text{ W/mK}$$

$$\rho_2 = 3.204 \text{ kg/m}^3$$

$$c_{p2} = 1.047 \text{ J/kgK}$$

$$\alpha_2 = 4,645 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

onde $L = l_1 + l_2$.

Resolvendo-se a equação transcendental, Equação (4.31), chega-se a $t_0 = 0,0152 \text{ s}$ que é ligeiramente diferente do valor encontrado em (29) ($t_0 = 0,0151 \text{ s}$). Na Figura 4.7 é feita uma comparação de resultados, para o fluxo de calor rejeitado pela mudança de fase da camada de Teflon durante os 5 s de simulação, entre o método de diferenças finitas (29) e o método de elementos finitos. Ambos utilizaram o mesmo número de elementos na primeira e na segunda camada (15 e 4 elementos respectivamente). Em (29) é utilizado um procedimento de volumes de controle finitos com uma diferenciação exponencial para ponderar os termos convectivos que surgem devido ao movimento do sistema de coordenadas, cuja origem coincide com a superfície que sofre ablação. Para o método de elementos finitos faz-se uso da formulação SU/PG em todos os resultados que serão apresentados neste capítulo. Observando-se a Figura 4.7 pode-se notar uma boa concordância de resultados quase até o final da simulação, quando surge uma divergência que se pronuncia até causar uma diferença de resultados da ordem de 20 % em $t = 5 \text{ s}$. Na Figura 4.8 é feita uma ampliação da região onde começa a haver divergência de resultados e na Figura 4.9 são mostrados os perfis de temperatura, correspondentes aos resultados obtidos com elementos finitos na Figura 4.7, em 6 tempos de simulação em função da distância da superfície de Teflon em $t = 0$.

Observando-se a Figura 4.9 pode-se ver que a temperatura da segunda camada começa a se alterar aproximadamente em 4s, o mesmo instante em que pode-se notar o aparecimento da divergência na Figura 4.8. Quando os gradientes térmicos atingem a camada de alumínio, vão encontrar um material com uma difusividade térmica 500 vezes superior à difusividade térmica do Teflon. Isto vai provocar um aumento do fluxo de calor que é conduzido para dentro do sistema de proteção térmica. Fazendo-se um balanço de energia na superfície, onde o fluxo de calor que é rejeitado pela ablação é igual ao fluxo de calor incidente menos o fluxo de calor que é conduzido para dentro do sistema de proteção térmica, pode-se concluir que quando os gradientes de temperatura atingem a segunda camada, há um aumento do fluxo de calor que é conduzido para dentro e, conseqüentemente, uma diminuição do fluxo de calor rejeitado pela ablação. Isto pode ser observado na solução por elementos finitos na Figura 4.7.

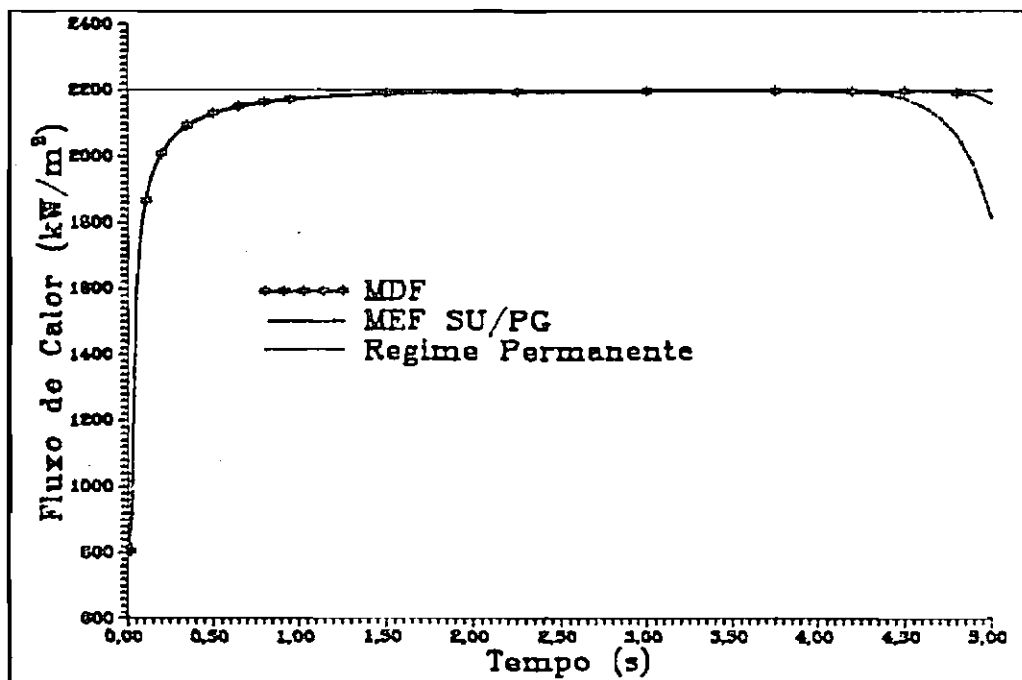


Fig. 4.7 - Comparação de resultados para o fluxo de calor consumido pela ablação entre o método de diferenças finitas e elementos finitos.

FONTE: Adaptada de (29), p. 33.

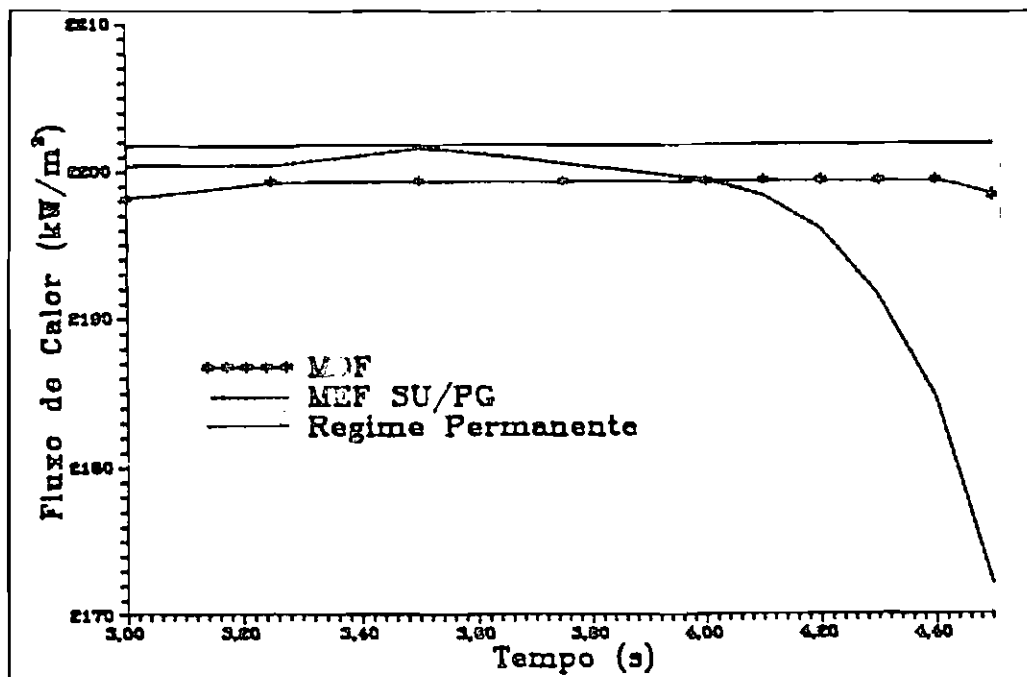


Fig. 4.8 - Instante em que começa a haver divergência de resultados na Figura 4.7.

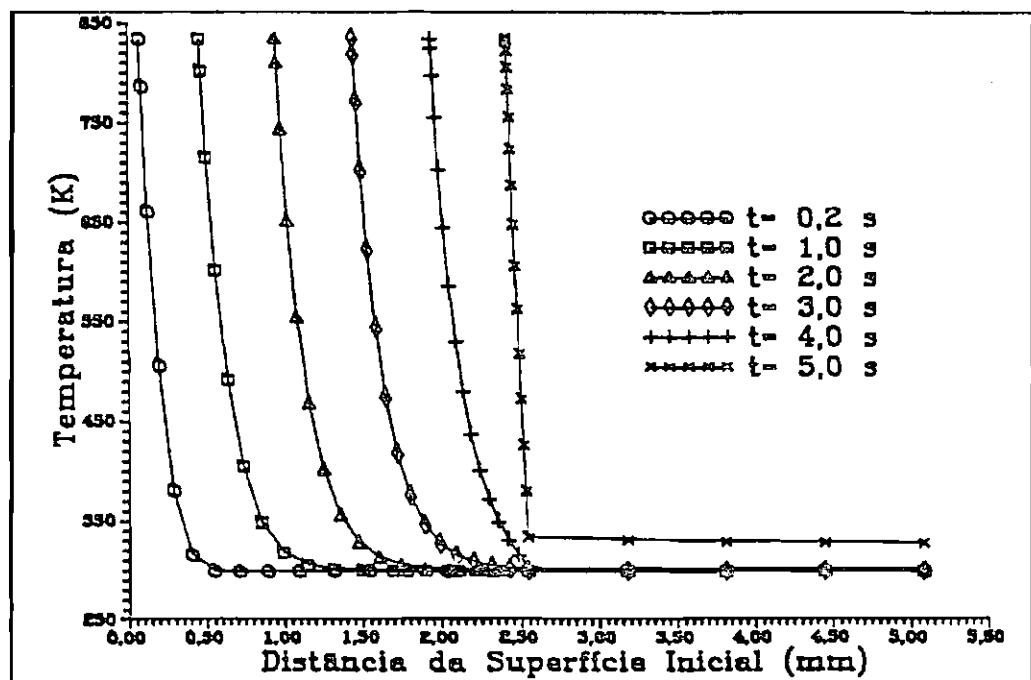


Fig. 4.9 - Perfis de temperatura em 6 instantes de tempo para $N = 20$.

Em (29), o sistema de coordenadas coincide com a fronteira móvel, e a discretização espacial se adapta à variação do domínio em cada instante de tempo eliminando o último nó da camada de Teflon. Este esquema pode ser muito eficiente durante a maior parte da simulação, evitando que tenham que ser feitas interpolações em cada instante, como em esquemas que usam um sistema fixo de coordenadas, ou evitando que ocorram perturbações na velocidade da fronteira móvel observadas em esquemas que eliminam o primeiro nó da malha. A eliminação do último nó da primeira camada, empregada em (29), deve ser responsável pela divergência de resultados observada na Figura 4.7.

Uma das formas de se validar uma solução numérica de um problema de ablação é compará-la com a solução em regime permanente. Em (29) é feita uma comparação entre os resultados obtidos com diferenças finitas e o valor do fluxo de calor rejeitado pela ablação em regime permanente que é dado pela equação

$$q''_{RP} = \frac{\rho_1 Q_1^* q''}{[\rho_1 c_{p1}(T_{ab} - T_0) + \rho_1 Q_1^*]} \quad (4.46)$$

$$= 2.201,7 \text{ kW/m}^2$$

Embora a referência (29) afirme que o regime permanente tenha sido atingido no último segundo de simulação, o que pode ser visto na solução por diferenças finitas na Figura 4.8, como os gradientes térmicos atingem a segunda camada aproximadamente em 4s, o fluxo de calor rejeitado pela ablação em regime permanente não foi atingido. Da Figura 4.8 pode-se concluir que a solução que mais se aproxima de q''_{RP} em regime permanente é a solução por elementos finitos que atinge $2.201,1 \text{ kW/m}^2$ em $t = 3,75 \text{ s}$.

A seguir são feitos testes de convergência e comparações de resultados segundo a equação

$$\text{Diferença Relativa} = \frac{\text{Solução} - \text{Solução de Referência}}{\text{Solução de Referência}} \quad (4.47)$$

Na Figura 4.10, utilizando-se como referência uma solução por elementos finitos com uma discretização de 100 nós e $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$, é feita uma comparação entre o método de elementos finitos ($N = 20$ e $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$) com e sem a contribuição *upwind* e o método de diferenças finitas ($N = 20$ e $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$)

apresentado em (29). Pode-se observar que a contribuição *upwind* praticamente não influencia a solução. Observa-se também, que uma menor diferença relativa é conseguida pelo uso do método de elementos finitos com relação à solução que utiliza uma discretização de 100 nós.

Na Figura 4.11 é tomada a mesma solução como referência. É feito um teste de convergência variando o número de elementos da malha computacional e utilizando-se $\Delta t = 10^{-4}s$. Nota-se uma grande mudança na solução quando se aumenta de 9 para 13 o número de nós, e mudanças cada vez menores à medida que se aumenta ainda mais o número de nós. Um outro teste de convergência é mostrado na Figura 4.12, tomando-se como referência uma solução por elementos finitos que utiliza uma malha de 20 nós e $\Delta t = 10^{-5}s$. Agora varia-se o intervalo de integração no tempo utilizando-se uma malha de 20 nós.

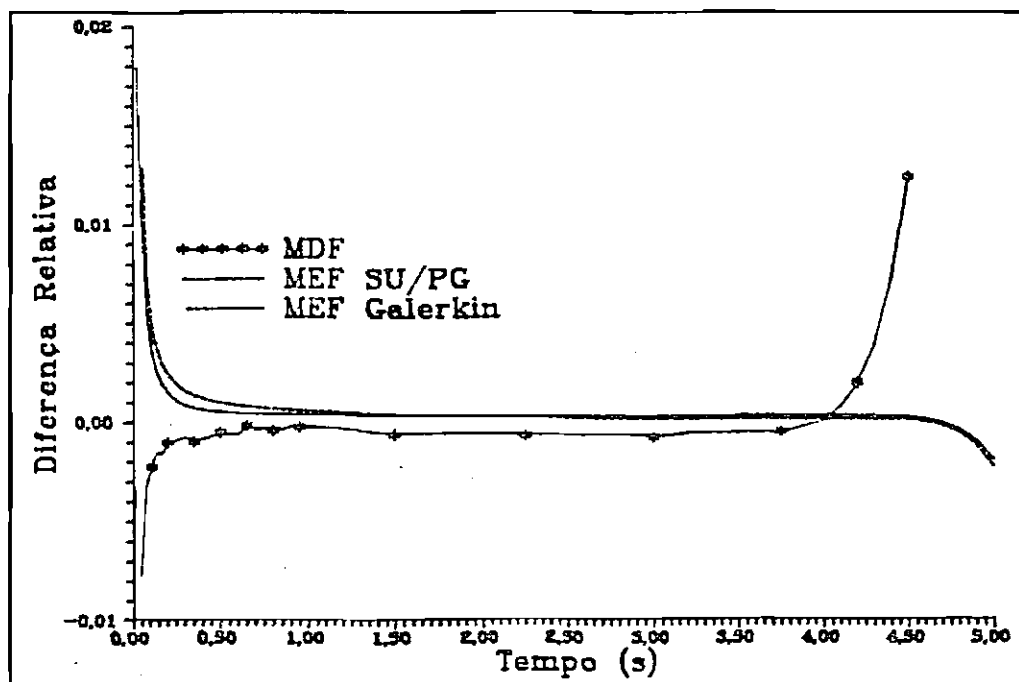


Fig. 4.10 - Comparação entre o método de elementos finitos com e sem a contribuição SU/PG e o método de diferenças finitas.

FONTE: Adaptada de (29), p. 33.

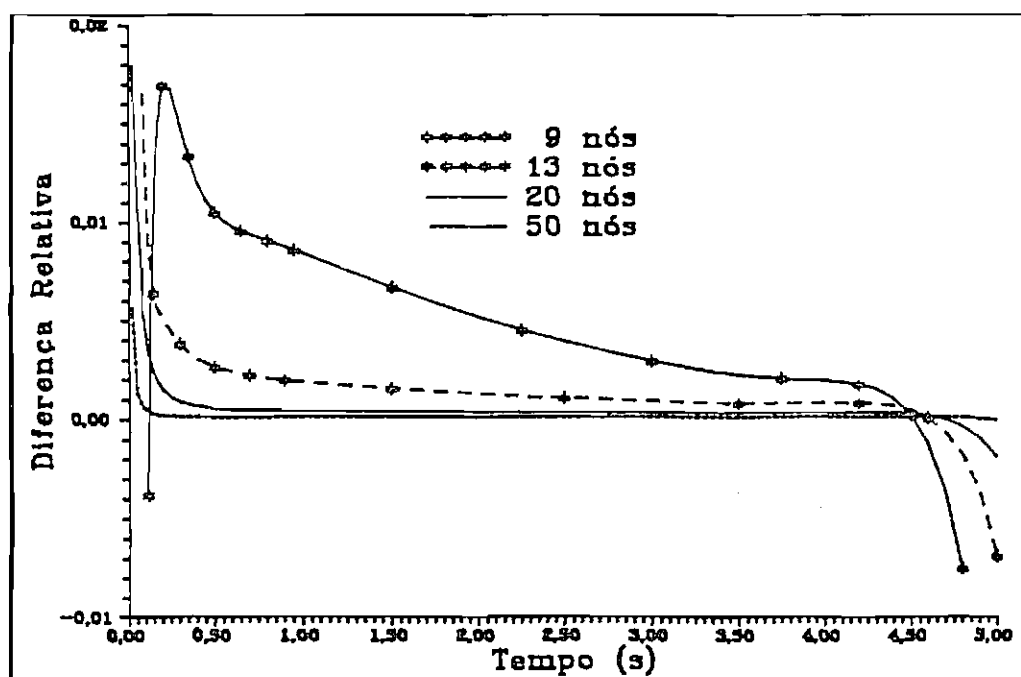


Fig. 4.11 - Teste de convergência variando-se o número de nós da malha.

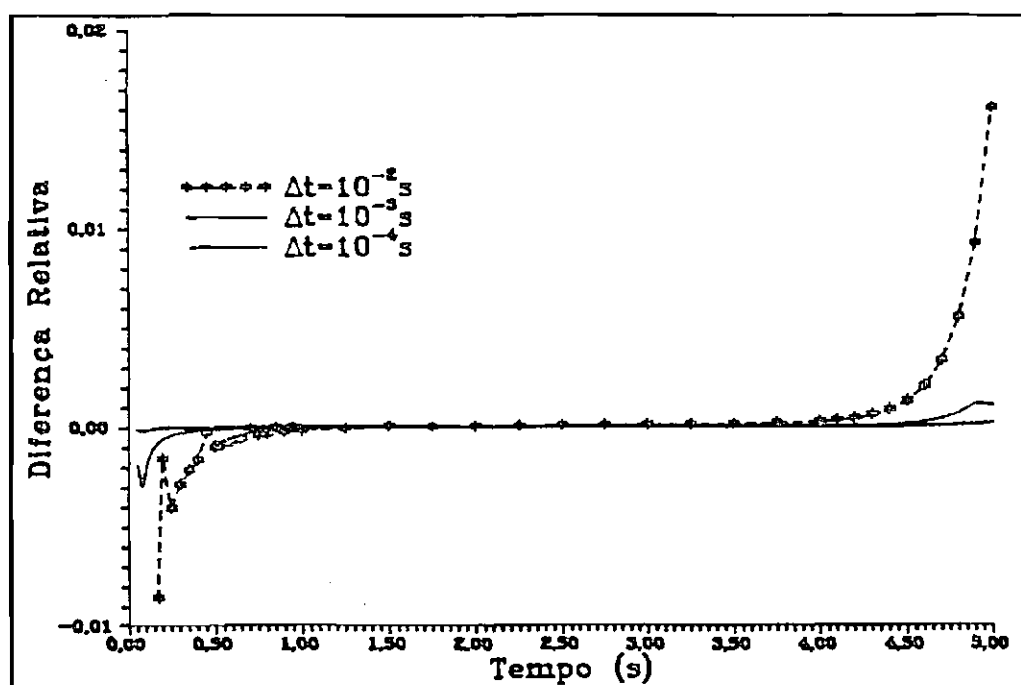


Fig. 4.12 - Teste de convergência de resultados variando-se o intervalo de integração no tempo.

Na Figura 4.13 observa-se a convergência dos perfis de temperatura obtidos pelo uso de algumas malhas computacionais diferentes e com $\Delta t = 10^{-4}s$, em 3 instantes de tempo. São mostrados os perfis de temperatura em $t = 0,2s$; $t = 3s$ e $t = 5s$.

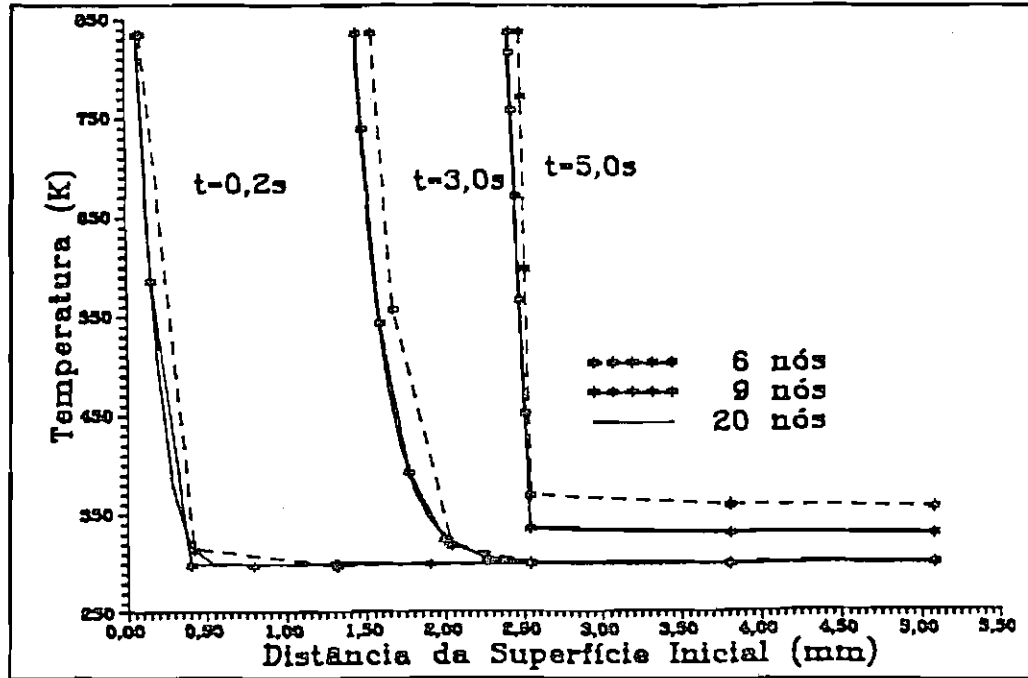


Fig. 4.13 - Comparações dos perfis de temperatura para diferentes malhas computacionais em $t = 0,2s$, $t = 3,0s$ e $t = 5,0s$.

Depois de uma análise dos gráficos, pode-se observar que os instantes onde é mais crítica a convergência são aqueles onde estão presentes as maiores não-linearidades do problema. Estes momentos correspondem ao início (até $0,5s$) e ao final (após $4,5s$) da simulação. Entre $0,5s$ e $4,5s$, uma discretização com 20 nós e $\Delta t = 10^{-4}s$ apresenta uma diferença relativa inferior a $0,1\%$ em relação a solução com 100 nós. Fora deste intervalo, a diferença mantém-se abaixo de 2% . Dos perfis de temperatura observa-se que não há diferenças entre as duas soluções na escala do gráfico.

O segundo exemplo tem como objetivo testar o código computacional desenvolvido quando o fluxo de calor incidente é uma dada função do tempo. Para comparação com outros resultados foi escolhido o problema apresentado em (42), que, embora não resolva um problema de ablação próximo do que se encontra na realidade, é relativamente simples para ser resolvido por algumas técnicas

analíticas, tendo sido recentemente resolvido em (43).

No exemplo apresentado em (42), ocorre ablação sobre uma placa isolada termicamente em uma de suas superfícies em 3 situações onde são considerados diferentes fluxos de calor incidentes. Todas as propriedades térmicas foram adimensionalizadas e consideradas iguais a 1, juntamente com a espessura da placa. Foi feita a seguinte adimensionalização

$$\eta = \frac{x}{L} ; s^*(\tau) = \frac{s(t)}{L} ; \tau = \frac{\alpha(t)}{L^2} ; \theta(\eta, \tau) = \frac{T_{ab} - T(x, t)}{T_{ab} - T_0}$$

$$\tau_0 = \frac{\alpha(t_0)}{L^2} ; Q(\tau) = \frac{q''(t)L}{k(T_{ab} - T_0)} ; \nu = \frac{Q^*}{c_p(T_{ab} - T_0)} = 1$$

Na solução por elementos finitos foi utilizada uma malha computacional com 20 nós, juntamente com a contribuição *spwind* e um intervalo de integração no tempo igual à $10^{-4}s$. São feitas comparações com os resultados obtidos em (43) através do uso da técnica da transformada integral generalizada, onde é feito um desenvolvimento em série de 26 termos. A posição e a velocidade da fronteira móvel são mostradas nas Figuras 4.14 e 4.15, para $Q(\tau) = 2$, nas Figuras 4.16 e 4.17, para $Q(\tau) = 10\tau$ e nas Figuras 4.18 e 4.19, para $Q(\tau) = 10\tau^2$. Nos gráficos a posição e a velocidade são funções de τ' , onde $\tau' = \tau - \tau_0$.

Os valores dos tempos iniciais do período de ablação adimensionalizados, τ_0 , são calculados para cada situação resolvendo-se novamente a Equação (4.31) que resulta nos tempos correspondentes à ordem de apresentação de cada situação : 0,196, 0,260 e 0,491.

Observando-se os resultados apresentados nas Figuras 4.14 a 4.19, pode-se concluir que os resultados estão em boa concordância com aqueles apresentados pelo uso da técnica da transformada integral generalizada.

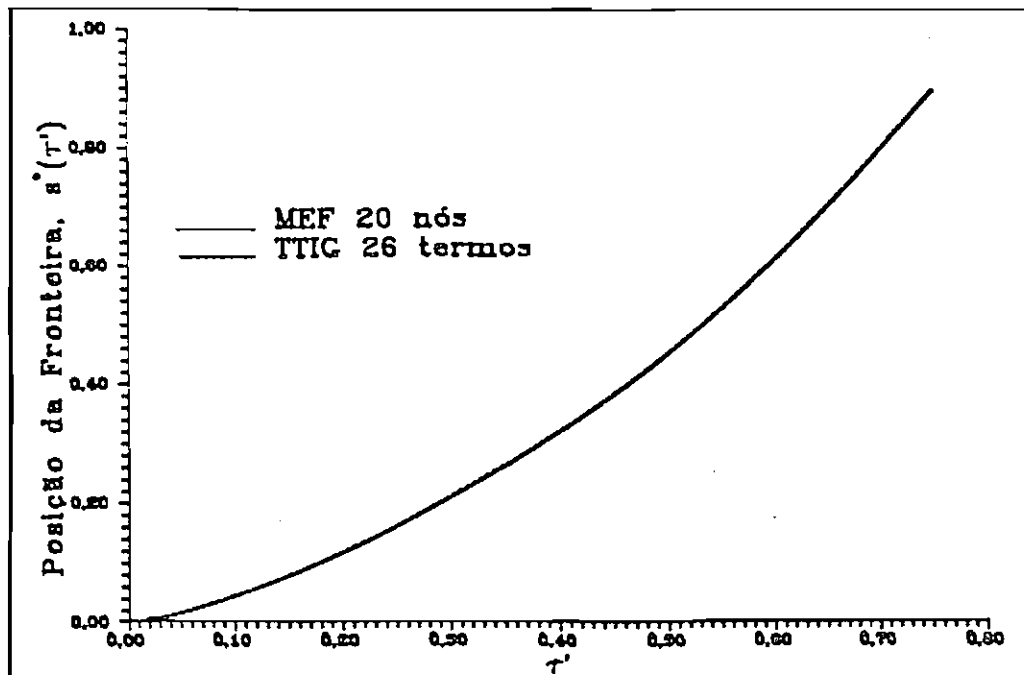


Fig. 4.14 - Comparação de resultados para a posição da fronteira móvel com $Q(\tau) = 2$.

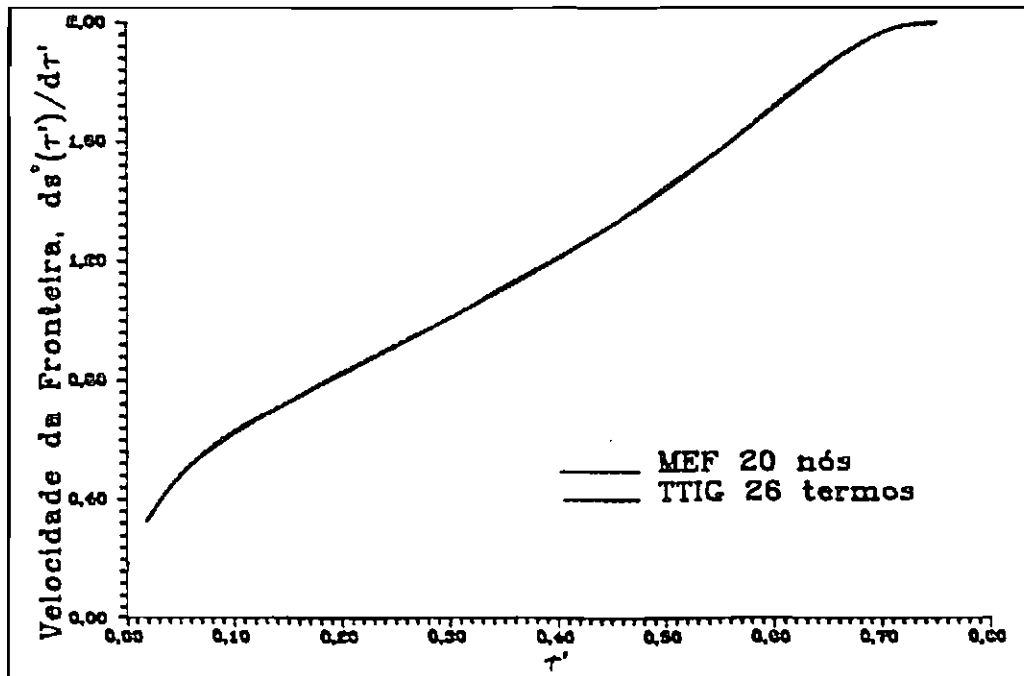


Fig. 4.15 - Comparação de resultados para a velocidade da fronteira móvel com $Q(\tau) = 2$.

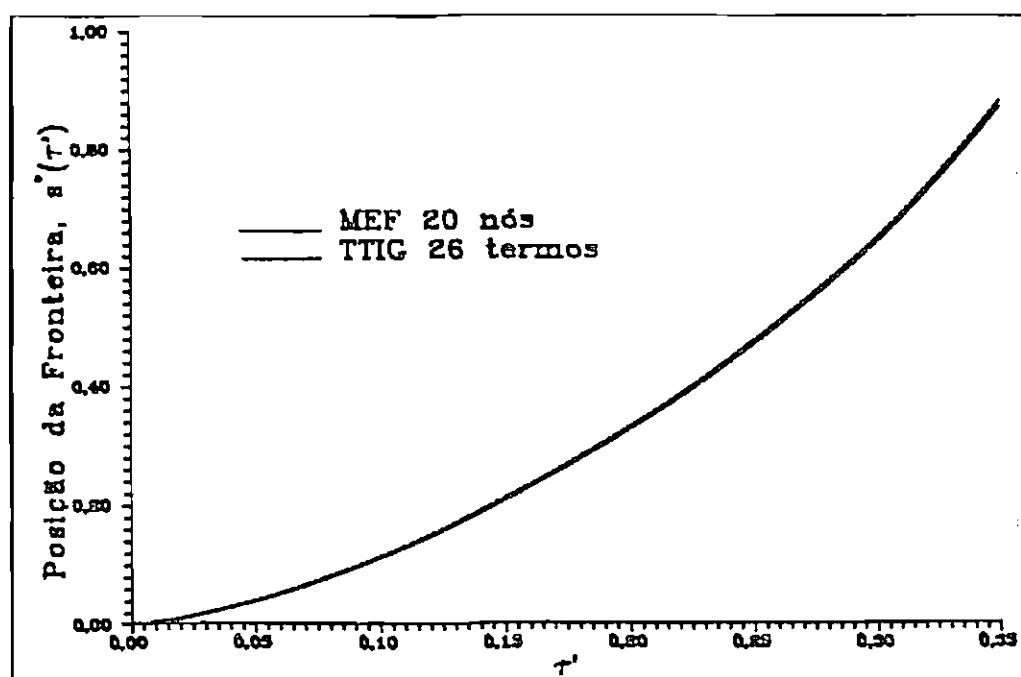


Fig. 4.16 - Comparação de resultados para a posição da fronteira móvel com $Q(\tau) = 10\tau$.

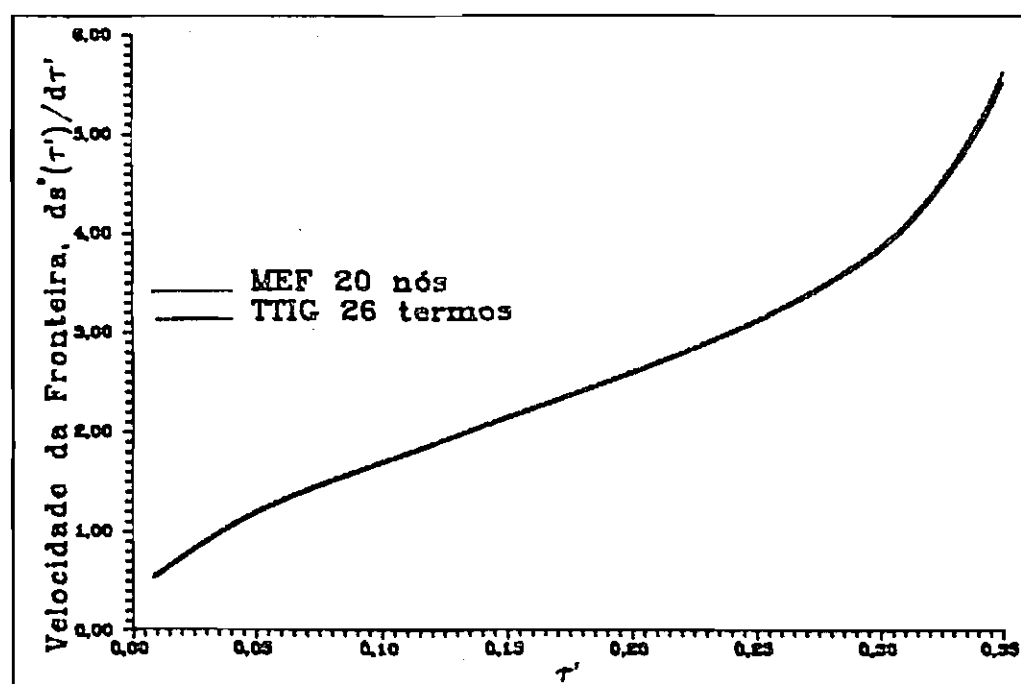


Fig. 4.17 - Comparação de resultados para a velocidade da fronteira móvel com $Q(\tau) = 10\tau$.

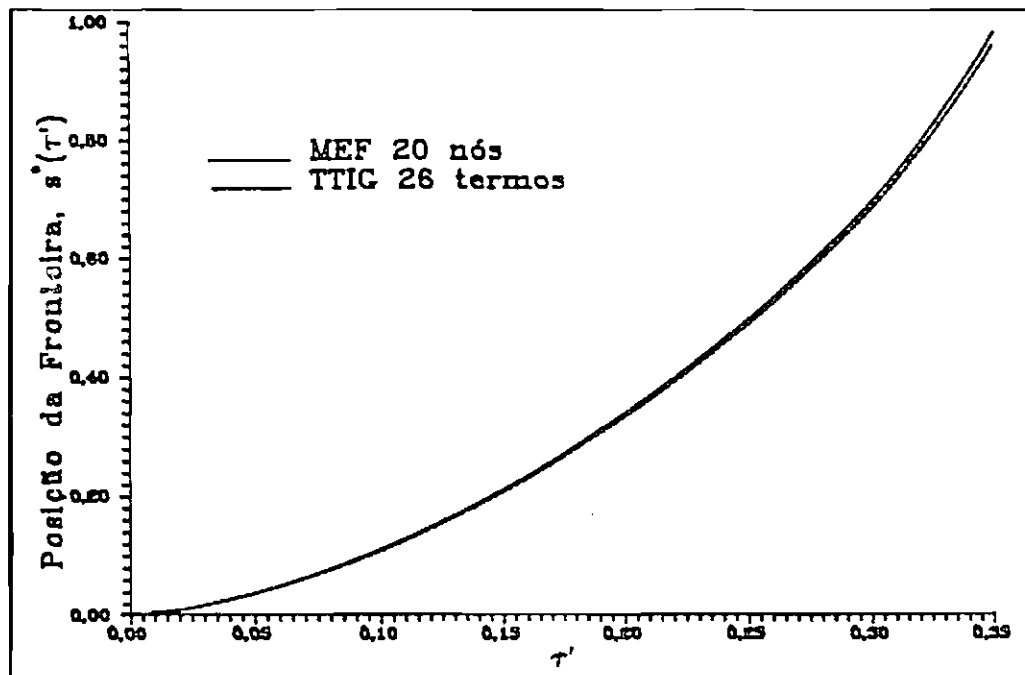


Fig. 4.18 - Comparação de resultados para a posição da fronteira móvel com $Q(\tau) = 10\tau^2$.

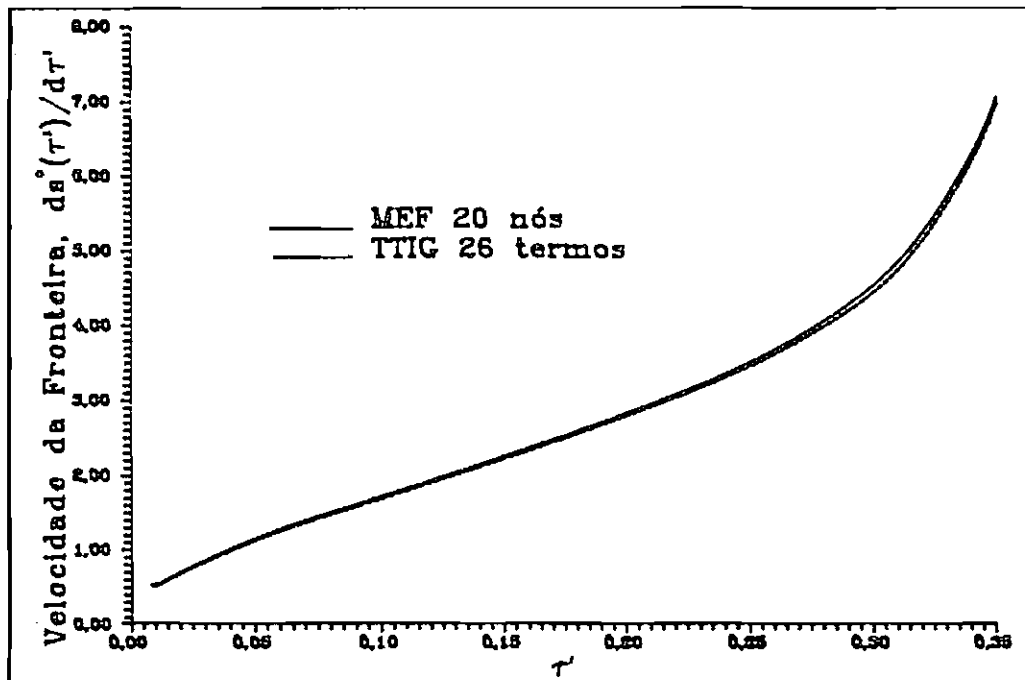


Fig. 4.19 - Comparação de resultados para a velocidade da fronteira móvel com $Q(\tau) = 10\tau^2$.

4.8 - CONCLUSÕES

Os resultados obtidos pelo uso da formulação de elementos finitos empregada e do algoritmo computacional desenvolvido, mostraram-se em boa concordância com os resultados encontrados na literatura. A única divergência deve-se ao fato do código desenvolvido ser mais apropriado para tratar problemas de ablação em múltiplas camadas que o procedimento usado em (29). O código computacional mostrou-se adequado para o cálculo de sistemas de proteção térmica encontrados na prática, onde empregam-se materiais que apresentam uma baixa difusividade térmica para constituir a camada que vai sofrer ablação e que são comumente empregados em aplicações aeroespaciais.

O código também comportou-se bem em problemas onde o fluxo de calor incidente varia com o tempo, como o que ocorre na reentrada de veículos espaciais, mostrando-se adequado para o cálculo da resposta térmica em aplicações reais de reentrada.

Embora o uso da técnica SU/PG não tenha resultado numa melhoria significativa da solução devido à pouca influência dos termos convectivos da equação de transferência de calor, para a solução de problemas de ablação em materiais carbonizáveis, o uso da formulação SU/PG poderá trazer um grande benefício, diminuindo as malhas necessárias e, conseqüentemente, os tempos computacionais. A solução de problemas que envolvem carbonização pode vir a ser uma extensão do presente trabalho, aproveitando-se da programação estruturada oferecida por um programa de elementos finitos.

O código também poderá ser modificado para resolver problemas onde a ablação ocorre pela oxidação da superfície. Neste caso, a equação de transferência de calor terá como condição de contorno na superfície o fluxo de calor especificado no lugar da temperatura, como o que foi utilizado neste trabalho. O fluxo de calor especificado resulta do balanço de energia na superfície, onde a perda de material por oxidação pode ser calculada por uma expressão de Arrhenius.

CAPÍTULO 5

A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ABLAÇÃO EM MÚLTIPLAS CAMADAS

A presença de fronteiras móveis em problemas de transferência de calor faz com que soluções analíticas dificilmente possam ser obtidas. No entanto, recentes avanços no uso da técnica da transformada integral generalizada (TTIG) têm permitido a sua aplicação na solução de um vasto número de problemas de Engenharia, entre os quais os problemas de fronteiras móveis.

O objetivo deste capítulo é buscar uma solução alternativa à de elementos finitos para problemas de ablação em múltiplas camadas. Através do uso da TTIG, são validados os resultados encontrados pelo uso de elementos finitos na primeira simulação computacional apresentada no Capítulo 4.

Inicialmente apresenta-se uma revisão sobre a TTIG. Neste capítulo esta técnica será utilizada para transformar analiticamente as equações diferenciais parciais do problema de ablação em um meio composto por múltiplas camadas, em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias. A partir deste ponto é feita uma descrição de como buscar uma solução numérica para este sistema diferencial ordinário. Em seguida é resolvido um exemplo de ablação em um meio composto por duas camadas. No exemplo é feita uma redefinição das equações transcendentais associadas em equações diferenciais ordinárias permitindo assim, que os autovalores necessários para a solução sejam determinados simultaneamente com as temperaturas transformadas através da solução de um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias. O sistema de equações diferenciais ordinárias do exemplo é resolvido utilizando-se uma rotina computacional do *software* IMSL. No final deste capítulo são apresentados os resultados obtidos e uma comparação é feita com os resultados do Capítulo 4.

5.1 - A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

O método da transformação integral constitui-se em um método direto e sistemático para a solução exata de problemas lineares e separáveis. O método é apropriado para a solução de problemas homogêneos e não homogêneos tendo sido revisto (44) e aplicado à solução de sete classes diferentes de problemas,

com inúmeras aplicações à teoria de difusão de calor e massa.

A técnica da transformação integral baseia-se no método de separação de variáveis uma vez que os pares transformada e inversa, necessários à solução do problema, são desenvolvidos considerando-se um problema de autovalor definido na mesma região do problema, usando termos da parte homogênea da equação original.

Pode-se resumir os passos para aplicação da técnica da transformação integral da seguinte forma:

- achar o problema de autovalor associado através da aplicação do método de separação de variáveis ao problema homogêneo;
- obter o par transformada e inversa apropriado;
- transformar a equação diferencial parcial original e suas condições de contorno apropriadas;
- resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias desacoplado;
- utilizar a fórmula da inversa, já estabelecida, a fim de se obter o potencial original.

A técnica acima descrita não permite a solução exata da equação diferencial parcial original quando não é possível se encontrar um problema de autovalor que leve a um sistema diferencial ordinário desacoplado, uma vez transformada a equação ; além disso, essa solução exata pode ser de utilidade limitada se o problema de autovalor for suficientemente envolvente do ponto de vista computacional. A técnica da transformada integral generalizada apresenta-se como uma forma de se superar tais dificuldades associadas aos problemas não transformáveis, mesmo que lineares, permitindo obter-se soluções aproximadas para várias classes de problemas, intratáveis pela técnica clássica.

Desde o trabalho de Ozisik e Murray (45), que trata de problemas com coeficientes variáveis nas condições de contorno, várias idéias tem sido desenvolvidas no sentido de estender a técnica da transformada integral a uma classe mais geral de problemas.

Os chamados "problemas de fronteiras móveis", isto é, problemas cuja posição da fronteira depende do tempo, são tratados em (46-48). Problemas de mudança de fase e de oxidação são exemplos de problemas de fronteiras móveis.

Em (43) a técnica da transformada integral generalizada é utilizada para resolver o problema de ablação unidimensional em uma placa finita. O objetivo deste capítulo é estender o que foi feito em (43) para resolver problemas unidimensionais de ablação em placas compostas por mais de uma camada. Para isso utiliza-se o desenvolvimento feito em (49), para a solução do problema unidimensional de condução de calor em meios compostos (problemas de classe II).

5.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se uma placa composta por n camadas de materiais diferentes em perfeito contato, sendo representada na Figura 3.1. A placa, inicialmente a uma temperatura T_0 , está sujeita a um fluxo de calor constante incidente sobre a sua enésima camada, enquanto que a sua primeira camada está perfeitamente isolada. A placa aquece até atingir uma determinada temperatura, quando começa a fundir ou sublimar. Considera-se este momento ($t = t_0$) como o início do processo de ablação que vai fazer com que somente a enésima camada apresente mudança de fase. Assume-se que a temperatura e o calor de ablação sejam constantes.

As equações de transferência de calor em cada camada são dadas por

$$w_k \frac{\partial T_k(x, t)}{\partial t} = k_k \frac{\partial^2 T_k(x, t)}{\partial x^2}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad t > t_0 \quad (5.1)$$

com as condições iniciais, de contorno e de interface dadas, respectivamente, por

$$T_k(x, t_0) = T_{k, t_0}(x), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad t > t_0 \quad (5.3)$$

$$T_n(s(t), t) = T_{ab}, \quad t > t_0 \quad (5.4)$$

$$k_k \frac{\partial T_k(x_k, t)}{\partial x} = k_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}(x_k, t)}{\partial x}, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1), \quad t > t_0 \quad (5.5)$$

$$T_k(x_k, t) = T_{k+1}(x_k, t), \quad k = 1, 2, \dots, (n-1), \quad t > t_0 \quad (5.6)$$

notando-se que $T_{k,t_0}(x)$ é o perfil de temperatura da placa no final do período de condução .

A velocidade da fronteira móvel pode ser calculada através do balanço de energia na superfície, onde o fluxo de calor que é conduzido para dentro das camadas é igual ao fluxo de calor incidente menos o fluxo de calor que é absorvido pela mudança de fase do material que sofre ablação . Tem-se então, a velocidade da fronteira móvel que é dada pela seguinte equação

$$\rho_n Q_n^* \frac{ds(t)}{dt} = -q'' + k_n \frac{\partial T_n(s(t), t)}{\partial x}, \quad t > t_0 \quad (5.7)$$

com a condição inicial

$$s(t_0) = L \quad (5.8)$$

As equações devem ser adimensionalizadas para chegar-se as condições de contorno homogêneas nas camadas externas e para evitar possíveis erros numéricos. Para isso escolhe-se as seguintes variáveis adimensionais

$$\eta = \frac{x}{L} \quad ; \quad s^*(\tau) = \frac{s(t)}{L} \quad ; \quad \tau = \frac{\alpha_n(t-t_0)}{L^2}$$

$$\theta_k(\eta, \tau) = \frac{T_{ab} - T_k(x, t)}{T_{ab} - T_0} \quad ; \quad w_k^* = \frac{w_k}{w_n} \quad ; \quad k_k^* = \frac{k_k}{k_n}$$

Reescrevendo as equações utilizando as variáveis adimensionais, obtém-se

$$w_k^* \frac{\partial \theta_k(\eta, \tau)}{\partial \tau} = k_k^* \frac{\partial^2 \theta_k(\eta, \tau)}{\partial \eta^2}, \quad \eta_{k-1} \leq \eta \leq \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \tau > 0 \quad (5.9)$$

com as condições iniciais

$$\theta_k(\eta, 0) = \theta_{k,0}(\eta), \quad \eta_{k-1} \leq \eta \leq \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.10)$$

as condições de contorno homogêneas

$$k_1^* \frac{\partial \theta_1(0, \tau)}{\partial \eta} = 0, \quad \tau > 0 \quad (5.11)$$

$$\theta_n(s^*(\tau), \tau) = 0, \quad \tau > 0 \quad (5.12)$$

e as condições nas interfaces

$$k_k^* \frac{\partial \theta_k(\eta_k, \tau)}{\partial \eta} = k_{k+1}^* \frac{\partial \theta_{k+1}(\eta_k, \tau)}{\partial \eta}, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1), \quad \tau > 0 \quad (5.13)$$

$$\theta_k(\eta_k, \tau) = \theta_{k+1}(\eta_k, \tau), \quad k = 1, 2, \dots, (n-1), \quad \tau > 0 \quad (5.14)$$

Adimensionalizando a Equação (5.7), chega-se a

$$\nu \frac{ds^*(\tau)}{d\tau} = -Q - \frac{\partial \theta_n(s^*(\tau), \tau)}{\partial \eta}, \quad \tau > 0 \quad (5.15)$$

onde

$$Q = \frac{q''L}{k_n(T_{ab} - T_0)} \quad ; \quad \nu = \frac{Q_n^*}{c_{pn}(T_{ab} - T_0)}$$

e com a condição inicial

$$s^*(0) = 1 \quad (5.16)$$

5.3 - PROBLEMA AUXILIAR DE AUTOVALOR

Seguindo-se as ideias apresentadas em (43) e (48) na aplicação do método da transformada integral para resolver problemas de fronteiras móveis, um

problema auxiliar de autovalor apropriado pode ser escrito como

$$k_k^* \frac{\partial^2 \psi_k(\mu_i, \eta)}{\partial \eta^2} + \mu_i^2(\tau) w_k^* \psi_k(\mu_i, \eta) = 0, \quad \eta_{k-1} \leq \eta \leq \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.17)$$

sujeitas às condições de contorno e de interface

$$\frac{\partial \psi_1(\mu_i, 0)}{\partial \eta} = 0, \quad (5.18)$$

$$\psi_k(\mu_i, \eta_k) = \psi_{k+1}(\mu_i, \eta_k), \quad k = 1, 2, \dots, (n-1) \quad (5.19)$$

$$k_k^* \frac{\partial \psi_k(\mu_i, \eta_k)}{\partial \eta} = k_{k+1}^* \frac{\partial \psi_{k+1}(\mu_i, \eta_k)}{\partial \eta}, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1) \quad (5.20)$$

$$\psi_n(\mu_i, s^*(\tau)) = 0, \quad (5.21)$$

5.4 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA AUXILIAR DE AUTOVALOR

Sejam $u_k(\mu_i, \eta)$ e $v_k(\mu_i, \eta)$ duas soluções independentes da Equação (5.17). As soluções do problema são combinações lineares destas duas funções na forma

$$\psi_k(\mu_i, \eta) = C_k(\tau) u_k(\mu_i, \eta) + D_k(\tau) v_k(\mu_i, \eta) \quad (5.22)$$

As variáveis $C_k(\tau)$ e $D_k(\tau)$ podem ser avaliadas nos pontos extremos $\eta = \eta_{k-1}$ e $\eta = \eta_k$, respectivamente

$$\begin{cases} \psi_k(\mu_i, \eta_{k-1}) = \psi_{k-1}^*(\tau), & k = 1, 2, \dots, n \\ \text{e} \\ \psi_k(\mu_i, \eta_k) = \psi_k^*(\tau), & k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5.23)$$

Para atingir este objetivo, avalia-se a Equação (5.22) em $\eta = \eta_{k-1}$ e $\eta = \eta_k$, e resolve-se o sistema resultante para $C_k(\tau)$ e $D_k(\tau)$. Quando as variáveis

$C_k(\tau)$ e $D_k(\tau)$ são substituídas na Equação (5.22), obtém-se

$$\psi_k(\mu_i, \eta) = \psi_{k-1}^*(\tau) U_k(\mu_i, \eta) + \psi_k^*(\tau) V_k(\mu_i, \eta) \quad (5.24)$$

onde

$$U_k(\mu_i, \eta) = \frac{u_k(\mu_i, \eta) v_k(\mu_i, \eta_k) - u_k(\mu_i, \eta_k) v_k(\mu_i, \eta)}{u_k(\mu_i, \eta_{k-1}) v_k(\mu_i, \eta_k) - u_k(\mu_i, \eta_k) v_k(\mu_i, \eta_{k-1})} \quad (5.25)$$

$$V_k(\mu_i, \eta) = \frac{u_k(\mu_i, \eta_{k-1}) v_k(\mu_i, \eta) - u_k(\mu_i, \eta) v_k(\mu_i, \eta_{k-1})}{u_k(\mu_i, \eta_{k-1}) v_k(\mu_i, \eta_k) - u_k(\mu_i, \eta_k) v_k(\mu_i, \eta_{k-1})} \quad (5.26)$$

Escolhendo as soluções independentes $u_k(\mu_i, \eta)$ e $v_k(\mu_i, \eta)$ que satisfaçam a Equação (5.17)

$$u_k(\mu_i, \eta) = \text{sen}(\omega_{k,i} \eta) \quad (5.27)$$

$$v_k(\mu_i, \eta) = \text{cos}(\omega_{k,i} \eta) \quad (5.28)$$

onde

$$\omega_{k,i} = \mu_i(\tau) \sqrt{\frac{w_k^*}{k_k^*}} \quad (5.29)$$

e substituindo nas Equações (5.24) à (5.26), chega-se a

$$\begin{aligned} \psi_k(\mu_i, \eta) = & \psi_{k-1}^*(\tau) \frac{\text{sen} \omega_{k,i}(\eta_k - \eta)}{\text{sen} \omega_{k,i}(\eta_k - \eta_{k-1})} + \\ & + \psi_k^*(\tau) \frac{\text{sen} \omega_{k,i}(\eta - \eta_{k-1})}{\text{sen} \omega_{k,i}(\eta_k - \eta_{k-1})} \end{aligned} \quad (5.30)$$

A solução, Equação (5.30), deve satisfazer as condições de contorno (5.18), (5.19) e (5.21), chegando-se respectivamente às seguintes equações

$$P_1(\mu_i, 0) \psi_0^*(\tau) + Q_1(\mu_i, 0) \psi_1^*(\tau) = 0 \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned}
& P_k(\mu_i, \eta_k) \psi_{k-1}^*(\tau) + [Q_k(\mu_i, \eta_k) - P_{k+1}(\mu_i, \eta_k)] \psi_k^*(\tau) + \\
& + P_{k+1}(\mu_i, \eta_{k+1}) \psi_{k+1}^*(\tau) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, (n-1) \quad (5.32)
\end{aligned}$$

$$\psi_n^*(\tau) = 0 \quad (5.33)$$

onde

$$\begin{aligned}
P_k(\mu_i, \eta) &= k_k^* \frac{\partial U_k(\mu_i, \eta)}{\partial \eta} \\
&= -k_k^* \omega_{k,i} \frac{\cos \omega_{k,i}(\eta_k - \eta)}{\sin \omega_{k,i}(\eta_k - \eta_{k-1})} \quad (5.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_k(\mu_i, \eta) &= k_k^* \frac{\partial V_k(\mu_i, \eta)}{\partial \eta} \\
&= k_k^* \omega_{k,i} \frac{\cos \omega_{k,i}(\eta - \eta_{k-1})}{\sin \omega_{k,i}(\eta_k - \eta_{k-1})} \quad (5.35)
\end{aligned}$$

Assume-se a partir desta etapa que os valores dos autovalores dependentes do tempo, $\mu_i(\tau)$, e das autofunções associadas $\psi_{k,i}(\eta)$, são conhecidos pela aplicação direta do método da contagem de sinal (50).

5.5 - SOLUÇÃO GERAL

O problema de autovalor dado pelas Equações (5.17) a (5.21) permite que seja definido o seguinte par de transformada integral (49):

$$\bar{\theta}_j(\tau) = \sum_{k=1}^n \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} w_k^* \psi_{k,j}(\eta, \tau) \theta_k(\eta, \tau) d\eta, \quad \text{transformada} \quad (5.36)$$

$$\theta_k(\eta, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi_{k,j}(\eta, \tau)}{N_j(\tau)} \bar{\theta}_j(\tau), \quad \text{inversa} \quad (5.37)$$

onde as normas, N_j' s, são obtidas pela equação

$$N_i(\tau) = \sum_{k=1}^n \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} w_k^* \psi_{k,i}^2(\eta, \tau) d\eta \quad (5.38)$$

onde $\psi_{k,i}(\eta, \tau)$ é dado pela Equação (5.30).

Multiplicando a Equação (5.9) por $\psi_{k,i}(\eta, \tau)$ e a Equação (5.17) por $\theta_k(\eta, \tau)$, somando-as e aplicando o operador integral $\int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} d\eta$, obtém-se

$$\begin{aligned} w_k^* \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \psi_{k,i}(\eta, \tau) \frac{\partial \theta_k(\eta, \tau)}{\partial \tau} d\eta + k_k^* \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \left[\theta_k(\eta, \tau) \frac{\partial^2 \psi_{k,i}(\mu, \eta)}{\partial \eta^2} - \right. \\ \left. - \psi_{k,i}(\eta, \tau) \frac{\partial^2 \theta_k(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} \right] d\eta + \mu^2(\tau) w_k^* \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \psi_{k,i}(\mu, \eta) \theta_k(\eta, \tau) d\eta = 0, \\ k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.39)$$

Substituindo na Equação (5.39) $\theta_k(\eta, \tau)$ pela fórmula da inversa, Equação (5.37), e somando a equação resultante com as equações correspondentes para as outras camadas, chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_i(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta_j(\tau)}{N_j(\tau)} \sum_{k=1}^n w_k^* \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \psi_{k,i}(\eta, \tau) \frac{\partial \psi_{k,j}(\eta, \tau)}{\partial \tau} d\eta + \\ + \left(\mu_i^2(\tau) - \frac{1}{N_i(\tau)} \frac{dN_i(\tau)}{d\tau} \right) \theta_i(\tau) = g_i(\tau) \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde

$$g_i(\tau) = k_k^* \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \left[\theta_k(\eta, \tau) \frac{\partial^2 \psi_{k,i}(\mu, \eta)}{\partial \eta^2} - \psi_{k,i}(\eta, \tau) \frac{\partial^2 \theta_k(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} \right] d\eta \quad (5.41)$$

É feita a integração no lado direito da Equação (5.41) usando-se as seguintes identidades

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\psi_{k,i}(\eta, \tau) \frac{\partial \theta_k(\eta, \tau)}{\partial \eta} \right) &= \psi_{k,i}(\eta, \tau) \frac{\partial^2 \theta_k(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} + \\ &+ \frac{\partial \psi_{k,i}(\eta, \tau)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \theta_k(\eta, \tau)}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\theta_k(\eta, \tau) \frac{\partial \psi_{k,i}(\eta, \tau)}{\partial \eta} \right) &= \theta_k(\eta, \tau) \frac{\partial^2 \psi_{k,i}(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} + \\ &+ \frac{\partial \psi_{k,i}(\eta, \tau)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \theta_k(\eta, \tau)}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Subtraindo a Equação (5.42) da Equação (5.43) e substituindo o resultado na Equação (5.41), obtém-se

$$\begin{aligned} g_i(\tau) &= \theta_1(0, \tau) k_k^* \frac{\partial \psi_{1,i}(0, \tau)}{\partial \eta} - \psi_{1,i}^*(\tau) k_k^* \frac{\partial \theta_1(0, \tau)}{\partial \eta} + \psi_{n,i}^*(\tau) \cdot \\ &\cdot k_k^* \frac{\partial \theta_n(s^*(\tau), \tau)}{\partial \eta} - \theta_n(s^*(\tau), \tau) k_k^* \frac{\partial \psi_{n,i}(s^*(\tau), \tau)}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Substituindo as condições de contorno, Equações (5.11), (5.12), (5.18) e (5.21), verifica-se que

$$g_i(\tau) = 0 \quad (5.45)$$

A Equação (5.40) pode ser reescrita na forma abaixo

$$\frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{ij}(\tau)}{N_j(\tau)} \bar{\theta}_j(\tau) + \left(\mu_i^2(\tau) - \frac{1}{N_i(\tau)} \frac{dN_i(\tau)}{d\tau} \right) \bar{\theta}_i(\tau) = 0 \quad (5.46)$$

onde

$$A_{ij}(\tau) = \sum_{k=1}^n w_k^* \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \psi_{k,i}(\eta, \tau) \frac{\partial \psi_{k,j}(\eta, \tau)}{\partial \tau} d\eta \quad (5.47)$$

Para o cálculo da velocidade da fronteira móvel, substitui-se $\theta_k(\eta, \tau)$ na Equação (5.15) pela fórmula da inversa, Equação (5.37), tem-se então

$$\nu \frac{ds^*(\tau)}{d\tau} = -Q - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial \psi_{n,i}(s^*(\tau), \tau)}{\partial \eta} \frac{\bar{\theta}_i(\tau)}{N_i(\tau)} \quad (5.48)$$

Derivando-se a Equação (5.30) e substituindo o resultado na Equação (5.48), chega-se a

$$\frac{ds^*(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\nu} \left[-Q + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_{n,i} \psi_{n-1}^*(\tau)}{\text{sen} \omega_{n,i}(s^*(\tau) - \eta_{n-1})} \cdot \frac{\bar{\theta}_i(\tau)}{N_i(\tau)} \right] \quad (5.49)$$

A técnica da transformada integral generalizada transformou as equações diferenciais parciais do problema num sistema de equações diferenciais ordinárias. Como este sistema é infinito, na solução computacional é necessária a sua substituição por um sistema finito de ordem N . O sistema transformado final pode ser escrito como

$$\frac{d\bar{\theta}_i(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^N \left\{ \delta_{ij} \left[\mu_i^2(\tau) - \frac{1}{N_i(\tau)} \frac{dN_i(\tau)}{d\tau} \right] + \frac{A_{ij}(\tau)}{N_j(\tau)} \right\} \bar{\theta}_j(\tau) = 0, \quad \tau > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.50)$$

enquanto que as condições iniciais transformadas são dadas por

$$\bar{\theta}_i(0) = f_i = \sum_{k=1}^n \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} w_k^* \psi_{k,i}(\eta, \tau) \theta_{k,0}(\eta) d\eta, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.51)$$

A equação diferencial para a posição da fronteira móvel pode ser reescrita como

$$\frac{ds^*(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\nu} \left[-Q + \frac{\omega_{n,i} \psi_{n-1}^*(\tau)}{\text{sen} \omega_{n,i}(s^*(\tau) - \eta_{n-1})} \sum_{i=1}^N \frac{\bar{\theta}_i(\tau)}{N_i(\tau)} \right] \quad (5.52)$$

com a condição inicial

$$s^*(0) = 1 \quad (5.53)$$

As Equações (5.50) à (5.53) formam um sistema de equações diferenciais ordinárias e podem ser escritas na forma matricial dada a seguir

$$y'(\tau) = A(\tau) y(\tau) + g \quad (5.54)$$

$$y(0) = f \quad (5.55)$$

onde,

$$y(\tau) = \{\bar{\theta}_1(\tau), \bar{\theta}_2(\tau), \dots, \bar{\theta}_N(\tau), s^*(\tau)\}^T \quad (5.56)$$

$$f = \{f_1, f_2, \dots, f_N, 1\}^T \quad (5.57)$$

$$A(\tau) = \{a_{ij}(\tau)\}, \begin{cases} a_{ij}(\tau) = -\left\{ \delta_{ij} \left[\mu_i^2(\tau) - \frac{1}{N_i(\tau)} \frac{dN_i(\tau)}{d\tau} \right] + \frac{A_{ij}(\tau)}{N_j(\tau)} \right\}, & \text{para } i, j \leq N \\ a_{N+1,j}(\tau) = -\frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi_{n,j}(s^*(\tau), \tau)}{\partial \eta} \frac{1}{N_j(\tau)}, & \text{para } j \leq N \\ a_{i,N+1}(\tau) = 0, & \text{para } i \leq N+1 \end{cases} \quad (5.58)$$

$$g = \left\{ 0, 0, \dots, 0, -\frac{Q}{\nu} \right\}^T \quad (5.59)$$

Nota-se que o sistema de equações é não-linear, devido aos coeficientes da matriz, $a_{ij}(\tau)$, que dependem da posição da fronteira móvel, $s^*(\tau)$.

O sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias pode ser resolvido numericamente utilizando-se a subrotina DIVPAG da biblioteca de subrotinas científicas IMSL (51), que permite o controle do erro na solução de problemas de valor inicial usando o método de Gear. Em (52) é apresentado um algoritmo básico para a solução da presente classe de problemas parabólicos, através da

técnica da transformada integral generalizada, incluindo um esquema adaptativo que automaticamente controla o número de equações consideradas através de um procedimento, que acrescenta ou retira termos de mais alta ordem, de acordo com o comportamento da convergência local e respeitando a precisão desejada.

Os autovalores $\mu_i(\tau)$ também podem ser determinados através de um procedimento alternativo caso seja possível transformar as Equações (5.31) a (5.35) em equações transcendentais e através destas chegar a um sistema de equações diferenciais ordinárias para os N autovalores necessários partindo das condições iniciais, $\mu_i(0) = \mu_{i,0}$, $i = 1, 2, \dots, N$. O sistema completo resultante, neste caso, envolve $2N+1$ equações diferenciais ordinárias acopladas, mas a solução das equações transcendentais é evitada.

Quando as temperaturas transformadas tiverem sido calculadas numericamente, nos instantes de interesse, a fórmula da inversa deverá ser usada para o cálculo do perfil de temperatura original.

5.6 - SIMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DE ABLAÇÃO EM UM MEIO COMPOSTO POR DUAS CAMADAS

A seguir é resolvido o primeiro exemplo apresentado no Capítulo 4, de ablação num meio composto por duas camadas, e são feitas comparações entre os resultados obtidos com elementos finitos e os obtidos com o uso da TTIG. O esquema pode ser visto na Figura 5.1 considerando-se o mesmo sistema de coordenadas da Figura 3.1 e notando-se que a primeira camada corresponde agora a camada de alumínio, que está isolada termicamente em $x = 0$. A segunda camada é a de Teflon, e as propriedades térmicas utilizadas são as mesmas do Capítulo 4.

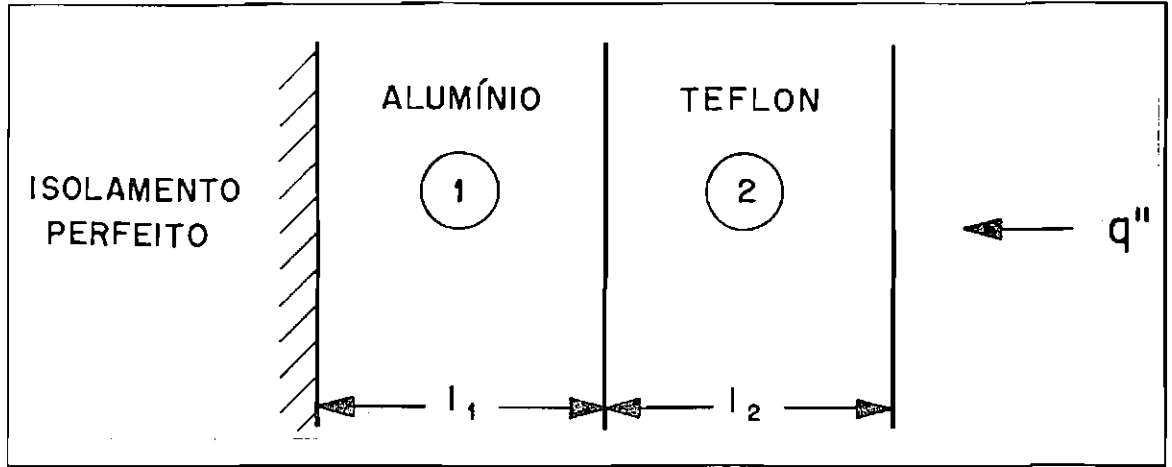


Fig. 5.1 - Esquema do problema de ablação.

Usando as propriedades adimensionais definidas anteriormente, nota-se que

$$L = l_1 + l_2 = 5,08 \text{ mm} ; \eta = \frac{x}{L} ; s^*(\tau) = \frac{s(t)}{L} ; \tau = \frac{\alpha_2(t - t_0)}{L^2}$$

$$\theta_1(\eta, \tau) = \frac{T_{ab} - T_1(x, t)}{T_{ab} - T_0} ; \theta_2(\eta, \tau) = \frac{T_{ab} - T_2(x, t)}{T_{ab} - T_0} ; w_1^* = \frac{w_1}{w_2}$$

$$w_2^* = 1 ; k_1^* = \frac{k_1}{k_2} ; k_2^* = 1$$

onde T_0 é a temperatura inicial do problema de pré-ablação, que neste exemplo é igual a 536 R (298 K). Através da solução da equação linear de condução de calor chega-se a $t_0 = 0,0151 \text{ s}$, quando começa a haver ablação na fronteira $x = L$, onde $L = l_1 + l_2$.

Reescrevendo as Equações (5.9), (5.11) e (5.12) para as duas camadas, tem-se

1ª Camada

$$w_1^* \frac{\partial \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \tau} = k_1^* \frac{\partial^2 \theta_1(\eta, \tau)}{\partial \eta^2}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}, \quad \tau > 0 \quad (5.60)$$

$$k_1^* \frac{\partial \theta_1(0, \tau)}{\partial \eta} = 0, \quad \tau > 0 \quad (5.61)$$

2ª Camada

$$\frac{\partial \theta_2(\eta, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_2(\eta, \tau)}{\partial \eta^2}, \quad \frac{1}{2} \leq \eta \leq s^*(\tau), \quad \tau > 0 \quad (5.62)$$

com a condição de contorno

$$\theta_2(s^*(\tau), \tau) = 0, \quad \tau > 0 \quad (5.63)$$

As condições de contorno na interface entre as duas camadas, admitindo-se um perfeito contato entre elas, são dadas pelas Equações (5.13) e (5.14)

$$k_1^* \frac{\partial \theta_1(\frac{1}{2}, \tau)}{\partial \eta} = \frac{\partial \theta_2(\frac{1}{2}, \tau)}{\partial \eta}, \quad \tau > 0 \quad (5.64)$$

$$\theta_1(\frac{1}{2}, \tau) = \theta_2(\frac{1}{2}, \tau), \quad \tau > 0 \quad (5.65)$$

As condições iniciais para as Equações (5.60) e (5.62) são dadas pelas Equações (5.10), onde o perfil final de temperatura resultante da solução da equação linear de condução de calor corresponde ao perfil inicial de temperatura para o problema de ablação.

A equação de movimento da fronteira móvel pode ser obtida reescrevendo-se a Equação (5.15)

$$\nu \frac{ds^*(\tau)}{d\tau} = -Q - \frac{\partial \theta_2(s^*(\tau), \tau)}{\partial \eta}, \quad \tau > 0 \quad (5.66)$$

onde

$$Q = \frac{q'' L}{k_2(T_{ab} - T_0)} \quad ; \quad \nu = \frac{Q_2^*}{c_{p2}(T_{ab} - T_0)}$$

e a condição inicial é dada pela Equação (5.16).

O problema de autovalor correspondente às Equações (5.60) a (5.65), é dado pelas Equações (5.17) a (5.21) que são reescritas como

$$k_1^* \frac{\partial^2 \psi_{1,i}(\eta)}{\partial \eta^2} + \mu_i^2(\tau) \omega_{1,i}^* \psi_{1,i}(\eta) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2} \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{2,i}(\eta)}{\partial \eta^2} + \mu_i^2(\tau) \psi_{2,i}(\eta) = 0, \quad \frac{1}{2} \leq \eta \leq s^*(\tau) \quad (5.68)$$

sujeitas às condições de contorno

$$k_1^* \frac{\partial \psi_{1,i}(0)}{\partial \eta} = 0, \quad \tau > 0 \quad (5.69)$$

$$\psi_{1,i}\left(\frac{1}{2}\right) = \psi_{2,i}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \tau > 0 \quad (5.70)$$

$$k_1^* \frac{\partial \psi_{1,i}\left(\frac{1}{2}\right)}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_{2,i}\left(\frac{1}{2}\right)}{\partial \eta}, \quad \tau > 0 \quad (5.71)$$

$$\psi_{2,i}(s^*(\tau)) = 0, \quad \tau > 0 \quad (5.72)$$

Para o cálculo dos autovalores em $\tau = 0$, resolve-se o sistema de Equações (5.31), (5.32) e (5.33), que é a autocondição do problema de autovalores. O sistema resulta na seguinte equação transcendental

$$\text{sen}\left(\frac{\omega_{1,i}}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\omega_{2,i}}{2}\right) - \frac{\omega_{2,i}}{k_1^* \omega_{1,i}} \cos\left(\frac{\omega_{1,i}}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_{2,i}}{2}\right) = 0 \quad (5.73)$$

onde,

$$\omega_{k,i} = \mu_i(0) \sqrt{\frac{w_k^*}{k_k^*}}, \quad k = 1, 2 \quad (5.74)$$

As raízes da Equação (5.73) podem ser calculadas por intermédio de diversos algoritmos próprios para o cálculo de raízes de funções, tomando-se o cuidado para não haver perda de nenhum autovalor. Neste trabalho foi utilizada

a sub-rotina DZBREN do *software* IMSL (51) onde, para o cálculo das raízes, é necessário conhecer os limites inferiores e superiores de cada intervalo que contenha uma raiz. Foi feito um rastreamento cuidadoso, fazendo em cada passo de cálculo, $\mu_{inf} = \mu_{inf} + \Delta\mu$ e $\mu_{sup} = \mu_{sup} + \Delta\mu$, onde μ_{inf} e μ_{sup} são respectivamente, o valor mínimo e máximo de μ no intervalo $\Delta\mu$. Foi escolhido o intervalo $\Delta\mu = 10^{-4}$ entre μ_{inf} e μ_{sup} para não haver perda de nenhum autovalor.

Os coeficientes $\psi_0^*(\tau)$, $\psi_1^*(\tau)$ e $\psi_2^*(\tau)$ podem ser calculados fazendo $\psi_1^* = -sen\omega_{2,i} (s^*(\tau) - \frac{1}{2})$ e usando as Equações (5.31) e (5.33). Obtém-se então

$$\psi_0^*(\tau) = -\frac{sen\omega_{2,i}(s^*(\tau) - \frac{1}{2})}{cos(\frac{\omega_{1,i}}{2})} \quad (5.75)$$

e

$$\psi_2^*(\tau) = 0 \quad (5.76)$$

Conhecendo os coeficientes $\psi_0^*(\tau)$, $\psi_1^*(\tau)$ e $\psi_2^*(\tau)$, pode-se reescrever a Equação (5.30) para obter as autofunções

$$\psi_1(\eta, \tau) = -\frac{sen\omega_{2,i}(s^*(\tau) - \frac{1}{2})cos\omega_{1,i}\eta}{cos(\frac{\omega_{1,i}}{2})} \quad (5.77)$$

e

$$\psi_2(\eta, \tau) = -sen\omega_{2,i}(s^*(\tau) - \eta) \quad (5.78)$$

A norma das autofunções é obtida usando a Equação (5.38), que resulta em

$$\begin{aligned} N_i(\tau) = & \frac{\omega_{1,i}}{2\mu_i^2(\tau)} \cdot sen^2\mu_i(\tau)(s^*(\tau) - \frac{1}{2}) \cdot tan(\frac{\omega_{1,i}}{2}) + \\ & + \frac{\omega_{1,i}^2}{4\mu_i^2(\tau)} \frac{sen^2\mu_i(\tau)(s^*(\tau) - \frac{1}{2})}{cos^2(\frac{\omega_{1,i}}{2})} + \frac{(s^*(\tau) - \frac{1}{2})}{2k_1^*} - \end{aligned}$$

$$-\frac{\sec 2\mu_i(\tau)(s^*(\tau) - \frac{1}{2})}{4\mu_i(\tau)k_1^*} \quad (5.79)$$

As condições iniciais para o sistema transformado de Equações diferenciais ordinárias (5.50) é dado por

$$\theta_i(0) = \sum_{k=1}^2 \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} w_k^* \psi_{k,i}(\eta, \tau) \theta_{k,0}(\eta) d\eta \quad (5.80)$$

onde $\theta_{k,0}(\eta)$ é o perfil de temperatura resultante do problema de pré-ablação resolvido no Capítulo 4.

Para a solução do sistema de EDO's é necessário calcular as derivadas temporais das normas e os coeficientes $A_{ij}(\tau)$ dados pela Equação (5.47). Essas funções podem ser avaliadas numericamente ou analiticamente dependendo do grau de complexidade encontrado. Neste trabalho foi utilizado o *software* DERIVE (53) para o cálculo analítico dessas funções segundo o procedimento mostrado a seguir.

Utilizando a regra da cadeia para o cálculo da derivada da norma chega-se a

$$\frac{\partial N_i(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial N_i(\tau)}{\partial s^*(\tau)} \cdot \frac{ds^*(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial N_i(\tau)}{\partial \mu_i(\tau)} \cdot \frac{d\mu_i(\tau)}{d\tau} \quad (5.81)$$

e para o cálculo de $A_{ij}(\tau)$, tem-se

$$\begin{aligned} A_{ij}(\tau) = & w_1^* \int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{1,i}(\eta, \tau) \frac{\partial \psi_{1,j}(\eta, \tau)}{\partial s^*(\tau)} d\eta \frac{ds^*(\tau)}{d\tau} + \\ & + \int_{\frac{1}{2}}^{s^*(\tau)} \psi_{2,i}(\eta, \tau) \frac{\partial \psi_{2,j}(\eta, \tau)}{\partial s^*(\tau)} d\eta \frac{ds^*(\tau)}{d\tau} + \\ & + w_1^* \int_0^{\frac{1}{2}} \psi_{1,i}(\eta, \tau) \frac{\partial \psi_{1,j}(\eta, \tau)}{\partial \mu_j(\tau)} d\eta \frac{d\mu_j(\tau)}{d\tau} + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{s^*(\tau)} \psi_{2,i}(\eta, \tau) \frac{\partial \psi_{2,j}(\eta, \tau)}{\partial \mu_j(\tau)} d\eta \frac{d\mu_j(\tau)}{d\tau} \quad (5.82)$$

Como as normas e as autofunções são funções explícitas de $s^*(\tau)$ e $\mu_j(\tau)$, a Equação (5.81) pode ser avaliada diretamente pelo *software* DERIVE. $A_{ij}(\tau)$ será uma função das derivadas temporais de $s^*(\tau)$ e $\mu_j(\tau)$.

Para calcular $\frac{d\mu_i(\tau)}{d\tau}$ deriva-se a autocondição do problema de autovalores, Equação (5.73), que resulta em

$$\frac{d\mu_i(\tau)}{d\tau} = - \frac{\mu_i(\tau) \text{sen} \omega_{1,i}}{\left[\frac{\omega_{1,i}}{2\mu_i(\tau)} \text{sen} 2\mu_i(\tau) \left(s^*(\tau) - \frac{1}{2} \right) + \left(s^*(\tau) - \frac{1}{2} \right) \text{sen} \omega_{1,i} \right]} \frac{ds^*(\tau)}{d\tau} \quad (5.83)$$

e para o cálculo da velocidade da fronteira móvel, utilizando-se a Equação (5.49) chega-se a

$$\frac{ds^*(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\nu} \left[-Q + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i(\tau) \bar{\theta}_i(\tau)}{N_i(\tau)} \right] \quad (5.84)$$

Conhecendo as derivadas em relação ao tempo de $\bar{\theta}_i(0)$, $\mu_i(\tau)$ e $s^*(\tau)$, dadas pelas Equações (5.50), (5.83) e (5.84), pode-se criar um sistema de equações diferenciais ordinárias com as condições iniciais conhecidas. Há duas alternativas para tratar o problema. A primeira é a solução de um sistema acoplado de EDOs de dimensão $N + 1 \times N + 1$ cujas variáveis são $\bar{\theta}_i(0)$ e $s^*(\tau)$. Os autovalores seriam, nesse caso, avaliados em cada instante de tempo pela solução da Equação transcendental (5.73).

A segunda alternativa, que será utilizada neste exemplo, baseia-se na solução de um sistema acoplado de EDOs com $2N + 1$ equações. Nesse caso, depois de calcular os autovalores em $\tau = 0$, não é mais necessário resolver a equação transcendental para cada instante de tempo. Os N autovalores, os N potenciais transformados, Equações (5.51), e a posição da fronteira móvel em $\tau = 0$ servirão de condição inicial para o sistema acoplado de EDOs.

5.7 - RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram feitas simulações considerando-se diferentes ordens de truncamento para desenvolvimentos em série, com $N \leq 40$. Os autovalores, que dependem do tempo, foram determinados simultaneamente com os potenciais transformados, na forma de equações diferenciais ordinárias, partindo da condição $\mu_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, N$. O problema de valor inicial foi resolvido através da subrotina DIVPAG da biblioteca IMSL (51), com uma tolerância especificada de 10^{-5} . Na Figura 5.2 é mostrado a convergência do fluxo de calor rejeitado pela superfície, isto é, a taxa de energia consumida pela ablação da camada de Teflon ($= \rho_2 \delta^* H_2$). Pode-se observar que há convergência nos resultados à medida que se aumenta o número de termos da série. Pode-se observar também uma região entre 2 s e 4 s onde pode-se considerar que o regime permanente tenha sido atingido. O valor do fluxo de calor rejeitado por uma placa plana semi-infinita em regime permanente (q''_{RP}) corresponde a $2.201,7 \text{ kW/m}^2$. O valor encontrado em $t = 3,5 \text{ s}$ foi de $2.213,3 \text{ kW/m}^2$ para um desenvolvimento em série de 40 termos.

Na Figura 5.3 são mostradas as distribuições de temperatura na placa para os tempos de 0,2 s, 3 s e 5 s. Nota-se em $t = 0,2 \text{ s}$ que as respostas apresentam oscilações que diminuem à medida que se aumenta o número de termos das séries. Em $t = 3 \text{ s}$ a série de 5 termos ainda apresenta algumas oscilações no perfil de temperatura. Pode-se notar também a diferença apresentada para a posição da fronteira móvel. Em $t = 5 \text{ s}$ embora não ocorra mais oscilações pode-se observar pequenas diferenças para a posição da fronteira móvel e uma diferença acentuada nas distribuições de temperaturas que podem levar a um super-dimensionamento em um projeto uma vez que as temperaturas máximas admissíveis na estrutura e na cola, se for usada, não podem ser atingidas.

Na Figura 5.4 são apresentadas distribuições de temperaturas para alguns instantes de tempo para um desenvolvimento em série de 40 termos. Pode-se observar que até aproximadamente 4 s, a camada de Teflon não sente a presença da camada de alumínio no processo de transferência de calor. A análise feita em (43), que considera a ablação em apenas uma camada, seria suficiente para resolver o problema até este instante.

Na Figura 5.5 é feita uma comparação de resultados com os obtidos no capítulo anterior utilizando-se elementos finitos e com os obtidos em (29) por diferenças finitas. Observando-se o gráfico, pode-se comprovar que a divergência de

resultados apresentada no Capítulo 4 entre o método de elementos finitos (MEF) e o método de diferenças finitas (MDF) (29), deve-se à influência da presença da camada de alumínio no processo de transferência de calor. Nota-se na figura que a solução pela TTIG ($N = 40$) acompanha a solução de elementos finitos, mostrando que, apesar das três soluções manterem-se praticamente juntas durante uma boa parte do tempo, no último segundo de simulação a solução pelo MDF diverge das outras duas. Isto pode ser explicado pelo esquema utilizado em (29) que faz com que a malha computacional acompanhe o movimento da fronteira móvel através da eliminação sucessiva dos últimos nós da camada de Teflon. A eliminação do nó na interface entre as duas camadas leva a um erro na solução quando os gradientes de temperatura atingem a camada de alumínio.

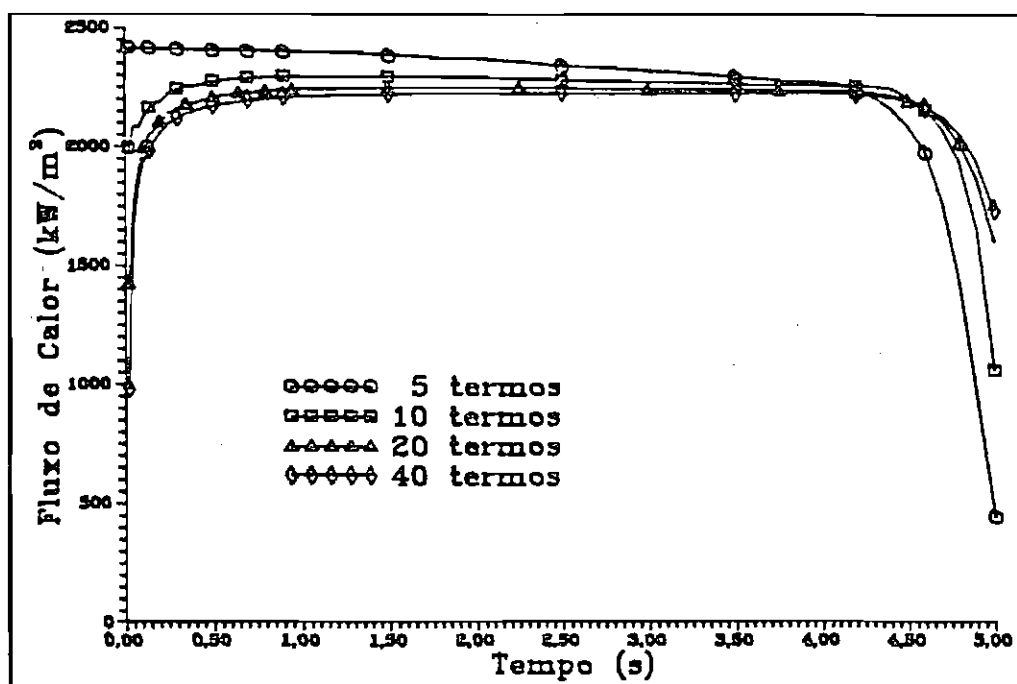


Fig. 5.2 - Fluxo de calor rejeitado por mudança de fase na superfície.

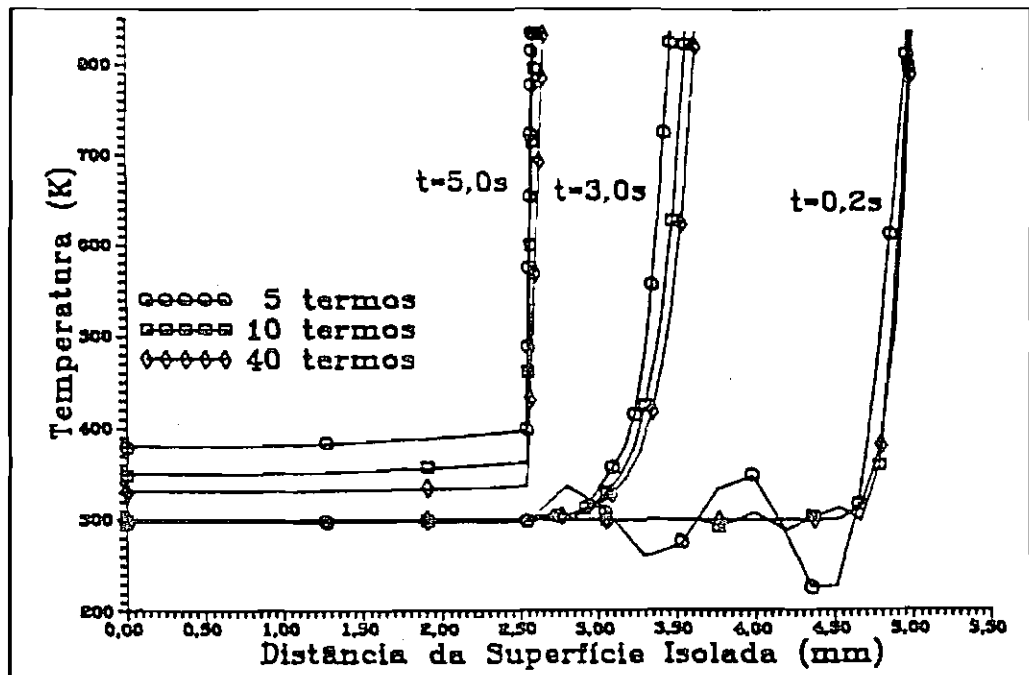


Fig. 5.3 - Comparação dos perfis de temperatura para séries com diferentes números de termos em $t = 0,2s$, $t = 3,0s$ e $t = 5,0s$.

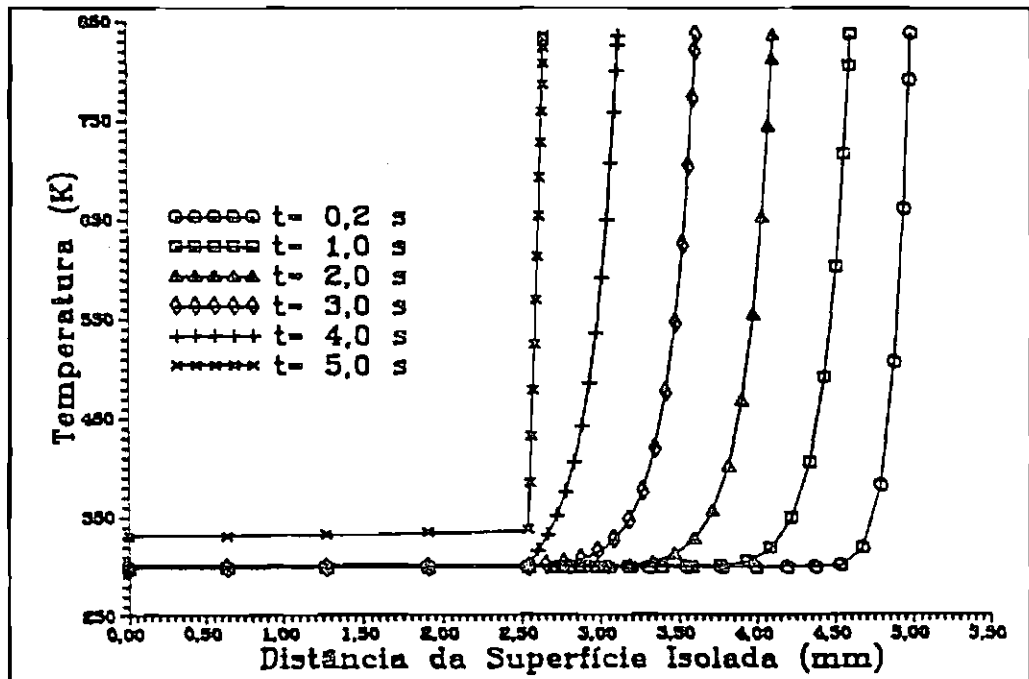


Fig. 5.4 - Distribuição de temperaturas para um desenvolvimento em série de 40 termos.

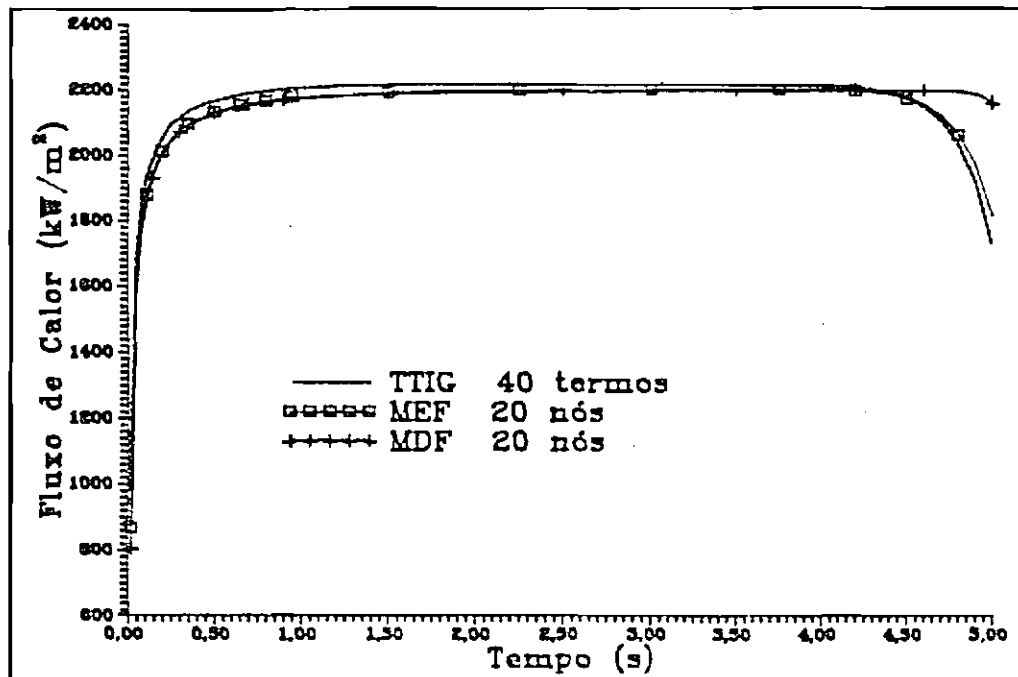


Fig. 5.5 - Comparação de resultados para o fluxo de calor rejeitado entre 3 métodos: TTIG, MDF e MEF.

5.8 - CONCLUSÃO

Neste capítulo foi feito um desenvolvimento com o objetivo de aplicar a técnica da transformada integral generalizada à solução de problemas de ablação em múltiplas camadas. Através do uso da TTIG foi possível chegar a resultados que estão em boa concordância com os obtidos pelo uso de elementos finitos na primeira simulação computacional feita no Capítulo 4. A técnica mostrou-se capaz de analisar o desempenho de materiais ablativos de baixa difusividade térmica como aqueles que costumam ser empregados na indústria aeroespacial.

Embora o problema resolvido tenha o fluxo de calor incidente constante, considerando-se o sucesso obtido com o uso da TTIG para a solução de problemas de ablação com fluxo de calor variável (43), pode-se esperar que bons resultados sejam obtidos na análise de problemas reais de reentrada.

Uma grande motivação que existe no uso da TTIG para problemas deste tipo, é a possibilidade de desenvolver-se soluções adaptativas como o que foi recentemente feito em (52). A solução adaptativa é obtida através do truncamento

da série, o que é feito depois de uma análise da influência dos termos que serão negligenciados sobre a solução com todos os termos.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO

Os resultados obtidos com o uso do código de elementos finitos mostraram-se em boa concordância com os resultados encontrados na literatura. O código desenvolvido, que usa uma malha computacional que se adapta ao domínio variável, mostrou ser adequado para tratar problemas encontrados em aplicações aeroespaciais, onde a proteção térmica é composta por mais de uma camada e onde o fluxo de calor varia com o tempo.

O primeiro problema a ser resolvido foi o problema de ablação com fluxo de calor constante numa placa composta por duas camadas. Foram utilizados nas duas camadas, materiais que são comumente empregados na indústria aeroespacial, como é o caso do Teflon e do alumínio. Foram feitos testes de convergência variando-se a discretização espacial e o intervalo de integração no tempo. Uma discretização usando uma malha de 20 nós e $\Delta t = 10^{-4}s$ mostrou ser adequada, apresentando uma diferença relativa a uma solução que usa uma malha de 100 nós, abaixo de 0,1% durante quase toda a simulação. Os resultados obtidos para o fluxo de calor rejeitado na superfície apresentaram uma divergência no final da simulação computacional em relação aos resultados obtidos na literatura pelo uso de diferenças finitas.

O segundo problema que foi resolvido tem como objetivo prever o desempenho do código computacional na solução de problemas reais de reentrada, onde o fluxo de calor varia com o tempo. Foi empregada a mesma discretização que se mostrou adequada no primeiro problema, gerando resultados que estão em boa concordância com os apresentados na literatura para o fluxo de calor rejeitado pelo processo de ablação na superfície.

A técnica da transformada integral generalizada (TTIG) foi utilizada no Capítulo 5 para a análise de problemas de ablação em meios de múltiplas camadas, estendendo o que foi recentemente conseguido pelo uso da técnica na solução de problemas de ablação em uma única região. O primeiro problema do Capítulo 4 foi resolvido pela TTIG para diferentes ordens de truncamento dos desenvolvimentos em série. Os resultados obtidos pela TTIG validaram os obtidos por elementos finitos mostrando que a divergência ocorre devido a erros na solução por diferenças finitas. Os erros devem-se ao esquema empregado na solução por

diferenças finitas que adapta a malha computacional ao domínio móvel através da eliminação do último nó da primeira camada, que leva a erros quando os gradientes de temperatura na primeira camada atingem a segunda camada, mostrando que este esquema não é apropriado para tratar problemas de ablação em meios de múltiplas camadas.

Embora o uso da técnica SU/PG não tenha resultado numa melhoria significativa da solução devido à pouca influência dos termos convectivos da equação de transferência de calor na primeira camada, para a solução de problemas de ablação em materiais carbonizáveis, o uso da formulação SU/PG poderá ser muito importante devido à maior influência dos termos convectivos. A solução de problemas que envolvem carbonização, assim como problemas que envolvem oxidação, pode vir a ser uma extensão do presente trabalho para abranger uma maior classe de materiais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) Seiferth, R.W. Ablative heat shield design for space shuttle. Washington, DC, NASA, Oct. 1975. (NASA CR-2579).
- (2) Minges, M.L. Ablation phenomenology: a review. High Temperature-High Pressures, 1(6):232-238, 1969.
- (3) Baer, E., ed. Engineering design for plastics. New York, Reinhold Publishing, 1964. p. 815-868.
- (4) Swann, R.T.; Pittman, C.M.; Smith, J.C. One-dimensional numerical analysis of the transient response of thermal protection system. Washington, DC, NASA, Sept. 1965. (NASA TN D-2976).
- (5) Moyer, C.B.; Rindal, R.A. Finite difference solution for the in-depth response of charring materials considering surface chemical and energy balances: final report. California, Aerotherm Corporation, 1967. Part 2, (N.66-7).
- (6) Woodruff, L.W.; Lorenz, G.C. Hypersonic turbulent transpiration cooling including downstream effects. AIAA Journal, 4(6):969-975, June 1966.
- (7) Stevenson, T.N. Turbulent boundary layer with transpiration. AIAA Journal, 2(8):1500-1502, Aug. 1964.
- (8) Schneider, P.J.; Dolton, T.A.; Reed, G.W. Mechanical erosion of charring ablators in ground test and re-entry environments. AIAA Journal, 6(1): 64-72, Jan. 1968.
- (9) Taylor, A.O. A transient reaction kinetics analysis on ablation through aerodynamic heating. Massachusetts, General Dynamics, Dec. 1966. (GDC-ERR-AN-1029).
- (10) Gnoffo, P.A.; Gupta, R.N.; Shinn, J.L. Conservation equations and physical models for hypersonic air flows in thermal and chemical nonequilibrium. Washington, DC, NASA, Feb. 1989. (NASA TP-2867).

- (11) Rohsenow, W.M.; Hartnett, J.P. ed. Handbook of heat transfer. New York, Mc Graw-Hill, 1973.
- (12) Roberts, L. Mass transfer cooling near the stagnation point. Washington, DC, NASA, 1959. (NASA TR R-8).
- (13) Roberts, L. A theoretical study of stagnation-point ablation. Washington, DC, NASA, 1959. (NASA TR R-9).
- (14) Swann, R.T.; South, J. A theoretical analysis of effects of ablation on heat transfer to an arbitrary axisymmetric body. Washington, DC, NASA, 1961. (NASA TN D-741).
- (15) Swann, R.T. Effect of thermal radiation from a hot gas layer on heat of ablation. Journal of Aerospace Science, 20(7):582-583, July 1961.
- (16) Hurwicz, H.; Fleddermann, R.G. Computer simulation of transient ablation and heat conduction phenomena at a vaporizing surface. New York, ARS Space Flight, Oct. 1961. (Paper No. 2209-61).
- (17) Sutton, G.W. The initial development of ablation heat protection: an historical perspective. Journal of Spacecraft, 19(1):3-11, Jan. 1961.
- (18) Tompkins, S.S.; Moss J.N.; Pittman, C.M.; Howser, L.M. Numerical analysis of the transient response of ablating axisymmetric bodies including the effects of shape change. Washington, DC, NASA, May 1971. (NASA TN D-6220).
- (19) NACA. Equations, tables, and charts for compressible flow. Washington, DC, 1953. (NACA Rept. 1135).
- (20) Feldman, S. Hypersonic gas dynamic charts for equilibrium air. Massachusetts, Avco, Jan. 1957. (AVCO RR 40).
- (21) Eckert, E.R.G. Engineering relations for friction and heat transfer to surfaces in high velocity flow. Journal of Aeronautical Science, 22:585-588, 1955.

- (22) Weatherford, R.H.; Sayano, S. Techniques for rapid aerodynamic heat transfer calculation. California, Douglas Aircraft, May 1965. (Douglas Rept. SM-45932).
- (23) Thomas, A.C.; Perlbachs, A.; Nagel, A.L. Advanced re-entry systems heat transfer manual for hypersonic flight. Massachusetts, Air Force, Oct. 1966. (AFFDL-TR-65-195).
- (24) Guard, F.L.; Schultz, H.D.; Forsythe, C.G.; Popinski, Z. Compilation of structural inflight heating data applicable to large launch vehicles: theoretical analysis. California, Lockheed Missiles, Feb. 1964. (LR-17562).
- (25) Moyer, C.B.; Anderson, L.W.; Dahm, T.J. A coupled computer code for the transient thermal response and ablation of non-charring heat shields and nose tips. Washington, DC, NASA, 1970. (NASA CR-1630).
- (26) Hurwicz, H.; Fifer, S.; Kelly, M. Multidimensional ablation and heat flow during re-entry. Journal of Spacecraft, 1(3):235-242, 1964.
- (27) Hogge, M.; Gerrekens, P. One-dimensional finite element analysis of thermal ablation with pyrolysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 33(4):609-634, 1982.
- (28) Hogge, M.; Gerrekens, P. Two-dimensional deforming finite element methods for surface ablation. AIAA Journal, 23(3):465-472, Mar. 1985.
- (29) Blackwell, B.F. Numerical prediction of one-dimensional ablation using a finite control volume procedure with exponential differencing. Numerical Heat Transfer, 14:17-34, 1988.
- (30) Brooks, N.A.; Hughes, T.J.R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 32(2):199-259, 1982.

- (31) Christie, I.; Griffiths, D.F.; Mitchell, A.R.; Zienkiewicz O.C. Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10(8):1389-1396, 1976.
- (32) Heinrich, J.C.; Huyakorn, P.S.; Zienkiewicz, O.C.; Mitchell, A.R. An upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11(1): 131-143, 1977.
- (33) Mizukami, A.; Hughes, T.J.R. A Petrov-Galerkin finite element formulation for convection-dominated flows: an accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 50(2):181-193, 1985.
- (34) Yu, C.C.; Heinrich, J.C. Petrov-Galerkin methods for the time-dependent convective transport equation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23(5):883-901, 1986.
- (35) Hughes, T.J.R.; Franca, L.P.; Mallet, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VI. Convergence analysis of the generalized SUPG formulation for linear time-dependent multidimensional advective-diffusive systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 63(1):97-112, 1987.
- (36) Carmo, E.G.; Galeão, A.C. Uma formulação consistente do método dos elementos finitos para resolução de problemas de transporte difusivo-convectivo. Rio de Janeiro, Laboratório Nacional de Computação Científica, 1986. (LNCC ISSN 0101 6113).
- (37) Brooks, A.; Hughes, T.J.R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin methods for advection dominated flows. In: International Conference on Finite Element Methods in Fluid Flow, 3., Banff, Canada, 1980. Proceedings. Swansea, Pineridge Press, 1980. p. 353-367.

- (38) Hughes, T.J.R.; Brooks, A. A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline upwind procedure. In: Gallagher, R.H. ed. Finite elements in fluids. London, John Wiley & Sons, 1982. p.47-65.
- (39) Mikhailov, M.D.; Ozisik, M.N. One-Dimensional Problems. In: Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion. New York, John Wiley & Sons, 1984. cap. 4, p. 146-149.
- (40) Becker, E.B.; Carey, G.F.; Oden, J.T. One-Dimensional Problems. In: Finite elements: an introduction. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1982. v.1, cap. 2, p. 64-71.
- (41) Becker, E.B.; Carey, G.F.; Oden, J.T. Development of a Finite Element Program. In: Finite elements: an introduction. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1982. v.1, cap. 3, p. 87-130.
- (42) Chung, B.T.F.; Hsiao, J.S. Heat transfer with ablation in a finite slab subjected to time-variant heat fluxes. AIAA Journal, 23(1):145-150, Jan. 1985.
- (43) Diniz, A.J.; Aparecido, J.B.; Cotta, R.M. Heat conduction with ablation in a finite slab. Heat & Technology, 8(3-4):30-43.
- (44) Mikhailov, M. D.; Ozisik, M. N. Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion. New York, John Wiley & Sons, 1984.
- (45) Ozisik, M.N.; Murray, R.L. On the solution of linear diffusion problems with variable boundary condition parameters. Journal of Heat Transfer, 96:48-51, 1974.
- (46) Ozisik, M.N.; Güçeri, S.I. A variable eigenvalue approach to the solution of phase-change problems. Canadian Journal of Chemical Engineering, 55(2):145-148, Apr. 1977.
- (47) Leite, S.Q.B.; Ozisik, M.N.; Verghese, K. On the solution of linear diffusion problems in media with moving boundaries. Nuclear Science & Engineering, 76(3):345-350, Dec. 1980.

- (48) Cotta, R.M. Diffusion in media with prescribed moving boundaries: application to metals oxidation at high temperatures. In: Latin American Congress of Heat & Mass Transfer, 2., São Paulo, Brasil, 1986. Proceedings. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1986. v.1, p. 502-513.
- (49) Mikhailov, M. D.; Ozisik, M. N. Class II solutions applied to heat diffusion in one-dimensional composite media. In: Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion. New York, John Wiley & Sons, 1984. cap. 9, p. 378-398.
- (50) Mikhailov, M. D.; Ozisik, M. N.; Vulchanov, N. L. Transient heat diffusion in one-dimensional composite media and automatic solution of the eigenvalue problem. International Journal of Heat and Mass Transfer, 26(8): 1131-1141, Aug. 1983.
- (51) IMSL Library, MATH/LIB. Houston, Texas, IMSL, 1987. Version 1.0.
- (52) Cotta, R.M.; Serfaty, R. Integral transform algorithm for parabolic diffusion problems with nonlinear boundary and equation source terms. In: International Conference on Numerical Methods for Thermal Problems, 7., Stanford, California, July 1991. Proceedings. Swansea, Pineridge Press, 1991. v.7, part 2, p. 916-926.
- (53) Derive, a mathematical assistant, Honolulu, Hawaii, Soft Warehouse, 1988. Version 1.07.