



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-5473-TDI/504

PROJETO DE UM SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE (TRÊS EIXOS)
DE SATÉLITES UTILIZANDO A METODOLOGIA LQG/LTR

NEY RICARDO MOSCATI

Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica
Orbital, orientada pelo Dr. José Jaime da Cruz e pelo Dr.
Antonio Félix Martins Neto, aprovada em fevereiro de 1992

INPE

São José dos Campos

Fevereiro de 1992

Publicado por:

Divisão de Ensino e Documentação - DED

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Caixa Postal 515

12227-010 - São José dos Campos - SP - Brasil

Telex: 123.3530 INPE BR

Fone: (0123) 41.8977 - Ramal 324

Fax: 0123-21-8743

- Solicita-se intercâmbio
- We ask for exchange
- Si sollecita intercambio
- On demande l'échange
- Mann bittet un Austausch
- Pidese canje
- Просим обмена
- 歡迎著作交換
- 出版物交換のお願い

Publicação Externa - É permitida sua reprodução para interessados.

SECRETARIA DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-5473-TDI/504

PROJETO DE UM SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE (TRÊS EIXOS)
DE SATÉLITES UTILIZANDO A METODOLOGIA LQG/LTR

NEY RICARDO MOSCATI

Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica
Orbital, orientada pelo Dr. José Jaime da Cruz e pelo Dr.
Antonio Félix Martins Neto, aprovada em fevereiro de 1992

INPE
São José dos Campos
Fevereiro de 1992

629.7.062.2

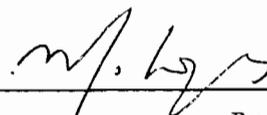
MOSCATI, N.R.

Projeto de um sistema de controle de atitude (três eixos) de satélites utilizando a metodologia LQG/LTR. / N. R. Moscati. -- São José dos Campos: INPE, 1992. 235p. -- (INPE-5473-TDI/504)

1. Controle de atitude. 2. Controle robusto. 3. Estabilização. I. Título.

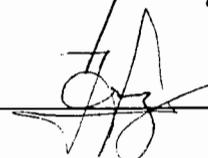
Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Ciência Espacial

Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza



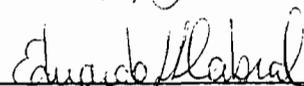
Presidente

Dr. José Jaime da Cruz



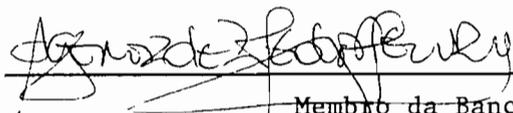
Orientador

Dr. Eduardo Lobo Lustosa Cabral



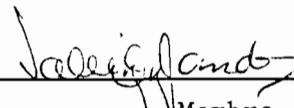
Membro da Banca
- Convidado -

Dr. Agenor de Toledo Fleury



Membro da Banca
- Convidado -

Dr. Valcir Orlando



Membro da Banca
- Convidado -

Candidato: Ney Ricardo Moscati

São José dos Campos, 27 de fevereiro de 1992

À minha querida Marley que esteve comigo em todos os momentos, e tornou possível a realização desse trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. José Jaime da Cruz pela orientação e pelo exemplo de conciliar, de maneira singular, competência e humildade.

Ao Dr. Antonio Félix Martins Neto pela orientação.

Ao Dr. Agenor de Toledo Fleury pelo incentivo e por acreditar, como poucos, no futuro da ciência e tecnologia no Brasil.

Aos amigos da República de Santana, Rogério, Carlos e Oton, pela "força" no primeiro ano em São José dos Campos.

Aos amigos da "Mansão Azul", Francisco (Guga), Helder, Marco Antonio, Ronald, e respectivas namoradas, Marilne, Fabiana, Vera e Silvana, pelo carinho, amizade, companheirismo e incentivo.

Aos amigos de turma, Rogério, Luciana, Nerbe, Suely, Carlos, Otávio, Marco Antonio e Rubens, pela união, amizade e camaradagem.

Aos amigos da Rotunda pela amizade e incentivo.

Ao pessoal da DMC, Ijar, Valdemir, Ribeiro, Gilberto, Ulisses, Mário Ricci e Maria Helena e ao pessoal da biblioteca, Cida, José, Serginho e Marciana pela predisposição em ajudar nas diversas fases dessa pesquisa.

À todos os professores dos cursos da pós-graduação que, ensinando, colaboraram com o trabalho.

Ao pessoal da segurança, Dimas, Manoel e Luiz que sempre colaboraram.

À banca examinadora pelas discussões e sugestões.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pela concessão de Bolsa de Estudos.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) pelos recursos fornecidos.

Aos meus pais Giorgio e Iva que sempre me ofereceram as melhores oportunidades e com quem sempre pude contar em tudo, inclusive no financiamento parcial dessa pesquisa.

À minha tia, Dra. Tuba, pelo incentivo e exemplo de profissionalismo.

Aos irmãos, Sandra e José e à Nona Miranda e vovó Miriam, pelo carinho, amizade e incentivo.

E à todos que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho.

RESUMO

Em satélites para observação da Terra, é necessário um Sistema de Controle de Atitude (S.C.A.) na estabilização, pois mesmo que o veículo seja precisamente orientado no lançamento (com rotação correta), este tende a se desviar desta orientação devido a influência de torques ambientais, mudanças internas e acoplamentos da dinâmica de atitude com a dinâmica orbital e flexível do satélite. A configuração do S.C.A. adotado (um volante de inércia e duas rodas de reação) apresenta forte acoplamento entre "roll" e "yaw", tratando-se, portanto, de um sistema multivariável, enquanto o eixo de "pitch" é praticamente desacoplado. O modelo linear da dinâmica de atitude deste satélite apresenta incertezas devido às dinâmicas não modeladas dos painéis flexíveis e à variação do acoplamento giroscópico, provocado pela mudança na velocidade do volante de inércia. Utilizou-se para o projeto do S.C.A. operando no modo normal, a metodologia LQG/LTR ("Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery"). Esta metodologia é inerentemente uma metodologia de projeto para sistemas do tipo "MIMO", onde a estrutura do compensador é conhecida por "MBC", a mesma de compensadores LQG. Ela reúne abordagens tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, e apresenta a grande vantagem de tratar a robustez a nível de projeto. As especificações do projeto no domínio da frequência, usuais para sistemas do tipo "SISO", como margens de fase e de ganho, banda passante, características de rejeição a perturbações e insensibilidade a variação nos parâmetros, são estendidas para o caso "MIMO" através do conceito de valores singulares. A metodologia LQG/LTR basicamente permite a recuperação das excelentes características quanto a robustez de sistemas LQR quando o estado não é completamente medido. Entretanto as especificações no domínio do tempo são de difícil tratamento. Devido a facilidade de utilização da metodologia e aos resultados obtidos nas simulações terem sido bastante satisfatórios, concluiu-se que a metodologia LQG/LTR é uma opção bastante atraente para o projeto de S.C.A.'s quando o modelo de projeto é do tipo "MIMO".

PROJECT OF AN ATTITUDE CONTROL SYSTEM (THREE AXIS)
OF A SATELLITE USING THE LQG/LTR METHODOLOGY

ABSTRACT

In Earth remote sensing satellites, an Attitude Control System (A.C.S.) is necessary for stabilisation, due to the fact that even the vehicle is precisely oriented in launch, it deviate from this orientation due the influence of ambiantal torques, internal changes and coupling between attitude dynamics and satellite's orbital and flexible dynamics. The configuration adopted for the A.C.S. (a momentum wheel and two reaction wheels) exhibit a strong coupling between roll and yaw, hence it is a multivariable system, while the pitch axis is practically decoupled. The linear model for the attitude dynamics of this satellite exhibit uncertanties due to non modeled dynamics of the flexible panels and giroscopic coupling variations, caused by momentum wheel velocity changes. The LQG/LTR methodology is used to project the A.C.S. operating on the normal mode. This methodology is inherently a multivariable tool, where the compensator's structure is known as MBC, the same structure as LQG compensators. It is based on both, time and frequency domain approaches, and has the great advantage of treating the robustness at project level. The frequency project specifications, usually used for SISO systems such as gain and phase margins, bandwidth, disturbance rejection characteristics and insensitivity to parameter variations are extended to the MIMO case through the singular value concept. The LQG/LTR methodology provides, basically, the recover of the excelent robustness characteristics of systems with LQR regulators when the state is completely measured. On the other hand, specifications on the time domain are difficult to deal with. In view of the easy usage of the methodology and good simulations results obtained, it has been concluded that the LQG/LTR methodology is an attractive option to project A.C.S. when the model is a MIMO type.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	xv
LISTA DE TABELAS	xix
LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS	xxi
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
1.1 - Considerações Gerais	1
1.2 - Objetivos	8
1.3 - Estrutura do Trabalho	9
<u>CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA</u>	11
<u>CAPÍTULO 3 - MODELAGEM DO SISTEMA</u>	23
3.1 - Modelagem dos Torques Externos	23
3.1.1 - Torques Gravitacionais	24
3.1.2 - Arrasto Atmosférico	26
3.1.3 - Torque Magnético	28
3.1.4 - Torque de Radiação	30
3.2 - Modelagem da Dinâmica de Atitude do Satélite ...	32
3.3 - Redução	58
3.4 - Modelagem das Incertezas da Planta	63
<u>CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA DE PROJETO.</u>	73
4.1 - Malha Objetivo	97
4.2 - Recuperação	107
<u>CAPÍTULO 5 - PROJETO DO S.C.A.</u>	113
<u>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES</u>	161

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	167
APÊNDICE A - DADOS DE ENTRADA DO PROGRAMA DE SIMULAÇÃO DOS TORQUES AERODINÂMICOS E DE RADIAÇÃO .	175
APÊNDICE B - ENERGIA CINÉTICA	177
APÊNDICE C - NORMALIZAÇÃO	187
APÊNDICE D - VALORES SINGULARES, DECOMPOSIÇÃO EM VA- LORES SINGULARES E RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE SISTEMAS MIMO	191
APÊNDICE E - PÓLOS E ZEROS DE SISTEMAS LINEARES MULTI- VARIÁVEIS	199
APÊNDICE F - CRITÉRIO DE NYQUIST MULTIVARIÁVEL	201
APÊNDICE G - TEOREMA DA ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE	205
APÊNDICE H - DEMONSTRAÇÃO DA RECUPERAÇÃO	209
APÊNDICE I - PROPRIEDADE DA SOLUÇÃO DO "CHEAP LQR" ...	213
APÊNDICE J - COINCIDÊNCIA DE VALORES SINGULARES EM TO- DAS AS FREQUÊNCIAS	217

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 - Satélite de Sensoriamento Remoto	4
1.2 - a) S.C.A. ativo; b) S.C.A. passivo	6
3.1 - Torque aerodinâmico	28
3.2 - Torque de radiação	32
3.3 - O satélite composto de plataforma, painéis solares e rotores	33
3.4 - a) Sistema de referência no satélite; b) sistema orbital	36
3.5 - Rotações para se passar do sistema orbital para o sistema do satélite	40
3.6 - Posição dos elementos de massa da plataforma e dos rotores	42
3.7 - Posição dos elementos de massa dos apêndices flexíveis	44
3.8 - a) Sistema real; b) Modelo de projeto	66
3.9 - a) Erro de natureza aditiva; b) Erro de natureza subtrativa	67
3.10 - Erro multiplicativo na entrada; b) Erro multiplicativo na saída; c) Erro divisivo na entrada; d) Erro divisivo na saída	68
4.1 - Sistema de controle MIMO	74
4.2 - Configuração para margens de fase e ganho de sistemas MIMO	81
4.3 - Sistema MIMO padrão	84
4.4 - Restrições nos valores singulares máximo e mínimo de $G(j\omega)K(j\omega)$	92
4.5 - Compensador utilizado: a) domínio do tempo; b) domínio da frequência	93
4.6 - Estrutura da Malha Objetivo	97
4.7 - Modelo de projeto com adição de integradores: a) na planta; b) incorporado no compensador	104

5.1 - Valores Singulares de $G(j\omega)$	117
5.2 - Valores Singulares de $G_r(j\omega)$	120
5.3 - Valores Singulares de $E_{MS}(j\omega)$	121
5.4 - Valores Singulares de $G_r(j\omega)$ para $D_r = 0$	122
5.5 - Valores Singulares: a) $E_{MS}(j\omega)$ para $D_r = 0$; b) $\text{inv}(E_{MS}(j\omega))$ para $D_r = 0$	124
5.6 - Valores Singulares Máximos e Mínimos de $(\frac{1}{\mu})^{0.5} G_{FOL}$	132
5.7 - Valores Singulares Máximos e Mínimos de $G_{KF}(j\omega)$	133
5.8 - Valores Singulares da Recuperação	135
5.9 - Valores Singulares Máximos de Malha Fechada	136
5.10 - Valores Singulares Máximos da Matriz de Sensi- bilidade $S(j\omega)$	137
5.11 - Valores Singulares Máximos da Matriz de Funções de Transferência da Perturbação para Saída	139
5.12 - Valores Singulares Máximos de $K(j\omega)$	140
5.13 - Diagramas de Bode de Pitch: a) $G(j\omega)$; b) $G_{FOL}(j\omega)$; c) $G_{KF}(j\omega)$; d) Recuperação	142
5.14 - Diagramas de Bode de Pitch: a) Malha Fechada; b) Sensibilidade; c) Perturbação-Saída; d) $K(j\omega)$	144
5.15 - Malha Objetivo	145
5.16 - Modelo Nominal de Projeto	146
5.17 - Modelo Completo de Simulação	147
5.18 - Simulação com M.O. e o Modelo de Projeto, para $\varphi_0 = 1^\circ$: a) M.O.; b) Comportamento da malha re- cuperada para roll; c) Comportamento da malha recuperada para yaw	149
5.19 - Simulação com M.O. e o Modelo de Projeto, para $\psi_0 = 0.0174$ rad: a) M.O.; b) Comportamento da malha recuperada para roll; c) Comportamento da malha recuperada para yaw	150

5.20 - Resultados da simulação do Modelo Completo de Simulação: a) Ângulo de roll; b) Ângulo de yaw; c) Velocidade de roll; d) Velocidade de yaw; e) Torque da roda de roll; f) Torque da roda de yaw	151
5.21 - Resultados da simulação do Modelo Completo de Simulação com o compensador final: a) Ângulos de roll e de yaw; b) Velocidades de roll e de yaw; c) Torque das rodas de roll e de yaw	153
5.22 - Resultados da simulação do Modelo Completo de Simulação para Torque Aerodinâmico: a) Ângulos de roll e de yaw; b) Velocidades de roll e de yaw; c) Torque de controle de roll e de yaw ..	155
5.23 - Resultados da simulação do Modelo Completo de Simulação para Torque de Radiação Solar: a) Ângulos de roll e de yaw; b) Velocidades de roll e de yaw; c) Torque de controle de roll e de yaw	156
5.24 - Simulações de Pitch: a) Ângulo; b) Velocidade; c) Torque de Controle	158
5.25 - Simulações de Pitch: a) Torque Externo Total; b) Posição; c) Velocidade; d) Torque de Controle	159
B.1 - Sistemas de Referência no Satélite	178
D.1 - Valores Singulares no caso de duas entradas e duas saídas	196
F.1 - Contorno de Nyquist DR	203

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Características de satélites com configurações que apresentam roda de momento	15
5.1 - Valores numéricos utilizados	114
5.2 - Pólos e zeros de transmissão de malha aberta ...	116
5.3 - Pólos e normas dos resíduos normalizados	118
5.4 - Pólos e zeros do modelo reduzido	119
5.5 - Zeros de transmissão do modelo reduzido para $D_r = 0$	122
5.6 - Zeros de transmissão de G_{FOL}	131
5.7 - Valores dos parâmetros ρ estudados	134
5.8 - Margens de fase e de ganho mínimas	138
5.9 - Margens de fase e de ganho mínimas	145

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

a	- número de modos de vibração de viga engastada-livre considerados
A, B, C, D	- Matrizes da descrição de estados
A_a, B_a, C_a, D_a	- Matrizes de descrição de estados do sistema aumentado
A_t	- Matriz de atitude
A_c	- Área característica
APOG.	- Apogeu
A_r, B_r, C_r, D_r	- Matrizes da descrição de estados do sistema reduzido
\bar{B}	- Indução geomagnética local
b	- número de modos de vibração de viga livre-livre considerados
\vec{b}_1	- Posição do ponto médio da base de fixação do painel em relação ao C.M. do satélite
C_D	- Coeficiente de arrasto
CL	- "Characteristic Loci"
C.M.	- Centro de Massa do corpo
$CKF(s)$	- Matriz de transferência de malha fechada da M.O.
$CN(s)$	- Matriz de funções de transferência de malha fechada do sistema nominal
c_1, c_3	- coeficientes de amortecimento dos painéis 1 e 3 respectivamente
$d_1(t), d_0(t)$	- Perturbação de entrada e de saída, respectivamente
d_m	- Elemento de massa
dPs_1	- Elemento de área
$e(t)$	- Sinal de erro
$E(s)$	- Matriz de funções de transferência do erro entre a planta real e a planta nominal
E_1	- Módulo de elasticidade longitudinal
$E_{DE}(s)$	- Erro divisivo na entrada

$E_{DS}(s)$	- Erro divisivo na saída
$E_{ME}(s)$	- Erro multiplicativo na entrada
$E_{MS}(s)$	- Erro multiplicativo na saída
e_1, e_2, e_3	- Deslocamento elástico nos painéis 1, 2 e 3 respectivamente
FA	- Força de arrasto
FK	- Filtro de Kalman
G	- Matriz giroscópica
G	- Matriz de ganho do controlador
G.G.	- Gradiente de Gravidade
$G_{\Phi L}(s)$	- Matriz de funções de transferência C Φ L
$G_{KF}(s)$	- Matriz de funções de transferência de malha da M.O. quando esta é calculada através do FK
$G_{MO}(s)$	- Matriz de funções de transferência de malha da M.O.
$G_N(s)$	- Matriz de funções de transferência da planta nominal
$G_r(s)$	- Matriz de funções de transferência do modelo reduzido
$G_R(s)$	- Matriz de funções de transferência da planta real
GG_x, GG_y, GG_z	- Componentes do torque G.G. em relação aos eixos principais de inércia do satélite
H	- Matriz de ganho do filtro
h_i	- Espessura do i-ésimo painel
\vec{h}_i	- Posição do C.M. do i-ésimo rotor em relação ao C.M. do satélite
\vec{H}	- Vetor momento angular total do satélite
\vec{H}_R	- Momento angular das rodas em relação ao satélite
H_x, H_z	- Momento angular das rodas de reação
H_y	- Momento angular da roda de momento
\vec{I}	- Tensor de inércia do satélite em relação ao sistema fixo ao satélite

I_x, I_y, I_z	- Momentos principais de inércia do satélite
$I_{xx_{R1}}, I_{yy_{R2}}, I_{zz_{R3}}$	- Momentos de inércia dos rotores em relação ao referencial fixo ao rotor
INA	- "Inverse Nyquist Array"
INCL.	- Inclinação da órbita
K	- Matriz de rigidez
K(s)	- Matriz de funções de transferência do compensador
l	- comprimento da viga
\mathcal{L}	- Função Lagrangiana
L	- Matriz de parâmetros de projeto para obtenção da matriz de ganho do filtro
LL, LH	- Sub-matrizes de L, para controlar respectivamente o comportamento de baixa e alta frequência da M.O.
LQG	- "Linear Quadratic Gaussian"
LTR	- "Loop Transfer Recovery"
LQR	- "Linear Quadratic Regulator"
L(s)	- Matriz de incerteza multiplicativa
m	- Número de entradas
M	- Matriz de Massa
\bar{M}	- Momento de Dipólo do Satélite
M.A.	- Malha Aberta
MBC	- "Model Based Compensator"
MECB	- Missão Espacial Completa Brasileira
MF	- Margens de Fase
M.F.	- Malha Fechada
MG	- Margens de Ganho
MIMO	- Sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas
M.O.	- Malha Objetivo
M_r, T_r, K_r	- Matrizes utilizadas na redução
n	- Número de estados do sistema
n_p, n_z	- Número de pólos e de zeros, respectivamente
$n(t)$	- Ruído no sensor

p	- Número de saídas
P_i	- Pontos médios dos engastes dos painéis na plataforma
q	- vetor de estados
q_i	- Coordenada Generalizada associada ao i -ésimo painel
Q	- Matriz das forças com origem não conservativa
Q_q	- Força generalizada associada ao movimento elástico
r	- Ordem do modelo reduzido
\vec{R}_{ai}	- Posição dos elementos de massa dos painéis em relação ao ponto médio da base de fixação do painel
$r(t)$	- Sinal de referência
\vec{R}_{ai}	- Posição dos elementos de massa dos painéis em relação ao C.M. do satélite
R_i	- Matriz de resíduo no polo $s = \lambda_i$, $i=1,2,\dots,n$
\vec{R}_p	- Vetor posição dos elementos de massa da plataforma em relação ao C.M. do satélite
\vec{R}_{Ri}	- Vetor posição dos elementos de massa do i -ésimo rotor em relação ao C.M. do satélite
\vec{R}_{ri}	- Vetor posição dos elementos de massa do i -ésimo rotor em relação ao C.M. do rotor
S.C.A.	- Sistema de Controle de Atitude
SISO	- Sistema de uma entrada e uma saída
$S(s)$	- Matriz de sensibilidade do sistema
$S_{KF}(s)$	- Matriz de sensibilidade da M.O. quando a M.O. é calculada através do FK
$S_{MO}(s)$	- Matriz de sensibilidade da M.O.
T	- energia cinética de rotação total do satélite em relação ao referencial inercial

t	- tempo
T_a	- energia cinética dos apêndices
T_p	- energia cinética da plataforma
T_r	- energia cinética dos rotores
$T_N(s)$	- Matriz de funções de transferência de malha do modelo nominal
$T_R(s)$	- Matriz de funções de transferência de malha do sistema real
$u(t)$	- Entrada da planta
V_A	- Velocidade do satélite em relação à atmosfera
V	- Energia potencial do satélite
V_E	- Energia potencial elástica do satélite
$x(t)$	- Vetor de estados
$x_r(t)$	- Vetor de estados do sistema reduzido
$y(t)$	- Saída da planta
ε	- Vetor posição do centro de pressão em relação ao C.M. do satélite
φ, θ, ψ	- Ângulos de roll, pitch e yaw, respectivamente
Φ_m, Ψ_m	- Funções admissíveis
μ, ρ	- Parâmetros de projeto
ν_1	- Coeficiente de Poisson
ρ_A	- Densidade atmosférica
τ_A	- Torque aerodinâmico
τ_{ext}	- Torques externos
τ_M	- Torque magnético
$\tilde{\omega}$	- Matriz de componentes da velocidade angular
ω_0	- Rotação orbital
$\vec{\omega}$	- Velocidade angular instantânea do satélite em relação ao sistema inercial
$\Omega_d, \Omega_r, \Omega_n, \Omega_{dnm}$	- Faixa de frequência de energia significativa da: perturbação, referência, ruído no sensor, dinâmicas não modeladas

- a - sub-índice representativo de painéis
- P - sub-índice representativo de plataforma
- R - sub-índice representativo de rotores

CAPÍTULO 1INTRODUÇÃO1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

No estudo da dinâmica dos corpos é conveniente decompor o movimento em uma translação do centro de massa do corpo (C.M.) associada a uma rotação do corpo em torno deste. No caso de satélites, a translação do C.M. ou a trajetória é conhecida como movimento orbital, enquanto a orientação do corpo é conhecida como atitude. Embora exista uma dependência entre o movimento orbital e sua atitude é comum, no caso de satélites, considerar os movimentos independentes. Isto não ocorre, por exemplo, com veículos de baixa altitude onde, devido a atmosfera, a trajetória é fortemente determinada pela atitude.

O estudo da atitude de um satélite pode ser dividido em determinação, predição e controle. Determinação de atitude é o procedimento de se obter a orientação do satélite relativa a um referencial, a partir de dados dos sensores e de sofisticado tratamento computacional destes, em geral efetuados em Terra. Sua precisão é limitada pela precisão dos sensores e pelos métodos computacionais utilizados. Predição de atitude é o processo de estimar a futura orientação do satélite através de modelos dinâmicos e sua precisão é limitada pelas incertezas nos torques ambientais e nas condições iniciais e pela limitação no modelo dinâmico do satélite. Controle de atitude é o processo de orientar o satélite de uma forma específica e pré-determinada. Esta última operação é efetuada pelo chamado Sistema de Controle de Atitude (S.C.A.) e a sua precisão é limitada pelo desempenho da configuração adotada e pelo algoritmo de controle. Os S.C.A.'s são

frequentemente necessários, exceto em algumas poucas aplicações onde a atitude é irrelevante.

Os S.C.A.'s apresentam basicamente cinco modos de operação: manobra de atitude, ou seja, reorientar a nave de uma atitude conhecida para outra; aquisição de atitude em que o objetivo é orientar a nave a partir de uma atitude desconhecida; estabilização de atitude (modo normal), onde deve se manter uma determinada atitude em relação a um sistema de referência, o qual pode ser inercial ou girar lentamente, como é o caso dos satélites orientados para a Terra, de forma a neutralizar os efeitos dos torques ambientais; dessaturação de rodas (somente para satélites que apresentam rodas de reação), quando as rodas de reação atingem velocidades elevadas devido a torques seculares sendo necessário portanto, eliminar momento do conjunto total; modo de emergência (sobrevivência), correspondente à situação em que algum elemento do S.C.A. não está operando satisfatoriamente (Souza, 1981).

Em alguns modos de operação os S.C.A.'s podem ser autônomos (não dependem de comandos da Terra) e, em geral, são inteiramente comandados por um computador de bordo (com memória limitada), ou podem ser não autônomos, com parte das operações efetuadas em Terra, onde frequentemente computação mais sofisticada é possível, porém em geral, são menos precisos (Wertz, 1978).

A sequência natural dos modos de operação é:
i) aquisição de atitude na separação do último estágio;
ii) modo normal onde efetivamente as funções se iniciam;
iii) eventuais manobras e dessaturações efetuadas ao longo da missão.

As missões podem ser as mais variadas, das quais destacamos os satélites utilizados para observação astronômica, para observação da Terra (meteorológicos, oceanográficos, sensoriamento remoto), de comunicação, para auxílio na navegação, etc., o que determina as características da órbita utilizada (altitude, inclinação, excentricidade, etc.).

Quanto aos requisitos de atitude da missão, genericamente existem três categorias:

- 1) Um eixo deve permanecer em uma direção inercial, como é o caso do Explorer I e dos primeiros satélites de comunicação.
- 2) Três eixos devem permanecer fixos no espaço inercial, como é o caso dos satélites para observações astronômicas.
- 3) Três eixos devem permanecer alinhados com um sistema de referência rotatório, como é o caso de satélites que devem manter apontamento para a Terra (sensoriamento remoto, telecomunicações e meteorológicos).

Diz-se que o primeiro tipo é estabilizado em um eixo e os dois seguintes em três. Algumas vezes existem requisitos relativos às partes móveis do veículo tais como painéis solares e telescópios, exigindo um sistema de controle para posicioná-las em relação ao satélite.

A Missão Espacial Completa Brasileira (MECB) prevê o lançamento de quatro satélites, sendo dois de coleta de dados e dois de sensoriamento remoto. Enquanto os dois primeiros são estabilizados em um eixo e encontram-se em fase final de testes, os dois últimos são estabilizados em três eixos e estão em fase de projeto. Os satélites de

sensoriamento remoto (Figura 1.1) são de pequenas dimensões (aproximadamente 150 kg), possuem pequenos painéis solares (0,9 m x 0,7 m), órbita baixa (em torno de 640 km), quase polar ($97,8^\circ$), heliossíncrona, com excentricidade praticamente nula e devem atender a estreitos requisitos de atitude e de movimento de atitude:

- a) $0,5^\circ$ de precisão angular em relação à atitude nominal para cada um dos três eixos (roll, pitch e yaw);
- b) $6,5 \times 10^{-3} / \text{s}$ de precisão em velocidade angular em roll e pitch;
- c) $10^{-2} / \text{s}$ de precisão em velocidade angular em yaw.

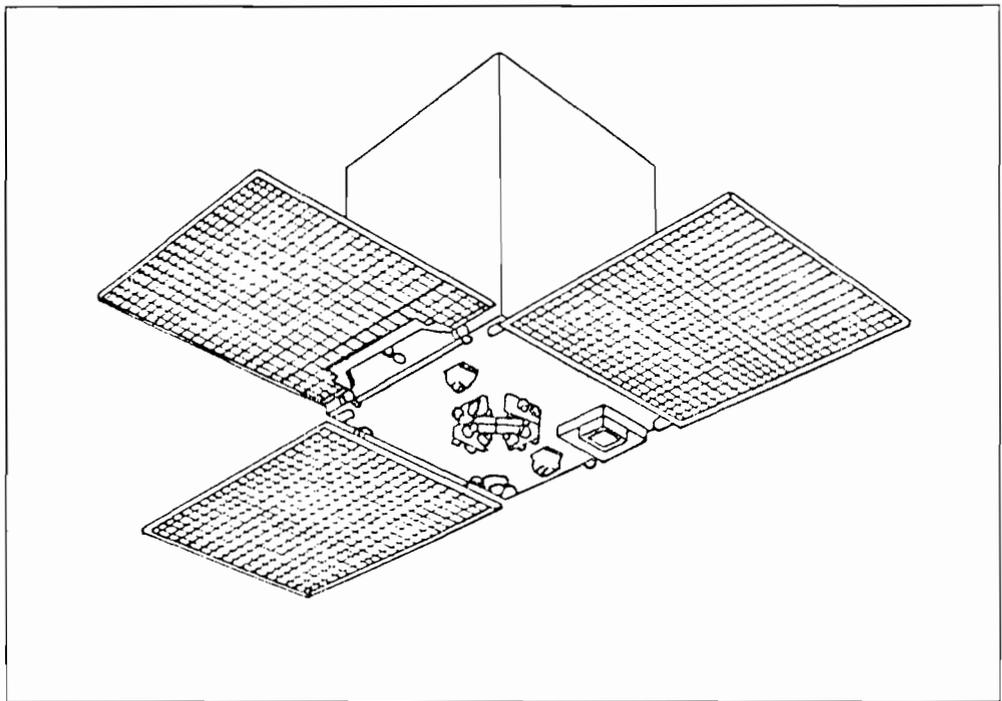


Fig. 1.1 - Satélite de Sensoriamento Remoto.

Este satélite apresenta algumas características peculiares principalmente devido a limitação de peso e tamanho: 1) seus pequenos momentos de

inércia deixam-no muito sensível aos torques de controle, podendo comprometer o desempenho e não atingir as estreitas especificações de atitude; 2) existe limitação no peso e na potência do S.C.A..

Os S.C.A.'s podem ser classificados em ativos, passivos e híbridos dos dois primeiros. Os S.C.A.'s ativos são constituídos de sensores (sensor de horizonte, sensor solar, giroscópio, magnetômetros, etc.), um controlador (lógica de controle) e atuadores (jatos de gás, rodas de reação, espiras magnéticas, volantes de inércia, etc.). A partir dos sinais dos sensores, o controlador aciona os atuadores convenientemente de forma a atender os requisitos de atitude. Os S.C.A.'s ativos geralmente são os mais precisos (Figura 1.2a). Os S.C.A.'s passivos não contêm sensores nem atuadores pois a própria dinâmica do satélite associada aos efeitos do meio ambiente apresenta uma configuração estável (Figura 1.2b). Geralmente são sistemas mais simples e de baixo consumo, porém tem limitações quanto à precisão e podem apresentar problemas na fase de aquisição. As técnicas mais comuns de controle passivo são estabilização giroscópica (spin e dual-spin), onde o amortecimento de nutação é também passivo, sendo acionado pelo próprio movimento do satélite e age dissipando energia (pendular, corrente de Foucault, tubo com esferas, anel com líquido viscoso) e estabilização por gradiente de gravidade (G.G.). Os S.C.A.'s híbridos apresentam características de ambos os S.C.A.'s mencionados anteriormente. Como exemplo tem-se a estabilização giroscópica, onde é comum a presença de controle ativo para correção do eixo de rotação e amortecimento da nutação. A estabilização giroscópica com controle ativo é frequentemente utilizada em satélites orientados para a Terra principalmente em satélites geoestacionários.

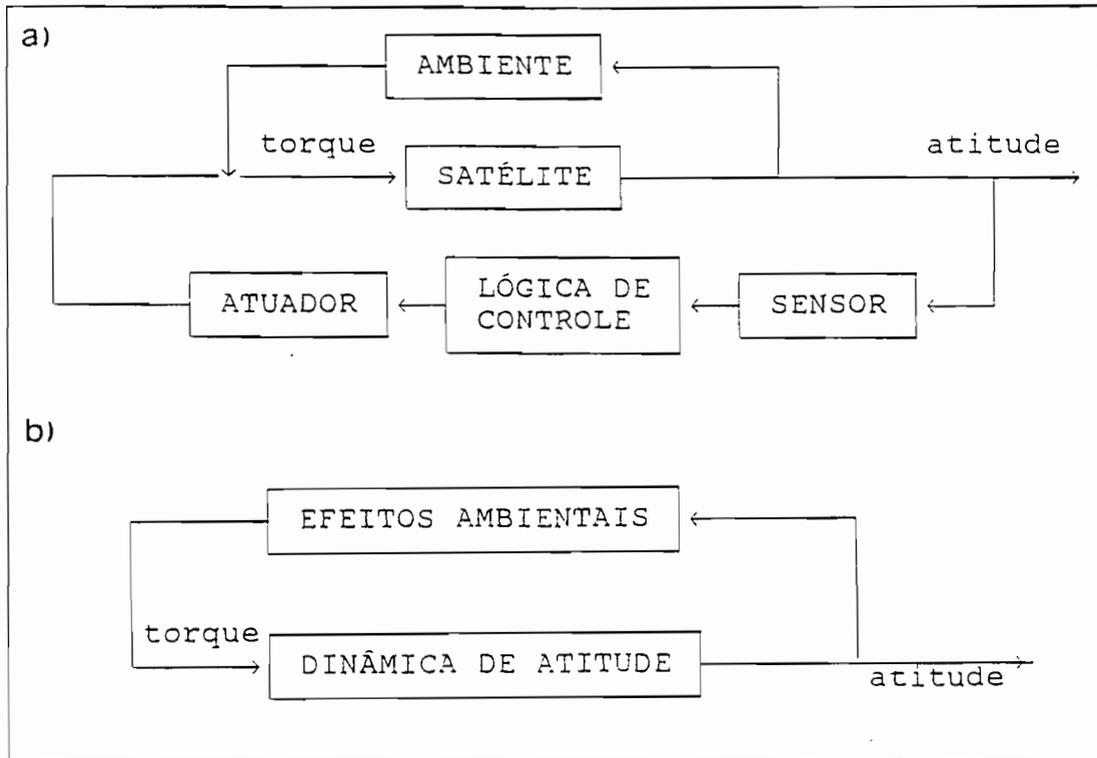


Fig. 1.2 - Sistemas de Controle de Atitude: a) ativo; b) passivo.

Adaptada de Roberson (1979), p.4.

A escolha da configuração, isto é, dos elementos físicos que compõem o S.C.A., é tarefa complexa e depende de diversos fatores tais como: requisitos de atitude da missão (precisão), características da órbita, energia e/ou combustível disponível para o S.C.A., limitação no peso e no volume, confiabilidade, duração da missão, custos, etc. Vale lembrar que não existe apenas uma configuração possível para uma determinada aplicação. Esta não padronização dos S.C.A.'s pode ser observada na diversidade de S.C.A.'s utilizados em satélites em operação para uma mesma aplicação. Para os satélites de sensoriamento remoto da MECB, até o presente momento, a escolha da configuração do S.C.A. está em fase preliminar.

No caso de S.C.A.'s ativos, a lógica de controle é desenvolvida a partir de um modelo matemático do sistema físico. Em aplicações práticas é importante se considerar as limitações do modelo, isto é, considerar as incertezas da planta (variação dos parâmetros, dinâmicas não modeladas, incertezas nos parâmetros), ao invés de se trabalhar apenas com a planta nominal. Enquanto que para sistemas de uma entrada e uma saída (SISO em inglês) este problema foi resolvido há bastante tempo (década de 40), basta lembrar a popularidade das margens de estabilidade, o caso de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO em inglês) é ainda uma área de pesquisas. Estudando-se o caso MIMO surgiu o termo controle robusto (década de 70) que trata essencialmente do problema de analisar e projetar sistemas de controle precisos onde o modelo da planta apresenta incertezas significativas.

A metodologia LQG/LTR ("Linear-Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery"), desenvolvida em grande parte por Doyle e Stein (1981), é uma importante ferramenta de projeto de sistemas lineares MIMO no contexto do controle robusto. Ela reúne abordagens baseadas tanto no domínio do tempo (LQR ("Linear Quadratic Regulator") e LQG ("Linear Quadratic Gaussian")) como no domínio da frequência, sendo esta última uma generalização de conceitos de projeto de sistemas SISO para o caso MIMO baseado fortemente na utilização de valores singulares. Mais especificamente, trata-se de um controlador com a estrutura interna de um regulador LQG, que consiste de um Filtro de Kalman (FK) associado a um LQR. Vale, porém, ressaltar que esta técnica está mais voltada para as boas características de robustez e desempenho dos sistemas com estes controladores do que propriamente para a otimização de algum critério de desempenho.

O método em si é simples e sistemático e as maiores dificuldades encontram-se na formulação do problema, isto é, na modelagem do sistema e das incertezas, nas especificações de desempenho, na normalização, etc.. Uma vez que o problema esteja bem formulado, a aplicação da metodologia requer, em geral, menos de 10% do esforço total de projeto (Athans, 1986a). São encontrados vários exemplos de aplicação da metodologia nas mais diversas áreas (Chan e Athans, 1984; Martin et al., 1986; Athans et al., 1986; Kissel et al., 1986; Sundararajan et al., 1987; Tahk e Speyert, 1989; Wise, 1990; Calise e Prasad, 1990).

1.2 - OBJETIVOS

Neste trabalho, pretende-se mostrar, através de um caso concreto, que a técnica de projeto LQG/LTR pode ser uma ferramenta de grande utilidade no projeto de S.C.A.'s.

Adotou-se um satélite exemplo inspirado em dados preliminares do satélite brasileiro de sensoriamento remoto com estabilização giroscópica, na configuração com um volante de inércia no eixo de "pitch" e duas rodas de reação nos eixos de "roll" e "yaw", pois é frequentemente utilizada em satélites orientados para a Terra (Wertz, 1978). Os estreitos requisitos de atitude e de movimento de atitude exigem um S.C.A. de alta precisão, sendo eliminados preliminarmente S.C.A.'s totalmente passivos. Para esta configuração o sistema apresenta forte acoplamento entre "roll" e "yaw" e o eixo de "pitch" é praticamente desacoplado. O modelo da dinâmica de atitude do satélite para pequenas perturbações pode, então, ser decomposto em um sistema multivariável para "roll/yaw" e um sistema de uma entrada e uma saída para "pitch".

A metodologia LQG/LTR é aplicada no projeto do S.C.A. para "roll/yaw" operando no modo normal. A utilização dessa metodologia no S.C.A. do satélite adotado é justificada pelas incertezas encontradas na planta devido às dinâmicas não modeladas dos painéis flexíveis e à variação nos parâmetros do modelo, principalmente devido a variação no acoplamento giroscópico provocado pela mudança na velocidade do volante de inércia. Para o eixo de "pitch" utilizou-se a mesma metodologia, embora pudessem ser utilizadas as técnicas convencionais de projeto.

1.3 - ESTRUTURA DO TRABALHO

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão da literatura sobre a configuração adotada, robustez, modelagem do sistema e a metodologia LQG/LTR.

No Capítulo 3 é feita a formulação matemática do problema. São modeladas as perturbações (torques externos), a dinâmica de atitude do satélite e as incertezas no modelo. No capítulo 4 apresenta-se a fundamentação teórica da metodologia LQG/LTR.

No Capítulo 5 é feito efetivamente o projeto do S.C.A. utilizando-se o modelo da dinâmica de atitude obtido no Capítulo 3 e a metodologia de projeto apresentada no Capítulo 4. No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões do trabalho.

No Apêndice A encontram-se os dados de entrada do programa de simulação de torques de radiação e de arrasto atmosférico (Carrara, 1988). No Apêndice B é desenvolvida a expressão da energia cinética, utilizada na formulação Lagrangiana. Nos Apêndices C, D e E, respectivamente, discute-se o problema de normalização,

apresenta-se a decomposição em valores singulares e discute-se o seu significado físico no domínio da frequência e, definem-se pólos e zeros de sistemas multivariáveis. Os Apêndices F, G e H, respectivamente, apresentam o critério de Nyquist multivariável, o teorema fundamental da robustez da estabilidade e a prova da "recuperação" em sistemas com compensadores MBC ("Model Based Compensator"). No Apêndice I mostram-se as características especiais do problema do "Cheap" LQR quando em um sistema com MBC. A demonstração de que, em certas condições, existe coincidência de valores singulares máximo e mínimo em todas as frequências, é feita no Apêndice J.

CAPÍTULO 2REVISÃO DA LITERATURA

A necessidade de S.C.A. na estabilização se deve ao fato de que, mesmo que o veículo seja precisamente orientado no lançamento (com órbita e rotação nominais), este tende a se desviar desta orientação devido a influência de torques ambientais, tais como pressão de radiação solar, interação com o campo gravitacional e magnético da Terra, arrasto atmosférico, mudanças internas e acoplamentos da dinâmica de atitude com a dinâmica orbital e flexível do satélite.

Um artigo bastante geral e completo na área foi escrito por Shrivastava e Modi (1983). Trata-se de uma revisão de mais de duzentos artigos que abordam diversos aspectos da interação entre torques ambientais e dinâmica de atitude, inclusive formas de controle passivo. Maiores detalhes podem ser encontrados em Pilchowski (1989), Wertz (1978) e Carrara (1982). Neste último, encontra-se também uma simulação das forças e dos torques em um satélite específico ao longo de uma órbita. Para um caso mais geral, referência do programa de simulação é encontrada em Carrara (1988).

Sistemas que apresentam um momento angular total elevado em relação aos torques externos ("Bias Momentum Systems") no eixo de "pitch", nominalmente normal ao plano orbital, onde se incluem dual spin e volante de inércia (estabilização por spin não foi considerada), são frequentemente utilizados em satélites orientados para a Terra por apresentarem algumas vantagens: 1) possuem rigidez giroscópica, o que os torna menos sensíveis a perturbações; 2) o acoplamento "roll/yaw" permite a

estabilização do eixo de "yaw" dispensando sensor de "yaw"; 3) o próprio volante de inércia pode ser usada como atuador para o controle do eixo de "pitch"; 4) o volante de inércia pode fornecer a rotação de "scanning" para o sensor de horizonte ("scanwheel"). Ou seja, são sistemas que podem prover controle em três eixos com menos instrumentação que um sistema com três rodas de reação (Wertz, 1978).

O momento angular destes sistemas pode ser fornecido por um volante de inércia comum, um "Control Moment Gyro", isto é, um volante de inércia suportado por um ou dois "gimbals" ou por parte do próprio satélite, como nos satélites estabilizados por dual-spin. Nestes sistemas é necessário outro atuador de forma a corrigir a direção do eixo de spin, desalinhado devido aos torques externos, como bobina magnética, jatos de gás ou roda de reação, comandados pela Terra ou automaticamente pelo próprio S.C.A. (Wertz, 1978).

Historicamente (Roberson, 1979; Likins, 1986), o primeiro tipo de estabilização a surgir foi a estabilização por spin, onde se coloca o corpo com rotação em torno do eixo de momento de inércia máximo (minimizar a energia cinética para determinado momento angular). Até o lançamento do Explorer I em 1958, o qual foi concebido para girar em torno do eixo de mínimo momento de inércia, desconhecia-se o efeito provocado pela dissipação de energia (flexibilidade de antenas, apêndices ou partes móveis internas), e acreditava-se que a rotação em torno tanto do eixo de momento de inércia máximo como do de mínimo eram estáveis. O Explorer I passou de rotação em torno do eixo de inércia mínimo para rotação em torno do eixo de inércia máximo devido a dissipação. Com o fracasso do Explorer I, verificou-se que com a

dissipação de energia, somente a rotação em torno do eixo de momento de inércia máximo era assintoticamente estável. Com o intuito de usar antenas direcionais em satélites estabilizados por spin surgia a idéia de se colocar uma plataforma sem rotação em satélites deste tipo. O satélite, então, era composto de plataforma e rotor. Porém, a idéia de rotação em torno do eixo de momento de inércia máximo permanecia. Após alguns estudos, verificou-se em 1965 que, com amortecedores na plataforma, era possível estabilizar o satélite com rotação para qualquer distribuição de inércia. Surgira, então, um novo conceito em estabilização de atitude, conhecido por dual-spin, que derrubava a idéia de estabilização somente com rotação em torno do eixo de momento de inércia máximo. Em 1969 foi lançado o TACSAT I, o primeiro satélite dual-spin com eixo de rotação correspondente ao mínimo momento de inércia.

Embora o dual-spin e o volante de inércia sejam, em princípio, iguais, algum cuidado deve ser tomado quando se considera a dissipação de energia. Enquanto no dual-spin o rotor externo é parte do satélite, contendo instrumentos, eletrônica, tanques de combustível e, conseqüentemente, deve ser modelado como um dissipador de energia, o volante de inércia já se comporta como um corpo rígido simétrico (Hughes, 1986).

Num contexto histórico, uma discussão dos principais métodos de estabilização é dada em Roberson (1979) e Likins (1986). Para o cálculo de compensadores em satélites estabilizados em três eixos utilizando volante de inércia, exemplos podem ser encontrados em Kaplan (1976), Hodapp (1973) e Wertz (1978), este último sendo uma excelente e ampla referência na área de determinação e controle de atitude de satélites. Em Hammond (1977), é

feito um estudo comparativo entre configurações com rodas fixas e suportadas por "gimbals".

Em relação à configuração contendo um volante de inércia e duas rodas de reação, alguns comentários podem ser feitos:

- 1) Esta configuração em operação é muito semelhante a um volante de inércia suspenso por dois "gimbals", onde os torques dos "gimbals" são substituídos por torques das rodas de reação (Hammond, 1977).
- 2) Esta configuração é híbrida de controle passivo (rigidez giroscópica fornecida pelo volante de inércia) e de controle ativo (rodas de reação e volantes de inércia orientados por sensores).
- 3) Nesta configuração, como em qualquer outra com momento embarcado em um eixo, o sistema apresenta forte acoplamento entre os eixos remanescentes, no caso "roll" e "yaw", devido ao volante de inércia no eixo de "pitch".
- 4) Sendo limitada a capacidade de armazenamento de momento angular das rodas de reação, na presença de torques seculares é necessário um atuador capaz de dessaturar as rodas, como jatos de gás ou bobinas magnéticas.
- 5) A rigidez giroscópica fornece uma estabilização inercial, que não é exatamente o caso, devido a precessão da órbita. O eixo deverá apresentar uma rotação de aproximadamente 1° /dia, valor da mesma ordem de grandeza dos efeitos dos torques externos. Este efeito de dinâmica lenta deve ser absorvido através da ação do S.C.A.. Vale lembrar que o satélite efetua 14 órbitas/dia, onde praticamente a estabilização inercial é conveniente.

- 6) Nesta configuração existem problemas referentes a passagem por zero da velocidade das rodas de reação, devido ao torque de aderência, o que introduz não linearidades, sendo praticamente resolvidos através da utilização de mancais magnéticos (Souza P. N., 1987).
- 7) Configuração semelhante já foi utilizada em outros satélites, como mostra a Tabela 2.1.

TABELA 2.1 - CARACTERÍSTICAS DE SATÉLITES COM CONFIGURAÇÕES QUE APRESENTAM VOLANTE DE INÉRCIA

NOME	MASSA	PARAMETROS ORBITAIS			CONFIG.	PRECISÃO	OBJETIVOS
		INCL.	PERIG.	APOG.			
SEASAT	2.315Kg	108°	790Km	790Km	VI, RR e EM	±0,5 r, p e y	oceanográfico
HCMM	± 95Kg	98°	600Km	600Km	VI e EM	±1 r e p ±2 y	carac. térmica Terra
NIMBUS5	772Kg	99,9°	1089Km	1102Km	VI e RR	±1 r, p e y	meteorológico
NIMBUS6	829Kg	99,9°	1100Km	1113Km	VI e RR	±1 r, p e y	meteorológico

(*) Devido a uma pane no sistema de potencia, o SEASAT ficou em operação por apenas cerca de 3 meses.

Adaptada de Wertz (1978), p.790.

VI = Volante de Inércia; RR = Roda de Reação; EM = Espira Magnética; r = roll; p = pitch; y = yaw; INCL. = inclinação; PERIG. = perigeu; APOG. = apogeu; CONFIG. = configuração.

A potência exigida pelo satélite é proveniente de células fotoelétricas montadas nos chamados painéis solares, sendo proporcional à área destes. No lançamento, que é caracterizado por grandes acelerações e vibrações, onde existem limitações de peso e tamanho, estes painéis são acomodados de forma compacta e se abrem quando já estão em órbita, sendo bastante flexíveis. O estudo da abertura dos painéis pode ser encontrado em Roma (1990).

Uma revisão de mais de duzentos artigos que trata da dinâmica de atitude de satélites com apêndices flexíveis pode ser encontrada em Modi (1974). A dinâmica das partes flexíveis torna-se significativa quando as frequências dos componentes flexíveis do satélite tem a mesma magnitude das frequências de corpo rígido do satélite devido a nutação (estabilizados por spin), libração (estabilizados por G.G.) ou frequências do sistema de controle de um satélite controlado ativamente (Wertz, 1978). Estas frequências de corpo rígido podem excitar os modos flexíveis dos painéis solares, o que pode interferir no movimento de atitude do satélite. Muitos satélites apresentaram comportamento anômalo devido a este efeito (Explorer I, Alouette I, entre outros). Quando a mais baixa frequência natural das partes flexíveis é de, pelo menos, uma ordem de grandeza maior que a frequência de corpo rígido, a flexibilidade pode ser negligenciada (Wertz, 1978), ou seja, se os modos flexíveis dos painéis não forem excitados, estes podem ser ignorados e, em alguns casos, mesmo quando excitados devido aos pequenos momentos de inércia (pequeno acoplamento com o movimento de atitude), podem ser ignorados. Rigorosamente, os painéis podem ser excitados por desalinhamento dos rotores com relação aos eixos principais de inércia (Fonseca, 1988) e, em alguns casos, por gradientes de temperatura (Modi, 1974).

Para se obter um S.C.A. preciso, no sentido que atenua rapidamente o erro, rejeite perturbações e seja insensível à variação nos parâmetros em um intervalo grande de frequências, deve-se aumentar a banda do sistema em malha fechada (M.F.). Este aumento é limitado pelo ruído nos sensores, desempenho dos atuadores (saturação) e pelas incertezas do modelo em altas frequências. Eliminando-se em uma primeira análise a dinâmica dos sensores e atuadores, para se aumentar a banda do sistema é necessário incluir no

modelo tantos modos flexíveis quantos forem necessários de forma que o S.C.A. não excite modos flexíveis não modelados e significativos, que interfiram na atitude (Sundararajan et al., 1987). Vale ressaltar que existe algum controle na frequência natural do painel, já que esta é função das dimensões, do material e do tipo de engaste do painel (Fleury, 1989).

Enquanto o modelo da dinâmica de atitude para o corpo rígido pode ser obtido convenientemente através de uma formulação Newtoniana (Wertz, 1978; Kaplan, 1976 ; Hodapp, 1973), ao se incluir os painéis flexíveis é preferível a formulação Lagrangiana (Junkins e Turner (1986), citados por Roma (1990)). Em Meirovitch (1970) podem ser encontrados os fundamentos teóricos da formulação Lagrangiana.

Tratando-se de um sistema contínuo, o deslocamento elástico deve ser definido para todos os pontos do apêndice, portanto é um sistema com infinitos graus de liberdade, difícil de tratar do ponto de vista do controle. Deve-se, então, discretizar o sistema de forma a se obter um modelo discreto equivalente, com número finito de graus de liberdade, que mantenha suas principais características (Meirovitch et al., 1979). Diversos métodos de discretização podem ser encontrados em Meirovitch (1967; 1975). O Método dos Modos Admitidos assume que os deslocamentos elásticos podem ser representados como a superposição de funções admissíveis dependentes do espaço multiplicadas por coordenadas generalizadas dependentes do tempo. Meirovitch (1976) discute e compara os resultados da modelagem de apêndices flexíveis para diversas escolhas de funções admissíveis. Uma ampla análise de vibração de placas de diversas formas para várias configurações de engaste é encontrada em Leissa (1969).

Fonseca (1988) obteve o modelo da dinâmica de atitude do corpo rígido com apêndices flexíveis utilizando a formulação Lagrangiana. Desenvolvimentos semelhantes são encontrados em Meirovitch (1970), somente para o corpo rígido e Meirovitch (1976; 1977 e 1979), para o corpo rígido com apêndices flexíveis. Em Roma (1990), desenvolveu-se um programa empregando manipuladores simbólicos (REDUCE), o qual obtém, para alguns casos, as equações de movimento do satélite.

Modelos extremamente precisos são, em geral, de ordem elevada e não lineares, o que gera leis de controle bastante complexas. Deve-se, então, estabelecer um compromisso entre a simplicidade e a precisão do modelo, o que pode requerer um processo iterativo entre projeto e modelagem, isto é, para se atender as especificações de projeto, refina-se gradativamente o modelo. Neste contexto, são importantes os métodos de redução de ordem de modelo.

Existem diversos métodos de redução de ordem de modelo (Genesio e Milanese, 1976) e, mais recentemente, um método baseado em realizações balanceadas (Moore, 1981). O Método dos Resíduos, embora pouco citado na literatura, é um método bastante poderoso para simplificação de modelos (Athans et al., 1986).

Ao se simplificar um modelo, introduz-se erro ou incerteza no modelo. Esta incerteza deve ser considerada no projeto do controlador, pois pode até provocar a instabilidade do sistema. Diversas maneiras de se modelar a incerteza do modelo são discutidas em Lehtomaki (1981), especificamente incertezas não estruturadas, baseadas no conceito de valores singulares. Estes são encontrados na bibliografia de álgebra linear e aplicados na teoria de controle em Athans (1986a) e Maciejowski (1989).

A normalização do modelo, frequentemente tratada visando a obtenção de sistemas bem condicionados numericamente, assume papel fundamental ao se utilizar valores singulares, pois, ao contrário de autovalores e autovetores, estes são variantes quanto à normalização. Com este enfoque, a bibliografia é escassa.

O problema de controle robusto é extremamente amplo e diversas soluções foram propostas, desde controladores fixos (parâmetros constantes) a controladores adaptativos. Uma extensa bibliografia na área de controle robusto com controladores fixos é encontrada na publicação do IEEE (Dorato, 1987).

No caso de controladores SISO fixos, são conhecidas as vantagens de se utilizar a realimentação: rejeição a perturbações, redução da sensibilidade a variação nos parâmetros e ruídos nos sensores. A questão se resume a como conseguir os benefícios da realimentação para o caso MIMO.

O projeto de um sistema de controle realimentado é tarefa que, na medida do possível, deseja-se que seja realizada de forma sistemática. No caso de sistemas MIMO existem diversos procedimentos, dos quais se destacam: INA ("Inverse Nyquist Array"), baseado na diagonal dominante, CL ("Characteristic Loci"), etc. Porém, frequentemente são ineficazes ao se considerar plantas com incertezas, por tratarem o sistema MIMO como uma série de sistemas SISO independentes. Em Maciejowski (1989), encontram-se diversas técnicas de projeto de sistemas de controle MIMO realimentados.

A partir de 1975, iniciou-se o período conhecido por "Período do Controle Robusto Moderno" (Dorato, 1987) que se estende até hoje, onde foram desenvolvidas metodologias voltadas para a robustez de sistemas MIMO, das quais se destacam a metodologia LQG/LTR, desenvolvida em grande parte por Doyle e Stein (1981) e H_{∞} (Zames, 1981).

É interessante verificar as origens da metodologia LQG/LTR. A partir de 1964 um novo enfoque foi dado a compensadores LQR quando Kalman (1964) demonstrou que, para o caso SISO, estes apresentam excelentes características quanto a robustez, isto é, margem de redução de ganho de 50%, infinita margem de aumento de ganho e 60° de margem de fase. Safonov e Athans (1977) demonstraram que estas margens de fase e de ganho se estendem para sistemas MIMO para variações de fase e de ganho independentes em cada canal de entrada. Estas propriedades, porém, dependem de se ter assumido que todas as variáveis de estado são medidas e realimentadas. Quando se associa um observador, como é o caso de controladores LQG, não existem mais garantias de robustez do sistema (Doyle, 1978). Ao se utilizar simplesmente o procedimento LQG, obtém-se um compensador que estabiliza o modelo nominal e otimiza um critério de desempenho, porém, frequentemente é inaceitável ao se considerar a robustez. Para melhorar a robustez do sistema pode-se alterar alguns parâmetros tais como, pesos no critério de desempenho, mudar o modelo estocástico das perturbações e ruído, adicionar dinâmicas, o que pode ser impraticável devido ao elevado número de parâmetros de projeto (Doyle e Stein, 1981). Seria intuitivo simplesmente fazer a dinâmica do observador mais rápida, entretanto, do ponto de vista da robustez, isto não é recomendável (Doyle e Stein, 1979). A

extensão do critério de Nyquist para o caso MIMO (Rosenbrock, 1972; MacFarlane, 1977) é importante neste contexto, pois, os testes de robustez quanto à estabilidade derivam deste critério.

Estudando-se uma maneira de se recuperar a robustez do sistema quando inserido um observador, chegou-se ao método LTR (Loop Transfer Recovery), originalmente designado "Robustness Recovery". Verificou-se que o método era mais geral do que simplesmente recuperar a robustez do sistema e, com algum aperfeiçoamento, chegou-se a metodologia LQG/LTR (Doyle e Stein, 1981).

Esta metodologia é de grande importância no contexto do controle robusto, sendo encontrada em várias aplicações na literatura como controle de sistema de potência (Chan e Athans, 1984), submarino (Martin et al., 1986), avião (Athans et al., 1986), estrutura espacial flexível (Kissel e Hegg, 1986), antena flexível (Sundararajan et al., 1987), controle de míssil (Wise, 1990). Por outro lado, ela é criticada por apresentar um conservadorismo excessivo ao se considerar as incertezas como não estruturadas (Dorato, 1987). Na tentativa de atenuar esse conservadorismo, Doyle (1982) introduziu o conceito de valores singulares estruturados que, porém, apresenta dificuldades computacionais (Dorato, 1987).

CAPÍTULO 3

MODELAGEM DO SISTEMA/FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo é feita a formulação matemática do problema.

Na Seção 3.1, modela-se as perturbações (torques externos), pois o S.C.A. deve ser capaz de rejeitá-las. Na Seção 3.2 é desenvolvido o modelo da dinâmica de atitude do satélite através da formulação Lagrangiana (Fonseca, 1988), considerando-se os apêndices flexíveis. Na Seção 3.3 é exposto um método de redução de ordem de modelo conhecido por Método dos Resíduos. A normalização (Apêndice C) assume papel fundamental em plantas MIMO, pois, valores singulares (Apêndice D), ao contrário de autovalores e autovetores, são variantes quanto à normalização. Na Seção 3.4 é obtido o modelo das incertezas da planta e, como será visto, as dinâmicas não modeladas de alta frequência impõem limites na banda do sistema e, conseqüentemente, restrições no desempenho.

Os atuadores e sensores são considerados ideais, ou seja, sem dinâmicas e lineares. Esta é uma aproximação razoável, pois, as dinâmicas destes são bem mais rápidas que a dinâmica do sistema. Não se considerou a não linearidade provocada pelo torque de aderência quando a velocidade da roda de reação é nula nem a saturação dos atuadores

3.1 - MODELAGEM DOS TORQUES EXTERNOS

O satélite, quando em órbita, está sujeito a diversas forças que influenciam tanto o movimento orbital (decaimento da órbita, inclinação, excentricidade,

precessão), como sua atitude (temos torques quando a linha de aplicação da resultante das forças não passa pelo C.M. do satélite). No caso, estamos interessados somente em torques que, embora de pequena intensidade, tem efeito cumulativo como importante fonte de erros no S.C.A. e, portanto, devem ser considerados de alguma forma.

São várias as origens dos torques ambientais em satélites: Gradiente de Gravidade, Arrasto Atmosférico, Pressão de Radiação Solar, Torque Magnético Terrestre, Albedo e Reemissão Terrestre, Impacto de Meteoritos, Poeira Cósmica, etc. As quatro primeiras são dominantes e determinísticas enquanto as demais são menos significativas e de natureza estocástica (Shrivastava e Modi, 1983).

São tratados somente os torques devido ao Gradiente de Gravidade, ao Arrasto Atmosférico, à Pressão de Radiação Solar e ao Campo Magnético Terrestre, que são caracterizados por dinâmicas lentas e de pequena intensidade. Como será visto, estes podem ser modelados, porém, devido à dificuldade de modelá-los e a pequena intensidade dos torques, não fazem parte do modelo de projeto e são tratados como perturbações.

3.1.1 - TORQUES GRAVITACIONAIS

O torque de gradiente de gravidade é provocado pela não uniformidade do potencial gravitacional atuante no satélite. Pela proximidade do satélite à Terra, praticamente pode se considerar apenas o campo gravitacional gerado pela Terra, sendo este função da altitude (inversamente proporcional ao quadrado da distância satélite-centro da Terra). Os efeitos do Sol e da Lua são pequenos e se refletem principalmente na órbita e não na atitude. Desta forma, as diversas partes do satélite

estão sujeitas a forças diferentes sendo, portanto, mais intenso em satélites que apresentam grande assimetria de distribuição de massas em relação à normal à superfície da Terra e nulo para satélites que apresentam simetria. Este torque tende a alinhar o eixo de menor momento de inércia com a perpendicular à equipotencial gravitacional, sendo um ponto de equilíbrio estável. Pode ser usado na estabilização de satélites que não requeiram alta precisão de apontamento (controle passivo), mas geralmente apresenta problemas no amortecimento da libração (oscilação em torno do nadir).

Em geral, opta-se por um modelo mais simples onde se considera somente a Terra, admitida esférica e de massa homogênea. Nestas condições e eliminando-se os termos de segunda ordem, as componentes do torque de gradiente de gravidade em relação aos eixos principais de inércia, podem ser dadas por (Wertz, 1978):

$$GG_x = 3\omega_0^2(I_z - I_y)\varphi, \quad (3.1a)$$

$$GG_y = 3\omega_0^2(I_z - I_x)\theta, \quad (3.1b)$$

$$GG_z = 0, \quad (3.1c)$$

onde:

I_x, I_y, I_z = momentos de inércia em relação aos eixos principais de inércia,

φ, θ, ψ = ângulo de roll, de pitch e de yaw, respectivamente, os quais são definidos na seção 3.2.

ω_0 = rotação orbital.

Devido à pequena assimetria do satélite em estudo, estes torques são muito pequenos.

O achatamento da Terra, além de deformar o campo gravitacional, provoca a precessão da órbita em torno do eixo polar da Terra, quando a órbita tem inclinação não nula. Nas chamadas órbitas heliosíncronas, o período de precessão é de um ano. Neste caso, esta precessão provoca, em satélites apontados para Terra, um erro de apontamento de aproximadamente $1^\circ/\text{dia}$.

3.1.2 - ARRASTO ATMOSFÉRICO

O torque aerodinâmico ($\bar{\tau}_A$) é decorrente do choque das moléculas da atmosfera com o satélite em movimento e surge quando o centro de pressão não coincide com o centro de massa. Seu módulo decai exponencialmente com a altitude, sendo significativo para altitudes até 800km (Shrivastava e Modi, 1983).

Para a modelagem de torque aerodinâmico, devido à rarefação da atmosfera, utiliza-se a teoria molecular dos gases e considera-se a transferência de quantidade de movimento das moléculas para as superfícies do satélite. A transferência da quantidade de movimento ocorre tanto na incidência como na saída das moléculas da superfície.

O torque aerodinâmico pode ser expresso por:

$$\bar{\tau}_A = \bar{\epsilon} \times \bar{F}_A, \quad (3.2)$$

onde ϵ é o vetor posição do centro de pressão em relação ao centro de massa do satélite e \bar{F}_A é a força de arrasto.

A determinação precisa de \bar{F}_A é bastante complexa, sendo função do material da superfície, da temperatura, da rugosidade, da temperatura da atmosfera, da forma da superfície, etc., porém, pode ser aproximada por (Shrivastava e Modi, 1983):

$$\bar{F}_A = 0.5 \rho_A v_A^2 A_C C_D, \quad (3.3)$$

onde:

- ρ_A = densidade atmosférica,
- v_A = velocidade do satélite em relação a atmosfera,
- A_C = área característica,
- C_D = coeficiente de arrasto.

Por outro lado, há dificuldades na obtenção da densidade atmosférica, devido às amplas variações desta com a posição relativa do Sol, estação do ano, atividade solar, etc.

Pode-se, ainda, considerar os efeitos da rotação atmosférica na obtenção da velocidade relativa. Devido às dificuldades em se modelar tais torques e devido a importância de considerá-los, optou-se por simular o torque aerodinâmico no satélite em programa elaborado por Carrara (1988), como mostra a Figura 3.1.

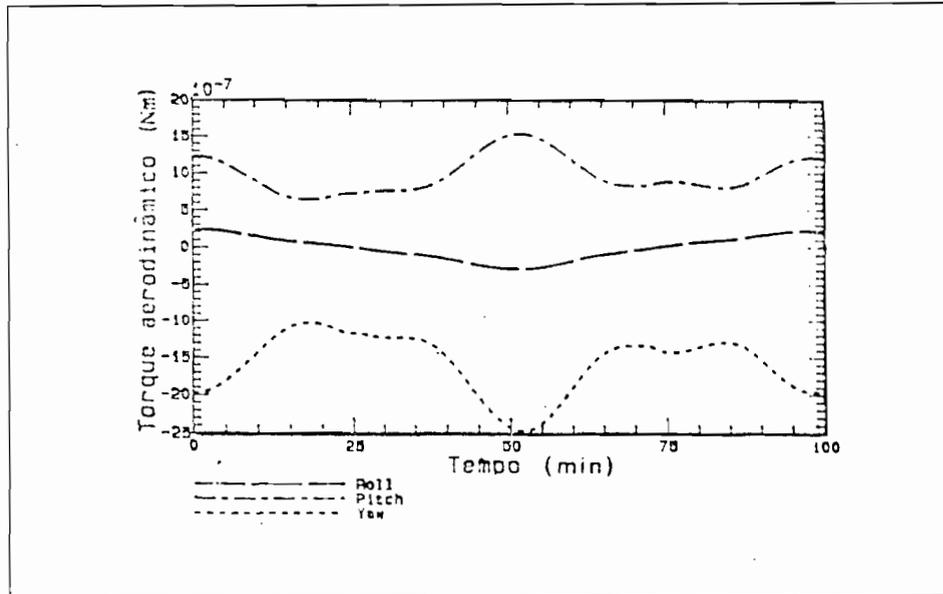


Fig. 3.1 - Torque aerodinâmico.

Embora o torque aerodinâmico varie com o tempo e nem tanto no domínio da frequência, julgou-se suficiente a simulação de uma única órbita, já que os valores do torque são aproximadamente iguais após um período orbital. Os dados de entrada encontram-se no Apêndice A. Observa-se que tratam-se de perturbações de baixa frequência.

3.1.3 - TORQUE MAGNÉTICO

De uma maneira geral o torque magnético ($\bar{\tau}_M$) é bastante pequeno se comparado com os torques externos já descritos. Ele é o resultado da interação entre eventuais

momentos magnéticos residuais no satélite e o campo magnético terrestre e, pode ser dado por:

$$\vec{\tau}_M = \vec{M} \times \vec{B} , \quad (3.4)$$

onde \vec{M} é o momento de dipolo do satélite e \vec{B} a indução geomagnética local.

O satélite pode se comportar como um dipolo magnético devido principalmente a: 1) correntes elétricas não compensadas nos equipamentos de bordo e células solares; 2) presença de materiais ferromagnéticos a bordo, que apresentam magnetismo induzido pelo campo geomagnético ou magnetismo permanente; 3) correntes que surgem devido ao movimento de estruturas condutoras numa atmosfera parcialmente ionizada e imersas num campo magnético, provocando um fluxo desigual de íons e elétrons na superfície do satélite; 4) correntes de Foucault, que surgem na superfície condutora externa, em virtude do movimento rotacional do satélite em relação ao campo geomagnético. Destes, o primeiro é predominante e os dois últimos, são importantes somente em satélites estabilizados por spin.

O campo magnético terrestre pode ser modelado de inúmeras formas dependendo dos objetivos e da precisão desejada no modelo. Para a maioria das aplicações, este pode ser aproximado como se fosse gerado por um dipolo magnético de $8,06 \times 10^5$ Wb.m no centro da Terra, fazendo um ângulo de $11,5^\circ$ com o eixo polar geográfico (Shrivastava e Modi, 1983). Para este modelo, a intensidade varia com o inverso do cubo da distância ao centro da Terra, sendo significativo até 1.500 km.

O torque magnético pode ser reduzido através de:

- 1) minimização do uso de materiais ferromagnéticos;
- 2) montagem de circuitos elétricos de maneira que minimizem o momento de dipolo do satélite;
- 3) redução da espessura e interrupção da continuidade do material estrutural condutor para minimizar correntes induzidas;
- 4) seleção de material.

Em virtude do torque magnético ser pequeno quando comparado com os demais torques externos já descritos, não foi considerado. De qualquer forma, trata-se de uma perturbação de baixa frequência.

3.1.4 - TORQUE DE RADIAÇÃO

"Os fótons ao incidirem na superfície externa do satélite, são refletidos ou absorvidos por esta; nesse processo ocorre uma mudança na quantidade de movimento, que se traduz por uma força e por um torque no satélite." (Carrara, 1982). Este torque é conhecido por torque de radiação.

As principais fontes de radiação são:

- 1) Sol: a radiação solar direta é dominante. Para órbitas heliossíncronas, a posição do vetor solar com relação ao plano orbital tem uma variação reduzida, sendo quase que exclusivamente devida a variação da declinação do Sol ao longo de um ano. O satélite permanece na sombra da Terra em parte da órbita e a intensidade varia muito pouco com a distância satélite-Sol.

- 2) Terra: a radiação refletida difusamente (parcela refletida especularmente é desprezível) ou albedo terrestre varia ligeiramente com a quantidade de nuvens e as características da superfície, e depende da geometria relativa entre o satélite, a Terra e o Sol.
- 3) Terra: a radiação ou reemissão terrestre na faixa do infravermelho é proporcional à quarta potência da temperatura absoluta da superfície terrestre e tem efeitos menores do que o albedo. Sua intensidade é constante, independentemente do satélite estar sobre o lado iluminado ou não. Adotou-se na modelagem uma temperatura uniforme e constante sobre toda a Terra. Neste caso, considerou-se a hipótese de que a atmosfera se imcumbem, por meio da convecção, de transferir calor das regiões mais quentes (equatoriais) para as regiões mais frias (polares) da Terra, atenuando a diferença de temperaturas entre as regiões.

Os torques de radiação são de baixa frequência e da mesma ordem de grandeza que os torques aerodinâmicos. Devido a disposição dos painéis e a posição relativa do Sol, o torque em relação ao eixo de roll é bem maior que nos outros eixos quando o satélite é iluminado pelo Sol.

Analogamente ao torque aerodinâmico, o torque de radiação solar direta foi simulado com os mesmos dados de entrada. A Figura 3.2 apresenta os resultados de Carrara (1988).

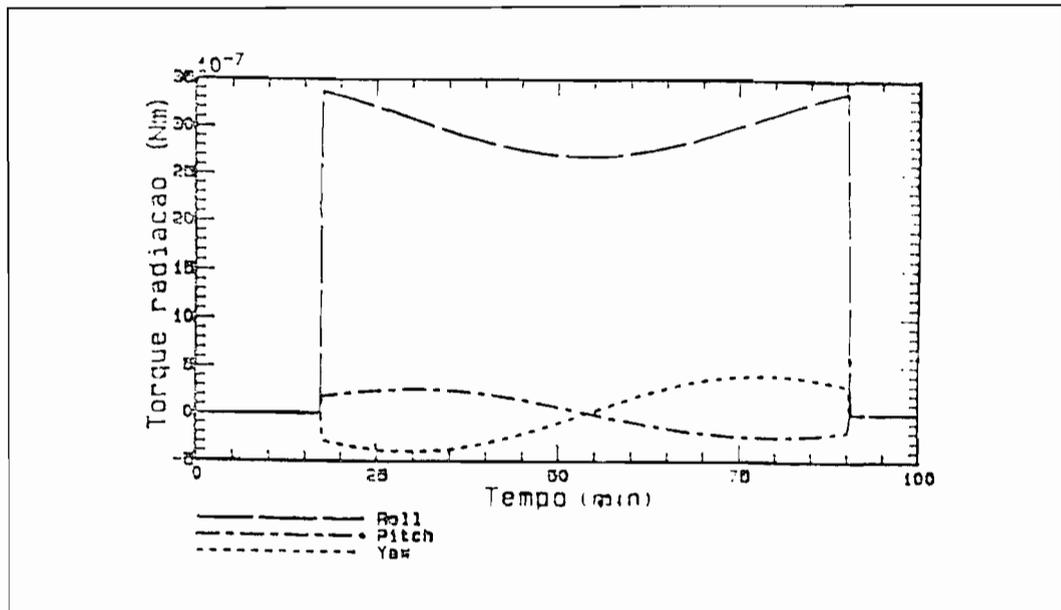


Fig. 3.2 - Torque de radiação.

3.2. - MODELAGEM DA DINÂMICA DE ATITUDE DO SATÉLITE

O satélite a ser modelado é composto por um corpo central (plataforma) ao qual são fixados três painéis solares (apêndices flexíveis). Os painéis solares são de pequenas dimensões ($L_1=0.0665\text{m}$, $L_2=1.07\text{m}$ e $L_3=0.659\text{m}$), com frequência natural do primeiro modo em torno de 13 Hz e com pequeno coeficiente de amortecimento da ordem de 0,02. Na plataforma encontram-se os elementos físicos do S.C.A., isto é, um volante de inércia no eixo de pitch e duas rodas de reação nos eixos de roll e yaw, respectivamente, tratando-se portanto de um corpo não rígido (Figura 3.3). O volante de inércia, cuja finalidade é fornecer rigidez giroscópica ao satélite, deixando-o menos sensível aos torques externos, provoca um forte acoplamento entre os eixos de roll e yaw, e o eixo de pitch é praticamente desacoplado.

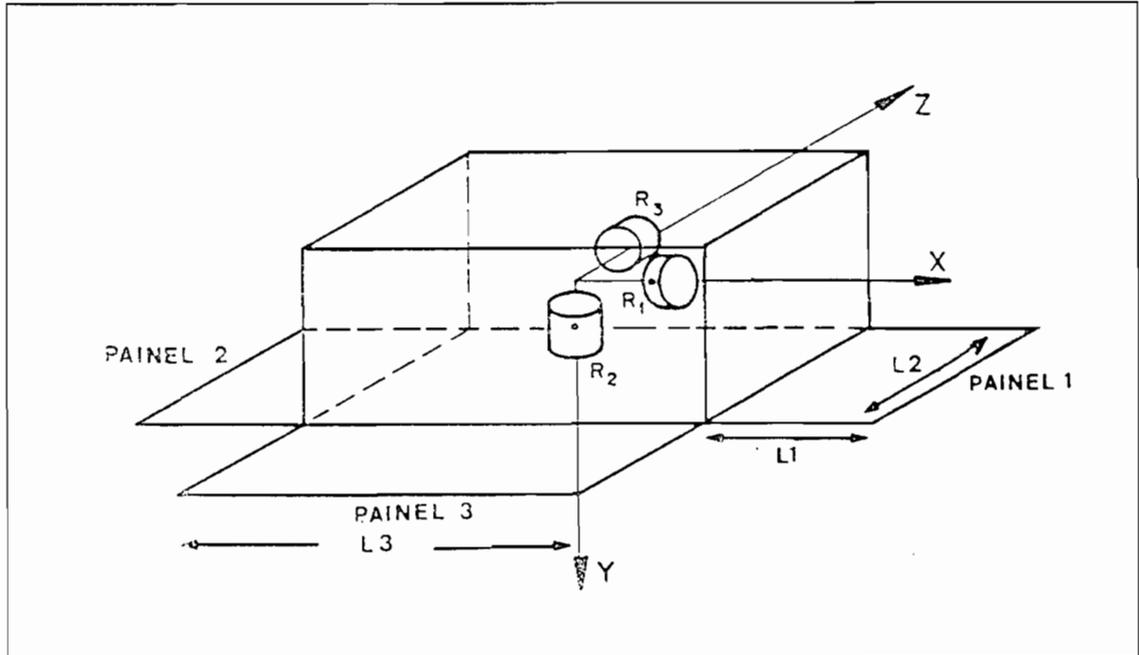


Fig. 3.3 - O satélite composto de plataforma, painéis solares e rotores.

O modelo da dinâmica de atitude do satélite foi obtido através da formulação Lagrangiana. Inicialmente foram feitas algumas considerações quanto à cinemática do problema, onde definiram-se sistemas de referência, obteve-se as componentes das velocidades angulares do satélite no referencial do satélite, em função dos ângulos de Euler e obteve-se os vetores posição de todos os elementos de massa do satélite (plataforma, rotores e painéis) em relação ao C.M. do satélite.

Em seguida foram desenvolvidas as expressões da energia cinética e da energia potencial para, finalmente, obter-se as equações de movimento do satélite.

a) Considerações quanto à Cinemática

Como existe movimento relativo entre as partes do satélite, é interessante definir os seguintes sistemas de referência (Figura 3.4):

- 1) Sistema inercial (referencial) $GXYZ$;
- 2) Sistema orbital (nominal) $Gx_n y_n z_n$ com origem no C.M. do satélite que mantém apontamento para a Terra, onde:

Gx_n - eixo no plano orbital, tangente à órbita e no sentido da velocidade;

Gy_n - eixo normal ao plano orbital com a mesma direção que o vetor rotação orbital $\vec{\omega}_o$, porém, de sentido contrário;

Gz_n - eixo normal ao plano $Gx_n y_n$ com Gz_n apontando para o centro da Terra, tratando-se, portanto, de um sistema dextrógiro.

Vale ressaltar que isto só é possível devido ao fato da órbita ser praticamente circular. Esta convenção é adotada em Wertz (1978).

- 3) Sistema fixo ao satélite $Gxyz$ com origem no C.M. do satélite. Os eixos coincidem com os eixos principais de inércia do satélite no estado não deformado dos painéis, onde:

Gx - eixo de "roll", nominalmente alinhado com Gx_n ;

Gy - eixo de "pitch", nominalmente alinhado com Gy_n ;

Gz - eixo de "yaw", nominalmente alinhado com Gz_n .

- 4) Sistema de referência dos painéis $X_{ai}Y_{ai}Z_{ai}$ com origem no ponto p_i , $i = 1, 2, 3$, coincidente com os pontos médios dos engastes dos painéis na plataforma.
- 5) Sistema de referência fixo ao rotor $X_{ri}Y_{ri}Z_{ri}$ com origem no ponto r_i , $i = 1, 2, 3$, coincidente com o C.M. do rotor.

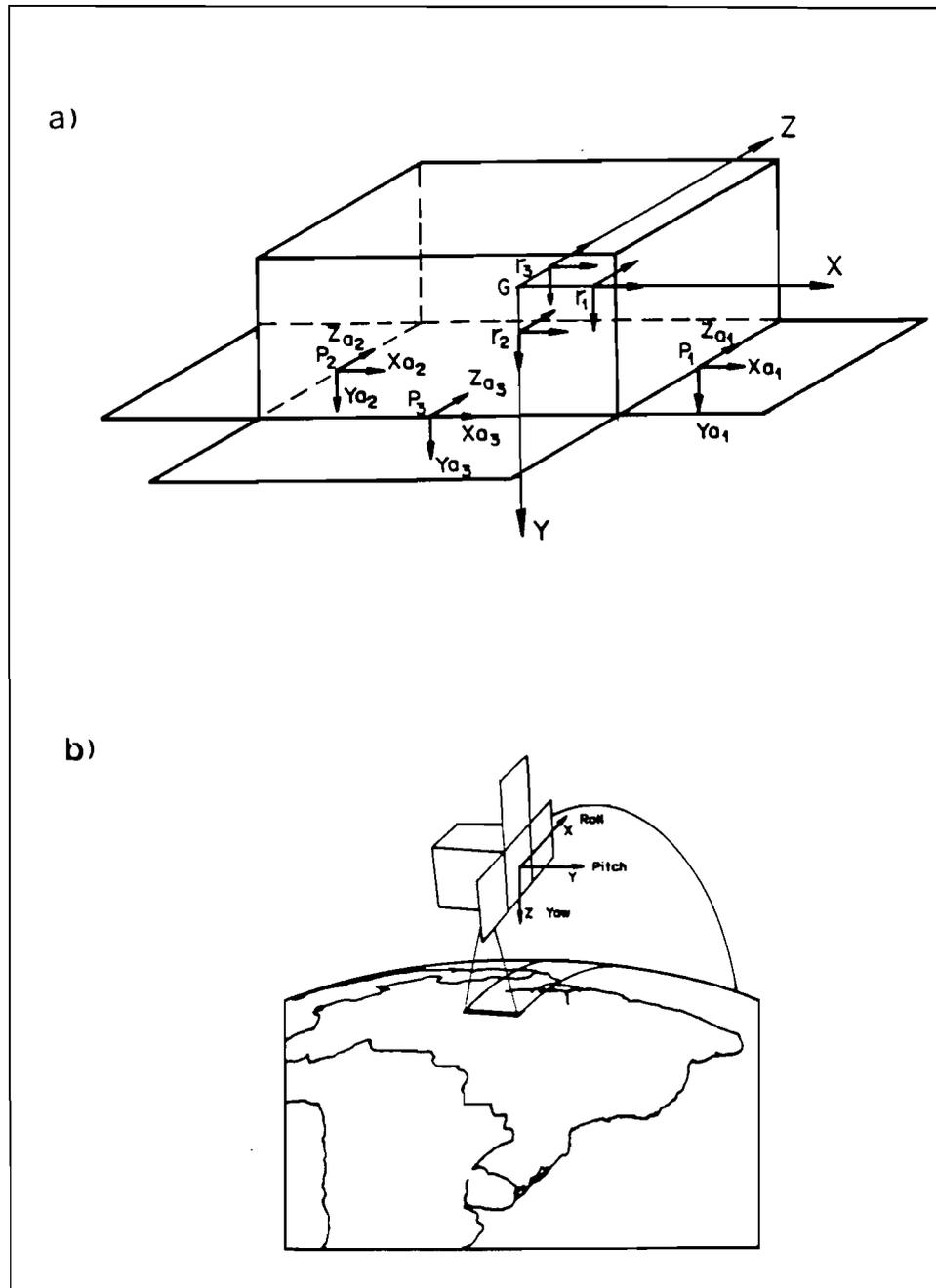


Fig. 3.4 - Sistemas de referência: a) Satélite;
b) Orbital.

Para se evidenciar o princípio de funcionamento do S.C.A. é conveniente decompor o vetor momento angular total do satélite \vec{H} da seguinte forma:

$$\vec{H} = \vec{I} \vec{\omega} + \vec{H}_R, \quad (3.5)$$

onde:

\vec{I} = tensor de inércia do satélite em relação ao sistema fixo ao satélite (inclui momentos de inércia das rodas);

\vec{H}_R = momento angular das rodas em relação ao satélite;

$\vec{\omega}$ = velocidade angular instantânea do satélite em relação ao referencial inercial.

Da Equação 3.5, observa-se que, mesmo alterando-se o momento angular total do satélite \vec{H} , é possível rearranjar o momento angular de forma que a plataforma atenda as especificações de atitude e de movimento de atitude, ou seja, são as rodas que absorvem os torques externos.

Existem várias maneiras de especificar a atitude (três eixos) de satélites (plataforma). São as chamadas parametrizações, cada uma sendo mais conveniente para determinadas aplicações. No caso de satélites estabilizados em três eixos, onde pequenos ângulos são usados, é conveniente utilizar os Ângulos de Euler (Wertz, 1978), que podem ser melhor entendidos tomando-se a transformação de coordenadas de um sistema para outro, através de três rotações sucessivas efetuadas numa sequência específica. Os Ângulos de Euler são, então, definidos como os três ângulos sucessivos de rotação, (três parâmetros independentes). Para rotações

infinitesimais, a ordem das três rotações é irrelevante, pois, rotações infinitesimais comutam. Considerando-se as rotações em torno de eixos distintos, preferível para tais aplicações (Goldstein, 1953; Meirovitch, 1970), onde:

φ - rotação em torno do eixo de roll (ângulo de roll),

θ - rotação em torno do eixo de pitch (ângulo de pitch),

ψ - rotação em torno do eixo de yaw (ângulo de yaw),

obtém-se, para pequenos ângulos, aproximação usualmente utilizada para estabilização de atitude, a seguinte matriz de transformação de coordenadas do sistema orbital $Gx_n y_n z_n$ para o sistema do satélite $Gxyz$:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

conhecida também por matriz de atitude, onde os ângulos φ , θ , ψ são tomados no sentido anti-horário.

Neste ponto, é possível esclarecer os objetivos do controlador: manter o referencial do satélite $Gxyz$ o mais alinhado possível com o referencial orbital $Gx_n y_n z_n$. O erro de alinhamento entre os dois referenciais é medido através dos ângulos φ , θ e ψ .

A velocidade angular instantânea do satélite em relação ao sistema inercial $GXYZ$ é dada por (Figura 3.5):

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} + \dot{\varphi} + \dot{\psi} + \vec{\omega}_0, \quad (3.7)$$

onde:

- $\vec{\theta}$ = velocidade de rotação em torno do eixo Gy_n , que permite passar do sistema orbital $Gx_n y_n z_n$ para o sistema intermediário $Gx_1 y_1 z_1$,
- $\vec{\varphi}$ = velocidade de rotação em torno do eixo Gx_1 , que permite passar do sistema $Gx_1 y_1 z_1$ para o sistema intermediário $Gx_2 y_2 z_2$,
- $\vec{\psi}$ = velocidade de rotação em torno do eixo Gz_2 , que permite passar do sistema $Gx_2 y_2 z_2$ para o sistema do satélite $Gxyz$.

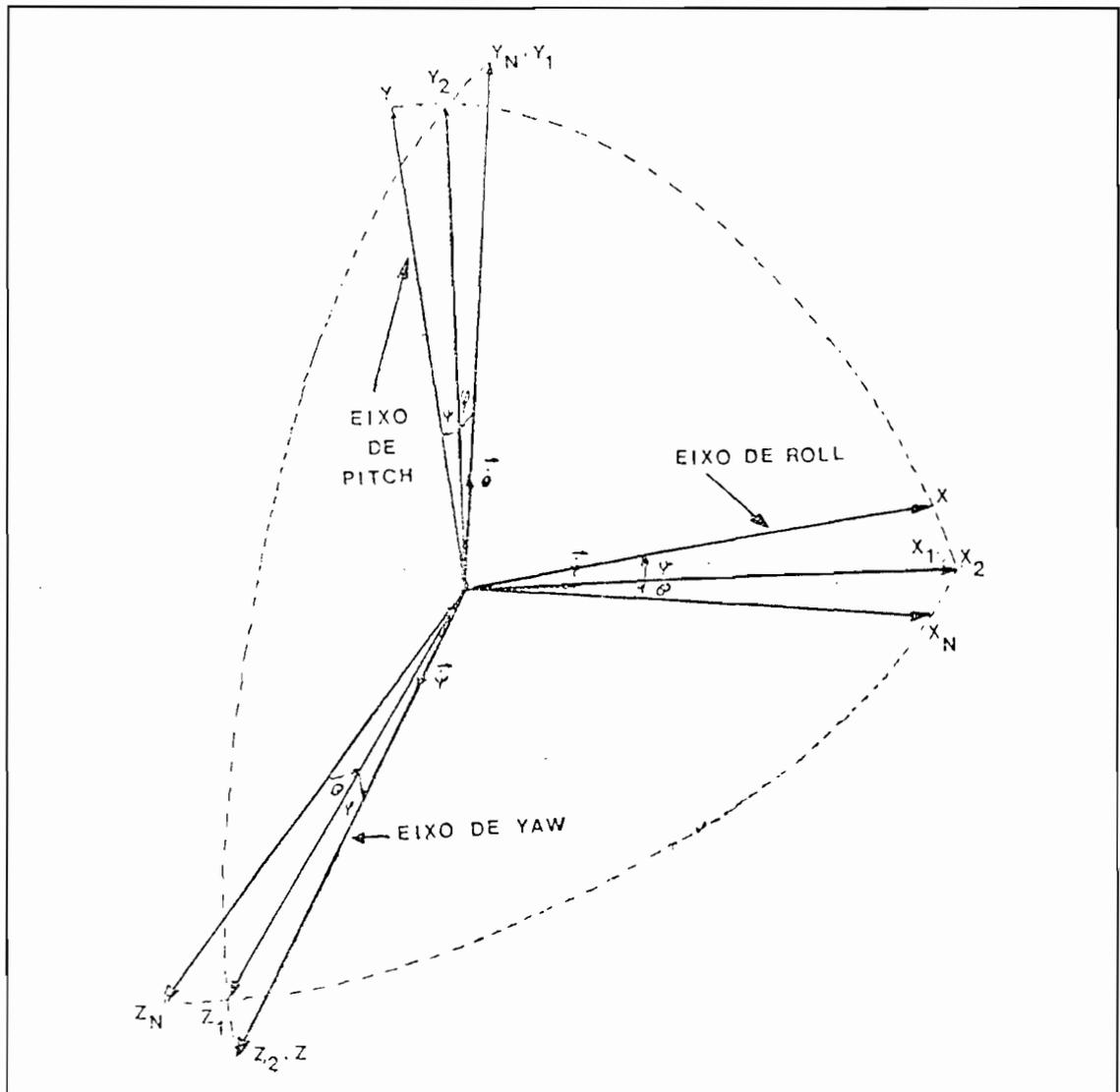


Fig. 3.5 - Rotações para se passar do sistema orbital para o sistema do satélite.

Adaptada de Hodapp (1973), p. 5.

Referindo-se $\vec{\omega}$ no referencial do satélite $Gxyz$, as componentes de $\vec{\omega}$ [w_x w_y w_z] podem ser obtidas através da Figura 3.5 e são dadas por:

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \cos\varphi\sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

É interessante notar que as velocidades angulares do satélite, referidas no sistema $Gxyz$, não são as derivadas dos ângulos de Euler, mas uma combinação não integrável destes. As componentes w_x , w_y e w_z também são conhecidas por derivadas de quasi-coordenadas (Meirovitch, 1970).

Para pequenos ângulos, as componentes da velocidade \vec{w} nos eixos de roll, pitch e yaw são, respectivamente:

$$w_x = \dot{\varphi} - \omega_0\psi, \quad (3.9a)$$

$$w_y = \dot{\theta} - \omega_0\varphi, \quad (3.9b)$$

$$w_z = \dot{\psi} + \omega_0\varphi. \quad (3.9c)$$

No desenvolvimento a seguir, são admitidas as seguintes hipóteses:

- a) O rotor possui simetria axial, com desbalanceamento dinâmico nulo e o eixo de rotação de cada rotor está alinhado com cada um dos eixos principais de inércia do satélite.
- b) O C.M. do satélite no estado deformado coincide com o C.M. do satélite no estado não deformado.

Os vetores posição dos elementos de massa da plataforma (\vec{R}_p) e dos rotores (\vec{R}_R) em relação ao C.M. do satélite são dadas na Figura 3.6 onde:

$$\vec{R}_{Ri} = \vec{h}_i + \vec{r}_{Ri} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.10)$$

\vec{h}_i = posição do C.M. do i -ésimo rotor em relação ao C.M. do satélite;

\vec{r}_{Ri} = posição dos elementos de massa do rotor em relação ao C.M. do rotor.

dm_{Ri} = elemento de massa do i -ésimo rotor.

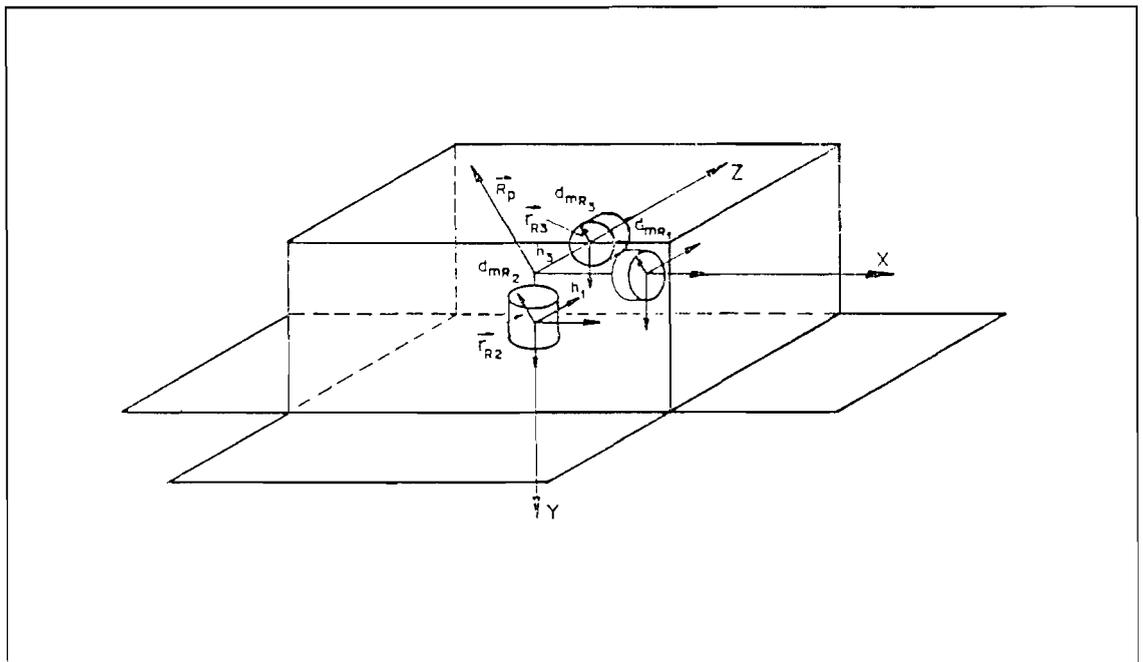


Fig. 3.6 - Posição dos elementos de massa da plataforma e dos rotores.

Quanto aos painéis flexíveis, algumas considerações devem ser feitas:

- 1) Considerou-se o painel como uma placa de espessura fina o suficiente para valerem as aproximações.
- 2) Considerou-se apenas o primeiro modo de flexão (movimento na direção do eixo y). Devido ao engaste em toda base do painel e os mesmos serem curtos, pode-se desconsiderar os modos de torção, pois são de frequências bem mais elevadas.
- 3) Admitiu-se engaste perfeito, isto é, com rigidez infinita.
- 4) Os painéis opostos são idênticos e simétricos em relação ao plano yz .
- 5) Considerou-se modos antissimétricos para os painéis opostos (Meirovitch, 1976), pois, modos simétricos não interferem no movimento de atitude (Wertz, 1978).
- 6) Os deslocamentos elásticos são pequenos.

Desta forma, as posições dos elementos de massa dos painéis em relação ao centro de massa do satélite (\vec{R}_{ai}) são dadas por (Figura 3.7):

$$\vec{R}_{a1} = \vec{b}_1 + \vec{r}_{a1} + \vec{e}_1(x_{a1}, z_{a1}, t) , \quad (3.11a)$$

$$\vec{R}_{a2} = \vec{b}_2 + \vec{r}_{a2} - \vec{e}_1(-x_{a1}, z_{a1}, t) , \quad (3.11b)$$

$$\vec{R}_{a3} = \vec{b}_3 + \vec{r}_{a3} + \vec{e}_3(x_{a3}, z_{a3}, t) , \quad (3.11c)$$

onde \vec{e}_i são os deslocamentos elásticos, funções da posição e do tempo, \vec{b}_i é a posição do ponto médio da base de fixação do painel em relação ao C.M. do satélite e \vec{r}_{ai}

são as posições dos elementos de massa dos painéis em relação ao ponto médio da base de fixação do painel ($i = 1, 2$ e 3).

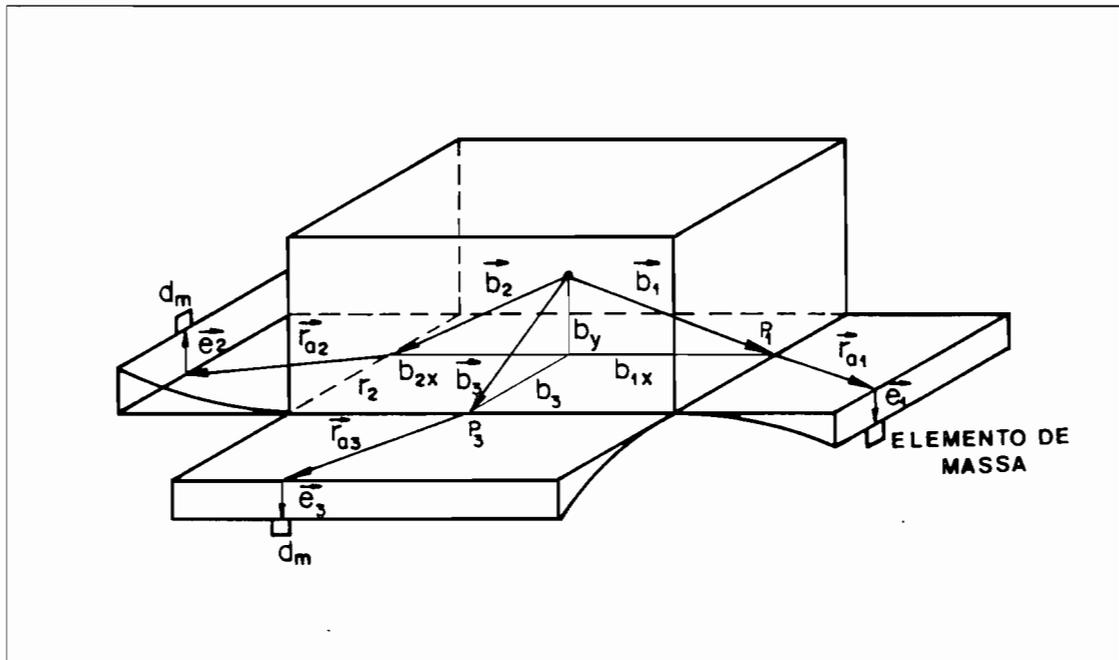


Fig. 3.7 - Posição dos elementos de massa dos apêndices flexíveis.

Tratando-se de um sistema contínuo, as equações de movimento obtidas através da formulação Lagrangiana são híbridas, isto é, são compostas por equações diferenciais parciais associadas aos deslocamentos elásticos e equações diferenciais ordinárias, associadas ao movimento de corpo rígido. Como estas equações são difíceis de tratar do ponto de vista do controle, os deslocamentos elásticos dos painéis devem ser discretizados, tendo em vista a obtenção de um modelo descrito unicamente por equações diferenciais ordinárias.

Existem diversos processos de discretização. No caso, será assumido que os deslocamentos elásticos podem ser representados como a superposição de funções admissíveis dependentes do espaço, multiplicadas por coordenadas generalizadas dependentes do tempo (Equação 3.12). De certa forma estas funções são arbitrárias e devem satisfazer somente as condições de contorno geométricas.

b) Discretização

A forma particular dos painéis, placas retangulares de espessura constante, engastadas somente em um lado, sugerem que o movimento dos elementos da placa podem ser modelados como a composição dos movimentos de uma viga engastada-livre e uma viga livre-livre:

$$e_i(x_{a1}, z_{a1}, t) = \sum_{m=1}^a \sum_{n=1}^b \Phi_m(x_{a1}) \Psi_n(z_{a1}) q_{mni}(t), \quad i = 1, 2, \quad (3.12a)$$

$$e_3(x_{a3}, z_{a3}, t) = \sum_{m=1}^a \sum_{n=1}^b \Phi_m(z_{a3}) \Psi_n(x_{a3}) q_{mni}(t) \quad (3.12b)$$

onde:

q_{mni} = coordenada generalizada associada ao m-ésimo modo de vibração de uma viga engastada-livre e ao n-ésimo modo de vibração de uma viga livre-livre do i-ésimo painel.

a = número de modos de vibração de viga engastada-livre considerados.

b = número de modos de vibração de viga livre-livre considerados.

As funções admissíveis Φ_m e Ψ_n devem, portanto, satisfazer as condições de contorno geométricas de uma viga engastada-livre e de uma viga livre-livre, respectivamente.

Meirovitch (1976) mostrou que para o primeiro modo de vibração de uma viga engastada-livre ($m = 1$), obtém-se bons resultados quando $\Phi_m(x) = x^2/l^2$, onde l é o comprimento da viga.

Para a viga livre-livre, toma-se a função característica do primeiro modo ($n = 1$), isto é, $\Psi_n(z) = 1$ (sem torção). Desta forma, a Equação 3.11 é dada por:

$$\vec{e}_1(x_{a1}, z_{a1}, t) = \Phi(x_{a1}) q_1 \vec{j} = \frac{x_{a1}^2}{l^2} q_1 \vec{j} , \quad (3.13a)$$

$$\vec{e}_2(x_{a2}, z_{a2}, t) = -\vec{e}_1(-x_{a1}, z_{a1}, t) = -\frac{x_{a1}^2}{l^2} q_1 \vec{j} , \quad (3.13b)$$

$$\vec{e}_3(x_{a3}, z_{a3}, t) = \Phi(z_{a3}) q_3 \vec{j} = \frac{z_{a3}^2}{l^2} q_3 \vec{j} , \quad (3.13c)$$

onde \vec{j} é o versor na direção y e q_i é a coordenada generalizada associada ao i -ésimo painel. Para simplificação de notação, $q_{11i} = q_i$. Considerou-se $q_2 = -q_1$, pois são modos antissimétricos.

c) Lagrangiano

Como as velocidades e os ângulos não estão relacionados por simples integração, as equações do movimento rotacional podem ser dadas em termos de quasi-coordenadas (Meirovitch, 1970), e são obtidas de:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \right\} + [\tilde{w}] \left\{ \frac{\partial T}{\partial w} \right\} = \{M\} , \quad (3.14)$$

onde:

$$[\tilde{w}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} ; \quad (3.15)$$

$$\{M\} = [M_x \ M_y \ M_z] ; \quad (3.16)$$

w_x , w_y e w_z = componentes da velocidade angular do sistema fixo ao satélite em relação ao espaço inercial expresso em termos de componentes no sistema do satélite;

M_x , M_y e M_z = componentes dos torques externos nos eixos x , y e z , respectivamente.

T = energia cinética de rotação total do satélite em relação ao referencial inercial (a energia cinética de translação do C.M. do satélite não é considerada, pois, interessa somente a dinâmica de atitude);

A equação de movimento elástico é dada por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad , \quad (3.17)$$

onde \mathcal{L} é a função Lagrangiana, dada por $\mathcal{L} = T - V$, V é a energia potencial do satélite e Q_i é a força generalizada associada ao movimento elástico.

d) Energia Cinética

A energia cinética de um corpo é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_m \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} \, dm \quad , \quad (3.18)$$

onde \vec{R} é a posição dos elementos de massa dm do corpo.

No caso, interessa-nos as equações da dinâmica de atitude, ou seja, não é necessário a energia cinética de translação do C.M. do satélite. A energia cinética de rotação do satélite é dada pela soma das energias cinéticas da plataforma, dos rotores e dos apêndices:

$$T = \frac{1}{2} \int_{m_p} \dot{\vec{R}}_p \cdot \dot{\vec{R}}_p \, dm_p + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{m_r} \dot{\vec{R}}_{Ri} \cdot \dot{\vec{R}}_{Ri} \, dm_r + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{m_a} \dot{\vec{R}}_{ai} \cdot \dot{\vec{R}}_{ai} \, dm_a \quad . \quad (3.19)$$

Desenvolvendo-se todos os termos, (Apêndice B), chega-se a expressão da energia cinética de rotação:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} [(I_x + 2Ae\dot{q}_1^2 + Ae3\dot{q}_3^2 + 2Aye3\dot{q}_3) W_x^2 + I_y W_y^2 + \\
 & + (I_z + 2Ae\dot{q}_1^2 + Ae3\dot{q}_3^2 + 2Aze3\dot{q}_3) W_z^2 + I_{xx_{R1}} W_{x_{R1}}^2 + \\
 & + I_{yy_{R2}} W_{y_{R2}}^2 + I_{zz_{R3}} W_{z_{R3}}^2] + Ae\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} Ae3\dot{q}_3^2 - \\
 & - 2Axe\dot{q}_1 W_x W_y + Aze3\dot{q}_3 W_y W_z + I_{xx_{R1}} W_x W_{x_{R1}} + \\
 & + I_{yy_{R2}} W_y W_{y_{R2}} + I_{zz_{R3}} W_z W_{z_{R3}} + 2Axe\dot{q}_1 W_z + Aze3\dot{q}_3 W_x ,
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde:

$$Ae = \int_{m_a} \Phi(x_{a1})^2 dm_a , \tag{3.21a}$$

$$Axe = \int_{m_a} (b_x + x_{a1}) \Phi(x_{a1}) dm_a , \tag{3.21b}$$

$$Ae3 = \int_{m_a} \Phi(z_{a3})^2 dm_a , \tag{3.21c}$$

$$Aze3 = \int_{m_a} (b_z + z_{a3}) \Phi(z_{a3}) dm_a , \tag{3.21d}$$

$$Aye3 = \int_{m_a} b_y \Phi(z_{a3}) dm_a , \tag{3.21e}$$

I_x, I_y, I_z	= momentos de inércia total do satélite no estado não deformado em relação aos eixos principais do satélite;
$I_{xx_{R1}}, I_{yy_{R2}}, I_{zz_{R3}}$	= momentos de inércia dos rotores em relação ao referencial fixo ao rotor;
$w_{x_{R1}}, w_{y_{R2}} \text{ e } w_{z_{R3}}$	= velocidades angulares dos rotores.

e) Energia Potencial

No caso de satélites, geralmente, a energia potencial é composta por duas parcelas: Energia Potencial Elástica, devido a flexibilidade dos apêndices, a qual é função da forma, do tipo de engaste e das propriedades físicas do material que o constitui e Energia Potencial Gravitacional que, basicamente, é função da forma, atitude e altitude do satélite.

Foi considerado apenas a Energia Potencial Elástica. O efeito gravitacional, geralmente desprezível em satélites que não apresentam assimetria acentuada e de alta altitude, foi considerado como torque externo, sendo representado pelas expressões dadas na seção 3.1.1.

Embora, geralmente, os painéis solares tenham como estrutura a composição sanduíche, onde o recheio é em

forma de colméia de forma a serem mais rígidos a flexão, os painéis foram considerados como placas equivalentes de material homogêneo e distribuído continuamente em seu volume. Foi também admitido que o corpo é isótropo e que o engaste é perfeito.

A Energia Potencial Elástica (V_E) armazenada no sistema, quando estes estão submetidos à pequenas deflexões, é dada por (Roma, 1990; Leissa, 1969):

$$V_E = - \frac{1}{2} \sum_i D_i \int_{\Psi_i} \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} - 2(1-\nu_i) \left[\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right) d\Psi_i, \quad (3.22)$$

onde:

- D_i = $E_i h_i^3 / [12(1-\nu_i^2)]$,
- E_i = módulo de elasticidade longitudinal,
- ν_i = coeficiente de Poisson,
- $d\Psi_i$ = elemento de área,
- h_i = espessura do i -ésimo painel,
- e = deslocamento elástico.

Substituindo a Equação 3.13 na Equação 3.22, chega-se a:

$$V_E = - \frac{2}{l^4} \sum_{i=1}^3 D_i \int_{P_{si}} dP_{si} q_i^2, \quad (3.23a)$$

ou

$$V_E = 2V_{e1}q_1^2 + V_{e3}q_3^2, \quad (3.23b)$$

onde V_{ei} é a Energia Potencial do i -ésimo painel. A primeira parcela é devido aos painéis 1 e 2 e a segunda é devido ao painel 3.

f) Equações de Movimento

As equações de movimento de corpo rígido e de movimento dos apêndices flexíveis são, então, obtidas a partir das Equações 3.14 e 3.16. Neste ponto, como é usual, admite-se que o controlador está funcionando satisfatoriamente e que o satélite atende tanto aos requisitos de atitude como aos de movimento de atitude. As especificações admitidas são:

Especificações de atitude:

$$\theta_{\max} = \varphi_{\max} = \psi_{\max} = 0,5^\circ \cong 0,00872 \text{ rad}.$$

Especificações de movimento de atitude:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{\max} &= 10^{-2} \text{ }^\circ/\text{s} \cong 0,000174 \text{ rad/s}, \\ \dot{\theta}_{\max} &= \dot{\varphi}_{\max} = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ/\text{s} \cong 0,000113 \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

Na análise de magnitude dos termos das equações obtidas, consideraram-se os seguintes valores numéricos:

Momentos de inércia :

$$I_x = 31,4 \text{ kgm}^2 ,$$

$$I_y = 21,4 \text{ kgm}^2 ,$$

$$I_z = 16,1 \text{ kgm}^2 .$$

Momento do volante de inércia:

$$H_y = 30 \text{ Nms } \pm 10\% ,$$

Momentos das rodas de reação :

$$H_{x_{\max}} = H_{z_{\max}} = 3 \text{ Nms (dessaturação) } ,$$

Deslocamento máximo na extremidade do painel:

$$q_{i_{\max}} = 1e-4 \text{ mm.}$$

Rotação orbital:

$$\omega_0 = 0,00108 \text{ rad/s (640 km) } .$$

Após a linearização (eliminando-se os termos de segunda ordem), as equações de movimento de corpo rígido e de movimento dos apêndices flexíveis, são dadas por:

Corpo Rígido:

$$I_x \dot{W}_x + \dot{H}_x - H_y W_z + H_z W_y + A_{ze3} \ddot{q}_3 = \tau_{extx} + GG_x \quad (3.24a)$$

$$I_y \dot{W}_y + \dot{H}_y + H_x W_z - H_z W_x = \tau_{exty} + GG_y \quad , \quad (3.24b)$$

$$I_z \dot{W}_z + \dot{H}_z - H_x W_y + H_y W_x + A_{xe3} \ddot{q}_1 = \tau_{extz} + GG_z. \quad (3.24c)$$

Apêndices Flexíveis:

$$2A_e \ddot{q}_1 + 2V_{e1} \dot{q}_1 + c_1 \dot{q}_1 + 2A_{xe} \dot{W}_z = 0 \quad , \quad (3.25a)$$

$$A_{e3} \ddot{q}_3 + V_{e3} \dot{q}_3 + c_3 \dot{q}_3 + A_{ze3} \dot{W}_x = 0 \quad , \quad (3.25b)$$

onde:

GG_x, GG_y, GG_z = componentes dos torques devido ao gradiente de gravidade nos eixos x, y e z , respectivamente,

c_1, c_3 = coeficientes de amortecimento dos painéis.

$\dot{H}_x, \dot{H}_y, \dot{H}_z$ = torques de controle nas rodas de momento e reação.

Substituindo-se a Equação 3.9 nas Equações 3.24 e 3.25 e, incluindo-se o gradiente de gravidade (Equação 3.1), numa análise de magnitude, alguns termos não lineares podem ser eliminados, inclusive a contribuição do gradiente de gravidade e, então, chega-se à:

Corpo Rígido:

$$I_x \ddot{\phi} - H_y \dot{\psi} - H_y \omega_0 \phi - \omega_0 H_z + A_{ze3} \ddot{q}_3 + \dot{H}_x = \tau_x \quad , \quad (3.26a)$$

$$I_y \ddot{\theta} + \dot{H}_y = \tau_y \quad , \quad (3.26b)$$

$$I_z \ddot{\psi} + H_y \dot{\phi} - H_y \omega_0 \psi + \omega_0 H_x + A_{xe3} \ddot{q}_1 + \dot{H}_z = \tau_z \quad . \quad (3.26c)$$

Apêndices Flexíveis:

$$2Ae\ddot{q}_1 + 2Ve_1\dot{q}_1 + c_1\dot{q}_1 + 2Axe\dot{\psi} = 0 , \quad (3.27a)$$

$$Ae_3\ddot{q}_3 + Ve_3\dot{q}_3 + c_3\dot{q}_3 + Aze_3\ddot{\phi} = 0 . \quad (3.27b)$$

Observa-se que os eixos de roll e yaw estão acoplados e o eixo de pitch, desacoplado. Os termos que dependem da velocidade das rodas de reação ($-\omega_0 H_z$ e $\omega_0 H_x$) são praticamente cancelados através da inclusão de um termo igual e contrário na lei de controle (Equação 3.30), utilizando-se a velocidade medida das rodas de reação (Wertz, 1978). Obtém-se, então, o seguinte sistema linear semelhante aos obtidos em Wertz (1978), Hodapp (1973), Kaplan (1976), Wie (1985):

$$I_x\ddot{\phi} - H_y\dot{\psi} - H_y\omega_0\phi + Aze_3\ddot{q}_3 + \dot{H}_{px} = \tau_x , \quad (3.28a)$$

$$I_y\ddot{\theta} + \dot{H}_y = \tau_y , \quad (3.28b)$$

$$I_z\ddot{\psi} + H_y\dot{\phi} - H_y\omega_0\psi + Axe\ddot{q}_1 + \dot{H}_{pz} = \tau_z . \quad (3.28c)$$

$$2Ae\ddot{q}_1 + 2Ve_1\dot{q}_1 + c_1\dot{q}_1 + 2Axe\dot{\psi} = 0 , \quad (3.29a)$$

$$Ae_3\ddot{q}_3 + Ve_3\dot{q}_3 + c_3\dot{q}_3 + Aze_3\ddot{\phi} = 0 . \quad (3.29b)$$

onde:

$$\dot{H}_x = \dot{H}_{px} + \omega_0 H_z , \quad (3.30a)$$

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{pz} - \omega_0 H_x . \quad (3.30b)$$

Este sistema pode, então, ser decomposto em um sistema "SISO" (Equação 3.28b) e um sistema "MIMO" (Equações 3.28a e 3.28c).

É importante ressaltar que este modelo é aproximado e que, à medida que se consideram modos mais elevados, os parâmetros dos painéis (frequência, amortecimento, forma do modo) são menos precisos. No caso em que os termos não lineares são relevantes, em virtude da estrutura particular das equações dinâmicas, pode-se "cancelar" o efeito desses termos através da adição de um termo não linear à lei de controle linear, como realizado na Equação 3.30. Souza, L.C.G. (1987) trata do problema quando são considerados os termos não lineares do modelo da dinâmica de atitude.

O modelo dado pelas Equações 3.28a e c e 3.29, tem a seguinte forma:

$$M \ddot{q} + G \dot{q} + K q = Q [\tau_{ext} + \dot{H}_p] \quad , \quad (3.31)$$

onde M, G e K são, respectivamente, as matrizes de massa, giroscópica e de rigidez, e Q é a matriz das forças com origem não conservativa, e podem ser dadas por:

$$M = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 & Aze_3 \\ 0 & I_z & Axe & 0 \\ 0 & 2Axe & 2Ae & 0 \\ Aze_3 & 0 & 0 & Ae_3 \end{bmatrix} \quad (3.32a)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -Hy & 0 & 0 \\ Hy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3.32b)$$

$$K = \begin{bmatrix} -Hy\omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Hy\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2Ve_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ve_3 \end{bmatrix} \quad (3.32c)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32d)$$

onde:

$$q = [\varphi \ \psi \ q_1 \ q_3]^T \quad (3.32e)$$

cuja descrição de estados, considerando-se somente os torques de controle, é dada por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.33a)$$

$$y = Cx \quad (3.33b)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[G] \end{bmatrix} \quad (3.34a)$$

$$B = \begin{bmatrix} [0] \\ -[M]^{-1}[Q] \end{bmatrix} \quad (3.34b)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34c)$$

$$x = [\varphi \ \psi \ q_1 \ q_3 \ \dot{\varphi} \ \dot{\psi} \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_3]^T \quad (3.34d)$$

$$u = [\dot{H}_{px} \ \dot{H}_{pz}]^T \quad (3.34e)$$

3.3 - REDUÇÃO

É desejável projetar o controlador com um modelo com o menor número de estados. A dúvida reside em como eliminar estados, quais e com qual critério. Para isso existem os chamados métodos de redução de ordem, onde destaca-se o Método dos Resíduos (Athans, 1986).

O Método dos Resíduos baseia-se na eliminação dos pólos que tenham pequena influência no comportamento entrada-saída do sistema nas frequências de operação. Para isso, faz-se a expansão em frações parciais da matriz de função de transferência do sistema $G(s)$. No Apêndice E

encontra-se uma discussão sobre pólos e zeros de sistemas multivariáveis.

Um sistema, cuja descrição de estados é dada por:

$$\dot{x} = Ax + Bu , \quad (3.35a)$$

$$y = Cx , \quad (3.35b)$$

na descrição entrada-saída, ou seja, $y(s) = G(s)u(s)$, $G(s)$ é dada por:

$$G(s) = C (sI-A)^{-1} B , \quad (3.36)$$

que, supondo pólos distintos e expandindo em frações parciais, torna-se:

$$G(s) = \sum_{i=1}^n R_i / (s-\lambda_i) , \quad (3.37)$$

onde R_i é chamada matriz de resíduo no pólo $s = \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

A magnitude de cada matriz de resíduo, onde qualquer norma pode ser usada, fornece uma medida da importância da contribuição do pólo correspondente na descrição entrada-saída do sistema MIMO. A escolha dos pólos a serem retidos ou negligenciados deve ser feita considerando-se a magnitude da matriz de resíduo e a localização do pólo relativa à especificação da banda. Um pólo que tenha uma matriz de resíduo "grande" pode ser negligenciado se sua frequência for muito maior que a frequência de cruzamento ("crossover") desejada. Um pólo dentro da banda desejada pode ser negligenciado se sua matriz de resíduo for "pequena". A matriz de funções de

transferência resultante, é designada por matriz de funções de transferência reduzida $G_r(s)$. Vale ressaltar que a magnitude das matrizes de resíduos são dependentes da normalização (Apêndice C).

Para se retornar à descrição de estados existem inúmeras realizações possíveis. Deve-se, entretanto, tomar uma realização de mínimo número de estados cuja matriz de funções de transferência é dada por $G_r(s)$. Para isso, basta que a realização seja observável e controlável (Kailath, 1980).

Assume-se que o modelo reduzido $G_r(s)$ de ordem r é da forma:

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t) , \quad (3.38a)$$

$$y(t) = C_r x_r(t) + D_r u(t) , \quad (3.38b)$$

onde $x_r(t) \in R^r$, $u(t) \in R^p$, $y(t) \in R^p$, $n > r$ e,

$$x_r(t) = K_r x(t) , \quad (3.39)$$

onde K_r é uma matriz constante $r \times n$. O significado físico e as dimensões do controle $u(t)$ e da saída $y(t)$ são mantidos.

As etapas para se obter a descrição de estados do modelo reduzido são enumeradas a seguir:

- 1) Depois de eliminados os pólos, baseado na frequência e na magnitude do resíduo, toma-se a matriz A ; porém, com seus autovalores ordenados, $[\lambda_1(A), \dots, \lambda_r(A)]$.

2) Define-se a matriz T_r como:

$$T_r = \begin{bmatrix} T_{r1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_{rj} \end{bmatrix} , \quad (3.40)$$

onde, para cada autovalor distinto retido $T_{rk} = 1$ e para cada par complexo conjugado de autovalores retidos

$$T_{rk} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5i \\ 0.5 & 0.5i \end{bmatrix} , \quad (3.41)$$

onde:

$$\sum_{k=1}^j \dim(T_{rk}) = r . \quad (3.42)$$

3) Cálculo da matriz K_r e M_r :

$$K_r = T_r^{-1} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix} , \quad (3.43)$$

onde v_i são autovetores à esquerda de A .

$$M_r = (u_1, \dots, u_r) T_r , \quad (3.44)$$

onde u_i são autovetores à direita de A .

Deve-se ressaltar que os autovetores devem ser normalizados.

4) As matrizes de descrição de estados do modelo reduzido são obtidas de:

$$A_r = K_r A M_r , \quad (3.45a)$$

$$B_r = K_r B , \quad (3.45b)$$

$$C_r = C M_r , \quad (3.45c)$$

$$D_r = \sum_{i=r+1}^n R_i / (-\lambda_i) , \quad (3.45d)$$

onde $(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n)$ são os autovalores negligenciados.

Note que $G_r(s)$ é dado por:

$$G_r(s) = C_r (sI - A_r)^{-1} B_r + D_r , \quad (3.46)$$

e que,

$$G_r(s) = \sum_{i=1}^r (R_i/\lambda_i) / ((s/\lambda_i)-1) + \sum_{i=r+1}^n R_i / (-\lambda_i) . \quad (3.47)$$

Logo, o modelo original e o modelo reduzido coincidem em $s = 0$.

Finalizando, alguns comentários podem ser feitos:

- 1) A matriz A_r obtida na Equação 3.45a é uma matriz real com valores iguais aos autovalores remanescentes.
- 2) No processo de redução se altera o número e a posição dos zeros de transmissão, ou seja, podem ser introduzidos zeros de fase não mínima.
- 3) A redução pode ser feita depois, isto é, reduz-se a ordem do controlador obtido.

3.4 - MODELAGEM DAS INCERTEZAS DA PLANTA

Qualquer modelo apresenta, em algum nível, erro na representação de um sistema físico. Estes erros são chamados de incertezas do modelo e devem ser considerados no projeto, pois, podem até causar a instabilidade do sistema de controle.

As origens e naturezas das incertezas da planta são diversas, das quais podemos destacar:

- 1) variação e incertezas nos valores dos parâmetros;
- 2) negligência de dinâmicas rápidas (atuadores, sensores, modos flexíveis de alta frequência, etc);
- 3) linearização;
- 4) redução do modelo.

Resta saber como modelar tais incertezas que, por definição, não podem ser quantificadas de forma precisa. Tratando-se de incertezas de naturezas tão diferentes, suas representações são também variadas, dependem do tipo de modelo utilizado na planta e podem ser classificadas, num contexto linear em termos do seu grau de estrutura:

- 1) Incerteza estruturada: refere-se a erros de modelamento causados pelo fato de se assumir a planta real como linear, invariante no tempo com a mesma ordem (n) que o modelo da planta, exceto que os valores numéricos das matrizes que definem a representação de descrição de estados são diferentes da nominal. Mantém o mesmo número de pólos e zeros, porém influencia a localização dos

- pólos e zeros da planta real, quando comparados com os valores nominais. Incertezas do tipo (1) acima podem ser classificadas desta maneira. Geralmente é o caso das componentes do erro de baixa frequência.
- 2) Incerteza não estruturada: Assumimos que a planta real é linear e invariante no tempo, porém temos ignorância total quanto à ordem da planta e suas características de fase. Em particular, a base é que o erro de modelamento é caracterizado por uma incerteza de fase de $\pm 180^\circ$. A única informação é a magnitude do erro em função da frequência. Incertezas do tipo (2) acima são tipicamente representadas desta forma, embora incertezas do tipo (4) também possam ser tratadas, apesar dos erros introduzidos serem mais estruturados. Geralmente são erros de alta frequência e devem ser considerados, pois, podem até provocar a instabilidade do sistema. Tipicamente limitam a banda de malha fechada do sistema e, conseqüentemente, limitam o intervalo de frequências onde pode-se esperar bom acompanhamento do sinal de referência e boa rejeição à perturbações. Porém, ao se representar as incertezas como não estruturadas, o projeto pode se tornar conservador demais.

Erros de modelamento devido a incertezas não estruturadas não podem ser, em geral, capturados por um modelo de descrição de estados de dimensão finita. Então deve-se adotar um modelo entrada-saída e usar métodos no domínio da frequência para as incertezas não estruturadas. Quando a incerteza é dada através de matriz de funções de transferência, não se especifica o mecanismo ou a estrutura que provoca a incerteza. Esta pode ser causada por

variações de parâmetros, por dinâmicas negligenciadas ou por inúmeros efeitos não especificados. Incertezas não estruturadas não correspondem a todos os erros de modelamento esperados na prática, pois, além de sua natureza de dimensão infinita, o processo físico real é normalmente não linear e, possivelmente, variante no tempo. Estes erros podem ser estudados através de setores cônicos interpretados via teorema de Parseval (Zames, 1966a e b).

Erros de modelamento não estruturados são amplamente utilizados como uma representação genérica de incertezas para modelos lineares, invariantes no tempo e de dimensão finita.

A seguir é tratada a modelagem das incertezas não estruturadas.

Seja o sistema real e o modelo de projeto (Figura 3.8), onde:

$G_R(s)$ = matriz de funções de transferência do sistema real;

$G_N(s)$ = matriz de funções de transferência do modelo de projeto;

$K(s)$ = matriz de funções de transferência do compensador;

$T_N(s) = G_N(s)K(s)$ = matriz de funções de transferência de malha do modelo de projeto na saída;

$T_R(s) = G_R(s)K(s)$ = matriz de funções de transferência de malha do sistema real na saída;

$E(s)$ = matriz de funções de transferência do erro entre $T_N(s)$ e $T_R(s)$.

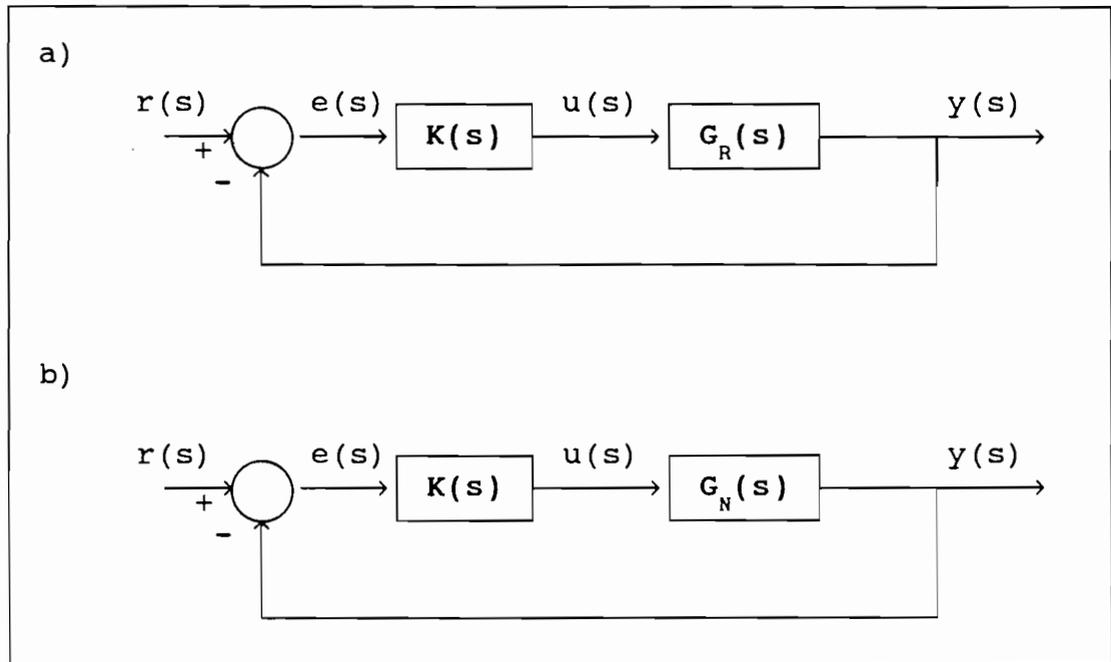


Fig. 3.8 - a) Sistema real; b) modelo de projeto.

Basicamente, os modelos de erros podem ser absolutos ou relativos. Erros absolutos são de natureza aditiva ou subtrativa (Figura 3.9) e erros relativos são de natureza multiplicativa ou divisiva (Figura 3.10).

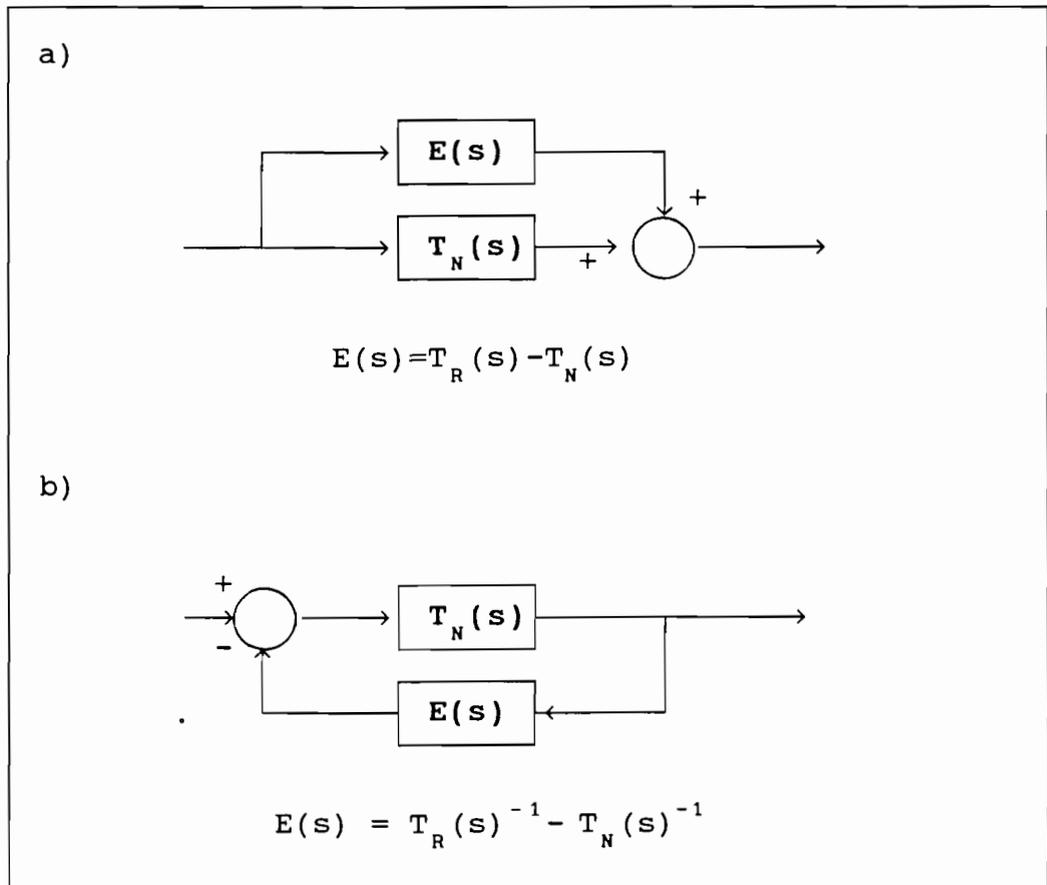


Fig. 3.9 - a) Erro de natureza aditiva; b) Erro de natureza subtrativa.

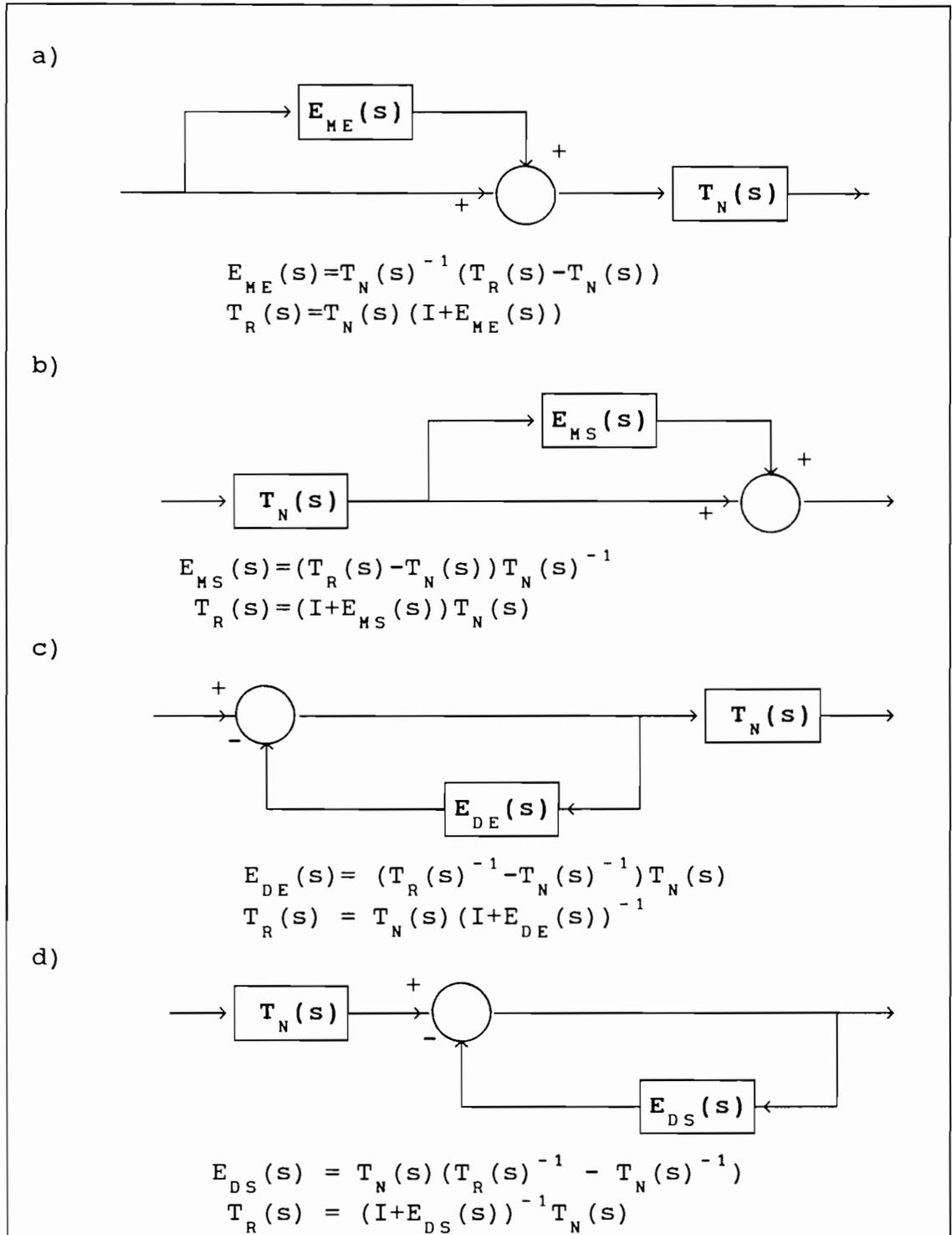


Fig. 3.10 - a) Erro multiplicativo na entrada; b) Erro multiplicativo na saída; c) Erro divisivo na entrada; d) Erro divisivo na saída.

Tanto os erros aditivos como os multiplicativos podem ser utilizados, embora os modelos multiplicativos apresentem algumas vantagens:

- 1) Confinam $T_R(s)$ a uma vizinhança normalizada de $T_N(s)$.
- 2) Podem ser usados tanto para $G(s)$ como para $G(s)K(s)$; para o caso do erro absoluto, o modelo do erro depende do compensador usado, o que não ocorre com o erro multiplicativo.
- 3) As conhecidas margens de fase e de ganho são de natureza multiplicativa.

Se as incertezas são muito diferentes para cada canal, é necessário normalizar as variáveis de entrada e de saída (Doyle e Stein, 1981). Diferentemente do caso SISO, no caso MIMO temos duas opções de representar a incerteza na forma multiplicativa, já que o produto de matrizes não é comutativo, podendo-se, refletir os erros de modelamento na saída ou na entrada da planta (Figura 3.10). Alguns erros são naturalmente refletidos na entrada da planta e são associados aos atuadores, enquanto outros são naturalmente refletidos na saída da planta, associados aos sensores. Entretanto, incertezas associadas com a dinâmica interna da planta não são naturalmente refletidas nem na entrada nem na saída da planta. Por uma conveniência matemática, deve-se optar pelo local onde serão refletidos os erros de modelamento.

Pode-se definir a matriz de incerteza multiplicativa $L(s)$ refletida na entrada ($L_E(s)$) ou na saída da planta ($L_S(s)$), dadas por:

$$T_R(s) = T_N(s)L_E(s) \quad , \quad (3.48a)$$

$$T_R(s) = L_S(s)T(s) \quad , \quad (3.48b)$$

e notar que $L_E(s)$ e $L_S(s)$ geralmente são diferentes.

Da Figura 3.10 e das Equações 3.48a e 3.48b, observa-se que o erro relativo e a matriz de incerteza estão relacionados por:

$$L_S(s) = (I + E_S(s)) \quad , \quad (3.49a)$$

$$L_E(s) = (I + E_E(s)) \quad . \quad (3.49b)$$

Existe ainda, porém, o problema de quantificar tais erros, isto é, não se conhece a matriz de erro $E(s)$ ou a matriz de incerteza $L(s)$, caso contrário deixaria de ser, por definição, incerteza. Em geral, coloca-se limites no erro máximo com base no conhecimento da planta. Os valores singulares (Apêndice D) da matriz $E(s)$ podem ser bons indicadores da magnitude do erro e podem ser interpretados da seguinte forma: nas frequências em que os valores singulares máximos de $E(s)$ são pequenos, pode-se esperar semelhanças no comportamento entrada-saída do sistema real e do modelo de projeto, enquanto que nas frequências em que os valores singulares máximos de $E(s)$ são grandes, há direções em que as matrizes de função de

transferência $T_R(s)$ e $T_N(s)$ são bem diferentes. Tanto para o erro absoluto como para o erro relativo, este limite máximo pode ser dado pela seguinte inequação:

$$\sigma_{\max}[E(jw)] < \text{lm}(w) \quad , \quad (3.50)$$

onde $\text{lm}(w)$ é uma função escalar positiva que confina $T_R(s)$ a uma vizinhança de $T_N(s)$ com magnitude $\text{lm}(w)$.

Deve-se, então, estimar $\text{lm}(w)$ com o cuidado de que, se estes erros máximos forem superestimados, o projeto será por demasia conservador, o que comprometerá o desempenho do sistema. A idéia básica é: já que não se conhece exatamente o modelo real, trabalha-se em uma faixa onde ele certamente está.

A partir do momento que se obteve um modelo nominal e uma descrição da magnitude dos erros de modelamento, podem-se estabelecer condições para a robustez quanto à estabilidade de sistemas de controle multivariáveis, como será visto no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 4METODOLOGIA DE PROJETO

O método LQG/LTR é inerentemente um método de projeto para sistemas MIMO mas pode ser aplicado a sistemas SISO. Este método apresenta a grande vantagem de tratar a robustez a nível de projeto e é endereçado a problemas de controle nos quais somente as variáveis controladas são medidas.

O ponto de partida da metodologia LQG/LTR é o modelo de projeto da planta (linear, invariante no tempo e de dimensão finita), dado pela Equação 4.1, associado a uma estimativa da magnitude da incerteza não estruturada (Equação 4.2).

Descrição de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu , \quad (4.1a)$$

$$y = Cx + Du . \quad (4.1b)$$

Descrição entrada-saída:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D . \quad (4.1c)$$

Incerteza não estruturada da planta (modelo de erro multiplicativo, refletido na saída):

$$\sigma_{\max} [E(s)] = \sigma_{\max} [(G_R(s) - G_N(s))G_N(s)^{-1}] < \ln(w) . \quad (4.2)$$

É importante notar que este modelo, além de incluir o modelo nominal da dinâmica do processo físico, reflete a normalização das variáveis de entrada e saída

(Apêndice C) e, eventualmente, a planta é aumentada com dinâmicas (como integradores) incluídas para que o sistema tenha características especiais quanto à rejeição de perturbações e ao comportamento de seguidor.

O problema do projeto do sistema de controle pode ser dado, então, da seguinte forma: Obter um compensador $K(s)$ (linear, invariante no tempo e de dimensão finita) - Figura 4.1 - tal que o sistema apresente:

- a) Estabilidade Nominal,
- b) Robustez quanto a estabilidade a erros de modelamento,
- c) Bom desempenho do sistema real.

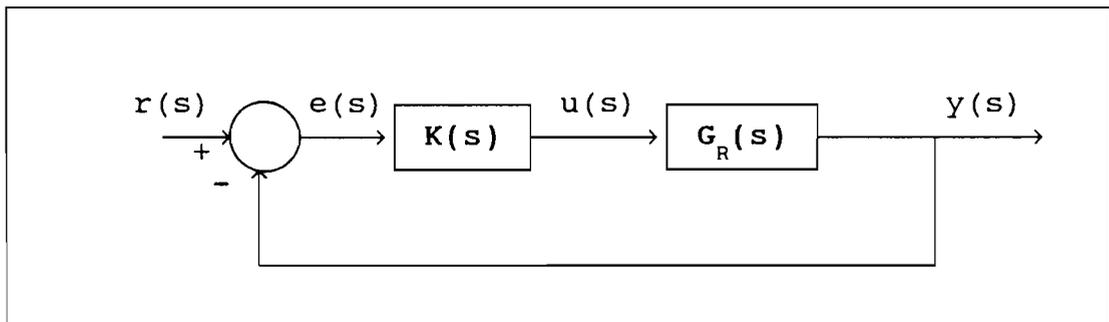


Fig. 4.1 - Sistema de Controle MIMO.

Propriedades de sistemas lineares como estabilidade (incluindo margens de estabilidade), sensibilidade e atenuação a perturbações só podem ser alteradas através do uso da realimentação (Safonov et al., 1981). Estas propriedades estão relacionadas a magnitude dos valores singulares da matriz de transferência diferença de retorno $[I+G_N(s)K(s)]$ no Diagrama de Bode. Logo, os requisitos a, b e c, podem ser

interpretados como restrições no domínio da frequência na matriz de funções de transferência de malha nominal $G_N(s)K(s)$, como será visto a seguir.

a) Estabilidade Nominal

Em sistemas SISO, a estabilidade nominal do sistema pode ser verificada através do Critério de Nyquist padrão, enquanto que para sistemas MIMO pode ser utilizada a sua extensão multivariável (Apêndice F). Nos dois casos tratam-se de restrições no domínio da frequência na matriz $G_N(s)K(s)$.

b) Robustez da Estabilidade

A questão básica é caracterizar a robustez do sistema realimentado, isto é, a extensão com que a matriz $G_N(s)K(s)$ pode variar a partir de seus valores nominais sem comprometer a estabilidade do sistema em malha fechada. A estimativa da extensão da variação de $G_R(s)K(s)$ é dada pela Equação 4.2. Deseja-se, então, que o compensador $K(s)$ diante da planta nominal $G_N(s)$ (Figura 3.8a) e da planta real $G_R(s)$ (Figura 3.8b) seja estável em malha fechada.

A análise para o sistema nominal baseou-se no critério de Nyquist multivariável (Apêndice F), o qual estabelece que, o sistema será estável se o número de envoltimentos do mapeamento $\det[I+G_N(s)K(s)]$ para o contorno padrão de Nyquist D_R , que engloba todo o semi-plano direito, for igual ao número de pólos instáveis do sistema em malha aberta.

É importante ressaltar que o critério de Nyquist MIMO é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade em malha fechada. O problema é que o diagrama de Nyquist MIMO não pode ser analisado como o diagrama de Nyquist SISO, pois, através do diagrama, não se sabe a "distância" do sistema nominal da instabilidade, e o que queremos é garantias na estabilidade do sistema real (sistema nominal acrescido de incertezas).

Algumas observações quanto ao critério de Nyquist multivariável podem ser feitas, o que o distingue do caso SISO:

- 1) O diagrama de Nyquist para o caso MIMO, ao contrário do caso SISO, não fornece informação sobre o tipo de compensação necessária para melhorar a robustez do sistema;
- 2) O diagrama de Nyquist para o caso MIMO não fornece medida de robustez, ao contrário do caso SISO, onde as margens de fase e de ganho são facilmente obtidas do diagrama;
- 3) A importância do critério de Nyquist MIMO reside no fato que os testes de robustez da estabilidade derivam deste critério;
- 4) A dependência de $\det[I+G_N(s)K(s)]$ em relação ao compensador $K(s)$ é complicada.

São desenvolvidas condições suficientes para a robustez quanto a estabilidade de sistemas de controle multivariáveis com realimentação, as quais tem a forma de desigualdades no domínio da frequência que relacionam valores singulares de determinadas matrizes de função de transferência associadas ao sistema nominal à valores

singulares que refletem a magnitude dos erros de modelamento não estruturados em diferentes frequências. Estes testes são de utilidade no projeto, pois, auxiliam a garantir a estabilidade do sistema em malha fechada na presença de erros de modelamento através da escolha das características dinâmicas do compensador.

Considerando-se o sistema nominal estável, o sistema real permanecerá estável, ou não, dependendo da natureza e magnitude dos erros de modelamento, isto é, da diferença entre $G_R(s)$ e $G_N(s)$. Numa primeira análise, pode-se esperar que quando este erro for pequeno, o sistema real permanecerá estável em malha fechada, já que o sistema nominal é estável em malha fechada, e quando for grande, o sistema real poderá se tornar instável. Isto decorre do fato de se considerar as incertezas como não estruturadas, ou seja, só se tem conhecimento da magnitude do erro e, basta que esta seja grande, que sempre existirá uma fase "artificial" (pior caso), em que o sistema se tornará instável, sendo este um dos motivos de se obter condições tão conservativas, como será visto adiante.

O teorema da robustez da estabilidade (Apêndice G), estabelece que se a matriz de funções de transferência de malha nominal $T_N(s)$ e real $T_R(s)$ tem o mesmo número de pólos instáveis, os pólos no eixo $j\omega$ são idênticos, o sistema realimentado nominal de malha fechada é estável e consegue-se, através de uma transformação contínua do Diagrama de Nyquist, passar do sistema real ao nominal, sem mudar o número de envolvimentos do ponto crítico, o sistema real em malha fechada é estável. Isto é equivalente a requerer que, se para todas matrizes de

funções de transferência de malha genérica $T(s)$ permitidas pela Equação 4.2,

$$\det [I+T(s)] \neq 0 \quad , \quad (4.3)$$

então, o sistema real em malha fechada é estável.

Examinando-se a Equação 4.3, observa-se que é um teste baseado na singularidade, ou não, da matriz $I+T(s)$. Deve-se, então, desenvolver conceitos que quantifiquem a proximidade de uma matriz da singularidade. Autovalores e determinantes não são bons indicadores diretos da proximidade de uma matriz da singularidade enquanto que valores singulares são excelentes indicadores desta proximidade, como pode ser visto no Apêndice D.

Deriva-se do teorema da robustez da estabilidade (Apêndice G) que, se:

$$\sigma_{\min} [I+T_N^{-1}] > \sigma_{\max} [E(s)] \quad , \quad (4.4)$$

para todo $s \in \Omega_R$, onde Ω_R é o contorno de Nyquist considerado somente para as frequências positivas e o erro $E(s)$ é multiplicativo e considerado na saída da planta, isto é:

$$E(s) = [T_R(s) - T_N(s)] T_N^{-1}(s) \quad , \quad (4.5)$$

então, o sistema realimentado real é estável.

Para cada frequência, encontramos o menor erro de modelamento na pior direção possível, que causará o sistema realimentado estar no limite de instabilidade. Estas condições são somente suficientes para a estabilidade em malha fechada e derivam do critério de Nyquist

ignorando-se a informação da fase (erros não estruturados), obtendo-se uma condição um tanto conservadora. É importante ressaltar que, para cada modelo de erro, obtém-se uma condição e , sendo condições suficientes para garantir estabilidade, basta atender a condição mais branda.

Para se evidenciar as implicações desta condição, seja a matriz de função de transferência de malha fechada nominal $C_N(s)$:

$$C_N(s) = [I + T_N(s)]^{-1} T_N(s) . \quad (4.6)$$

Tomando-se a inversa dos dois lados da equação, tem-se que:

$$C_N^{-1}(s) = I + T_N^{-1}(s) . \quad (4.7)$$

Do teorema 2 do Apêndice G tem-se que, para o sistema real manter a estabilidade, deve-se ter:

$$\sigma_{\min}[C_N^{-1}] > \sigma_{\max}[E(s)] . \quad (4.8)$$

Das propriedades dos valores singulares (Apêndice D) tem-se:

$$\sigma_{\max}[C_N(s)] < \sigma_{\min}[E(s)^{-1}] = \sigma_{\max}^{-1}[E(s)] . \quad (4.9)$$

Da expressão 4.9, observa-se que quando as dinâmicas não modeladas de alta frequência são a fonte dominante de erros de modelamento, geralmente as condições de robustez quanto a estabilidade, limitam a banda do sistema de malha fechada. Consequentemente, restringe-se a banda onde se pode esperar bom desempenho, isto é, bom seguidor e boa rejeição a perturbações. Evidencia-se, assim, o compromisso estabelecido entre robustez da

estabilidade e desempenho. Fisicamente, estas condições evitam que energia suficiente possa excitar dinâmicas não modeladas e conseqüente possível perda de estabilidade.

A partir do momento em que se tenta quantificar a robustez de um sistema quanto à estabilidade, é natural estender os conceitos de margens de fase e de ganho do caso SISO para o caso multivariável.

Frequentemente, as margens de estabilidade para o caso MIMO, são calculadas para cada malha separadamente, abrindo-se uma malha de cada vez, enquanto mantém-se as malhas restantes fechadas e determinando-se as margens de ganho e de fase do sistema SISO restante (Lehtomaki, 1981). Obtém-se, então, margens de ganho e de fase associadas a cada malha. Este método, porém, é deficiente pois não se pode esperar que as incertezas afetem uma malha de cada vez. Ao se tratar as incertezas atuando simultaneamente, deve-se salientar que mudanças de fase e de ganho em uma malha, afetam o cálculo das margens de fase e de ganho nas outras malhas.

Define-se, então, as margens de fase e de ganho para sistemas multivariáveis (Lehtomaki, 1981):

Margens de Ganho (MG): é o par de números reais c_1 e c_2 que definem o maior intervalo (c_1, c_2) , tal que, quando $l_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m$, na Figura 4.2 são todos constantes reais e satisfazem a inequação:

$$c_1 < l_i < c_2 \quad , \quad (4.10a)$$

o sistema de malha fechada é estável.

Margens de Fase (MF): é o par de número reais c_1 e $-c_1$ que definem o maior intervalo $(-c_1, c_1)$, tal que, quando $l_i(j\omega)$, $i = 1, 2, \dots, m$, na Figura 4.2 são da forma $e^{j\Phi_i(\omega)}$, onde $\Phi_i(\omega)$ são reais e satisfazem a inequação

$$-c_1 < \Phi_i(\omega) < c_1 \quad , \quad (4.10b)$$

o sistema de malha fechada permanece estável.

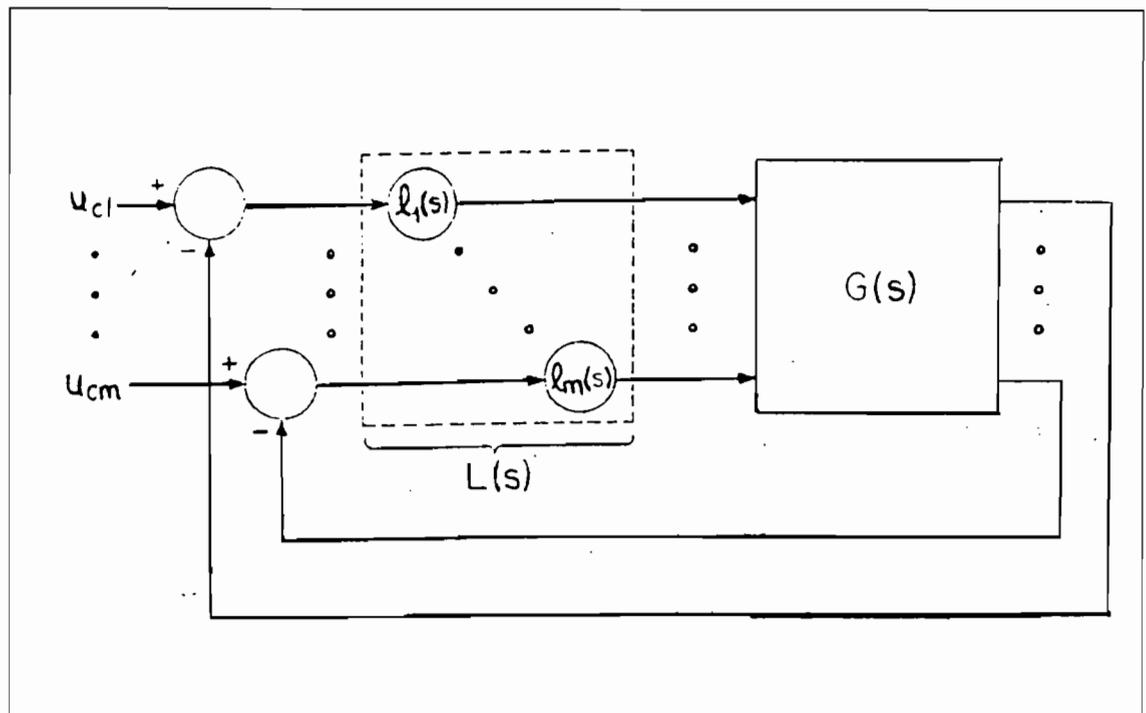


Fig. 4.2 - Configuração para margens de fase e de ganho de sistemas MIMO.

FONTE: Lehtomaki (1981), p. 42.

Estas margens diferem das margens obtidas quando calculadas para cada malha separadamente.

Vale lembrar que as mudanças simultâneas não são mudanças de fase e de ganho no mesmo canal e que estas margens consideram somente uma pequena classe de erros de modelamento descritas por $L(s)$ diagonal. Pode-se obter a tolerância cruzada quando a matriz $L(s)$ não é diagonal, isto é, existe acoplamento da incerteza entre os diversos canais, através de valores singulares (Lehtomaki, 1981).

Prova-se (Lehtomaki, 1981) que, se um sistema é estável em malha fechada e

$$\sigma_{\max} [I + G(s)K(s)]^{-1} < 1/\alpha \quad (4.10c)$$

para todo s e $\alpha \leq 1$, então, as margens de fase e de ganho são limitadas por:

$$MG > [1/(1+\alpha) , 1/(1-\alpha)] \quad (4.10d)$$

e

$$MF > [-2 \arcsen(\alpha/2) , 2 \arcsen(\alpha/2)]. \quad (4.10e)$$

É desejável sistemas de controle que apresentem boas margens de fase e de ganho no que tange a estabilidade o que, no caso multivariável, não é tarefa fácil. Felizmente, sistemas com controladores LQR onde a matriz de ponderação das componentes do estado \underline{R} , além de simétrica e definida positiva, é diagonal, apresentam

excelentes propriedades quanto a robustez (Safonov e Athans, 1977), descritas a seguir:

- 1) Margens de ganho de, no mínimo, $(1/2, \infty)$ em todos os canais independente e simultaneamente.
- 2) Margens de fase de, no mínimo, $(+60^\circ, -60^\circ)$ em todos os canais independente e simultaneamente.

Estas propriedades, porém, dependem de se ter assumido que todas as variáveis de estado são medidas e realimentadas.

Quando se associa um observador, como é o caso de controladores LQG, não existem mais garantias de robustez do sistema (Doyle, 1978).

c) Considerações quanto ao Desempenho

As mesmas noções de desempenho de sistemas SISO podem ser estendidas para o caso MIMO com algumas alterações. São considerados os seguintes aspectos:

- 1) Acompanhamento de referência,
- 2) Rejeição a perturbações,
- 3) Rejeição a ruídos no sensor,
- 4) Sensibilidade a variação nos parâmetros.

A configuração básica do sistema de controle MIMO a ser estudado é:

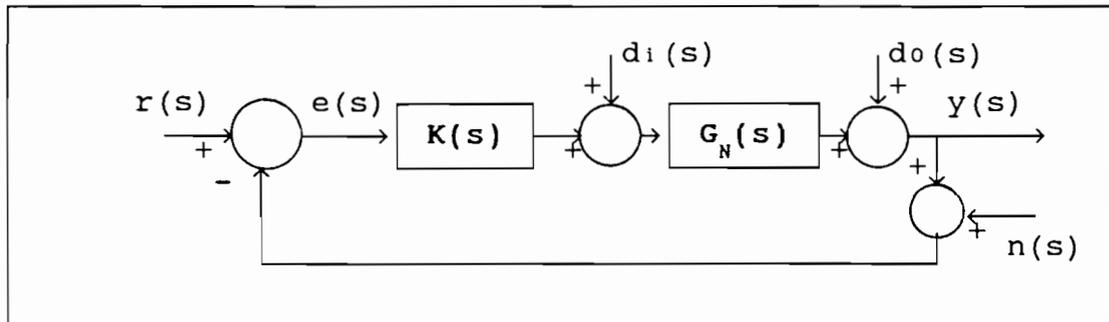


Fig. 4.3 - Sistema MIMO padrão.

onde:

$r(s) \in R_m$: vetor entrada de referência,

$e(s) \in R_m$: vetor erro,

$d_i(s) \in R_m$: vetor perturbação de entrada,

$d_o(s) \in R_m$: vetor perturbação de saída,

$y(s) \in R_m$: vetor saída,

$n(s) \in R_m$: vetor ruído no sensor,

$G_N(s) \in C_{m \times m}$: matriz de funções de transferência em malha aberta dada,

$K(s) \in C_{m \times m}$: matriz de funções de transferência do compensador, a ser projetado de forma que o sistema atenda os requisitos de desempenho e robustez e seja estável em malha fechada.

Frequentemente, os sinais $d_i(s)$, $d_o(s)$, $n(s)$, $r(s)$ apresentam a parte mais significativa de sua energia

distribuída em intervalos de frequência distintos. Obtém-se, então, as seguintes relações:

$$e(s) = r(s) - y(s) - n(s) , \quad (4.12)$$

$$y(s) = d_o(s) + G_N(s)d_i(s) + G_N(s)K(s)e(s) . \quad (4.13)$$

Eliminando-se o erro das Equações 4.12 e 4.13, chega-se à:

$$\begin{aligned} [I + G_N(s)K(s)]y(s) &= G_N(s)K(s)r(s) + d_o(s) + \\ &+ G_N(s)d_i(s) - G_N(s)K(s)n(s) , \end{aligned} \quad (4.14)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} y(s) &= [I + G_N(s)K(s)]^{-1}G_N(s)K(s)r(s) + \\ &+ [I + G_N(s)K(s)]^{-1}d_o(s) + \\ &+ [I + G_N(s)K(s)]^{-1}G_N(s)d_i(s) - \\ &- [I + G_N(s)K(s)]^{-1}G_N(s)K(s)n(s) . \end{aligned} \quad (4.15)$$

A Equação 4.15 permite calcular a contribuição da entrada, das perturbações e do ruído nos sensores na saída.

Eliminando-se a saída $y(s)$ das Equações 4.12 e 4.13, pode-se calcular o vetor erro $e(s)$, dado por:

$$\begin{aligned} e(s) &= [I + G_N(s)K(s)]^{-1}r(s) - [I + G_N(s)K(s)]^{-1}d_o(s) \\ &\quad - [I + G_N(s)K(s)]^{-1}G_N(s)d_i(s) \\ &\quad - [I + G_N(s)K(s)]^{-1}n(s) . \end{aligned} \quad (4.16)$$

As seguintes denominações são usadas :

$$\begin{aligned} I + G_N(s)K(s) &: \text{matriz de funções de transferência} \\ &\quad \text{diferença de retorno;} \\ S(s) = [I + G_N(s)K(s)]^{-1} &: \text{matriz de sensibilidade;} \end{aligned}$$

1) Acompanhamento de Referência

Para que o sistema apresente boas características de acompanhamento de sinais de referência, deseja-se que :

$$y(s) \approx r(s) , \quad (4.17)$$

para $s \in \Omega_r$, onde $s \in \Omega_r$, significa que a relação deve ser satisfeita para toda a faixa de frequência, onde $r(s)$ apresenta energia significativa. A partir da Equação 4.15, observa-se que para atender este requisito, basta que:

$$[I + G_N(s)K(s)]^{-1}G_N(s)K(s) \approx I , \quad s \in \Omega_r . \quad (4.18)$$

Boa característica de acompanhamento de referência requer também que:

$$e(s) \approx 0 , \quad s \in \Omega_r . \quad (4.19)$$

Analogamente ao caso SISO pode-se, de certa forma, inferir que, se a matriz $[I + G_N(s)K(s)]$ é "grande", então, a matriz $[G_N(s)K(s)]$ também o será e a matriz de sensibilidade $S(s) = [I + G_N(s)K(s)]^{-1}$ será "pequena". Sob estas condições,

$$[I + G_N(s)K(s)]^{-1} \approx [G_N(s)K(s)]^{-1}, \quad (4.20)$$

de forma que a relação 4.18 é satisfeita. É importante que a estabilidade seja mantida.

Posteriormente, será definido o que se entende por uma matriz "grande" ou "pequena".

2) Rejeição a Perturbações

A partir das Equações 4.15 e 4.16 pode-se verificar que para haver boa rejeição a perturbações, deve-se ter:

$$S(s) = [I + G_N(s)K(s)]^{-1} \approx 0, \quad s \in \Omega_d, \quad (4.21)$$

onde Ω_d é a faixa de frequência onde a perturbação apresenta energia significativa. $[I + G_N(s)K(s)]$ e $[G_N(s)K(s)]$ devem ser "grandes" nas frequências das perturbações, sem comprometer a estabilidade.

3) Rejeição a Ruídos no Sensor

Na Equação 4.15, observa-se a contribuição do ruído nos sensores $n(s)$ na saída $y(s)$. Para minimizar este efeito, a matriz de funções de transferência nominal de malha fechada $C_N(s)$ deve ser "pequena" nas frequências em que o ruído no sensor $n(s)$ apresenta sua energia, sem comprometer a estabilidade.

4) Sensibilidade a Variação nos Parâmetros

É deduzida a equação de sensibilidade do sistema em malha fechada que relaciona mudanças na saída nominal como resultado de mudanças na dinâmica nominal do sistema em malha aberta.

Seja $d_o(s) = d_i(s) = n(s) = 0$ na Equação 4.15.

Seja $G_N(s)$ a matriz de funções de transferência em malha aberta nominal e $y_N(s)$ a saída nominal do sistema em malha fechada, resposta a uma entrada de referência $r(s)$, isto é:

$$y_N(s) = [I + G_N(s)K(s)]^{-1}G_N(s)K(s)r(s) . \quad (4.22)$$

Seja $G_R(s)$, a matriz de funções de transferência em malha aberta real dada por:

$$G_R(s) = G_N(s) + \delta G(s) , \quad (4.23)$$

onde a matriz $\delta G(s)$ representa o desvio do sistema em malha aberta em relação à sua dinâmica nominal.

Com isso, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} y(s) &= y_N(s) + \delta y(s) \\ &= [I + [G_N(s) + \delta G(s)]K(s)]^{-1}[G_N(s) + \\ &\quad + \delta G(s)]K(s)r(s) . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Eliminando-se $r(s)$ das Equações 4.22 e 4.24 e, após algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$\delta y(s) = [I + G_N(s)K(s)]^{-1} \delta G(s) [G_N(s)]^{-1} y_N(s) . \quad (4.25)$$

Para se atenuar o efeito da variação do modelo $\delta G(s)$, no desvio $\delta y(s)$ em relação à saída nominal $y_N(s)$, deseja-se que a matriz $S(s)$ seja "pequena" nas frequências em que $\delta G(s)$ é significativa ($s \in \Omega\delta$), sem que comprometa a estabilidade.

Como se verificou, o desempenho do sistema de controle está intimamente ligado com as matrizes $[G_N(s)K(s)]$ e $[I + G_N(s)K(s)]$ nas diversas frequências. Resta definir precisamente o que se entende por matriz "grande" e matriz "pequena", o que é feito através da utilização do conceito de valores singulares (Apêndice D).

O problema de conceituar o "ganho" de uma matriz de funções de transferência, reside no fato de que deve-se considerar todas as direções da entrada. Por exemplo, uma matriz de funções de transferência "grande", deve amplificar a entrada em todas as direções.

Aplicando-se o conceito de valores singulares, após alguma manipulação algébrica, chega-se às

seguintes conclusões:

Para que o sistema apresente bom acompanhamento de referência, boa rejeição a perturbações e redução da sensibilidade a variação nos parâmetros, deve-se ter:

$$\sigma_{\min}[G(s)K(s)] \gg 1, \quad s \in \Omega_r, \Omega_d, \Omega_\delta. \quad (4.26)$$

Este resultado é análogo ao caso "SISO" no que se refere à ganhos de realimentação.

Para que o sistema apresente boa rejeição a ruídos nos sensores e não tenha problemas de estabilidade devido a dinâmicas não modeladas, deve se ter:

$$\sigma_{\max}[G(s)K(s)] \ll 1, \quad s \in \Omega_n, \Omega_{dnm}, \quad (4.27)$$

onde Ω_{dnm} é a frequência das dinâmicas não modeladas.

Este resultado é análogo ao caso "SISO" no que se refere à ganhos de realimentação.

Evidencia-se o compromisso entre alto desempenho, robustez da estabilidade quanto a dinâmicas não modeladas e rejeição a ruídos no sensor. É interessante notar que $S(s) + C_N(s) = I$, ou seja, é impossível que $S(s)$ e $C_N(s)$ sejam "pequenas" simultaneamente. Felizmente, em

geral, a entrada de referência, as perturbações e a variação nos parâmetros estão em baixas frequências e, ruídos no sensor e dinâmicas não modeladas são críticas, em altas frequências.

É interessante notar que grandes ganhos de realimentação podem exigir esforços de controle além da capacidade do atuador provocando saturações, como pode ser visto na seguinte relação:

$$u = [I + K(j\omega)G(j\omega)]^{-1}K(j\omega)(r - n - d) \approx G^{-1}(j\omega)(r - n - d) , \quad (4.28)$$

pois n , d e r são amplificados em u sempre que a frequência exceda a banda de $G(j\omega)$, ou seja, para ω tal que $\sigma_{\max}[G(j\omega)] \ll 1$, tem-se:

$$\sigma_{\min}[G^{-1}(j\omega)] \equiv 1/\sigma_{\max}[G(j\omega)] \gg 1 . \quad (4.29)$$

Como foi visto, chega-se, então, a um objetivo bastante claro de projeto: Deve-se projetar um compensador $K(s)$ de forma que, ao colocarmos no diagrama de Bode $\sigma_{\max}[G_N(j\omega)K(j\omega)]$ e $\sigma_{\min}[G_N(j\omega)K(j\omega)]$, estes respeitem as barreiras de alta e baixa frequência impostas pelos requisitos de desempenho e robustez (Figura 4.4) e mantenha a estabilidade em malha fechada.

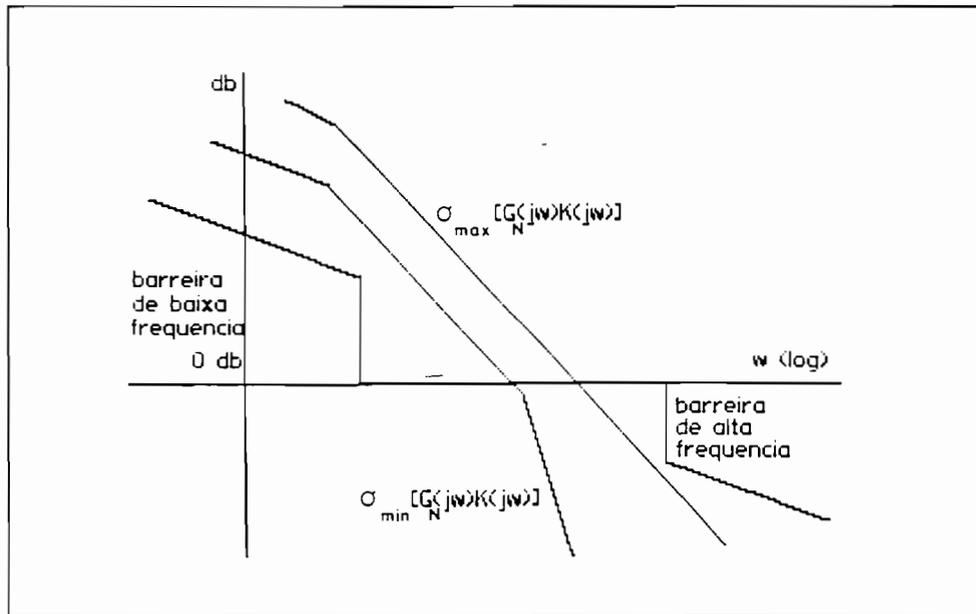


Fig. 4.4 - Restrições nos valores singulares máximo e mínimo de $G_N(j\omega)K(j\omega)$.

Analogamente ao caso SISO, onde a taxa de atenuação do ganho próximo a frequência de crossover deve estar em torno de -20 dB/década para se garantir uma margem de estabilidade aceitável, para o caso MIMO a taxa de atenuação de $\sigma_{\max}[G(j\omega)K(j\omega)]$ e $\sigma_{\min}[G(j\omega)K(j\omega)]$ não deve ser elevada próximo da frequência de crossover (Doyle e Stein, 1981; Maciejowski, 1989). O problema se acentua quando a planta tem zeros e pólos instáveis.

Este processo de restringir a matriz $[G(j\omega)K(j\omega)]$ no domínio da frequência sem perder a estabilidade é complexo e é facilitado através da utilização da metodologia LQG/LTR, onde é utilizado um compensador com a estrutura mostrada na Figura 4.5, onde a dinâmica da planta nominal aparece de forma explícita na sua estrutura. Compensadores LQG apresentam a mesma estrutura, sendo um tipo específico deste tipo de compensador.

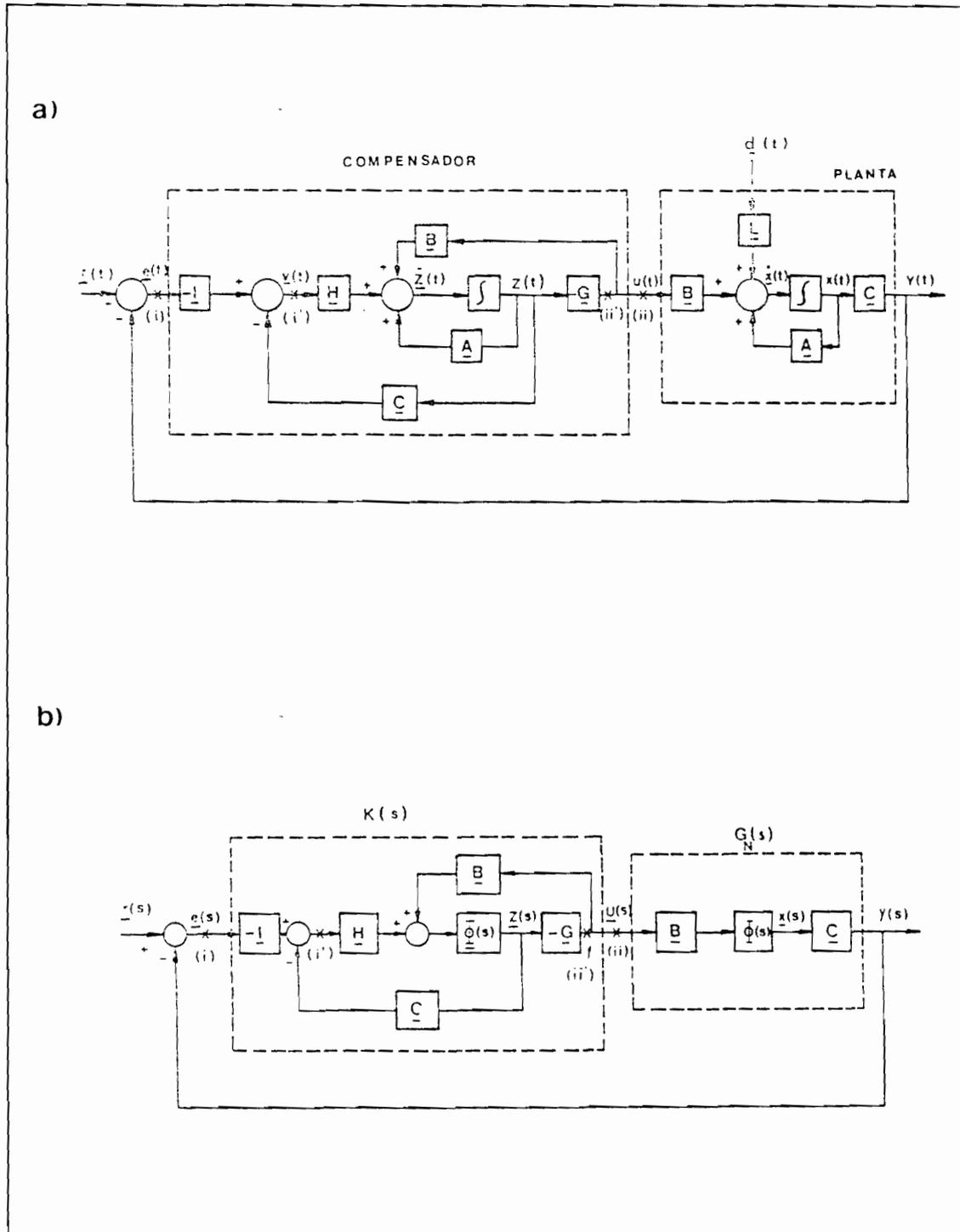


Fig. 4.5 - Compensador utilizado: a) domínio do tempo;
b) domínio da frequência.

Da Figura 4.5, obtém-se as seguintes equações:

PLANTA EM MALHA ABERTA

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + L_d d(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$Y(s) = G_N(s)u(s)$$

$$G_N(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

COMPENSADOR

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) + Hv(t)$$

$$v(t) = y(t) - Cz(t) - r(t) = -e(t) - Cz(t)$$

$$u(t) = -Gz(t)$$

$$u(s) = K(s)e(s)$$

$$K(s) = G(sI - A + BG + HC)^{-1}H$$

Esta estrutura é também conhecida por MBC ("Model Based Compensator") (Athans, 1986b) e contém duas malhas fechadas. Uma envolve a matriz de ganho do controlador G e a outra, envolve a matriz de ganho do filtro H. Estas duas matrizes são os parâmetros livres de projeto do compensador, que devem ser ajustados para que o sistema apresente estabilidade nominal, robustez quanto a estabilidade e bom desempenho. Deve-se, então, sistematizar o processo de escolha das matrizes H e G.

Os compensadores MBC apresentam algumas propriedades interessantes:

- 1) Quando associado em série com qualquer planta MIMO em malha aberta (estabilizável e detectável), o

sistema em malha fechada resultante será estável, desde que as matrizes de ganho sejam selecionadas convenientemente.

- 2) Propriedade da separação que estabelece que os $2n$ polos de malha fechada do sistema realimentado na Figura 4.5, são os autovalores de $(A-BG)$ e $(A-HC)$, ou seja, o controlador e o observador podem ser calculados separadamente (Kwakernaak, 1972; Kailath, 1980).
- 3) Em sistemas que usam MBC (Figura 4.5b), tem-se:
 - a) A função de transferência de malha, obtida abrindo a malha do sistema no ponto (i') , é a função de transferência de malha do filtro dada por $C\Phi H$;
 - b) A função de transferência de malha, obtida abrindo a malha do sistema no ponto (i) , é $G(s)K(s)$ e pode aproximar $C\Phi H$ ponto a ponto em s desenhando-se o LQR de acordo com um procedimento "sensitivity recovery" (Kwakernaak, 1972);
 - c) A função de transferência de malha, obtida abrindo a malha do sistema no ponto (ii') , é a função de transferência de malha do LQR dada por $G\Phi B$;
 - d) A função de transferência de malha, obtida abrindo a malha do sistema no ponto (ii) , é $K(s)G(s)$ e pode aproximar $G\Phi B$ ponto a ponto em s projetando-se o filtro de acordo com um procedimento "robustness recovery" (Doyle e Stein, 1979).

As propriedades 3a e 3c podem ser verificadas pela avaliação das funções de transferência envolvidas. As propriedades 3b e 3d são mais elaboradas e requerem como

restrições que $G(s)$ deve ser de fase mínima com número de entradas m e número de saídas p , de forma que, $m \geq p$ para a propriedade 3b e, $m \leq p$ para a 3d e, portanto, $G(s)$ deve ser quadrada para ambas. Os nomes "sensitivity recovery" e "robustness recovery" são restritivos. "Full-state loop transfer recovery" é talvez um nome melhor para ambos os procedimentos, com a distinção de que um é aplicado nos pontos (i) e (i') e o outro, nos pontos (ii) e (ii').

O significado da propriedade 3 é que, pode-se projetar funções de transferência de malha de compensadores LQG como se todo o estado fosse realimentado e, então, aproximá-las adequadamente com um procedimento de recuperação. Para o ponto (i), a recuperação se dá através das equações do LQR, enquanto que para ponto (ii), através do FK, sendo a matemática das duas opções, dual.

O método LTR se baseia na propriedade 3, sendo conhecido por método LTR na saída da planta (ponto i), onde fixa-se H e varia-se G e, método LTR na entrada (ponto ii), onde fixa-se G e varia-se H . É apresentado somente o método LTR na saída da planta, função de ter se considerado o modelo de erro na saída.

O método envolve dois passos básicos. No primeiro, gera-se a Malha Objetivo (M.O.) através da especificação da matriz de ganho do filtro H , que atende todas as especificações de desempenho propostas, sem violar as condições de estabilidade nominal e robustez da estabilidade. No segundo, obtém-se a matriz de ganho do controlador G de forma que a matriz de funções de transferência de malha do sistema da Figura 4.5 aproxima a matriz de funções de transferência de malha da M.O. (Figura 4.6) estabelecido no primeiro passo. O grau de aproximação é limitado por zeros de fase não mínima da

planta. Se a planta é de fase mínima, então, o grau de aproximação ou a recuperação da M.O. pode ser arbitrariamente boa, caso contrário, a qualidade da recuperação dependerá da localização dos zeros de fase não mínima.

4.1 - MALHA OBJETIVO

Como o comportamento do sistema final aproximará o comportamento da M.O. (Figura 4.6), onde $G_{MO}(s) = C\Phi H$, esta deve atender a uma série de requisitos, ou seja, os requisitos do sistema final são transferidos para a M.O..

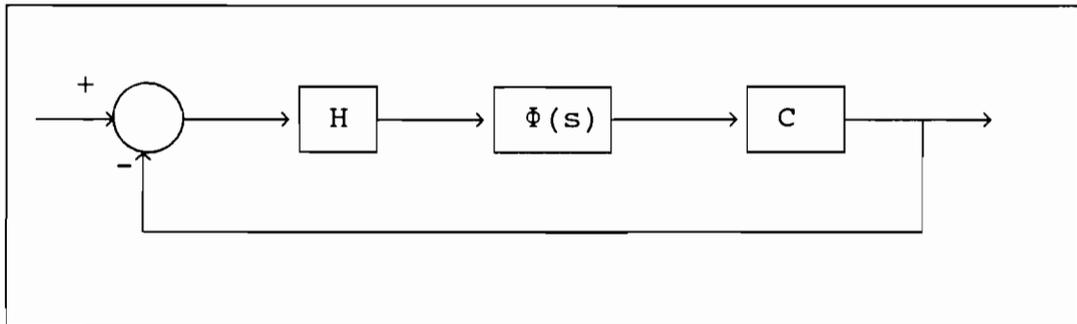


Fig. 4.6 - Estrutura da Malha Objetivo.

Estes requisitos podem ser enumerados:

1) No domínio da frequência $G_{MO}(s)$ deve atender especificações de robustez e desempenho:

a) Robustez quanto a estabilidade com erros de modelamento refletidos na saída da planta:

$$\sigma_{\max.} \{ [I + G_{MO}(j\omega)]^{-1} G_{MO}(j\omega) \} < 1 / \sigma_{\max} [E(j\omega)] .$$

(4.30)

b) Para que o sistema apresente bom acompanhamento de referência, boa rejeição a perturbações e baixa sensibilidade a variação nos parâmetros, os valores singulares máximo da matriz de sensibilidade devem ser pequenos nestas frequências:

$$\sigma_{\max}[S(j\omega)] = \sigma_{\max}[I + G_{MO}]^{-1} \ll 1 \quad , \quad (4.31)$$

ou equivalentemente,

$$\sigma_{\max}[G_{MO}(j\omega)] \gg 1 \quad . \quad (4.32)$$

c) Para boa rejeição a ruídos,

$$\sigma_{\max}[G_{MO}(j\omega)] \ll 1 \quad , \quad (4.33)$$

nas frequências do ruído.

- 2) Os autovalores e autovetores em malha fechada da M.O. devem ser satisfatórios;
- 3) A localização dos zeros de transmissão da M.O. deve ser satisfatória;
- 4) As respostas no tempo de simulações determinísticas e estocásticas usando a M.O. quanto a seguidor, rejeição a perturbações, sensibilidade a ruídos no sensor e a variação nos parâmetros devem ser satisfatórias.

Algumas observações ainda podem ser feitas:

- a) $G_{MO}(s)$ possui os polos de $G_N(s)$ e os zeros são controlados por H;
- b) Para se conseguir satisfazer certas especificações de desempenho, pode ser necessário redefinir o

modelo de projeto, aumentando-o com dinâmicas na entrada da planta.

- c) Nas simulações, os transitórios nos controles u não podem ser observados na M.O.. Estes devem ser simulados no sistema final, sendo um ponto crítico do projeto, pois, saturação de atuadores podem provocar instabilidade. Neste caso, deve-se reduzir a banda da M.O..

Resta saber, então, como calcular a matriz de ganho do filtro H de uma maneira simples e, tal que, a M.O. atenda a todos os requisitos.

A princípio, pode ser usada qualquer técnica de projeto de controle com realimentação de estado como alocação de polos, "eigenstructure assignment", etc., desde que a M.O. tenha a mesma estrutura de pólos e zeros no semi-plano direito que a planta (Stein e Athans, 1987). A teoria de estimadores ótimos (Filtro de Kalman - FK) reúne algumas vantagens que fazem-na uma importante ferramenta de projeto neste contexto, entretanto, não no sentido padrão de otimização de um critério de desempenho, mas simplesmente numa maneira eficiente de gerar uma M.O. com boas características (estabilidade nominal, excelentes características de robustez automáticas e facilidade de obtenção). Ao se calcular $G_{M0}(s)$ através do FK, o método LTR é denominado LQG/LTR, e $G_{M0}(s)$ será substituído por $G_{KF}(s)$. Pode-se dizer que o compensador LQG perde as boas características de estimador, porém ganha em robustez.

Na formulação do problema para cálculo do compensador LQG padrão, incluem-se apenas os processos estocásticos atuando na planta e nas medidas, e deve-se

minimizar uma função objetivo de custo. Incertezas no modelo, não linearidades e restrições para uma solução real não são consideradas (Maciejowski, 1989).

Neste contexto, inicialmente, deve-se formular um problema fictício do FK como é dado a seguir, onde o controle u é eliminado:

$$\dot{x} = Ax + L\xi \quad , \quad (4.34a)$$

$$y = Cx + \vartheta \quad , \quad (4.34b)$$

onde L é uma matriz $n \times m$, o ruído ξ é branco, gaussiano, de média zero, com matriz intensidade I e o ruído de medida ϑ é branco de média zero e matriz intensidade μI .

A matriz de ganho do filtro H é, então, dada por:

$$H = (1/\mu) \Sigma C' \quad , \quad (4.35)$$

onde Σ é obtido da solução da equação algébrica de Riccati:

$$0 = A\Sigma + \Sigma A' + LL' - (1/\mu)\Sigma C' C\Sigma \quad . \quad (4.36)$$

A partir de agora a matriz L e o escalar μ serão os parâmetros de projeto para especificar a matriz de ganho do filtro H . Desde que $[A, L]$ é estabilizável e $[A, C]$ é detectável, está sempre garantida a estabilidade nominal da M.O. para qualquer escolha de L e μ . A M.O. obtida desta forma será sempre de fase mínima.

A escolha de L e μ é facilitada pela seguinte igualdade no domínio da frequência, obtida através da equação algébrica de Ricatti, envolvendo os valores singulares da matriz de transferência diferença de retorno da M.O. (Doyle e Stein, 1981):

$$\sigma_i [I + G_{KF}(j\omega)] = \sqrt{1 + (1/\mu)\sigma_i^2 [C\Phi(j\omega)L]} \quad . \quad (4.37)$$

Esta equação governa as propriedades de desempenho e robustez da estabilidade da M.O. (Doyle e Stein, 1981).

É interessante notar que os parâmetros de projeto L e μ estão do lado direito da equação, enquanto as características no domínio da frequência da M.O. aparecem do lado esquerdo e, pode-se observar a influência de L e μ :

- 1) μ controla o "ganho de malha" do FK e, conseqüentemente, pode ser utilizado para ajustar a frequência de crossover ou a banda do sistema, de forma que a curva dos valores singulares de $G_{KF}(j\omega)$ não cruze a barreira dos erros de modelamento de alta frequência (Figura 4.4). Do ponto de vista do FK puro, não tem sentido limitar a banda do filtro, pois o FK fornece a banda ótima para os ruídos assumidos (Athans, 1986b).
- 2) L determina os zeros de transmissão de $C\Phi L$ e, conseqüentemente, a forma da curva dos valores singulares no domínio da frequência.

São apresentados a seguir alguns métodos sistemáticos de escolha da matriz L . Pode-se, contudo, se necessário, utilizar um procedimento empírico para isso.

A partir da Equação 4.37, observa-se que para haver coincidência de valores singulares em baixas frequências e supondo que A não tenha pólos na origem, a matriz L pode ser dada por:

$$L = -AC'(CC')^{-1} , \quad (4.38)$$

pois, em baixas frequências, $\Phi(s) \cong A^{-1}$ e $C\Phi L = -I$.

Para haver coincidência de valores singulares em altas frequências, a matriz L pode ser dada por:

$$L = C'(CC')^{-1} , \quad (4.39)$$

pois, em altas frequências, $\Phi(s) = (sI)^{-1}$ e $C\Phi L = s^{-1}I$.

Da Equação 4.37, verificam-se após algum trabalho algébrico as excelentes propriedades automáticas de $G_{KF}(s)$ quando este é calculado através do FK:

$$\sigma_{\min} [I + G_{KF}(s)] > 1 , \quad (4.40)$$

$$\sigma_{\min} [I + G_{KF}(s)^{-1}] > 0.5 . \quad (4.41)$$

A Equação 4.40 garante que a M.O. nunca amplificará perturbações refletidas na saída da planta em todas as frequências. A Equação 4.41 implica que a M.O.

nunca será instável devido a modelos de erros multiplicativos refletidos na saída da planta se $\text{Im}(w) < 0.5$, para todo w .

Estas margens são mais gerais do que as consagradas margens de fase ($\pm 60^\circ$) e margens de ganho $(1/2, \infty)$ do LQR, pois, valem para incertezas não estruturadas.

É interessante notar que, em altas e baixas frequências, a Equação 4.37 reduz-se a:

$$\sigma_1 [G_{KF}] \cong (1/\sqrt{\mu}) \sigma_1 [G_{FOL}] , \quad (4.42)$$

onde $G_{FOL} = C\Phi L$, o que facilita a visualização da influência de L e μ em G_{KF} (Athans, 1986b).

Ao se acrescentar integradores (um em cada canal de controle) - Figura 4.7 - de forma que o sistema quando excitado por degrau de comando/referência ou perturbação tenha erro de regime estacionário zero, tem-se:

$$\dot{u}_p = u(t) , \quad (4.43)$$

ou equivalentemente,

$$u_p(s) = (1/s)u(s) . \quad (4.44)$$

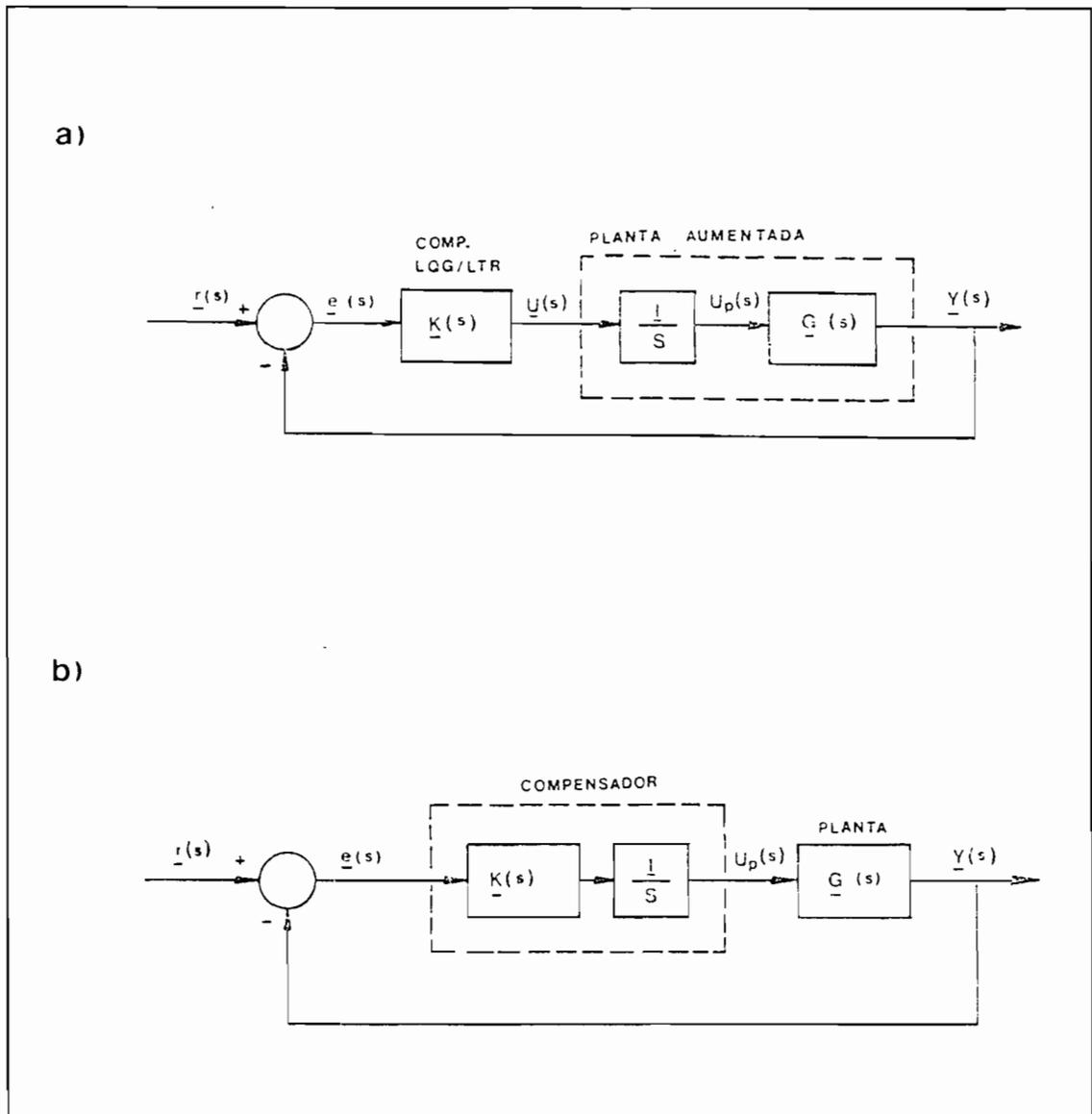


Fig. 4.7 - Modelo de projeto com adição de integradores:
a) na planta; b) incorporado no compensador.

O modelo de projeto  , então, definido pela dinâmica aumentada (dinâmica da planta mais os integradores

adicionados) e agora é um sistema de dimensão $n+m$, podendo ser dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_p(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} u(t) ,$$

$$y(t) = [0 \ C] \begin{bmatrix} u_p(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

ou

$$\dot{x}_a = A_a x_a + B_a u , \quad (4.46a)$$

$$y = C_a x_a . \quad (4.46b)$$

Neste caso, é interessante que a matriz L $(n+m) \times m$, seja escrita na forma:

$$L_a = \begin{bmatrix} L_L \\ L_H \end{bmatrix} , \quad (4.47)$$

e, conseqüentemente, G_{FOL} para baixas frequências pode ser dado por:

$$\begin{aligned} G_{FOL} &= C_a [sI - A_a]^{-1} L_a = [0 \ C] \begin{bmatrix} I/s & 0 \\ -A^{-1}B/s & -A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_L \\ L_H \end{bmatrix} = \\ &= -CA^{-1}BL_L/s - CA^{-1}L_H , \end{aligned} \quad (4.48)$$

e, para altas frequências, por:

$$G_{\text{FOL}} = C_a [sI - A_a]^{-1} L_a = [0 \ C] \begin{bmatrix} I/s & 0 \\ B/s^2 & I/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_L \\ L_H \end{bmatrix} =$$

$$= CBL_L/s^2 + CL_H/s \quad , \quad (4.49)$$

onde se verifica que L_L (mxm) pode ser selecionada para governar o comportamento de baixa frequência dos diagramas de Bode da M.O. e L_H (nxm) pode ser selecionada para governar o comportamento de alta frequência dos diagramas de Bode da M.O..

Para que haja casamento de valores singulares em baixa frequência pode-se escolher:

$$L_L = -[CA^{-1}B]^{-1} \quad , \quad (4.50)$$

e, para casamento de valores singulares em alta frequência:

$$L_H = C'(CC')^{-1} \quad . \quad (4.51)$$

Para casamento em todas as frequências (Apêndice J) (Cabral (1987), citado por Athans, 1986b):

$$L_L = -[CA^{-1}B]^{-1} \quad , \quad (4.52a)$$

$$L_H = -A^{-1}BL_L \quad . \quad (4.52b)$$

Concluindo, as etapas a serem seguidas para a obtenção da matriz de ganho do filtro H são:

- 1) Acrescentar, ou não, integradores em cada canal de controle de forma a se obter o comportamento desejado;
- 2) Determinar a matriz L de forma que a M.O. tenha as características desejadas;
- 3) Ajustar μ de forma a se obter a frequência de crossover desejada;
- 4) Determinar a matriz de ganho do filtro H através da resolução da equação algébrica de Riccati, com os valores L e μ obtidos, e calcular $G_{KF}(s)$;
- 5) Verificar se $G_{KF}(j\omega)$ atende aos requisitos de desempenho e robustez da estabilidade.

Com a matriz de ganho do filtro H calculada, resta somente obter a matriz de ganho do controlador G do compensador K(s).

4.2 - RECUPERAÇÃO

O procedimento de recuperação consiste em encontrar uma família de matrizes de ganho $G\rho$, tal que, para todo ρ ,

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A-BG\rho) < 0; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.53)$$

e

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G\rho \rightarrow WC; \quad W'W=I. \quad (4.54)$$

Se isto for possível, chega-se ao resultado fundamental do método LTR: Se o modelo de projeto da planta $G_N(s) = C(sI-A)^{-1}B$ só tem zeros de transmissão de fase mínima, então:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} C(sI-A)^{-1}BG\rho(sI-A+BG\rho+HC)^{-1}H \rightarrow C(sI-A)^{-1}H \quad (4.55)$$

ponto a ponto em s , o que implica em:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G_N(s)K\rho(s) \rightarrow G_{KF}(s) \quad , \quad (4.56)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} S(s) \rightarrow S_{KF}(s) \quad , \quad (4.57)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} C_N(s) \rightarrow C_{KF}(s) \quad , \quad (4.58)$$

onde $S_{KF}(s)$ e $C_{KF}(s)$ são, respectivamente, as matrizes de sensibilidade e de funções de transferência de malha fechada da M.O.. Isso mostra que o sistema aproxima assintoticamente a malha do filtro M.O..

O desenvolvimento da expressão 4.55, encontra-se no Apêndice G.

Felizmente, é possível se construir a família de matrizes de ganho $G\rho$ que atenda as Equações 4.53 e 4.54 através da solução do "Cheap control LQR problem" (Apêndice I), para plantas que:

- a) apresentam o mesmo número de entradas e saídas;
- b) $[A,B]$ é estabilizável (ou controlável);
- c) $[A,C]$ é detectável (ou observável);
- d) tenham os zeros de fase mínima.

Logo, a matriz de ganho do controlador G é calculada resolvendo a equação algébrica de Riccati:

$$0 = -K\rho A - A'K\rho - C'C + (1/\rho)K\rho BB'K\rho, \quad \text{para } \rho \rightarrow 0 \quad (4.59)$$

e, então, calcula-se a matriz $G\rho$, através de:

$$G\rho = (1/\rho)B'K\rho. \quad (4.60)$$

Compensadores LQR obtidos quando $\rho \rightarrow 0$ apresentam características interessantes (Kwakernaack e Sivan, 1972):

Seja uma matriz de funções de transferência $G(s)$ com n_p pólos e n_z zeros de malha aberta. Os n_p pólos de malha fechada de $G(s)$ se dirigem para:

- a) zeros de fase mínima de $G(s)$ de malha aberta;
- b) imagem no semi-plano esquerdo dos zeros de fase não mínima de $G(s)$.

Os $n_p - n_z$ pólos restantes se dirigem para o infinito.

É interessante notar na Equação 4.56 que $G_N(s)$ e $G_{KF}(s)$ são sistemas de ordem n e $K(s)$ é um compensador de ordem n , logo, não é possível $G(s)K(s) = G_{KF}(s)$. Para fins de projeto basta que a aproximação seja ponto a ponto, isto é, $G(j\omega)K(j\omega) \cong G_{KF}(j\omega)$ na banda de frequências relevantes, no que concerne a desempenho e robustez.

A matriz de transferência de malha $G_N(s)K(s)$ do sistema que estamos para projetar (Figura 4.5), aproxima a matriz de função de transferência de malha $G_{KF}(s)$ da M.O.

(Figura 4.6), desde que a condição de fase mínima em $G_N(s)$ é satisfeita. Logo, se a M.O. é satisfatória, pode-se usar o compensador LTR para recuperá-la.

No domínio da frequência, o método LQG/LTR resulta num bom casamento entre os diagramas de Bode da matriz de função de transferência de malha, matriz de sensibilidade e matriz de função de transferência de malha fechada do sistema final (malha LQG/LTR, Figura 4.5) e da M.O. (Figura 4.6) para frequências abaixo da frequência de cruzamento ("crossover"). Geralmente, em altas frequências as curvas dos valores singulares de $G_{KF}(s)$ tem declividade de -20 dB/dec, enquanto que as curvas dos valores singulares de $G_N(s)K(s)$ eventualmente tem declividade em altas frequências ("roll off") de -40 dB/dec (Athans, 1986). Logo, malhas LQG/LTR oferecem robustez adicional às dinâmicas não modeladas de alta frequência quando comparadas a M.O.. As características de desempenho de seguidor e rejeição a perturbações em baixa frequência, são essencialmente as mesmas entre M.O. e a malha LQG/LTR.

O compensador LQG/LTR, essencialmente, gera uma inversa estável (nas frequências abaixo do crossover) do modelo de projeto da planta $G_N(s)$ e substitui as dinâmicas desejadas definidas por $G_{KF}(s)$. Os zeros de $K(s)$ correspondem aos zeros de $G_{KF}(s)$, alguns pólos do compensador $K(s)$ são usados para cancelar os zeros de transmissão de $G_N(s)$ e outros vão para o infinito à medida que $\rho \rightarrow 0$, de forma que a estabilidade nominal é preservada. Estes pólos de alta frequência podem ser eliminados através de um processo de redução (Athans et al., 1986) como o Método dos Resíduos (ítem 3.3). Vale lembrar que a ordem do compensador é igual a da planta aumentada. Para plantas de fase não mínima, o problema é bem mais complexo, como será visto a seguir.

De acordo com Freudenberg e Looze (1985), zeros de fase não mínima limitam o desempenho de sistemas realimentados, independente da metodologia de projeto utilizada. Quando existem zeros de fase não mínima na planta $G_N(s)$, o método LTR não é capaz de recuperar a M.O. em todas as frequências e, conseqüentemente, as características desejadas da M.O., pois, isto envolveria cancelamento de pólos e zeros no semi-plano direito. As matrizes de função de transferência de malha fechada $C_N(s)$ e de sensibilidade $S(s)$ são prejudicadas nas frequências próximas aos zeros de fase não mínima.

É importante notar que as características de fase não mínima de $G_N(s)$ não são refletidas na matriz de função de transferência $G_{KF}(s)$ da M.O., pois $G_{KF}(s)$ é sempre de fase mínima, logo, não existem limitações no desempenho da M.O., porém, na malha do LQG/LTR podem haver limitações, impostas pelos zeros de fase não mínima.

Na realidade, o método LQG/LTR é recomendado também para plantas de fase não mínima (Athans, 1986). Se os zeros de transmissão de fase não mínima estão acima da banda da M.O., então, haverá recuperação em baixas frequências e, do ponto de vista prático, a presença de zeros de fase não mínima distantes não deteriora as propriedades de baixa frequência de seguidor e rejeição a ruídos.

Se existem zeros de fase não mínima em baixa frequência, então, a sensibilidade da malha LQG/LTR não será pequena em frequências próximas a estes zeros. Em sistemas MIMO isto significa que existirão certas "direções" de comandos e perturbações nestas frequências, controladas pela localização e direção dos zeros de fase

não mínima de $G_N(s)$ em que o sistema não apresentará as características de bom seguidor e rejeição a perturbações desejadas (Athans, 1986b).

No caso de plantas de fase não mínima, existem algumas opções (Maciejowski, 1989; Stein e Athans, 1987):

- 1) Utiliza-se o método LQG/LTR padrão, onde a estabilidade do sistema nominal está garantida, porém, ciente das limitações impostas pelos zeros de fase não mínima. Vale lembrar que estas dificuldades são encontradas em outros métodos de projeto.
- 2) Aproximar o modelo da planta por um modelo de fase mínima, e o erro introduzido é incluído na incerteza da planta. Isto pode ser feito fatorando-se $G_N(s)$ da seguinte forma:

$$G_N(s) = B_z(s)G_m(s) \quad (4.61)$$

onde $G_m(s)$ é de fase mínima e $B_z(j\omega)B_z(j\omega)^H = I$, para todo ω e contém todos os zeros instáveis. $B_z(s)$ é incluído no modelo da incerteza (item 3.4).

- 3) Construir $G_{M0}(s)$ através de uma metodologia mais apropriada para plantas de fase não mínima ao invés do FK, com os cuidados e restrições mencionados anteriormente. Entretanto, esta opção é questionável, pois perde-se as excelentes características quanto à robustez de malhas com reguladores "LQR".

CAPÍTULO 5PROJETO DO S.C.A.

O S.C.A. operando no modo normal deve manter o apontamento do satélite dentro das especificações de atitude e de movimento de atitude na presença de torques ambientais. O sistema deve também ser robusto quanto à estabilidade a erros de modelamento e apresentar margens de fase e de ganho satisfatórias.

Como foi visto, as equações que descrevem a dinâmica de atitude do satélite (Equações 3.28 e 3.29), podem ser decompostas em um sistema "MIMO" para os eixos de roll e yaw e um sistema "SISO" para o eixo de pitch.

Os projetos do sistema "MIMO" e do sistema "SISO" são realizados separadamente, ambos utilizando a metodologia LQG/LTR. O caso "MIMO" é tratado em detalhe, enquanto que o caso "SISO", onde poderiam ser utilizadas técnicas convencionais de projeto, é tratado brevemente por se tratar de uma repetição simplificada do primeiro.

a) Projeto para o Sistema Roll/Yaw

A Tabela 5.1 apresenta os valores numéricos adotados para o projeto.

TABELA 5.1 - VALORES NUMÉRICOS UTILIZADOS PARA OS PAINÉIS

Módulo de Young: $E = 1,3 \times 10^9$ Pa
Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,3$
Densidade superficial: $\rho = 3,01$ kg/m ²
Coefficiente de amortecimento $c = 0,02$
Dimensões dos Painéis: $L1 = 0,665$ m; $L2 = 1,07$ m; $L3 = 0.659$ m; $h = 1,315 \times 10^{-2}$ m
Massa dos painéis: $M1 = M2 = 2,14$ kg; $M3 = 1,32$ kg
Distâncias dos painéis: $b_x = b_y = 0,33$ m; $b_z = 0,53$ m

$L1$ = comprimento dos painéis 1, 2 e 3; $L2$ = largura dos painéis 1 e 2; $L3$ = largura do painel 3; h = espessura dos painéis 1, 2 e 3 (Figura 3.3).

Utilizando-se as Equações 3.34a, b e c, os valores dados na Tabela 5.1 e considerando-se como variáveis de saída os ângulos de roll (φ) e yaw (ψ), chega-se à seguinte descrição de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad (5.1a)$$

$$y = Cx \quad , \quad (5.1b)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0577e-03 & 0 & 0 & 0 & 6.7508e+01 & 0 \\ 0 & 2.1195e-03 & 1.7764e+02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.9217e-03 & -4.8474e+03 & 0 & 0 & 0 \\ -1.8029e-03 & 0 & 0 & 0 & -4.7105e+03 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000e+00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000e+00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000e+00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000e+00 \\ 0 & 9.7934e-01 & 0 & 1.1129e-03 \\ -1.9625e+00 & 0 & 9.0177e-04 & 0 \\ 2.7053e+00 & 0 & -2.4608e-02 & 0 \\ 0 & -1.6693e+00 & 0 & -7.7655e-02 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.0326 & 0 \\ 0 & -0.0654 \\ 0 & 0.0902 \\ 0.0556 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{x}^T = [\varphi \ \psi \ q_1 \ q_3 \ \dot{\varphi} \ \dot{\psi} \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_3] \ , \quad (5.6a)$$

$$\mathbf{u}^T = [\ u_1 \ u_2 \] \ . \quad (5.6b)$$

$$u_1 = \dot{H}_{px} \quad (5.6c)$$

$$u_2 = \dot{H}_{pz} \quad (5.6d)$$

Este sistema é observável e controlável. Ele apresenta um par de pólos com frequência de aproximadamente $H_y/(I_x I_z)^{1/2}$ referente a frequência de nutação com pequeno amortecimento devido ao amortecimento dos painéis, um par de pólos bastante lento com frequência de aproximadamente ω_0 referente ao movimento orbital e pólos de alta frequência referentes aos painéis flexíveis (Tabela 5.2). É interessante notar que todos os zeros de transmissão são de fase mínima e que variações em H_y para o controle de pitch se refletem em variação da frequência de nutação.

TABELA 5.2 - PÓLOS E ZEROS DE TRANSMISSÃO DE MALHA ABERTA

Pólos de Malha Aberta	Zeros de Transmissão
-3.8811e-02+ 6.8633e+01i	-3.7879e-02+ 6.7790e+01i
-3.8811e-02- 6.8633e+01i	-3.7879e-02- 6.7790e+01i
-1.2320e-02+ 6.9625e+01i	-1.1682e-02+ 6.7842e+01i
-1.2320e-02- 6.9625e+01i	-1.1682e-02- 6.7842e+01i
-2.2675e-10+ 1.3331e+00i	
-2.2675e-10- 1.3331e+00i	
-4.6413e-17+ 1.0809e-03i	
-4.6413e-17- 1.0809e-03i	

Ao se traçar o diagrama de Bode dos valores singulares da matriz de funções de transferência do sistema $G(j\omega)$ (Figura 5.1), observa-se que os valores singulares máximo e mínimo são próximos, o que, a princípio, dispensa

uma normalização de variáveis. Esta proximidade é necessária para não se obter condições quanto a robustez muito conservadoras (Stein e Doyle, 1991). Verifica-se também as péssimas características de rejeição a perturbações de baixa frequência na entrada da planta (amplificação de 40 dB).

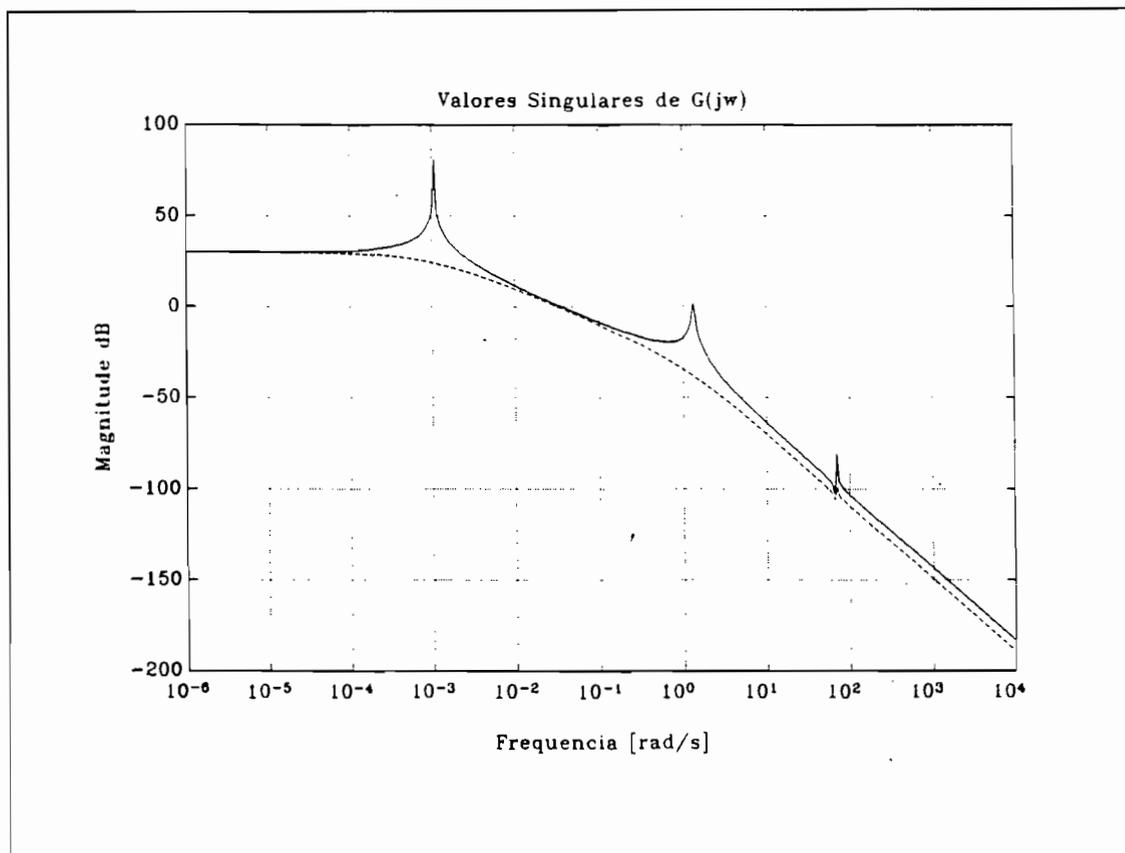


Fig. 5.1 - Valores Singulares de $G(j\omega)$.

1) Redução

Um modelo mais simples para projeto pode ser obtido através da redução de ordem do modelo anterior, utilizando-se o Método dos Resíduos. Seguindo procedimento de redução de ordem descrito na seção 3.3, chega-se às seguintes normas dos resíduos normalizados (Tabela 5.3):

TABELA 5.3 - PÓLOS E NORMAS DOS RESÍDUOS NORMALIZADOS

Pólo		$ R_i / \lambda_i $
-3.8811e-02+	6.8633e+01i	8.4584e-08
-3.8811e-02-	6.8633e+01i	8.4584e-08
-1.2320e-02+	6.9625e+01i	3.4135e-07
-1.2320e-02-	6.9625e+01i	3.4135e-07
-2.2675e-10+	1.3331e+00i	2.6454e-02
-2.2675e-10-	1.3331e+00i	2.6454e-02
-4.6413e-17+	1.0809e-03i	3.0891e+01
-4.6413e-17-	1.0809e-03i	3.0891e+01

Os pólos associados às frequências naturais das partes flexíveis podem ser eliminados, pois, além de apresentarem resíduos pequenos, são de alta frequência. Obtém-se, então, a seguinte descrição de estados do modelo reduzido:

$$A_r = \begin{bmatrix} -2.2675e-10 & 1.3331e+00 & 1.1060e-18 & -1.0510e-17 \\ -1.3331e+00 & -2.2675e-10 & 1.0038e-17 & 5.8155e-19 \\ 1.0437e-15 & 1.6279e-16 & -4.8976e-17 & 1.0809e-03 \\ -4.4902e-16 & 1.5612e-16 & -1.0809e-03 & 4.8975e-17 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 3.1345e-03 & 9.5457e-02 \\ -6.8372e-02 & 4.3762e-03 \\ -6.3549e-04 & -4.7224e-02 \\ 4.7211e-02 & -6.3567e-04 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$C_r = \begin{bmatrix} 3.4905e-01 & 1.6002e-02 & 7.0694e-01 & 9.5161e-03 \\ -2.2341e-02 & 4.8733e-01 & -9.5187e-03 & 7.0714e-01 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$D_r = \begin{bmatrix} -1.6954e-07 & 8.5206e-12 \\ -8.5185e-12 & -6.8232e-07 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Como força-se que os modelos original e reduzido coincidam em $s = 0$ (Equação 3.47), aparece um ramo direto entre a entrada e a saída ($D_r \neq 0$).

É interessante observar que o procedimento de redução altera os zeros de transmissão (Tabela 5.4) e lembrar que, para zeros de transmissão de fase não mínima em frequências dentro da banda do sistema, a metodologia LQG/LTR apresenta problemas no processo de recuperação.

TABELA 5.4 - PÓLOS E ZEROS DO MODELO REDUZIDO

Pólos de Malha Aberta		Zeros de Transmissão	
-2.2675e-10+	1.3331e+00i	5.4451e-05+	4.3341e+02i
-2.2675e-10-	1.3331e+00i	5.4451e-05-	4.3341e+02i
-3.6785e-32+	1.0809e-03i	-3.7988e-05+	3.0171e+02i
-3.6785e-32-	1.0809e-03i	-3.7988e-05-	3.0171e+02i

Na Figura 5.2, observa-se o efeito em altas frequências do ramo direto e dos zeros de transmissão nos valores singulares de $G_r(s)$.

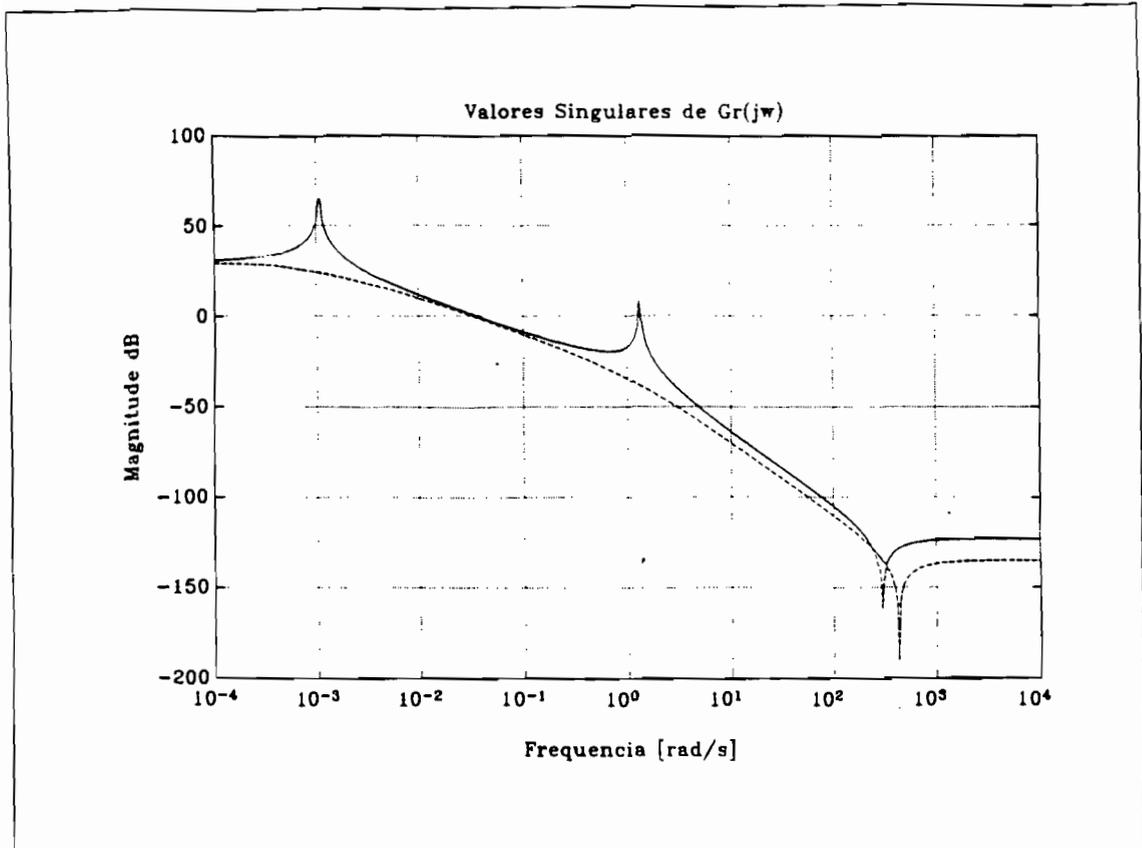


Fig. 5.2 - Valores Singulares de $G_r(j\omega)$.

Vale lembrar que, para se utilizar o Método dos Resíduos em conjunto com a metodologia LQG/LTR, devido às condições A1 e A2 do Teorema da Robustez (Apêndice G), não podem ser eliminados pólos instáveis e pólos sobre o eixo $j\omega$.

2) Determinação da Barreira de Alta Frequência

A redução de ordem do modelo introduz erros que devem ser considerados em projeto, pois podem provocar a instabilidade do sistema. Tomando-se o modelo de erro multiplicativo refletido na saída (Equação 4.2), obtém-se o seguinte diagrama de valores singulares da matriz de erro $E_{ms}(j\omega)$, mostrado na Figura 5.3.

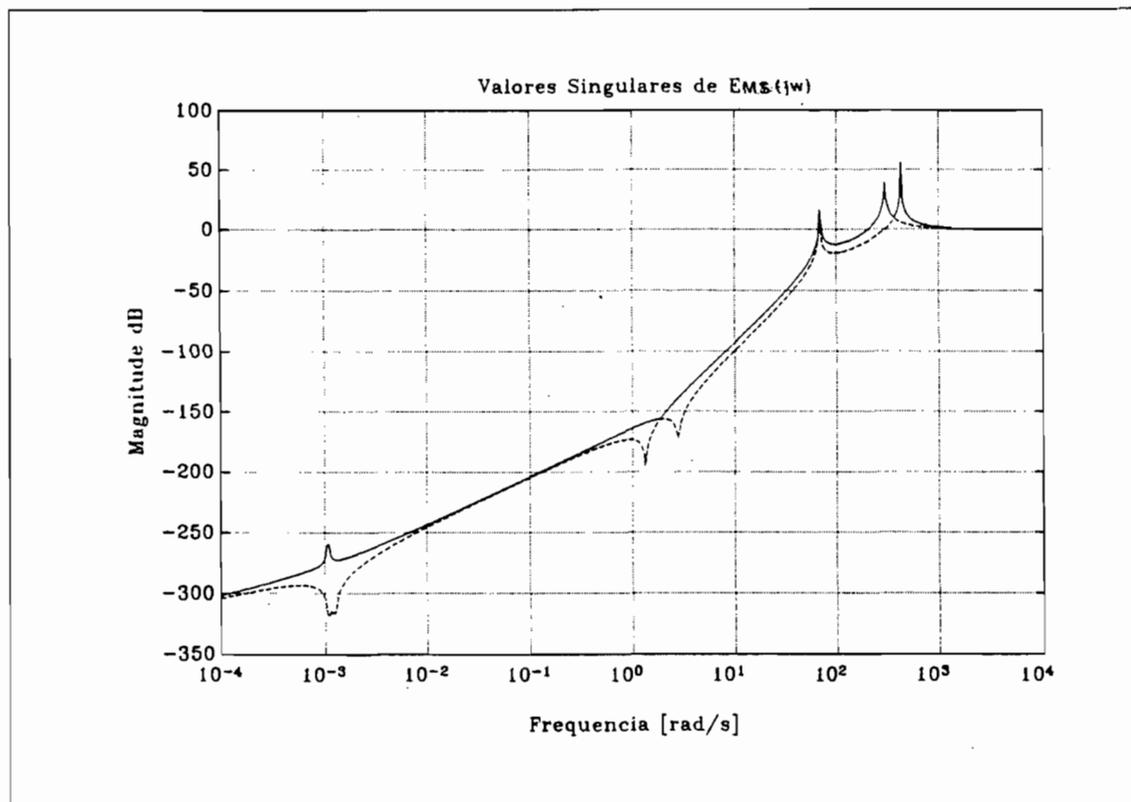


Fig. 5.3 - Valores Singulares de $EMS(j\omega)$.

Como esperado, o modelo reduzido é bastante semelhante ao modelo completo em baixas frequências e diferente em altas frequências, onde os pólos dos modos flexíveis foram eliminados. O primeiro pico com frequência próxima a 70 rad/s refere-se aos painéis flexíveis; os dois seguintes, com frequências de aproximadamente 300 rad/s e 430 rad/s, respectivamente, referem-se aos zeros de transmissão do modelo reduzido, e a região plana em altas frequências, ao ramo direto.

Como D_r é muito pequeno e trata-se de um ramo direto entre entrada e saída, considerou-se $D_r = 0$. Obtém-se, então, os mesmos pólos e os seguintes zeros de transmissão de fase mínima (Tabela 5.5):

TABELA 5.5 - ZEROS DE TRANSMISSÃO DO MODELO REDUZIDO
PARA $D_r = 0$

Zeros de Transmissão	
-8.095e-01-	4.5971e+04i
-8.095e-01+	4.5971e+04i

Comparando-se as Tabelas 5.4 e 5.5, verifica-se como os zeros de transmissão são sensíveis a alterações no ramo direto D_r . O sistema reduzido para $D_r = 0$ apresenta o seguinte diagrama de valores singulares (Figura 5.4).

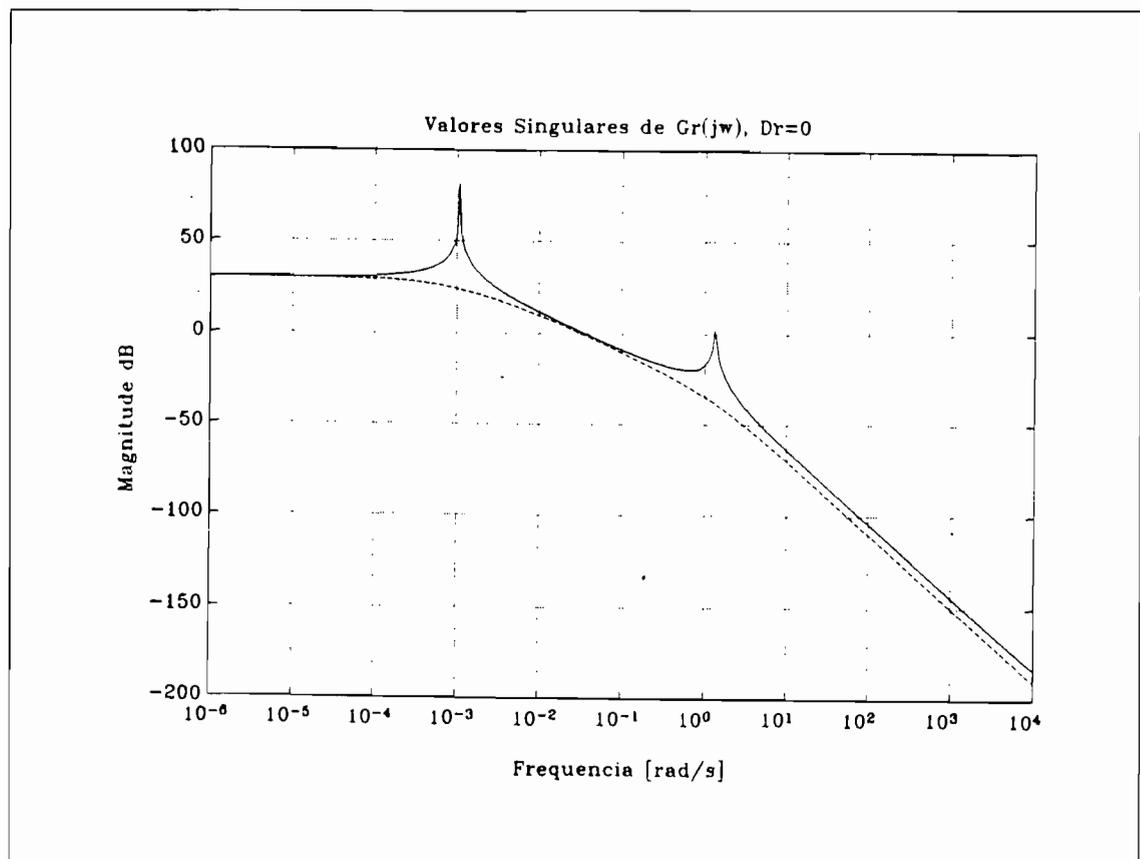


Fig. 5.4 - Valores Singulares de $G_r(jw)$ para $D_r = 0$.

Verifica-se na Figura 5.4 somente a eliminação do efeito do ramo direto em altas frequências e a alteração dos zeros de transmissão. Porém, ao se examinar os valores singulares de $E_{ms}(j\omega)$ (Figura 5.5a), verifica-se que o erro em baixas frequências aumenta devido a não coincidência dos modelos original e reduzido em $s = 0$. Como foi visto na Equação 4.9, as implicações destes erros de modelamento podem ser evidenciadas traçando-se a curva dos valores singulares de $\text{inv}(E_{ms}(j\omega))$ (Figura 5.5b), definindo-se assim a barreira de robustez de alta frequência. Nota-se que, de acordo com a Equação 4.9, para se garantir a estabilidade deve-se ter $\sigma_{\max}[C_N(j\omega)] < \sigma_{\min}[\text{inv}(E_{ms}(j\omega))]$. Como $C_N(j\omega) \cong G_K(j\omega)$ em altas frequências, a curva $\sigma_{\max}[G_K(j\omega)]$ não pode cruzar a curva $\sigma_{\min}[\text{inv}(E_{ms}(j\omega))]$ em altas frequências para ser garantida a estabilidade.

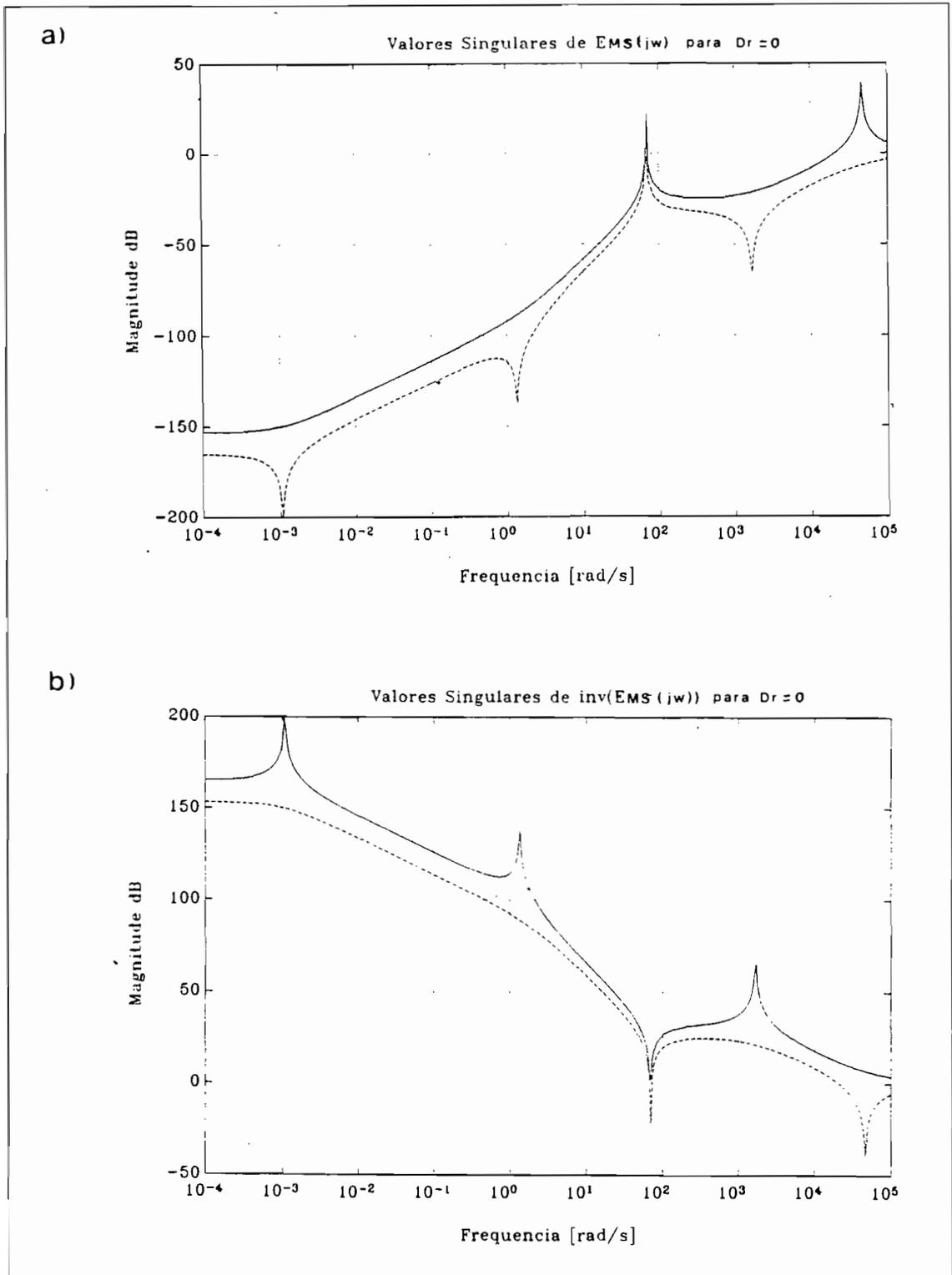


Fig. 5.5 - Valores Singulares: a) $E_{MS}(j\omega)$ para $D_r = 0$;
b) $\text{inv}(E_{MS}(j\omega))$ para $D_r = 0$.

Desta forma está definida a barreira de alta frequência. Deve-se notar a influência dos parâmetros dos painéis como frequência do primeiro modo e amortecimento na barreira de robustez.

3) Determinação da Barreira de Baixa Frequência

Considerou-se as seguintes especificações de desempenho:

- a) O sistema, quando excitado por degrau de referência ou perturbação, deve apresentar erro de regime estacionário zero.
- b) O compensador deve ser capaz de amortecer ativamente a nutação, o que equivale a impor uma frequência mínima de cruzamento superior à frequência de nutação.
- c) O satélite, quando sujeito aos torques, externos deve atender aos requisitos de atitude e de movimento de atitude, tal que:

$$\varphi_{\max} = \psi_{\max} = 0.00872 \text{ rad}$$

$$\dot{\psi}_{\max} = 0.000174 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\varphi}_{\max} = 0.000113 \text{ rad/s}$$

- d) O sistema deve ser insensível à variação nos parâmetros.

Ao se acrescentar integradores (Figura 4.7) o erro de regime estacionário quando excitado por degrau de comando/referência ou perturbação é zero. A descrição de estados da planta aumentada é obtida das Equações 4.45 e 4.46, onde A, B e C são substituídos por A_r , B_r e C_r e

dados nas Equações 5.7, 5.8 e 5.9, e o vetor de estados é dado por:

$$\mathbf{x}^T = [u_{p1} \ u_{p2} \ \varphi \ \psi \ \dot{\varphi} \ \dot{\psi} \ \hat{u}_{p1} \ \hat{u}_{p2} \ \hat{\varphi} \ \hat{\psi} \ \hat{\dot{\varphi}} \ \hat{\dot{\psi}}] \quad (5.11)$$

Outras vantagens de se acrescentar integradores na saída do controlador são apresentadas a seguir:

- 1) Elevam a curva de valores singulares da matriz de funções de transferência da planta em baixas frequências, pois, esta deixa de ser plana e adquire inclinação de -20 dB/década.
- 2) Auxiliam em superar torques de atrito presentes nos atuadores (Maciejowski, 1989).

Os torques ambientais atuam na entrada da planta e são de pequena amplitude e de baixa frequência (Figuras 3.1 e 3.2). Da Equação 4.16, tem-se que perturbações na entrada da planta estão relacionadas a perturbações na saída desta, pela relação:

$$d_o(s) = G_N(s)d_i(s) \quad (5.12)$$

Supondo-se a perturbação na entrada da planta senoidal, esta refletida na saída pode ser obtida da Figura 5.1, onde a amplificação máxima é de 75 dB em torno de 0,001 rad/s. Deve-se lembrar que, sendo o sistema do tipo "MIMO", para obter-se esta amplificação, a perturbação na entrada da planta deve ter amplitudes e fases específicas, determinadas pela decomposição em valores singulares.

Seja a perturbação na entrada senoidal $d_i(s)$:

$$\begin{aligned}
 d_i(t) &= \begin{bmatrix} d_1 e^{j\omega t + \Phi_1} \\ d_2 e^{j\omega t + \Phi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\omega t + \Phi_1} \\ e^{j\omega t + \Phi_2} \end{bmatrix} = \\
 &= Di \cdot \begin{bmatrix} e^{j\omega t + \Phi_1} \\ e^{j\omega t + \Phi_2} \end{bmatrix} , \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

onde, das Figuras 3.1 e 3.2, $\|Di\| = \max(d_1, d_2) = 1e-5$ e a frequência $\omega = 0.001$ rad/s.

Refletindo-se $d_i(t)$ na saída da planta, da Figura 5.1, têm-se $\|Do\| < 0,01$.

Da Equação 4.16 com $r(s) = 0$, $d_i(s) = 0$ e $n(s) = 0$, têm-se:

$$e(s) = -[I + G_N(s)K(s)]^{-1} d_o(s) , \tag{5.14}$$

ou

$$y(s) = [I + G_N(s)K(s)]^{-1} d_o(s) , \tag{5.15}$$

onde:

$$y(s) = \begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} . \tag{5.16}$$

Tomando-se a norma de ambos os membros da Equação 5.15, têm-se:

$$\begin{aligned} \|y(s)\| &= \| [I + G_N(s)K(s)]^{-1} d_o(s) \| \leq \\ &\leq \| [I + G_N(s)K(s)]^{-1} \| \cdot \|d_o(s)\| . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Das propriedades dos valores singulares, chega-se à:

$$\|y(s)\| \leq \sigma_{\max} [[I + G(s)K(s)]^{-1}] \cdot \|d_o(s)\| . \quad (5.18)$$

Ao se considerar a perturbação na entrada da planta como senoidal (Equação 5.13), têm-se para $w = 0,001 \text{ rad/s}$:

$$\|y(jw)\| \leq \sigma_{\max} [[I + G_N(jw)K(jw)]^{-1}] \cdot \|d_o(jw)\| . \quad (5.19)$$

$$\|y(jw)\|^2 = \varphi^* \varphi + \psi^* \psi = |\varphi|^2 + |\psi|^2$$

Para $\max \|y(jw)\|^2 < 0.00872^2$, basta que:

$$\sigma_{\max} [[I + G(jw)K(jw)]^{-1}] \cdot \|d_o(jw)\| < 0.00872^2 , \quad (5.20)$$

ou

$$\sigma_{\min} [I + G(jw)K(jw)] > 0,01/0,00872^2 \cong 42,37 \text{ dB} . \quad (5.21)$$

Para velocidade angular $v(t) = [\dot{\varphi}(t) \ \dot{\psi}(t)]^T$,
têm-se:

$$v(s) = sy(s) = s[I + G(s)K(s)]^{-1}d_o(s) , \quad (5.22)$$

e

$$\begin{aligned} \|v(jw)\| &= \|jw[I + G(jw)K(jw)]^{-1}d_o(jw)\| \leq \\ &\leq w \cdot \| [I + G(jw)K(jw)]^{-1} \| \cdot \|d_o(jw)\| . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Da propriedade dos valores singulares e considerando-se a entrada senoidal para $w = 0,001$ rad/s:

$$\|v(jw)\| \leq w \cdot \sigma_{\max} [[I + G(jw)K(jw)]^{-1}] \cdot \|d_o(jw)\| . \quad (5.24a)$$

$$\|v(jw)\|^2 = |\dot{\varphi}|^2 + |\dot{\psi}|^2 \quad (5.24b)$$

Para $\max \|v(jw)\| < 0.000113^2$, é suficiente
que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} [I + G(jw)K(jw)] &> (0,001) \cdot (0,01) / 0,000113^2 \cong \\ &\cong 57,87 \text{ dB} . \end{aligned} \quad (5.25)$$

Desta forma, está definida a barreira de
baixa frequência.

4) Determinação dos Parâmetros L , μ e ρ do Compensador

No domínio da frequência, a escolha dos parâmetros L e μ é facilitada pela Equação 4.37. O parâmetro L determina os zeros de transmissão de $C\Phi L$, e conseqüentemente, a forma da curva dos valores singulares no domínio da frequência e μ , a frequência de crossover de G_{FOL} . É interessante lembrar que a forma da curva já está determinada em parte pelos pólos de $C\Phi L$ (pólos de M.A. da planta).

No domínio do tempo é necessário verificar a localização dos pólos de M.F. da malha objetivo $C\Phi H$, uma vez que o comportamento do sistema resultante (planta + compensador) aproximará o comportamento da M.O.. O problema está na dificuldade de se prever esta localização a partir de L e μ , pois, os pólos de malha fechada da M.O. são dados pelas raízes do polinômio $\det(sI-A+HC)$, onde H é função de L e μ , sendo obtida da solução da equação algébrica de Riccati (Equações 4.35 e 4.36).

Sabe-se, porém, da teoria de filtros que, à medida que $\mu > 0$ decresce, os pólos de malha fechada da M.O. partem dos pólos de malha aberta e de suas imagens em relação ao eixo imaginário, caminhando em direção aos zeros de transmissão de fase mínima e à imagem no semi-plano esquerdo dos zeros de transmissão de fase não mínima de G_{FOL} . Deve-se ainda ter o par $[A,L]$ estabilizável de forma a se garantir a estabilidade nominal da M.O., como observado no Capítulo 4.

Logo, a escolha do parâmetro L é crítica. Maciejowski (1989) descreve um procedimento baseado em vetores singulares que apresenta bom controle sobre a forma

da curva de valores singulares e Athans (1986b), sobre alocação de pólos em reguladores lineares quadráticos.

Após algumas tentativas empíricas, adotaram-se os seguintes valores para os parâmetros L e μ :

$$L = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

$$\mu = 7, \quad (5.27)$$

onde os zeros de transmissão de G_{FOL} são dados na Tabela 5.6 e a curva de valores singulares de G_{FOL} é dada na Figura 5.6.

TABELA 5.6 - ZEROS DE TRANSMISSÃO DE G_{FOL}

Zeros de Transmissão	
3.4452e+17±	1.6764e-13i
-1.9586e+00±	3.5214e-01i
1.9687e+00±	2.8615e-01i

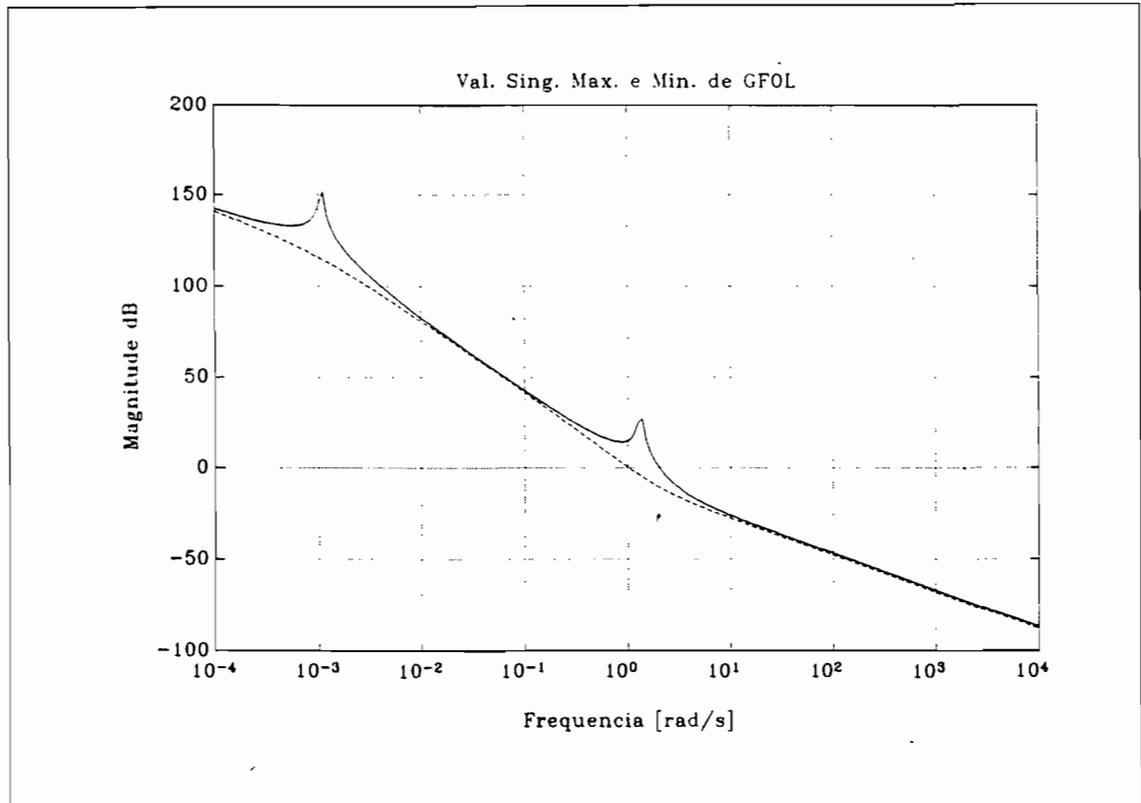


Fig. 5.6 - Valores Singulares Máximos e Mínimos de $(\frac{1}{\mu})^{0.5} G_{FOL}$.

Observando a região de crossover, nota-se que a malha G_{FOL} não apresenta as boas margens de fase e de ganho do LQR. Com L e μ determinados, obtém-se a matriz de ganho do filtro H através das Equações 4.35 e 4.36, dada por:

$$H = \begin{bmatrix} -2.5981e+01 & 2.7451e+01 \\ -2.7451e+01 & -2.5981e+01 \\ 1.2292e+00 & -4.6253e+00 \\ 4.2809e+00 & 1.6921e+00 \\ 2.1946e+00 & 2.2029e+00 \\ -2.8946e+00 & 2.2128e+00 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

A curva dos valores singulares de GKF é dada na Figura 5.7.

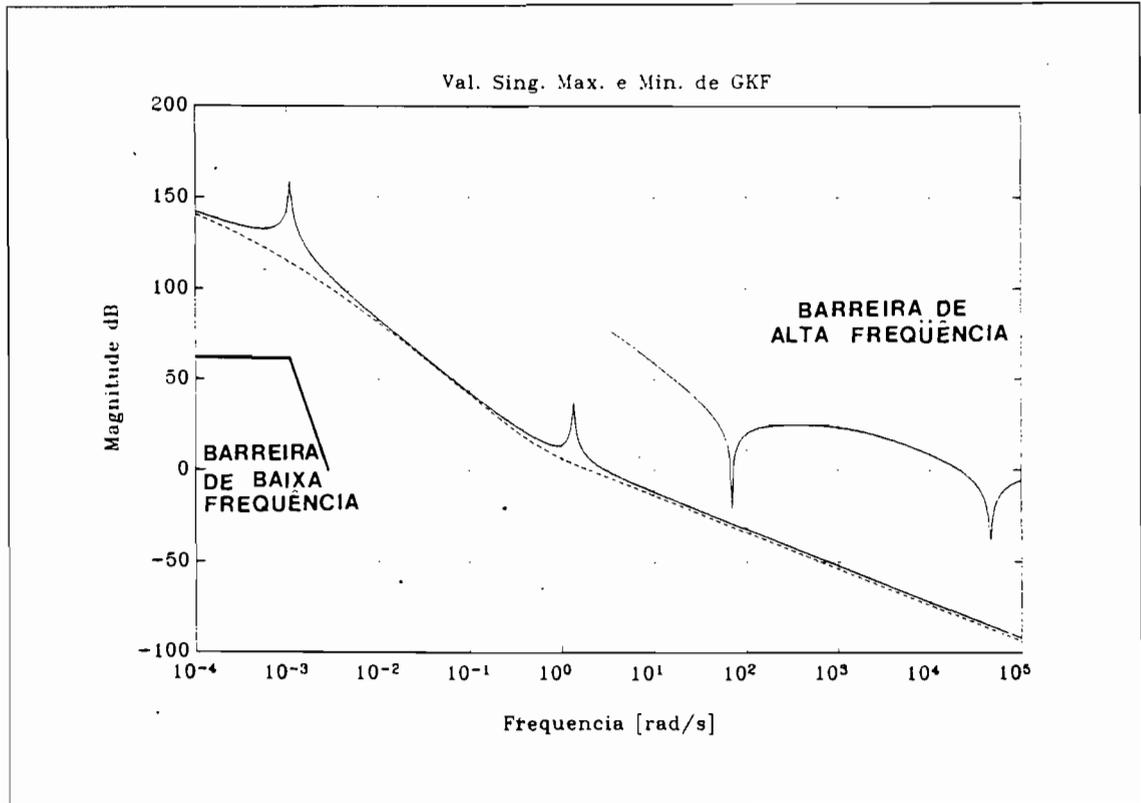


Fig. 5.7 - Valores Singulares Máximos e Mínimos de $G_{KF}(j\omega)$.

As curvas nas Figuras 5.6 e 5.7 são semelhantes em altas e baixas frequências em concordância com a Equação 4.42, porém, perto da frequência de cruzamento são sensivelmente diferentes. Na frequência de cruzamento, as curvas de valores singulares de GKF tem inclinação de -20 dB/década, característico de sistemas com boas margens de fase e de ganho. No caso, temos margens de fase de no mínimo $[\pm 60^\circ]$ e margens de ganho de no mínimo $[0,5; +\infty]$ devido a forma como foi calculado H. Observam-se também as excelentes características de rejeição a perturbações, insensibilidade a variação dos parâmetros e acompanhamento de referência em baixas frequências, pois, $\sigma_{\min}[GK(j\omega)] \gg 1$ nestas frequências (Equação 4.26).

Em baixas frequências a inclinação das curvas de valores singulares de $G_{KF}(j\omega)$ é de -20 dB/década devido a introdução de integradores e observa-se a dificuldade de se colocar a curva entre a barreira de robustez e a frequência de nutação, pois, a inclinação da curva de $G_{KF}(j\omega)$, a partir da frequência de cruzamento, é de -20 dB/década. A princípio, a curva $\sigma_{\max}[G_{KF}(j\omega)]$ poderia cruzar a barreira de robustez, porém, seria imposto limite na magnitude mínima do parâmetro ρ de recuperação, pois, a malha recuperada não pode cruzar a barreira. É conveniente, portanto, que G_{KF} respeite as barreiras de forma a não se limitar a qualidade da recuperação.

A matriz de funções de transferência $G_{KF}(j\omega)$ é recuperada à medida que $\rho \rightarrow 0$. São traçadas diversas curvas de valores singulares para três valores de ρ definidos na Tabela 5.7.

TABELA 5.7 - VALORES DO PARÂMETRO ρ ESTUDADOS

ρ	valor
ρ_1	$1e-5$
ρ_2	$1e-10$
ρ_3	$1e-20$

Observa-se a recuperação de $G_{KF}(j\omega)$ na Figura 5.8 e que, em altas frequências, devido à inclinação maior que -20 dB/década, a curva da matriz de funções de transferência de malha aberta recuperada $G_{LTR}(j\omega)$ denota uma maior robustez face a erros de modelagem que $G_{KF}(j\omega)$.

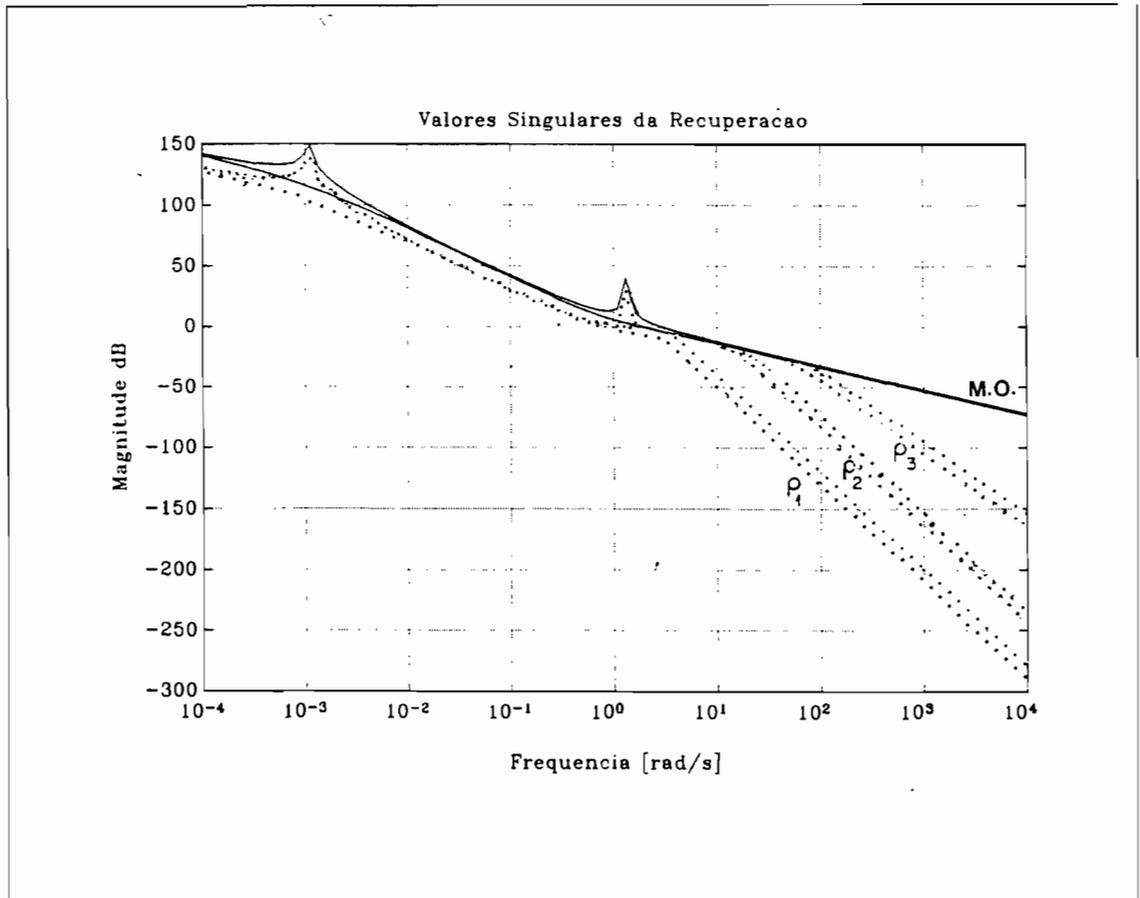


Fig. 5.8 - Valores Singulares da Recuperação.

Para $\rho < \rho_2$ a curva da malha recuperada praticamente coincide em baixas frequências com a curva da M.O.. Na Figura 5.9 tem-se a curva dos valores singulares máximos da matriz de funções de transferência de malha fechada da M.O. e das malhas recuperadas.

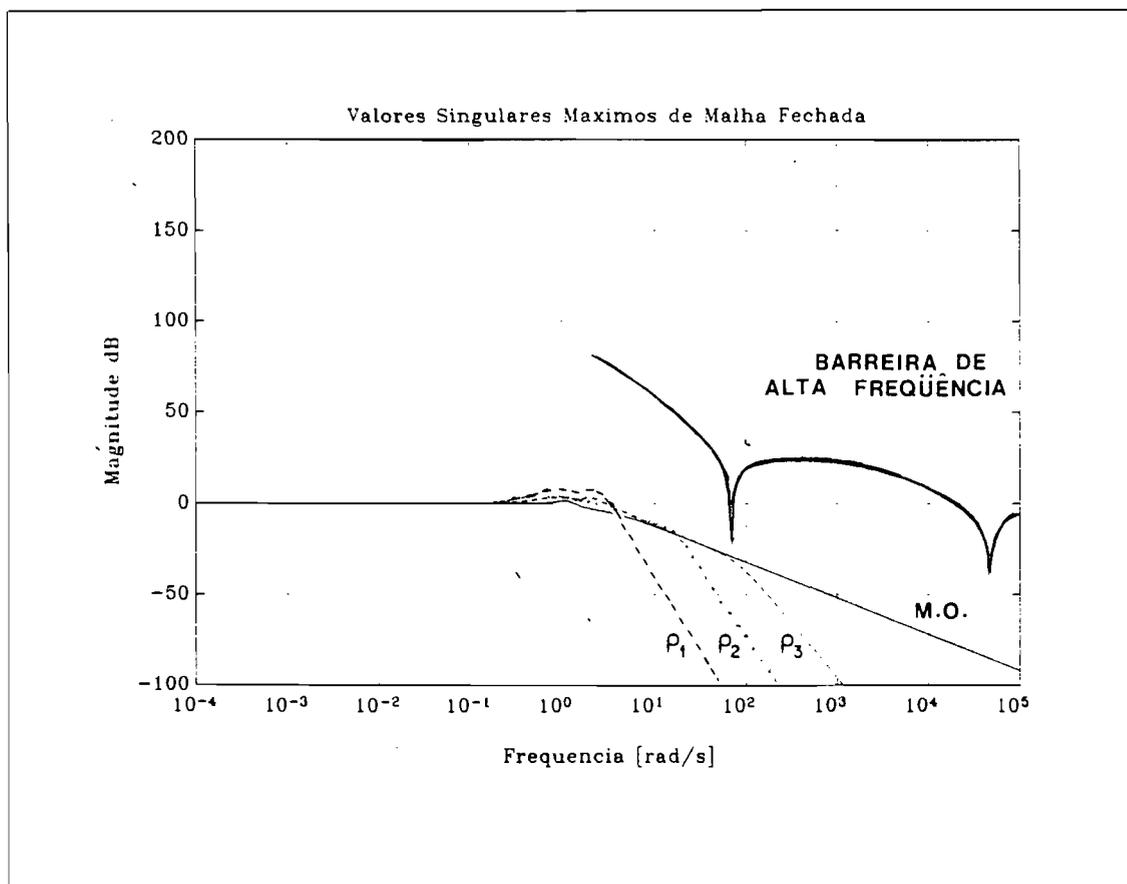


Fig. 5.9 - Valores Singulares Máximos de Malha Fechada.

A Figura 5.9 mostra que a banda de malha fechada do sistema é definida pela M.O.. Pode-se reduzir ρ indefinidamente que a banda do sistema recuperado não aumenta, mesmo quando são permitidos controles de grande amplitude. Observa-se que, como $G_k F(j\omega)$ respeita a barreira de robustez, ρ pode ser indefinidamente pequeno, que não haverá cruzamento da mesma.

A partir das Figuras 5.8 e 5.9 é difícil definir um valor de ρ . Entretanto, a partir dos valores singulares da matriz de sensibilidade $S(j\omega)$ (Figura 5.10), torna-se mais transparente o efeito de ρ , pois, as margens de fase e de ganho são função do valor singular máximo de $S(j\omega)$, como pode ser visto na Equação 4.10c.

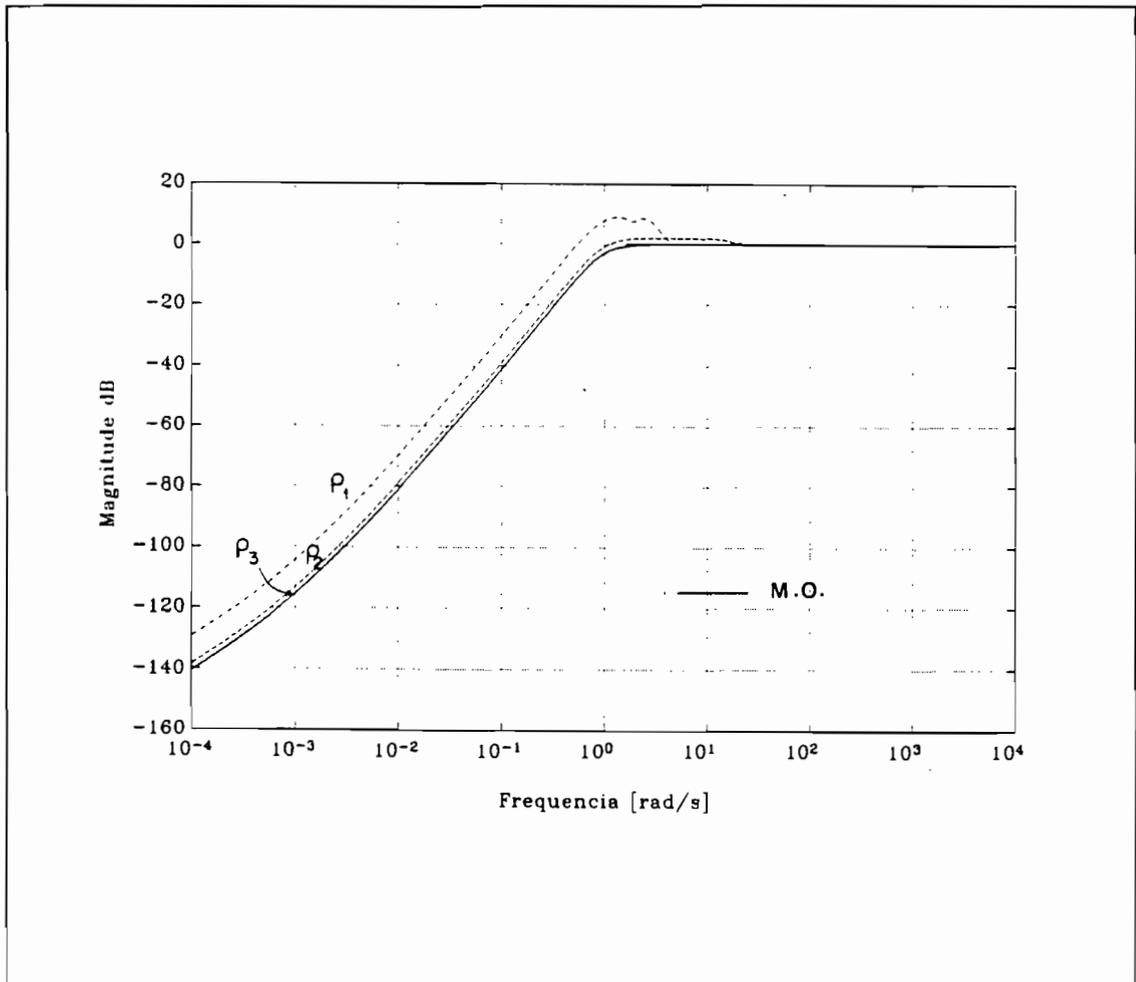


Fig. 5.10 - Valores Singulares Máximos da matriz de sensibilidade $S(j\omega)$.

Na Figura 5.10, observa-se que à medida que $\rho \rightarrow 0$, recuperam-se as excelentes margens de fase e de ganho do LQR, como pode ser visto na Tabela 5.8. Note que a curva para $\rho = \rho_3$, coincide com a curva da M.O..

TABELA 5.8 - MARGENS DE FASE E DE GANHO MÍNIMAS

ρ	Margem de Ganho		Margem de Fase	
1.0000e-05	7.3561e-01	1.5611e+00	-2.0705e+01	2.0705e+01
1.0000e-10	5.6039e-01	4.6396e+00	-4.6137e+01	4.6137e+01
1.0000e-20	5.1236e-01	2.0734e+01	-5.6334e+01	5.6334e+01
LQR	5.0000e-01	∞	-6.0000e+01	6.0000e+01

Comparando-se as Figuras 5.9 e 5.10, pode-se verificar o compromisso entre alto desempenho e robustez à dinâmicas não modeladas evidenciado na relação $S(j\omega)+C(j\omega)=I$, como discutido no Capítulo 4.

Na Figura 5.11 apresentam-se as curvas dos valores singulares máximos da matriz de funções de transferência da perturbação para saída, obtida da Figura 4.5. Além das excelentes margens de fase e de ganho (Tabela 5.8), observam-se nesta figura as excelentes características quanto a rejeição de perturbações, tanto em baixas como em altas frequências, onde tem-se atenuação de, no mínimo, 20 dB.

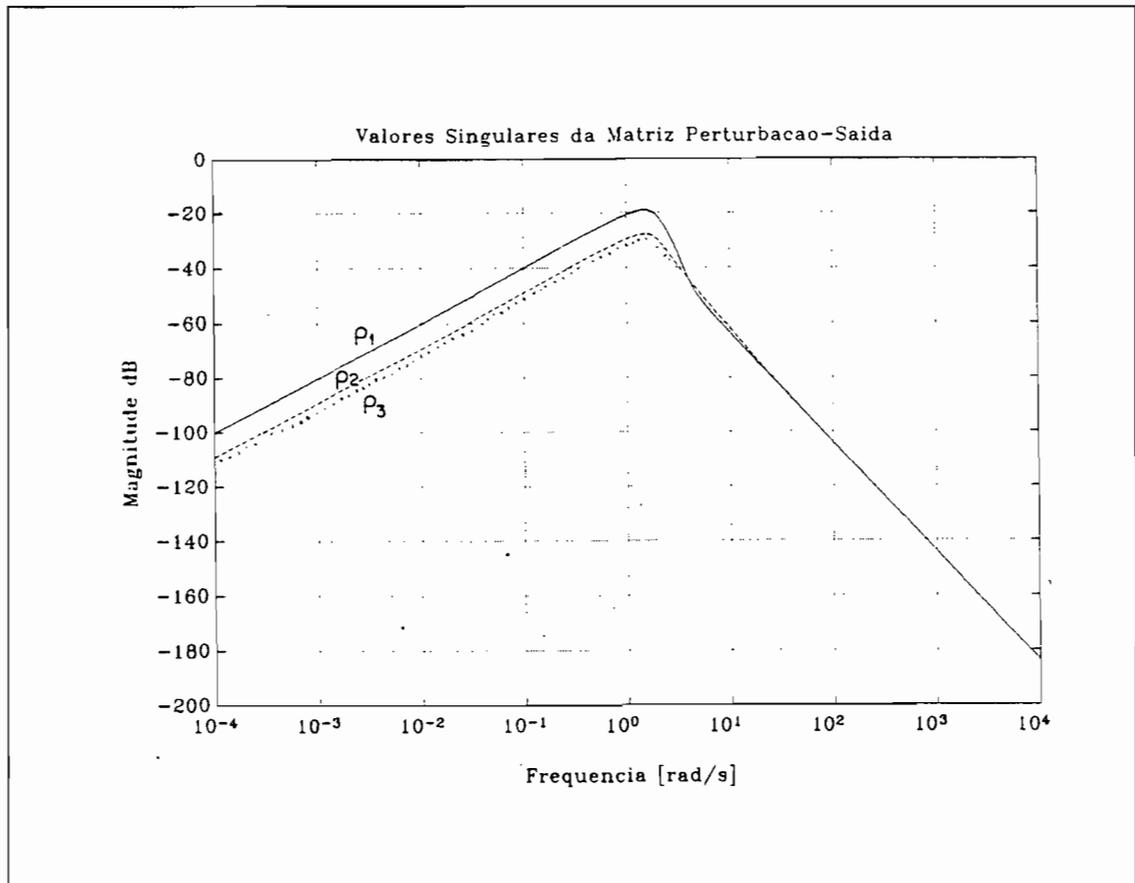


Fig. 5.11 - Valores Singulares Máximos da matriz de funções de transferência da perturbaao para saída.

Porém, valores muito pequenos de ρ devem provocar saturaoes dos atuadores. Isto é sugerido pela Figura 5.12 em conjunto com a Equaao 4.28, além de ter sido observado nas simulaoes.

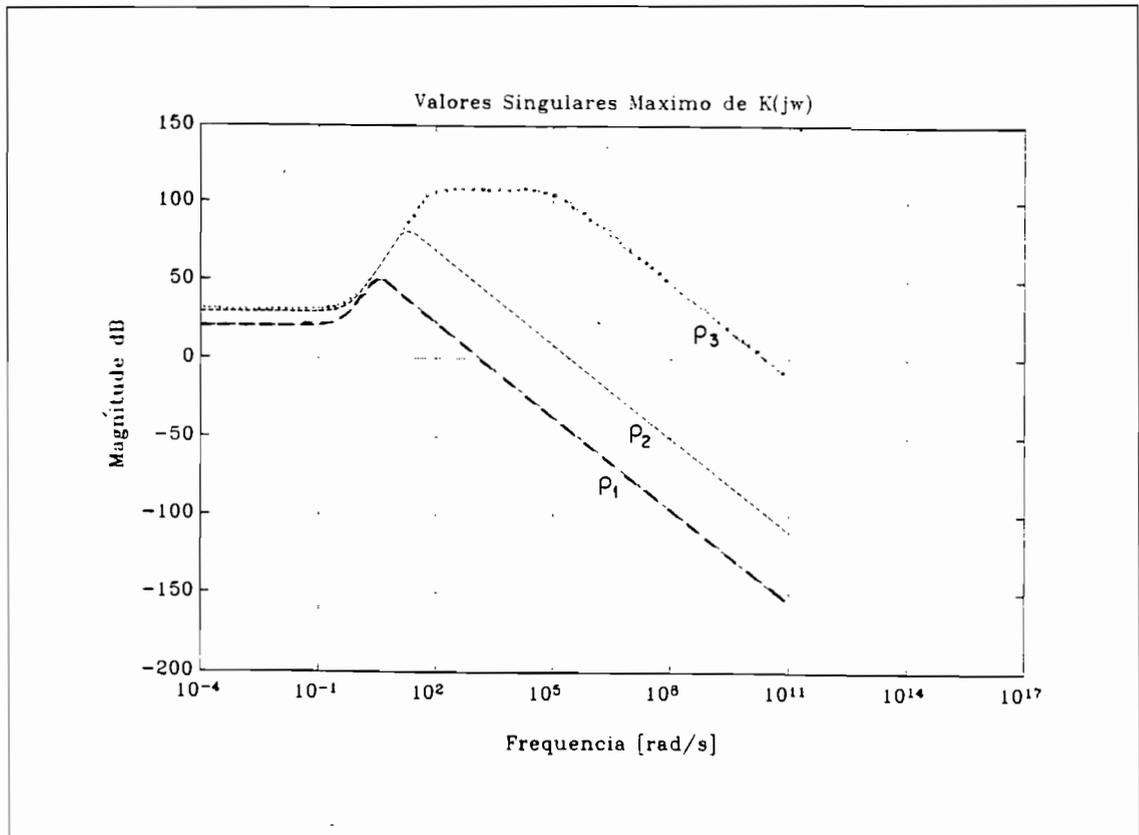


Fig. 5.12 - Valores Singulares Máximos de $K(j\omega)$.

Como verificou-se, diversos fatores devem ser considerados na escolha do parâmetro ρ :

- 1) ρ deve ser suficientemente pequeno para se obter margens de fase e de ganho satisfatórias.
- 2) Se $G_{KF}(j\omega)$ não respeita as barreiras, ρ não pode ser indefinidamente pequeno, pois, $G_{LTR}(j\omega)$ pode cruzar a barreira de robustez.
- 3) ρ não deve ser muito pequeno devido as vantagens da declividade em altas frequências de - 40 dB/década.

- 4) ρ não deve ser muito pequeno para não saturar os atuadores.
- 5) Para valores muito pequenos de ρ podem aparecer problemas numéricos na resolução da Equação Algébrica de Riccati.

Baseado nestas observações e nas simulações, chega-se a:

$$\rho = 1e-10 , \quad (5.29)$$

e, através das Equações 4.59 e 4.60, a:

$$G^T = \begin{bmatrix} 2.9428e+01 & -8.5766e-04 \\ -8.5766e-04 & 3.6753e+01 \\ -3.4537e+04 & 7.4147e+03 \\ -5.3053e+03 & -4.8217e+04 \\ -7.0645e+04 & -2.8209e+03 \\ 2.8201e+03 & -7.0664e+04 \end{bmatrix} . \quad (5.30)$$

b) Pitch

O projeto do compensador de pitch é bem mais simples, pois trata-se de um sistema SISO e, portanto, as curvas de valores singulares são substituídas pelos diagramas de Bode padrão.

A partir da Equação 3.28b, chega-se à seguinte descrição de estados para o eixo de pitch:

$$\dot{x} = Ax + Bu , \quad (5.31a)$$

$$y = Cx , \quad (5.31b)$$

onde :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/I_y \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0],$$

$$\mathbf{x}^T = [\theta \ \dot{\theta}] \quad \text{e} \quad u = u_p \quad (5.32)$$

Este sistema é observável e controlável, apresenta dois pólos em zero e não apresenta zeros de transmissão. Na Figura 5.13a é apresentado o diagrama de Bode da função de transferência G . O sistema é bastante simples dispensando uma simplificação do modelo.

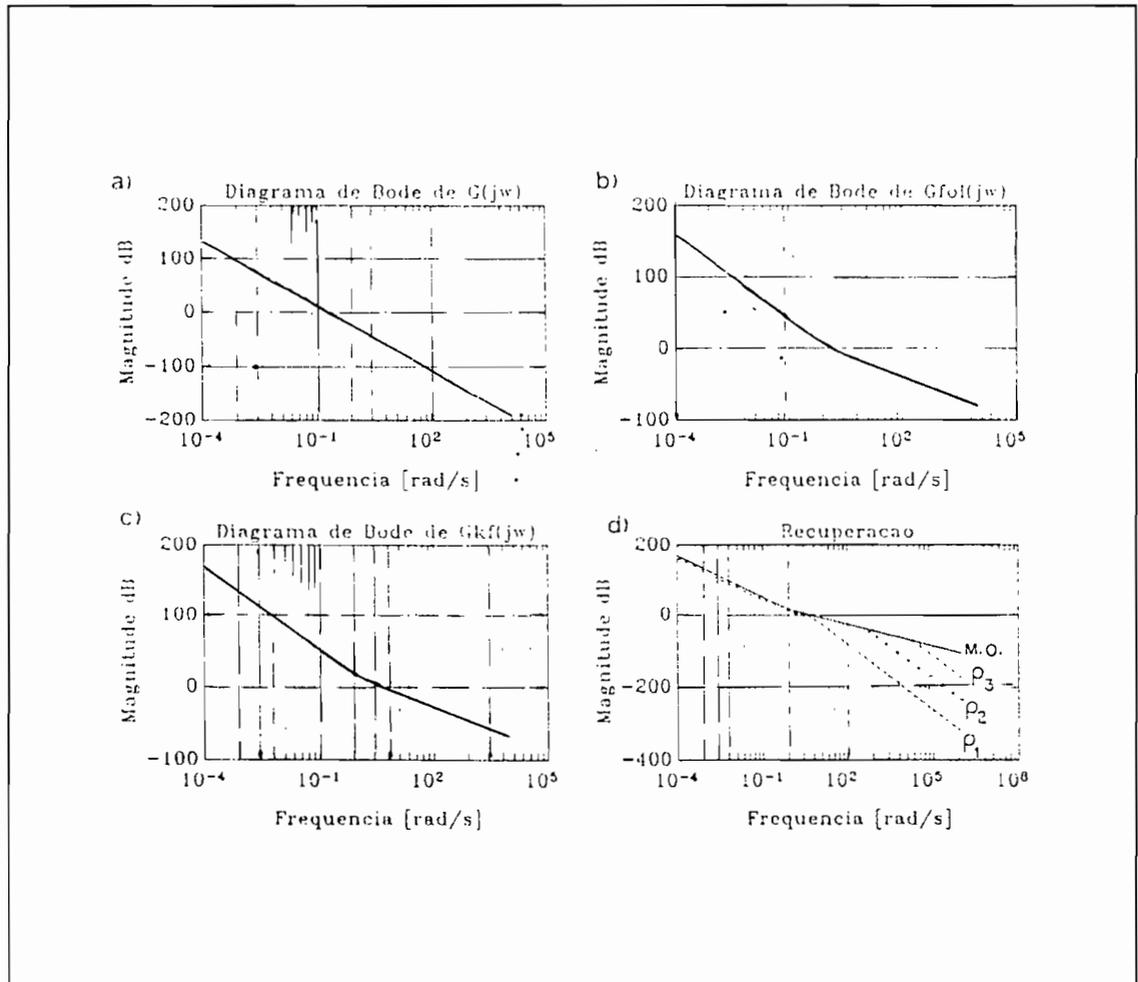


Fig. 5.13 - Diagramas de Bode de pitch: a) $G(j\omega)$; b) $G_{fol}(j\omega)$; c) $G_{kf}(j\omega)$; d) Recuperação.

As especificações de atitude e de movimento de atitude são as mesmas das de roll e yaw, o que fornece a mesma barreira de baixa frequência, desconsiderando-se a nutação. Após algumas tentativas, adotou-se os seguintes valores para os parâmetros L e μ :

$$\mu = 1, \quad (5.33a)$$

$$L = [1 \ 1]^T, \quad (5.33b)$$

chega-se ao diagrama de Bode de G_{FOL} apresentado na Figura 5.13b. Para estes valores, obtém-se, a partir das Equações 4.35 e 4.36, o ganho do filtro H dado por:

$$H = [4,0404 \ 3,1623] , \quad (5.34)$$

e o diagrama de Bode de G_{KF} , dado na Figura 5.13c. Para $\rho_1 = 1e-5$, $\rho_2 = 1e-10$, $\rho_3 = 1e-20$, obtém-se os diagramas de Bode da malha recuperada (Figura 5.13d), da malha fechada (Figura 5.14a), da matriz de sensibilidade (Figura 5.14b), da matriz perturbação-saída (Figura 5.14c), do compensador (Figura 5.14d) e as margens de fase e de ganho, dadas na Tabela 5.9.

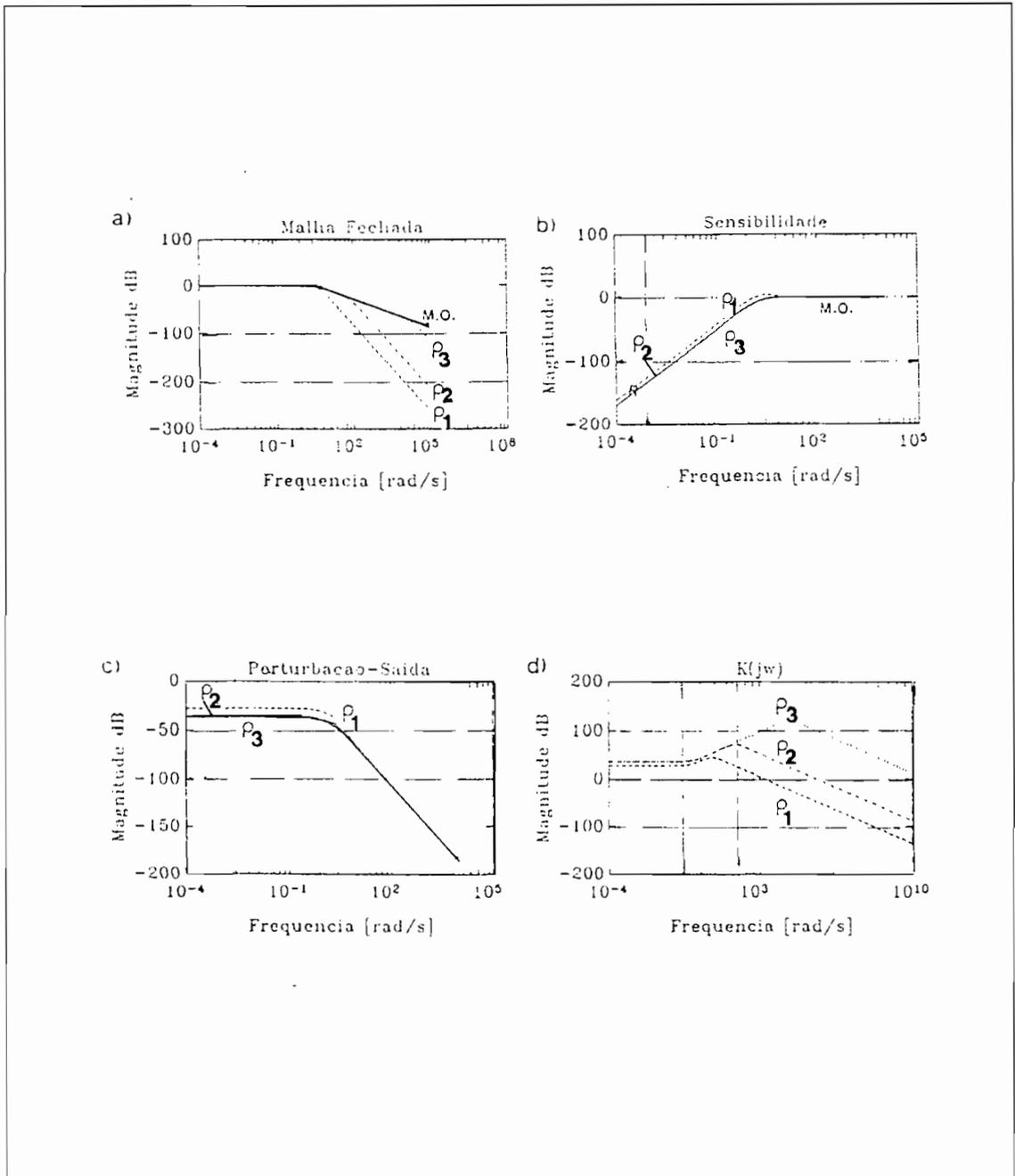


Fig. 5.14 - Diagramas de Bode de Pitch: a) Malha Fechada; b) Sensibilidade; c) Perturbação-Saída; d) $K(j\omega)$.

TABELA 5.9 - MARGENS DE FASE E DE GANHO MÍNIMAS

ρ	Margem de Ganho		Margem de Fase (graus)	
1.0000e-05	6.2158e-01	2.5562e+00	-3.5444e+01	3.5444e+01
1.0000e-10	5.1820e-01	1.4233e+01	-5.5404e+01	5.5404e+01
1.0000e-20	5.0007e-01	3.7530e+03	-5.9982e+01	5.9982e+01

Com base nestes resultados e nas simulações, chega-se a $\rho = 1e-7$ e, através das Equações 4.59 e 4.60, à:

$$G = [-3.1623e+03 \quad -3.6789e+02] \quad . \quad (5.35)$$

c) Simulações para Roll/Yaw

São feitas simulações com três modelos de forma a se evidenciar o efeito nas respostas temporais da variação do parâmetro ρ , à medida que este tende a zero:

- 1) Malha Objetivo: O comportamento da M.O. (Figura 5.15) é recuperado pelo procedimento de recuperação, portanto, ao se determinar o parâmetro H do filtro, deve-se verificar se o comportamento desta malha é satisfatório. O vetor de estados é dado por $[u_{p1} \ u_{p2} \ \varphi \ \psi \ \dot{\varphi} \ \dot{\psi}]$.

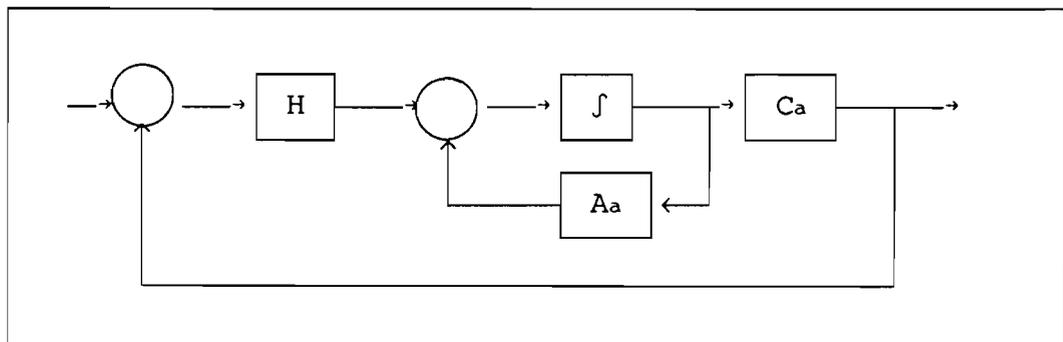


Fig. 5.15 - Malha Objetivo.

2) Modelo Nominal de Simulação (Figura 5.16): O modelo da planta é reduzido (sem dinâmicas dos painéis flexíveis) e aumentado com as dinâmicas dos integradores. O compensador contém a dinâmica desta planta. Neste modelo os pólos de malha fechada são dados pelos autovalores de $(A_a - H C_a)$ e $(A_a - B_a G)$. O vetor de estados é dado por:

$$[u_{p1} \ u_{p2} \ \varphi \ \psi \ \dot{\varphi} \ \dot{\psi} \ \hat{u}_{p1} \ \hat{u}_{p2} \ \hat{\varphi} \ \hat{\psi} \ \hat{\dot{\varphi}} \ \hat{\dot{\psi}}]$$

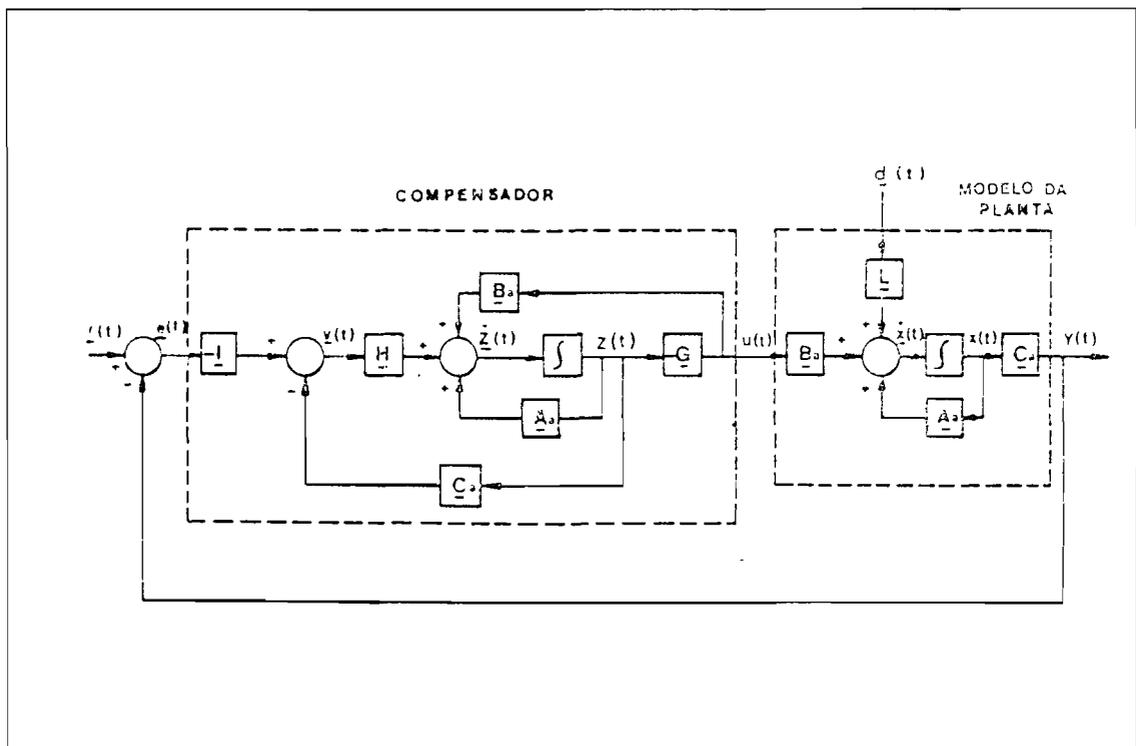


Fig. 5.16 - Modelo Nominal de Projeto.

3) Modelo Completo de Simulação (Figura 5.17): O modelo da planta é completo e contém as dinâmicas dos painéis flexíveis e dos integradores acrescentados. O compensador é o mesmo da Figura 5.16 e foi projetado para controlar esta planta. Nas simulações com este

modelo, o satélite deve atender aos requisitos de atitude e de movimento de atitude. O vetor de estados é dado por:

$$[u_{p1} \ u_{p2} \ \varphi \ \psi \ q_1 \ q_3 \ \dot{\varphi} \ \dot{\psi} \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_3 \ \hat{u}_{p1} \ \hat{u}_{p2} \ \hat{\varphi} \ \hat{\psi} \ \hat{\dot{\varphi}} \ \hat{\dot{\psi}}].$$

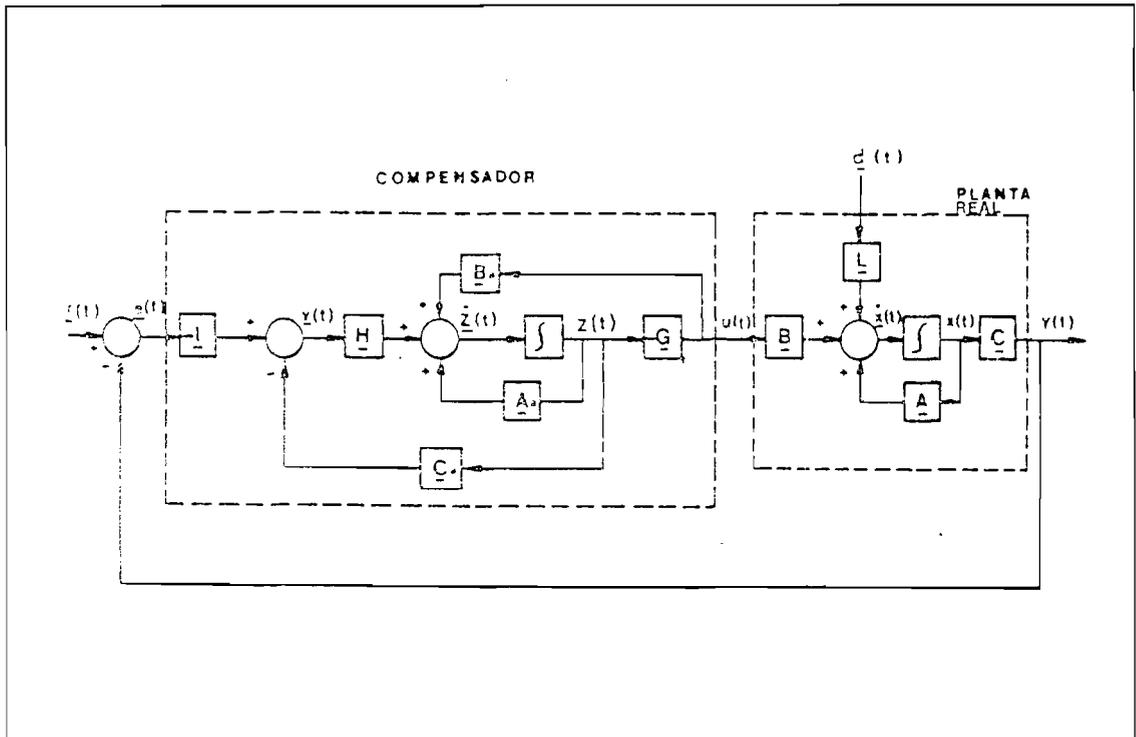


Fig. 5.17 - Modelo Completo de Simulação.

As simulações com os dois primeiros modelos é apresentada para se verificar a recuperação do comportamento da M.O.. São feitas simulações para condições iniciais não nulas e para perturbações representadas por torques ambientais, para $\rho_1 = 1e-5$, $\rho_2 = 1e-10$, $\rho_3 = 1e-20$. Para verificar as características de desacoplamento do

sistema, foram feitas simulações apenas nos casos em que uma das variáveis de estado é não nula.

Na Figura 5.18, tem-se os resultados da simulação da M.O. e do Modelo de Projeto para as condições iniciais $\varphi_0 = 0.0174$ rad (1°) e demais variáveis de estado nulas. Na Figura 5.18a, tem-se a saída da M.O., correspondente aos ângulos de roll e de yaw. Observa-se que o sistema apresenta desacoplamento moderado e o estado rapidamente volta para a origem (10s). Este comportamento é recuperado pela malha do Modelo de Projeto quando $\rho \rightarrow 0$, como observa-se na Figura 5.18b para roll e na Figura 5.18c para yaw. Deve-se notar que, sendo o modelo reduzido, a saída está relacionada ao estado por $y = Cx = [0 \ C_r]x$, o que fornece para roll $y_1(0) = 0.0061$ e para yaw $y_2(0) = -0.0004$.

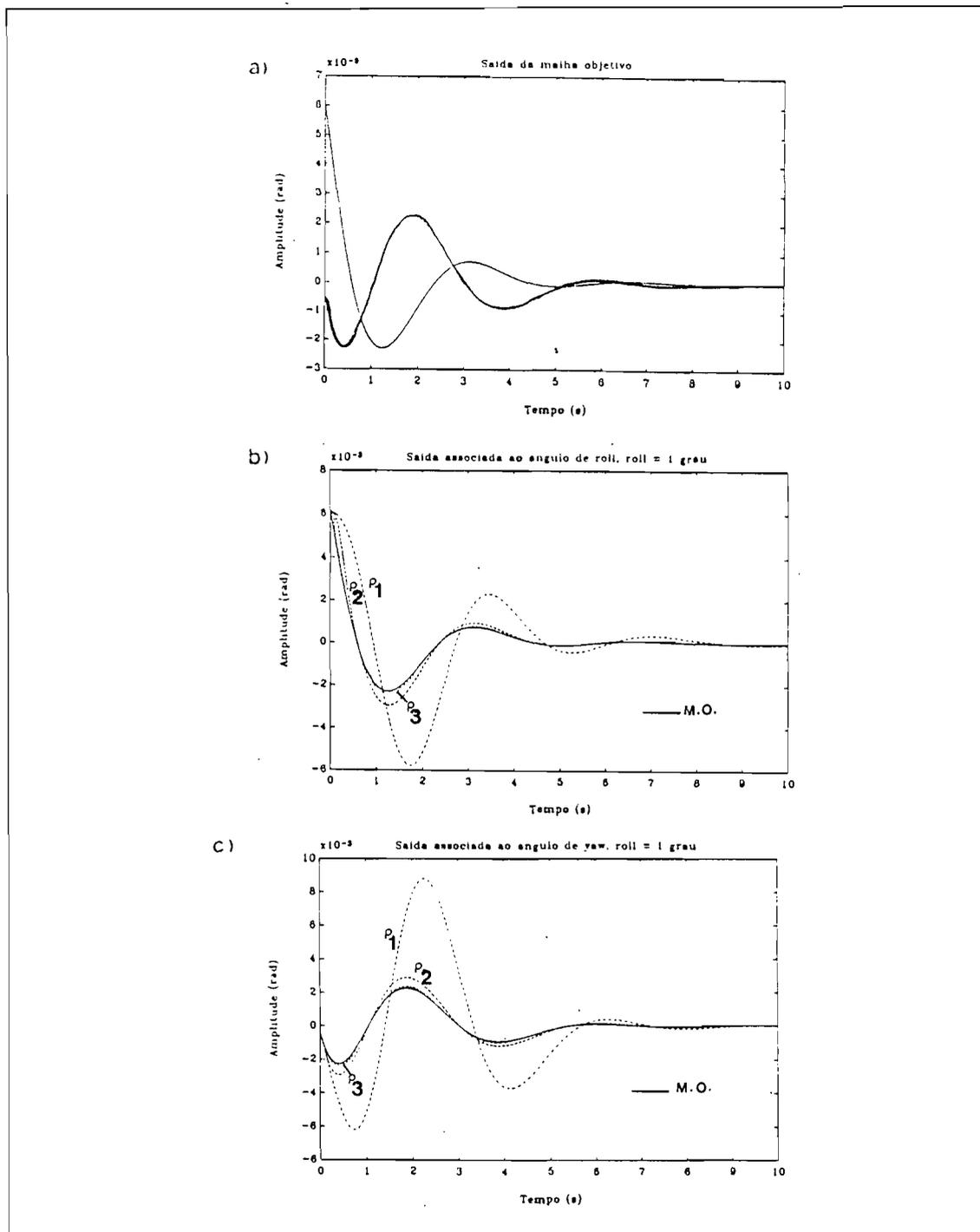


Fig. 5.18 - Simulação com a M.O. e o Modelo de Projeto, para $\varphi = 1^\circ$: a) M.O.; b) Comportamento da malha recuperada para roll; c) Comportamento da malha recuperada para yaw.

Comportamento semelhante é observado na Figura 5.19 para as condições iniciais $\psi_0 = 0.0174$ rad (1°) e demais variáveis de estado nulas.

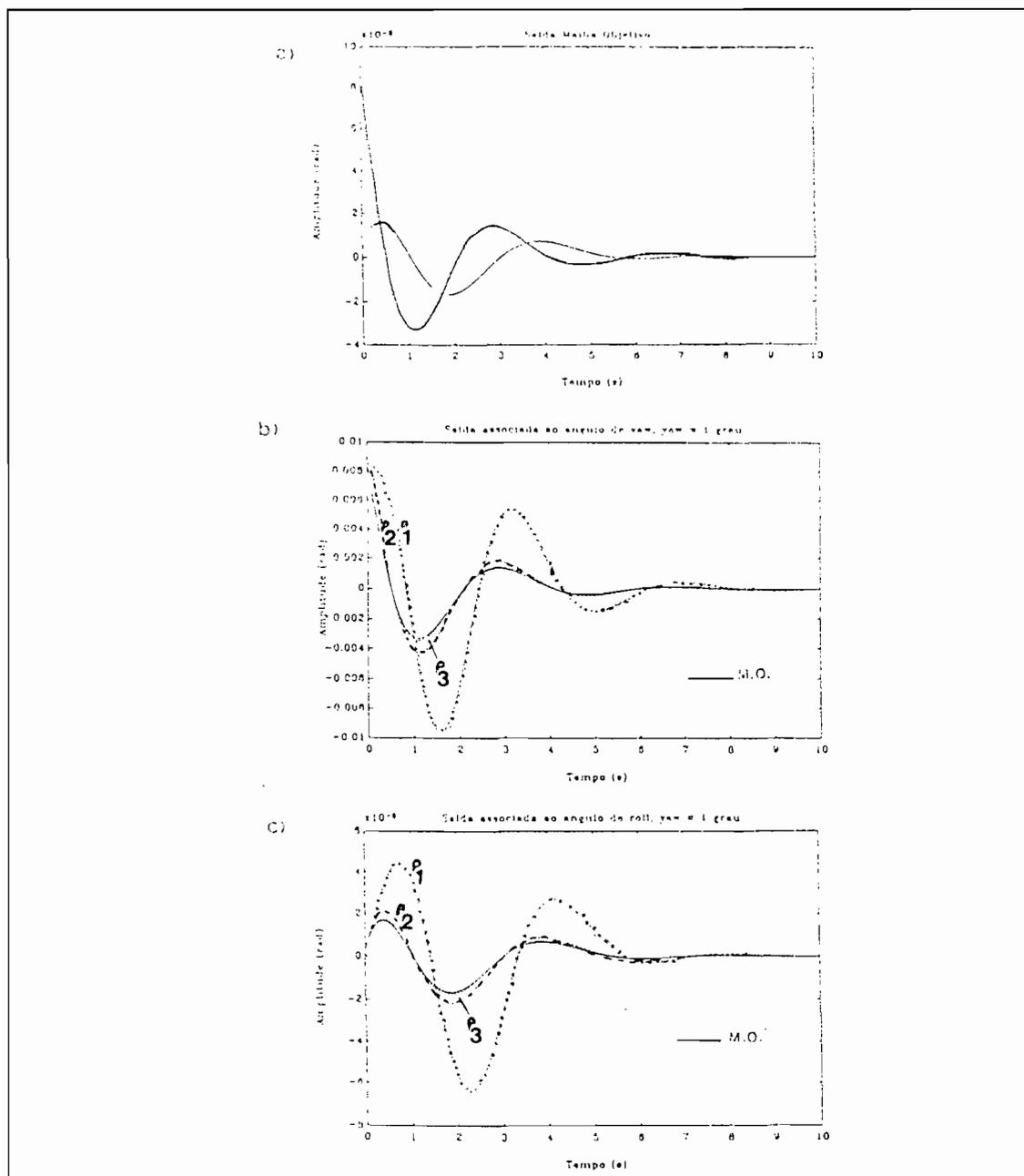


Fig. 5.19 - Simulação com a M.O. e o Modelo de Projeto, para $\psi_0 = 0.0174$ rad: a) M.O.; b) Comportamento da malha recuperada para roll; c) Comportamento da malha recuperada para yaw.

Na Figura 5.20 tem-se os resultados da simulação do modelo da Figura 5.17 para $\rho_1 = 1e-5$, $\rho_2 = 1e-10$, $\rho_3 = 1e-20$ e condição inicial $\varphi_0 = 0.0174$ rad (1°) e demais variáveis de estado nulas.

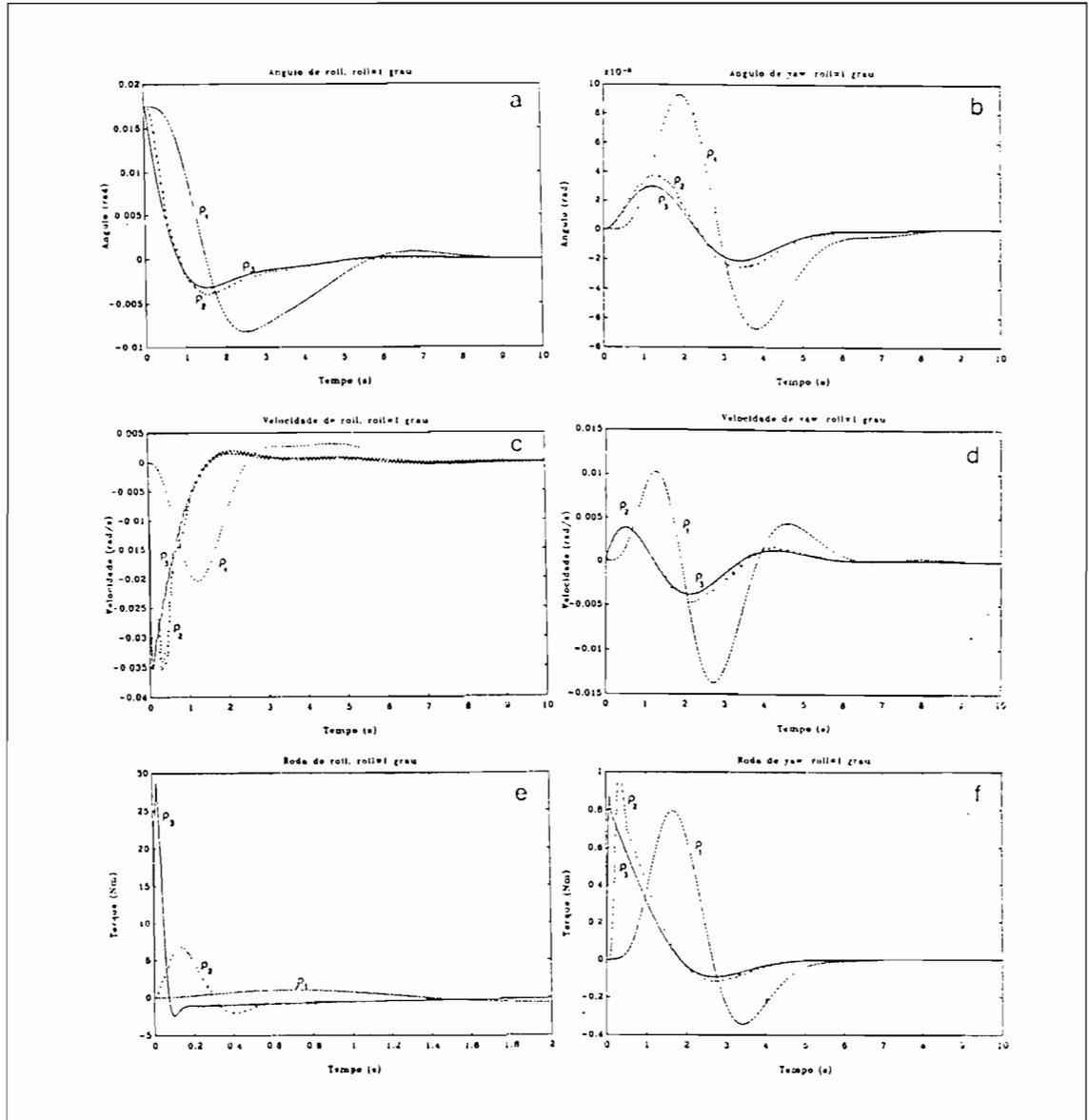


Fig. 5.20 - Resultados da simulação do Modelo Completo de Simulação: a) Ângulo de roll; b) Ângulo de yaw; c) Velocidade de roll; d) Velocidade de yaw; e) Torque da roda de roll; f) Torque da roda de yaw.

Observa-se que a resposta do Modelo Completo de Simulação tende assintoticamente à resposta da M.O. a menos dos fatores C_r e K_r . Na Figura 5.20e observa-se torques muito elevados quando ρ é muito pequeno. Para estes torques elevados observa-se que, além dos atuadores saturarem (torque de saturação = 0,2 Nm), o sistema não atenderia as estreitas especificações de velocidade devido ao efeito dos painéis flexíveis (Figura 5.20c).

Os resultados das simulações do Modelo Completo de Simulação com o compensador obtido para $\rho = 1e-10$, para as mesmas condições iniciais da Figura 5.20, são apresentados na Figura 5.21. Estes resultados são uma síntese daqueles obtidos da Figura 5.20. Para estas simulações o sistema apresenta desacoplamento moderado ($\pm 25\%$) para $\varphi_0 = 0.0174$ rad (1°) e rapidamente atende as especificações de atitude e de movimento de atitude. Na Figura 5.21c observa-se que os valores elevados dos torques saturam os atuadores, porém, simulações para condições iniciais são equivalentes a aplicar um impulso no estado e o compensador não foi projetado para rejeitar tais perturbações.

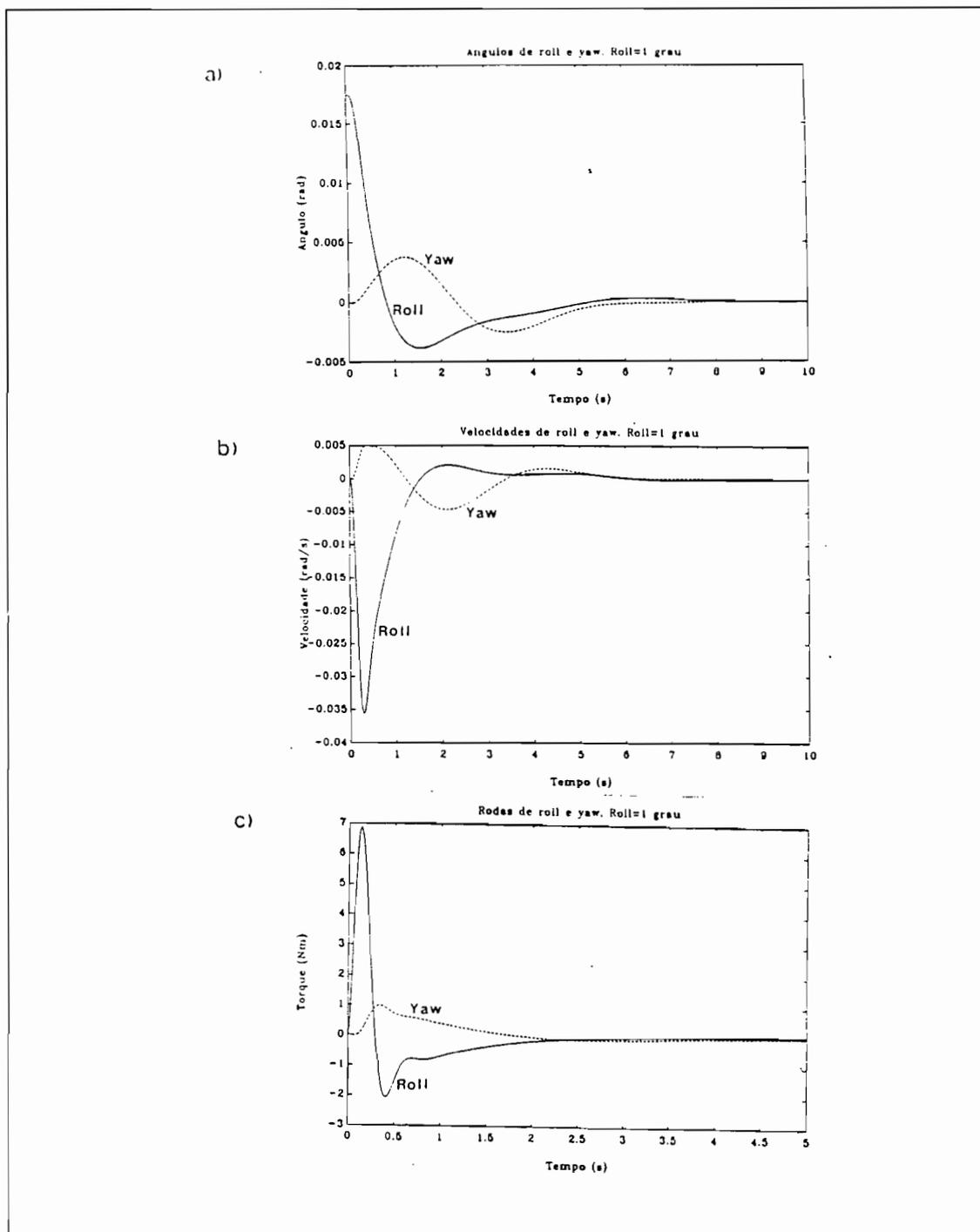


Fig. 5.21 - Resultados da Simulação do Modelo Completo de Simulação com o compensador final: a) Ângulos de roll e de yaw; b) Velocidades de roll e de yaw; c) Torques das rodas de roll e de yaw.

Definido o valor de $\rho = 1e-10$, o compensador obtido pode ser efetivamente testado nas condições para as quais ele foi projetado. Os resultados da simulação do Modelo Completo de Simulação, para uma órbita completa (6000s) com perturbações semelhantes às esperadas (Figuras 3.1 e 3.2), são apresentados na Figura 5.22 para o torque aerodinâmico e na Figura 5.23 para o torque de radiação solar. Verifica-se que o sistema atende com bastante folga as especificações, tanto de atitude como de movimento de atitude, como era previsto pela Figura 5.11. A oscilação observada na velocidade (Figura 5.22b) é provocada pelas condições iniciais nulas do sistema e isto pode ser visto como se existisse um torque em degrau em $t = 0s$. Comparando-se as Figuras 3.1 e 3.2 com as Figuras 5.22c e 5.23c, observa-se que o torque de controle é contrário e de mesma magnitude do torque externo, como era de se esperar, e que não ocorrem saturações. Nas Figuras 5.23a e b, nota-se o efeito da passagem do satélite da sombra para o lado iluminado da Terra, sendo um movimento lento, como verifica-se na Figura 5.23b.

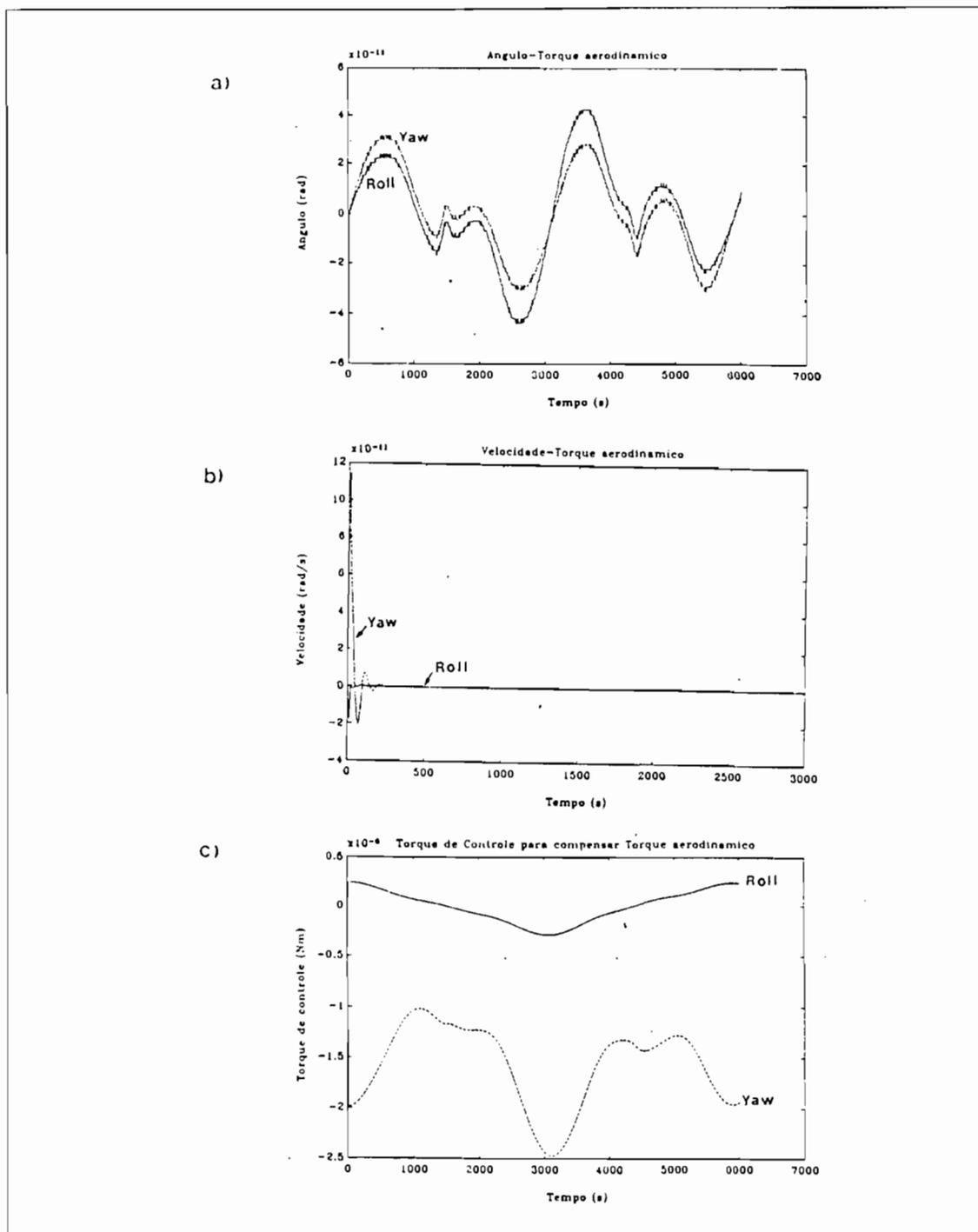


Fig. 5.22 - Resultados da Simulação do Modelo Completo de Simulação para Torque Aerodinâmico: a) Ângulos de roll e de yaw; b) Velocidades de roll e de yaw; c) Torque de controle de roll e de yaw.

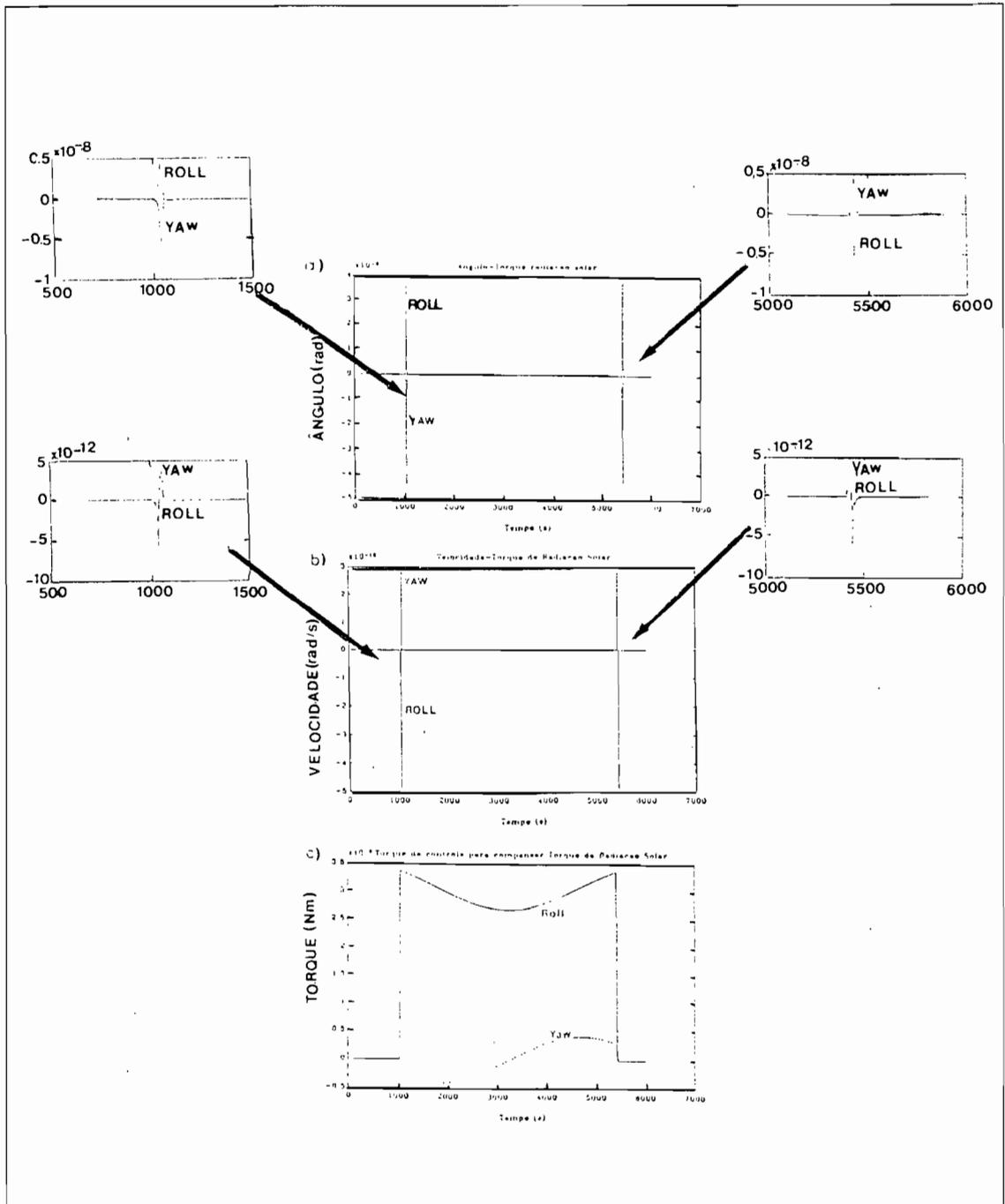


Fig. 5.23 - Resultados da Simulação do Modelo Completo de Simulação para Torque de Radiação Solar: a) Ângulos de roll e de yaw; b) Velocidades de roll e de yaw; c) Torque de controle de roll e de yaw.

d) Simulações para pitch

A partir das Equações 5.31 e 5.32 e do compensador obtido das Equações 5.34 e 5.35, são feitas simulações para o eixo de pitch. Os resultados da simulação com este modelo para condição inicial $\theta_0 = 0.00875 \text{ rad } (0,5^\circ)$ e as demais variáveis de estado nulas, são apresentados na Figura 5.24. Considerando-se a perturbação como a soma dos torques aerodinâmico e de radiação solar obtidos da Figura 3.1 e 3.2, respectivamente, chega-se aos resultados mostrados na Figura 5.25, onde os requisitos de atitude e de movimento de atitude são plenamente atendidos.

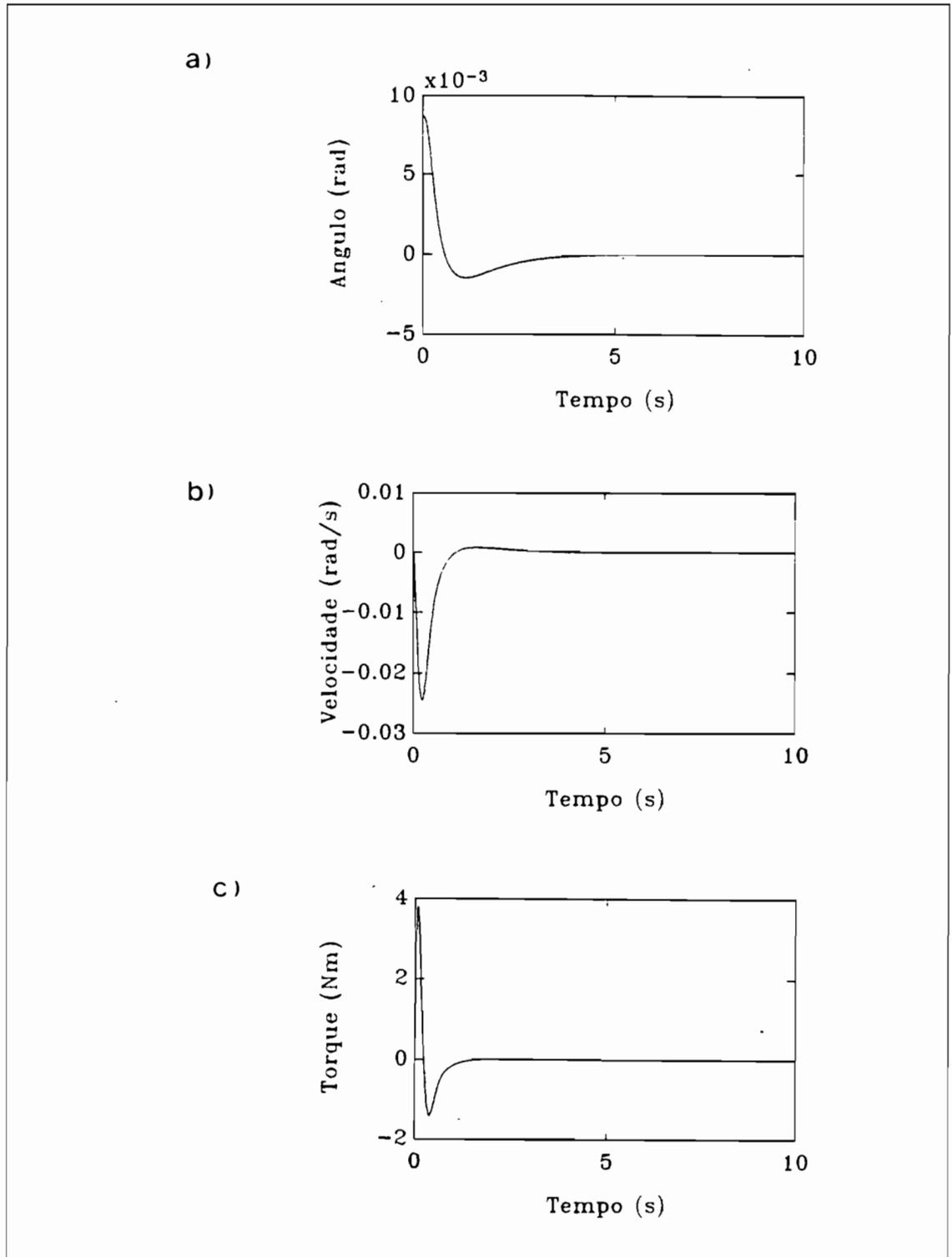


Fig. 5.24 - Simulações de Pitch: a) Ângulo; b) Velocidade; c) Torque de controle.

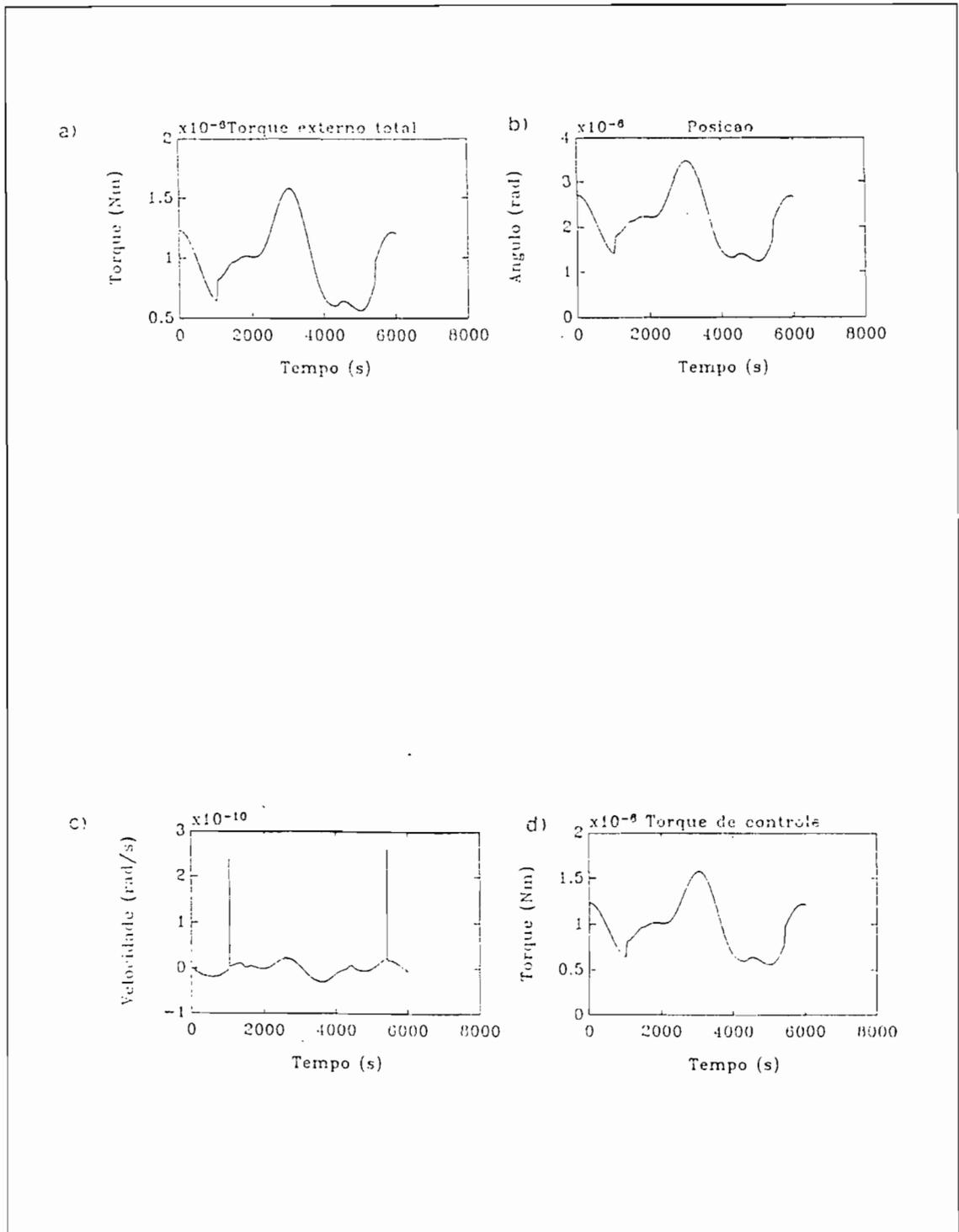


Fig. 5.25 - Simulações de Pitch: a) Torque externo total; b) Posição; c) Velocidade; d) Torque de controle.

CAPÍTULO 6CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O projeto de sistemas de controle fixos do tipo "MIMO", que sejam robustos quanto à estabilidade e ao desempenho, é tarefa complexa e ainda é objeto de pesquisas. Muitos procedimentos de projeto são ineficazes ao se considerar plantas com incertezas, pois tratam o sistema "MIMO" como uma série de sistemas "SISO" independentes, onde encontram-se dificuldades em se caracterizar a robustez do sistema a partir de cada sistema "SISO".

Neste contexto, a metodologia LQG/LTR mostrou-se ser uma ferramenta de grande utilidade no projeto de controladores com a estrutura "MBC". Margens de fase e de ganho satisfatórias são obtidas de maneira sistemática através da recuperação das margens de sistemas com reguladores lineares quadráticos.

O fato da metodologia abordar o problema de controle no domínio da frequência, através do conceito de valores singulares, associada a teoria de controle ótimo no domínio do tempo, é promissor, no sentido que estas abordagens devem ser complementares e não excludentes como durante décadas foram tratadas, e útil, como será mostrado a seguir.

No domínio da frequência pode-se tratar facilmente incertezas na planta devido à dinâmicas não modeladas, o que encoraja a utilização de métodos de redução. O Método dos Resíduos mostrou-se eficiente na determinação da barreira de robustez de alta frequência. Neste contexto, evidenciou-se como a ordem necessária para

o modelo de projeto depende da banda de operação do sistema e, conseqüentemente, das especificações de projeto.

Em S.C.A.s que apresentam momento angular embarcado, o modelo linear da dinâmica de atitude do satélite pode ser decomposto em um sistema do tipo "MIMO" e um sistema do tipo "SISO". No satélite estudado, este modelo apresenta incertezas devido às dinâmicas não modeladas dos painéis flexíveis e à variação nos parâmetros, principalmente devido a variação do acoplamento giroscópico, provocado pela mudança na velocidade do volante de inércia.

Muitas especificações de projeto, usuais em sistemas "SISO", como margens de fase e de ganho, banda passante, características de rejeição a perturbações e insensibilidade a variação nos parâmetros, são mais transparentes no domínio da frequência e podem ser tratadas diretamente pela metodologia LQG/LTR. Já as especificações no domínio do tempo, como sobre-sinal máximo, tempo de acomodação, não são tratadas diretamente.

Uma das dificuldades na utilização da metodologia LQG/LTR encontra-se na determinação de uma M.O. adequada, que satisfaça tanto os requisitos no domínio da frequência como no domínio do tempo.

A parte computacional foi facilitada pela utilização do programa MATLAB, pois, muitas funções específicas são de aplicação imediata pela metodologia LQG/LTR, tais como: cálculo de valores singulares e da solução da Equação Algébrica de Riccati, rotinas de simulação, etc.

solução da Equação Algébrica de Riccati, rotinas de simulação, etc.

Os resultados obtidos nas simulações para torques externos semelhantes aos reais foram bastante satisfatórios, atendendo as especificações de projeto. Teria sido, contudo, interessante realizar simulações com o modelo não linear completo para testar o comportamento do sistema em condições mais realistas. Com base nos resultados e na sistematização de sua utilização, conclue-se que a metodologia LQG/LTR é uma opção bastante atraente para o projeto de sistemas "MIMO". Vale ainda lembrar algumas características que a tornam inovadora em alguns aspectos:

- 1) No domínio da frequência, trata-se de uma generalização de conceitos de projeto de sistemas "SISO" para sistemas "MIMO".
- 2) Utiliza a teoria de controle ótimo (LQR) apenas como um meio de se obter sistemas robustos, e não propriamente para a otimização de um critério de desempenho.
- 3) Resolve o problema da robustez de sistemas com compensadores LQR, onde o estado não é completamente medido.

Entretanto, a metodologia LQG/LTR apresenta algumas limitações que devem ser mencionadas:

- 1) A recuperação não é eficiente em frequências próximas à zeros de fase não mínima.
- 2) É criticada na literatura (Dorato, 1987) por apresentar um conservadorismo excessivo.

- 3) Incertezas não lineares não são tratadas diretamente.
- 4) A classe de incertezas lineares consideradas é limitada pelas hipóteses A1 e A2 do Teorema de Robustez.
- 5) A eficiência da metodologia é função da proximidade dos valores singulares máximos e mínimos da matriz de funções de transferência da planta, ao longo da frequência.
- 6) Especificações no domínio do tempo não são tratadas diretamente.

Como possibilidades de extensão do trabalho, podem ser mencionadas:

- 1) Determinar uma barreira de robustez que inclua as incertezas nos modelos dos sensores e atuadores e mais modos de vibração dos painéis flexíveis.
- 2) Estudar o sistema de controle para outros conjuntos de variáveis medidas.
- 3) Avaliar com maior critério o efeito da normalização no projeto, uma vez que as curvas de valores singulares são sensíveis a normalizações e, neste trabalho, por simplicidade, dispensou-se a normalização por terem as curvas de valores singulares sido julgadas suficientemente próximas entre si.
- 4) Estudar a viabilidade da redução de ordem do compensador através do Método dos Resíduos.
- 5) Estudar o problema da saturação dos atuadores.
- 6) Estudar uma maneira eficiente de determinação de M.O. com características adequadas tanto no domínio do tempo, como no domínio da frequência, como, por exemplo, via alocação de pólos em LQR.

- 7) Considerar o efeito de não linearidades introduzidas devido a passagem por zero da velocidade das rodas de reação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Athans, M. *A tutorial on the LQG/LTR method: lecture notes from the Multivariable Control Systems course.* Cambridge, MA, MIT. Laboratory for Information and Decision Systems, 1986. 8p. (LIDS-P-1542). Reprinted from Proceedings American Control Conference, Seattle, WA, Jun. 1986a.
- Athans, M. *Multivariable Control Systems: lecture notes from the Multivariable Control Systems course.* Cambridge, MA, MIT, 1986b. (6.232 lecture notes)
- Athans, M.; Kapsouris, P.; Kappos, E.; Spangiii, H.A. *Linear-Quadratic with Loop-Transfer Recovery methodology for the F-100 engine.* *Journal of Guidance*, 9(1):45-52, Jan.-Feb. 1986.
- Calise, A.J.; Prasad, J.V.R. *Aproximate Loop Transfer Recovery method for designing fixed order compensators.* *Journal of Guidance*, 13(2):297-302, Mar.-Apr. 1990.
- Carrara, V. *Modelagem das forcas e torques atuantes em satelites.* (Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial) - INPE, São José dos Campos, 1982. (INPE-2454-TDL/094).
- Carrara, V. *A program to compute the aerodynamic solar radiation forces and torques on satellites.* Quebec, SPAR, Mar. 1988. (RML-009-87-111).
- Chan, S.M.; Athans, M. *Applications of robustness theory to power system models.* *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(1):2-8, Jan. 1984.

- Dorato, P., Ed. Robust control. New York, IEEE, 1987.
p. 1-14.
- Doyle, J.C. Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-23(4):756-757, Aug. 1978.
- Doyle, J. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEE Proceedings*, 129(6):242-250, Nov. 1982.
- Doyle, J.C.; Stein, G. Robustness with observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-24(4):607-611, Aug. 1979.
- Doyle, J.C.; Stein, G. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(1):4-16, Feb. 1981.
- Fleury, C. de A. *Estudo de otimizacao de parametros referentes ao comportamento dinamico de paineis solares*. (Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial) - INPE, São José dos Campos, 1989. (INPE-4793-TDL/355).
- Fonseca, I.M. *Estudo do "Jitter" na atitude de um satellite artificial com paineis flexiveis estabilizado por rotacao dual*. São José dos Campos, INPE, 1988. (INPE-4744-PRE/1418).
- Freudenberg, J.S.; Looze, D.P. Right half plane poles and zeros and designs tradeoffs in feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30(6):555-565, June, 1985.

- Genesio, R.; Milanese, M. A Note on the derivation and use of reduced-order models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-21(1):118-122, Feb. 1976.
- Goldstein H. *Classical mechanics*. Cambridge, Addison-Wesley, 1953.
- Hammond, M.J. A survey of earth surface observation satellites and the interface between remote sensor and attitude control system. In: AOCs Conference, Noordwijk, Oct. 3-6 1977. *Proceedings*. p. 37-51. (ESA SP-128, Nov. 1977).
- Hodapp, A.E. *Study of attitude control and stabilisation system employing multiple fixed wheels*. Velizy, Engins Matra, 1973. 570p. (ESRO-CR(P)-529).
- Hughes, P.C. *Spacecraft attitude dynamics*. New York, John Wiley&Sons, 1986.
- Junkins, J.L.; Turner, J.D. *Optimal spacecraft rotational maneuvers*. New York, Elsevier Science, 1986.
- Kailath, T. *Linear systems*. New Jersey, Prentice-Hall, 1980.
- Kalman, R.E. When is a linear control system optimal ?. *Journal of Basic Engineering (ASME)*, 86:51-60, Mar. 1964.
- Kaplan, M.H. *Modern spacecraft dynamics and control*. New York, John Wiley, 1976.

- Kissel, G.J.; Hegg, D.R. Stability enhancement for control of flexible space structures. *IEEE Control Systems Magazine*, 6(3):19-25, June 1986.
- Kwakernaak, H.; Sivan, R. *Linear optimal control systems*. New York, Wiley-Interscience, 1972.
- Lehtomaki, N.A. *Practical robustness measures in multivariable control system analysis*. (Ph.D. Thesis) - M.I.T., Cambridge, MA, May, 1981.
- Lehtomaki, N.A.; Sandell, N.R.; Athans, M. Robustness results in Linear-Quadratic Gaussian based multivariable control designs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(1):75-92, Feb. 1981.
- Leissa, A.W. *Vibration of plates*. Washington, DC, NASA, 1969, p. 331-353. (NASA SP-160).
- Likins, P. Spacecraft attitude dynamics and control - A personal perspective on early developments. *Journal of Guidance*, 9(2):129-134, Mar.-Apr., 1986.
- Macfarlane, A.G.T.; Karcnias, N. Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. *International Journal of Control*, 24(1):33-74, July 1976.
- Macfarlane, A.G.J.; Postlethwaite, I. The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root loci. *International Journal of Control*, 25(1):81-127, Jan. 1977.

- Maciejowski, J.M. *Multivariable feedback design*. England, Addison-Wesley, 1989.
- Martin, R.J.; Valavani, L.; Athans, M. *Multivariable control of a submersible using the LQG/LTR design methodology: lecture notes from the Multivariable Control Systems course*, Cambridge, MA, MIT. Laboratory for Information and Decision Systems, 1986. 12p. (LIDS-P-1548). Reprinted from Proceedings American Control Conference, Seattle, WA, June 1986.
- Meirovitch, L. *Analytical methods in vibrations*. New York, McMillan, 1967.
- Meirovitch, L. *Methods of analytical dynamics*. New York, McGraw-Hill Book, 1970.
- Meirovitch, L. *Elements of vibrations analysis*. Tokio, McGraw-Hill Kogakusha, 1975.
- Meirovitch, L. A stationary principle for the eigenvalue problem for rotating structures. *AIAA Journal*, 14(10):1387-1394, Oct. 1976.
- Meirovitch, L. Control of spinning flexible spacecraft by modal synthesis. *Acta Astronautica*, 4(9):985-1010, 1977.
- Meirovitch, L.; Vanlandingham, H.F.; Öz, H. Distributed control of spinning flexible spacecraft. *Journal of Guidance and Control*, 2(5):407-415, Sep.-Oct. 1979.
- Modi, V.J. Attitude dynamics of satellites with flexible appendages - a brief review. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 11(11):743-751, Nov. 1974.

- Moore, B.C. Principal component analysis in linear systems: controlability, observability and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(1):17-31, Feb. 1981.
- Pilchowski, H.U. *Satelites artificiais - posicionamento: notas de aula dadas no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais*. São José dos Campos, 1989. 87 p.
- Roberson, R.E. Two decades of spacecraft attitude control. *Journal of Guidance and Control*, 2(1):3-8, Jan.-Feb. 1979.
- Roma, A.M. *Análise dinâmica e controle de um satélite artificial com painéis flexíveis*. (Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial) - INPE, São José dos Campos, 1990. (INPE-5220-TDL/436).
- Rosenbrock, H. H. The stability of multivariable systems *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-17(1):105-107, Feb. 1972.
- Safonov, M.G.; Athans, M. Gain and phase margin for multiloop LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22(2):173-179, Apr. 1977.
- Shrivastava, S.K., Modi, V.J. Satellite dynamics and control in the presence of environmental torques - a brief survey. *Journal of Guidance*, 6(6):461-471, Nov.-Dec., 1983.
- Souza, L.C.G. *Controle de atitude de um satélite artificial através da extensão da teoria do regulador linear quadrático*. (Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial) - INPE, São José dos Campos, 1987 (INPE-4407-TDL/304).

- Souza, M.L. de O. de *Estudo e desenvolvimento de um sistema de controle de atitude ativo em tres eixos para satelites artificiais usando atuadores pneumaticos a gas frio e volantes de inercia.* (Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial) - INPE, São José dos Campos, 1981. (INPE-2000-TDL/042).
- Souza, P.N. de *Analise, projeto, construcao e testes de um modelo de roda de reacao para aplicacoes espaciais.* (Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital) - INPE, São José dos Campos, 1987. (INPE-4358-TDL/299).
- Stein, G.; Athans, M. The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-32(2):105-114, Feb. 1987.
- Stein, G.; Doyle, J.C. Beyond singular values and loop shapes. *Journal of Guidance*, 14(1):5-16, Jan.-Feb. 1991.
- Sundararajan, N.; Joshi, S.M.; Armstrong, E.S. Robust controller synthesis for a large flexible space antenna. *Journal of Guidance*, 10(2):201-208, Mar.-Apr. 1987.
- Tahk, M.; Speyert, J.L. Parameter Robust Linear-Quadratic-Gaussian design synthesis with flexible structure control applications. *Journal of Guidance*, 12(4):460-468, July-Aug. 1989.
- Wertz, J.R. *Spacecraft attitude determination and control.* London, D. Reidel, 1978.
- Wie, B.; Lehner, J.A.; Plescia, C.T. Roll/Yaw control of a flexible spacecraft using skewed bias momentum wheels. *Journal of Guidance*, 8(4):447-453, July-Aug. 1985.

Wise, K.A. Bank-to-Turn Missil Autopilot Design Using Loop Transfer Recovery. *Journal of Guidance*, 13(1):145-152, Jan.-Fev. 1990.

Zames, G. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems-Part I, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-11(2):228-238, Apr. 1966a.

Zames, G. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems-Part II, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-11(3):465-476, July, 1966b.

Zames, G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(2):301-320, Apr. 1981.

APÊNDICE ADADOS DE ENTRADA DO PROGRAMA DE SIMULAÇÃO
DOS TORQUES AERODINÂMICO E DE RADIAÇÃO

SATELLITE : MECB-RSS CONFIGURATION 2-A

ORBITAL ELEMENTS:

SEMI MAJOR AXIS (M)	7017519.000
ECCENTRICITY	0.00000000
INCLINATION (DEG)	97.950
ASCENDING NODE (DEG)	80.000
PERIGEE ARG. (DEG)	0.000
MEAN ANOMALY (DEG)	0.000
ORBITAL PERIOD (MIN)	97.507

LAUNCH DATE:

MONTH	1
DAY	31
YEAR	1989
MODIFIED JULIAN DATE	14275.0
HOUR	10
MINUTES	0
SECONDS	0.000
TIME STEP (SECONDS)	10.000
CALCULATION TIME (S)	6000.000

SOLAR FLUX DATA:

SOLAR FLUX F10.7	230.00
AVERAGED SOLAR FLUX	230.00
GEOMAG. ACTIVITY KP	5.00

SATELLITE CENTER OF MASS IN BODY FRAME COORDINATES:

X AXIS (METERS)	0.00000
Y AXIS (METERS)	0.00000
Z AXIS (METERS)	0.00000

REFERENCE AREA FOR DRAG COEFFICIENT:

SATELLITE AREA (M2)	0.76176
---------------------	---------

ATTITUDE RELATED FRAME:

FRAME NUMBER	4 - SPACECRAFT SYSTEM		
X-Y-Z ROTATION (DEG)	-90.00000	-90.00000	0.00000
ANGULAR VELOCITY (RPM)	0.00000	0.00000	0.00000

APÊNDICE BENERGIA CINÉTICA

A energia cinética de rotação do satélite é dada pela soma das energias cinéticas das partes que compõem o satélite, isto é, plataforma, rotores e apêndices:

$$T_r = \frac{1}{2} \int_{m_p} \dot{\vec{R}}_p \cdot \dot{\vec{R}}_p dm_p + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{m_r} \dot{\vec{R}}_{Ri} \cdot \dot{\vec{R}}_{Ri} dm_r + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{m_a} \dot{\vec{R}}_{ai} \cdot \dot{\vec{R}}_{ai} dm_a . \quad (\text{B.1})$$

Em relação ao referencial inercial, tem-se:

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{\text{iner.}} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{\text{sat.}} + \vec{\omega} \wedge \vec{R} , \quad (\text{B.2})$$

onde $\vec{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]$, é a velocidade absoluta do satélite no referencial do satélite, ou seja:

$$\dot{\vec{R}}_p = \vec{\omega} \wedge \vec{R}_p , \quad (\text{B.3})$$

$$\dot{\vec{R}}_{Ri} = \vec{\omega}_I^{Ri} \wedge \vec{R}_{Ri} = (\vec{\omega} + \vec{\omega}_{Ri}) \wedge \vec{R}_{Ri} = \\ = (\vec{\omega} + \vec{\omega}_{Ri}) \wedge (\vec{h}_i + \vec{r}_{ri}) , \quad i = 1, 2, 3 , \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{\vec{R}}_{ai} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}_{ai} + \dot{\vec{R}}_{ai} = \vec{\omega} \wedge (\vec{b}_i + \vec{r}_{ai} + \vec{e}_i) + \dot{\vec{e}}_i , \\ i = 1, 2, 3 . \quad (\text{B.5})$$

onde $\vec{\omega}_I^{Ri}$ é a velocidade angular absoluta do rotor em

relação ao sistema inercial e $\vec{\omega}_{Ri}$ é a velocidade angular do rotor em relação a plataforma.

A Figura B.1 mostra os sistemas de referência utilizados.

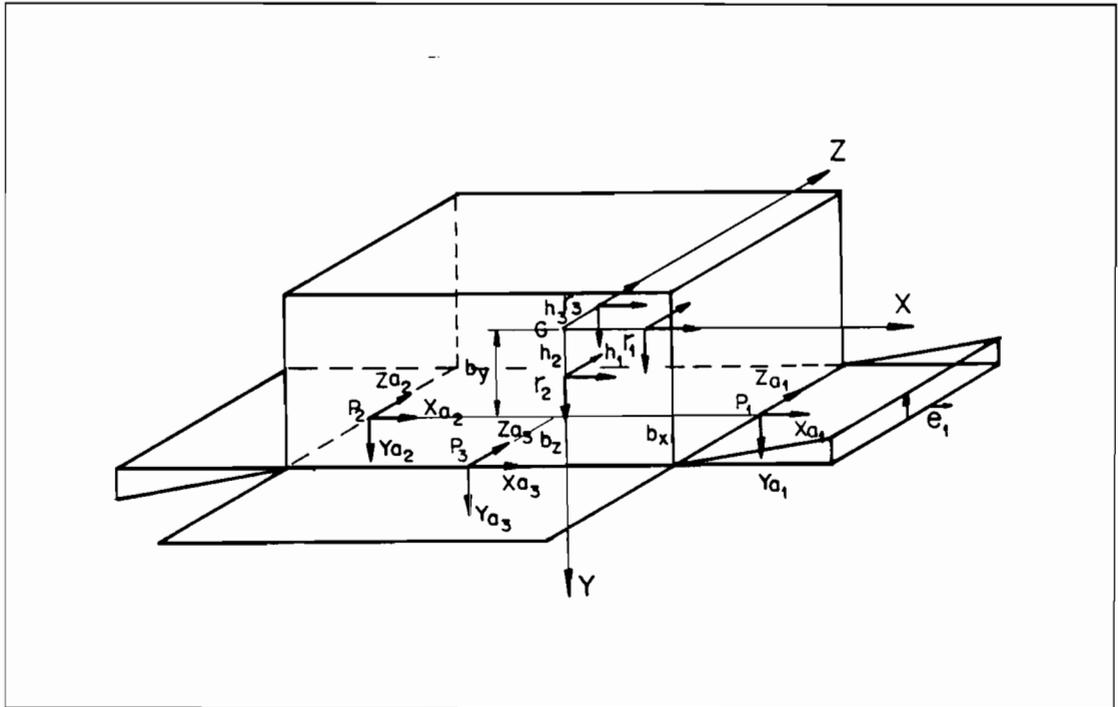


Fig. B.1 - Sistemas de referência no satélite.

$$\begin{aligned} \vec{R}_p &= [x_p \quad y_p \quad z_p] \quad , \\ \vec{R}_{R1} &= [x_{r1}+h_1 \quad y_{r1} \quad z_{r1}] \quad , \\ \vec{R}_{R2} &= [x_{r2} \quad y_{r2}+h_2 \quad z_{r2}] \quad , \\ \vec{R}_{R3} &= [x_{r3} \quad y_{r3} \quad z_{r3}+h_3] \quad , \\ \vec{\omega}_I^{R1} &= [w_x+w_{x_{R1}} \quad w_y \quad w_z] \quad , \\ \vec{\omega}_I^{R2} &= [w_x \quad w_y+w_{y_{R2}} \quad w_z] \quad , \\ \vec{\omega}_I^{R3} &= [w_x \quad w_y \quad w_z+w_{z_{R3}}] \quad , \\ \vec{R}_{a1} &= [b_x+x_{a1} \quad b_y+e_1 \quad z_{a1}] \quad , \\ \vec{R}_{a2} &= [-(b_x+x_{a1}) \quad b_y-e_1 \quad z_{a1}] \quad , \\ \vec{R}_{a3} &= [x_{a3} \quad b_y+e_3 \quad -(z_{a3}+b_z)] \quad , \end{aligned}$$

onde:

h_i = distância do C.M. do i -ésimo rotor
 $W_{R1}^x, W_{R2}^y, W_{R3}^z$ = velocidades angulares dos rotores
 1, 2 e 3, respectivamente,
 b_x, b_y, b_z = distância de P_1 e P_2 ao plano yz ;
 de P_1, P_2 e P_3 ao plano xz e de P_3
 ao plano xy , respectivamente.

Referindo-se ao referencial do satélite e introduzindo a notação matricial, onde os produtos vetoriais são substituídos por produtos matriciais, isto é:

$$\dot{\vec{R}}_p = \vec{W} \wedge \vec{r}_p = \tilde{R}_p W, \quad (\text{B.6a})$$

$$\dot{\vec{R}}_{Ri} = \vec{W}_I^{Ri} \wedge \vec{R}_{Ri} = \tilde{R}_{Ri} W_I^{Ri}, \quad (\text{B.6b})$$

$$\dot{\vec{R}}_{ai} = \vec{W} \wedge \vec{R}_{ai} + \dot{\vec{R}}_{ai} = \tilde{R}_{ai} W + \dot{e}_i, \quad (\text{B.6c})$$

onde:

$$\tilde{R}_p = \begin{bmatrix} 0 & z_p & -y_p \\ -z_p & 0 & x_p \\ y_p & -x_p & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7a})$$

$$\tilde{R}_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & z_{r1} & -y_{r1} \\ -z_{r1} & 0 & x_{r1}+h_1 \\ y_{r1} & -(x_{r1}+h_1) & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7b})$$

$$\tilde{R}_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & z_{r2} & -(y_{r2}+h_2) \\ -z_{r2} & 0 & x_{r2} \\ y_{r2}+h_2 & -x_{r2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7c})$$

$$\tilde{R}_{r3} = \begin{bmatrix} 0 & z_{r3}+h_3 & -y_{r3} \\ -(z_{r3}+h_3) & 0 & x_{r3} \\ y_{r3} & -x_{r3} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7d})$$

$$\tilde{R}_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & z_{a1} & -\Phi(x)q-by \\ -z_{a1} & 0 & x_{a1}+bx \\ \Phi(x)q+by & -(x_{a1}+bx) & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7e})$$

$$\tilde{R}_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & z_{a1} & \Phi(x)q-by \\ -z_{a1} & 0 & -(x_{a1}+bx) \\ -\Phi(x)q+by & x_{a1}+bx & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7f})$$

$$\tilde{R}_{a3} = \begin{bmatrix} 0 & -(z_{a3}+bz) & -\Phi(z_{a3})q_3-by \\ (z_{a3}+bz) & 0 & x_{a3} \\ \Phi(z_{a3})q_3+by & -x_{a3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7g})$$

obtêm-se as seguintes expressões:

a) Energia Cinética da Plataforma (T_P)

A expressão da energia cinética da plataforma é dada por:

$$\begin{aligned} T_P &= \frac{1}{2} \int_{m_p} [\tilde{R}_P \cdot w]^T [\tilde{R}_P \cdot w] \, dm_p = \frac{1}{2} \int_{m_p} w^T \cdot \tilde{R}_P^T \cdot \tilde{R}_P \cdot w \, dm_p = \\ &= \frac{1}{2} w^T \int_{m_p} \tilde{R}_P \cdot^T \tilde{R}_P \, dm_p \cdot w = \frac{1}{2} w^T J_P w, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

onde J_P é a diádica de inércia somente da plataforma, em relação aos eixos principais de inércia do satélite

b) Energia Cinética dos Rotores (T_R)

A expressão da energia cinética dos rotores é dada por:

$$T_R = T_{R1} + T_{R2} + T_{R3} \quad (\text{B.9a})$$

onde:

$$\begin{aligned} T_{R1} &= \frac{1}{2} \int_{m_R} [\tilde{R}_{R1} \cdot w_I^{R1}]^T [\tilde{R}_{R1} \cdot w_I^{R1}] dm_R = \\ &= \frac{1}{2} \int_{m_R} w_I^{R1 T} \tilde{R}_{R1}^T \tilde{R}_{R1} w_I^{R1} dm_R = \\ &= \frac{1}{2} w_I^{R1 T} \int_{m_R} \tilde{R}_{R1}^T \tilde{R}_{R1} dm_R w_I^{R1} = \\ &= \frac{1}{2} w_I^{R1 T} (J_{R1} + J_{RS1}) w_I^{R1} = \\ &= \frac{1}{2} (w + w_{R1})^T (J_{R1} + J_{RS1}) (w + w_{R1}) = \\ &= \frac{1}{2} w^T J_{R1} w + \frac{1}{2} w^T J_{R1} w_{R1} + \frac{1}{2} w^T J_{RS1} w + \\ &\quad + \frac{1}{2} w^T J_{RS1} w_{R1} + \frac{1}{2} w_{R1}^T J_{R1} w + \frac{1}{2} w_{R1}^T J_{R1} w_{R1} + \\ &\quad + \frac{1}{2} w_{R1}^T J_{RS1} w + \frac{1}{2} w_{R1}^T J_{RS1} w_{R1} = \\ &= \frac{1}{2} w^T (J_{R1} + J_{RS1}) w + w^T J_{R1} w_{R1} + \frac{1}{2} w_{R1}^T J_{R1} w_{R1} \end{aligned} \quad (\text{B.9b})$$

$$T_{R2} = \frac{1}{2} w^T (J_{R2} + J_{RS2}) w + w^T J_{R2} w_{R2} + \frac{1}{2} w_{R2}^T J_{R2} w_{R2} \quad , \quad (\text{B.9c})$$

$$T_{R3} = \frac{1}{2} W^T (J_{R3} + J_{RS3}) W + W^T J_{R3} W_{R3} + \frac{1}{2} W_{R3}^T J_{R3} W_{R3} \quad , \quad (B.9d)$$

$$J_{RS1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{R1} h_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_{R1} h_1^2 \end{bmatrix} \quad , \quad (B.9e)$$

$$J_{RS2} = \begin{bmatrix} m_{R2} h_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{R2} h_2^2 \end{bmatrix} \quad , \quad (B.9f)$$

$$J_{RS3} = \begin{bmatrix} m_{R3} h_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_{R3} h_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (B.9g)$$

J_{R1}, J_{R2}, J_{R3} = Tensores de inércia dos rotores em relação aos eixos principais dos rotores 1, 2 e 3, respectivamente.

$J_{Ri} + J_{RSi}$ = tensor de inércia do rotor em relação aos eixos principais de inércia do satélite, para $i = 1, 2, 3$.

c) Energia Cinética dos Apêndices (T_A)

A expressão da energia cinética dos apêndices é dada por:

$$T_A = T_{a1} + T_{a2} + T_{a3} \quad (B.10a)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 T_{a1} &= \frac{1}{2} \int_{m_a} [\tilde{R}_{a1} \dot{w} + \dot{e}_1]^T [\tilde{R}_{a1} w + \dot{e}_1] dm_a = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{m_a} [w^T \tilde{R}_{a1}^T + \dot{e}_1^T] [\tilde{R}_{a1} w + \dot{e}_1] dm_a = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{m_a} w^T \tilde{R}_{a1}^T \tilde{R}_{a1} w + w^T \tilde{R}_{a1}^T \dot{e}_1 + \dot{e}_1^T \tilde{R}_{a1} w + \dot{e}_1^T \dot{e}_1 dm_a = \\
 &= \frac{1}{2} w^T J_{a1} w + \frac{1}{2} \int_{m_a} w^T \tilde{R}_{a1}^T \dot{e}_1 + \dot{e}_1^T \tilde{R}_{a1} w + \dot{e}_1^T \dot{e}_1 dm_a
 \end{aligned}
 \tag{B.10b}$$

$$T_{a2} = \frac{1}{2} w^T J_{a2} w + \frac{1}{2} \int_{m_a} w^T \tilde{R}_{a2}^T \dot{e}_2 + \dot{e}_2^T \tilde{R}_{a2} w + \dot{e}_2^T \dot{e}_2 dm_a
 \tag{B.10c}$$

$$T_{a3} = \frac{1}{2} w^T J_{a3} w + \frac{1}{2} \int_{m_a} w^T \tilde{R}_{a3}^T \dot{e}_3 + \dot{e}_3^T \tilde{R}_{a3} w + \dot{e}_3^T \dot{e}_3 dm_a
 \tag{B.10d}$$

J_{a1}, J_{a2}, J_{a3} = momentos de inércia dos painéis 1, 2 e 3, respectivamente, no estado deformado em relação aos eixos principais de inércia do satélite.

Finalmente, chega-se a expressão final da energia cinética:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} W^T J_T W + W^T J_{R1} W_{R1} + \frac{1}{2} W_{R1}^T J_{R1} W_{R1} + W^T J_{R2} W_{R2} + \\
 & \frac{1}{2} W_{R2}^T J_{R2} W_{R2} + W^T J_{R3} W_{R3} + \frac{1}{2} W_{R3}^T J_{R3} W_{R3} \\
 & + T_{a1} + T_{a2} + T_{a3} \quad , \quad (B.11a)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 J_T = & J_p + J_{R1} + J_{R2} + J_{R3} + J_{RS1} + J_{RS2} + J_{RS3} + J_{a1} + \\
 & + J_{a2} + J_{a3} \quad , \quad (B.11b)
 \end{aligned}$$

é a diádica de inércia do satélite total no estado deformado, isto é, incluindo plataforma, rotores e painéis.

Desenvolvendo-se os termos e discretizando-se os deslocamentos elásticos, chega-se à:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} [(I_x + 2A_e q_1^2 + A_e 3q_3^2 + 2A_y e 3q_3) W_x^2 + I_y W_y^2 + \\
 & + (I_z + 2A_e q_1^2 + A_e 3q_3^2 + 2A_y e 3q_3) W_z^2 + I_{x \times R1} W_{x R1}^2 + \\
 & + I_{y R2} W_{y R2}^2 + I_{z R3} W_{z R3}^2] + A_e \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} A_e 3 \dot{q}_3^2 - \\
 & - 2A_x e q_1 W_x W_y + A_z e 3q_3 W_y W_z + I_{x \times R1} W_x W_{x R1} + \\
 & + I_{y R2} W_y W_{y R2} + I_{z R3} W_z W_{z R3} + 2A_x e \dot{q}_1 W_z + A_z e 3 \dot{q}_3 W_x \quad , \\
 & (B.12a)
 \end{aligned}$$

onde:

$$A_e = \int_{m_a} \Phi(x_{a1})^2 dm_a \quad (\text{B.12b})$$

$$A_{xe} = \int_{m_a} (b_x + x_{a1}) \Phi(x_{a1}) dm_a \quad (\text{B.12c})$$

$$A_{e3} = \int_{m_a} \Phi(z_{a3})^2 dm_a \quad (\text{B.12d})$$

$$A_{ze3} = \int_{m_a} (b_z + z_{a3}) \Phi(z_{a3}) dm_a \quad (\text{B.12e})$$

$$A_{ye3} = \int_{m_a} b_y \Phi(z_{a3}) dm_a \quad (\text{B.12f})$$

I_x, I_y, I_z = momentos de inércia total do satélite no estado não deformado em relação aos eixos principais do satélite.

$I_{xx_{R1}}, I_{yy_{R2}}, I_{zz_{R3}}$ = momentos de inércia dos rotores em relação ao referencial fixo ao rotor.

$w_{x_{R1}}, w_{y_{R2}}, w_{z_{R3}}$ = velocidades angulares dos rotores

APÊNDICE CNORMALIZAÇÃO

Frequentemente os modelos são normalizados para fins computacionais, quando nos cálculos do compensador o problema é mal condicionado numericamente. Na descrição de estados, as matrizes A, B, C e D podem ser normalizadas de forma a se obter um sistema bem condicionado e, conseqüentemente, os resultados obtidos são mais precisos.

Entretanto, no contexto deste trabalho, a normalização adquire papel fundamental, pois:

- 1) Na redução pelo Método dos Resíduos, as magnitudes das matrizes de resíduo dependem da normalização.
- 2) Valores singulares, ao contrário de autovalores e autovetores, são sensíveis à normalização.

Seja a descrição de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu , \quad (C.1a)$$

$$y = Cx + Du . \quad (C.1b)$$

As matrizes A, B, C e D podem ser normalizadas utilizando-se matrizes diagonais S_u , S_x e S_y para normalizar, respectivamente, a entrada u, o estado x e a saída y, onde:

$$u = S_u u_n , \quad (C.2a)$$

$$x = S_x x_n , \quad (C.2b)$$

$$y = S_y y_n . \quad (C.2c)$$

O sistema normalizado é dado por:

$$\dot{x}_n = A_n x_n + B_n u_n \quad , \quad (C.3a)$$

$$y_n = C_n x_n + D_n u_n \quad , \quad (C.3b)$$

onde:

$$A_n = S_x^{-1} A S_x \quad , \quad (C.3c)$$

$$B_n = S_x^{-1} B S_u \quad , \quad (C.3d)$$

$$C_n = S_y^{-1} C S_x \quad , \quad (C.3e)$$

$$D_n = S_y^{-1} D S_u \quad . \quad (C.3f)$$

Para descrição entrada-saída, tem-se:

$$G = C(sI-A)B + D \quad , \quad (C.4)$$

que normalizando, torna-se:

$$G_n = S_y^{-1} G S_u \quad . \quad (C.5)$$

A interpretação correta de relações envolvendo valores singulares, baseia-se em valores singulares máximo e mínimo próximos (Stein e Doyle, 1991). O problema é que não existe uma maneira sistemática de se normalizar as variáveis de um sistema, pois a normalização depende do sistema particular. Geralmente, estabelece-se um processo iterativo entre a normalização e o projeto, onde a normalização torna-se parte integrante do processo de projeto.

Alguns critérios de normalização são descritos a seguir:

- 1) Tornar a planta $G(j\omega)$ bem condicionada:

$$\kappa(\omega) = [\sigma_{\max} G(j\omega) / \sigma_{\min} G(j\omega)] \cong 1, \quad (\text{C.6})$$

onde $\kappa(\omega)$ é o "condition number" da planta.

- 2) Minimizar a incerteza não estruturada da planta, ou seja, minimizar:

$$\sigma_{\max} [E(s)] = \sigma_{\max} [(\tilde{G}(s) - G(s))G(s)^{-1}]. \quad (\text{C.7})$$

- 3) Minimizar a diferença das incertezas nos diversos canais.
- 4) Atribuir a devida importância para as variáveis de entrada e saída. Geralmente, normaliza-se em função da máxima variação prevista de cada variável de entrada, estado e saída.

APÊNDICE DVALORES SINGULARES, DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES
E RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE SISTEMAS MIMO

Ao se estender as idéias de resposta em frequência para o caso MIMO, deve-se introduzir o conceito de valores singulares e decomposição em valores singulares.

a) Valores Singulares e Decomposição em Valores Singulares

Valores singulares σ_i de uma matriz $A \in C^{m \times n}$ de característica r são as raízes não negativas dos autovalores da matriz obtida pela multiplicação da sua conjugada transposta por ela mesma (A^*A):

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (D.1)$$

ordenadamente,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n, \quad (D.2)$$

Se $r < n$, então, existem $n - r$ valores singulares nulos, isto é:

$$\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0. \quad (D.3)$$

Na decomposição em valores singulares, existem duas matrizes unitárias $U \in C^{n \times n}$ e $V \in C^{m \times m}$, e uma matriz diagonal $\Sigma \in R^{n \times m}$, tal que:

$$A = U \Sigma V^* = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* , \quad (D.4)$$

onde $\Sigma_r = \text{diag} (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$.

Os n vetores n -dimensionais u_i ($i=1,2,\dots,n$) da matriz U são os vetores singulares à esquerda da matriz A e formam uma base em C^n e, os m vetores coluna m -dimensionais v_j ($j = 1, 2, \dots, m$) da matriz V são os vetores singulares à direita e formam uma base em C^m .

O valor singular máximo σ_1 (norma espectral de A) é denotado por:

$$\bar{\sigma}(A) = \sigma_1 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)} , \quad (D.5)$$

e o mínimo (inverso da norma espectral de A^{-1}), por:

$$\underline{\sigma}(A) = \sigma_n = \sqrt{\lambda_{\min}(A^* A)} , \quad (D.6)$$

conhecidos também por ganhos principais. Algumas propriedades dos valores singulares são apresentadas a seguir, onde $\| \cdot \|$ representa a norma Euclideana usual.

b) Propriedades

$$1) \bar{\sigma}(A) = \max_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad , \quad (D.7)$$

$$2) \underline{\sigma}(A) = \min_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad , \quad (D.8)$$

$$3) \text{ Se existe } A^{-1}, \text{ então, } \underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})} \quad , \quad (D.9)$$

$$4) \text{ Se existe } A^{-1}, \text{ então, } \bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})} \quad , \quad (D.10)$$

$$5) \bar{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \bar{\sigma}(A) \quad , \quad (D.11)$$

$$6) \bar{\sigma}(A + B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad , \quad (D.12)$$

$$7) \bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B) \quad , \quad (D.13)$$

$$8) \underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(E) \leq \underline{\sigma}(A + E) \leq \underline{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(E) \quad , \quad (D.14)$$

9) Medir a proximidade de uma matriz da singularidade:

Sejam A e B duas matrizes de mesma dimensão e $\det[A] \neq 0$. Se $\sigma_{\max}[B] < \sigma_{\min}[A]$, então,

$$\det[A+B] \neq 0 \quad . \quad (D.15)$$

c) Resposta em Frequência de Sistemas MIMO

O conceito de valores singulares e Decomposição em Valores Singulares permite o estudo da resposta em frequência de sistemas MIMO.

Seja $u(s)$ a transformada de Laplace do vetor de entrada de dimensão m e $y(s)$ a transformada de Laplace do vetor de saída de dimensão p , estes estão relacionados por:

$$y(s) = G(s)u(s) \quad . \quad (D.16)$$

É interessante notar que esta equação representa uma transformação linear do espaço m dimensional para o espaço p dimensional ou dado em componentes:

$$y_k(s) = \sum_{j=1}^m g_{kj}(s) u_j(s) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, p \quad . \quad (D.17)$$

Considera-se somente o caso, onde o número de entradas é igual ao número de saídas e todas as entradas são senóides de mesma frequência w , pois, o que interessa são as propriedades da planta na mesma frequência e como estas variam ao se alterar a frequência do vetor de entrada.

Seja o vetor de entrada, dado por:

$$u(t) = ue^{j\omega t} \quad ; \quad u \in C^m \quad , \quad (D.18)$$

então, o vetor saída, passado o transitório, será:

$$y(t) = ye^{j\omega t} \quad ; \quad y \in C^p \quad . \quad (D.19)$$

A entrada u e a saída y são relacionadas pela matriz de funções de transferência $G(s)$ em $s = j\omega$, tal que:

$$y = G(j\omega)u \quad . \quad (D.20)$$

Para cada frequência ω , pode-se obter a Decomposição em Valores Singulares:

$$G(j\omega) = U(j\omega) \Sigma(\omega) V^*(j\omega) \quad , \quad (D.21)$$

onde:

$\Sigma(\omega)$ = matriz $m \times m$ diagonal real formada pelos valores singulares de $G(j\omega)$, $\sigma_{\max}(\omega) = \sigma_1(\omega)$, $\dots, \sigma_m(\omega) = \sigma_{\min}(\omega)$.

$U(j\omega)$ = matriz $m \times m$ complexa cujos vetores coluna $\{u_j(j\omega)\}$, são os vetores singulares à esquerda de $G(j\omega)$.

$V(j\omega)$ = matriz $m \times m$ complexa cujos vetores coluna $\{v_j(j\omega)\}$, são os vetores singulares à direita de $G(j\omega)$.

Tomando-se o vetor u como uma combinação linear dos vetores singulares à direita $v_k(j\omega)$, isto é,

$$u = \sum_{k=1}^m \alpha_k v_k(j\omega) \quad , \quad (D.22)$$

A saída será dada por:

$$y = \sum_{k=1}^m \alpha_k \sigma_k(\omega) u_k(j\omega) \quad , \quad (D.23)$$

onde $u_k(j\omega)$ são os vetores singulares à esquerda.

Desta maneira, pode-se determinar a amplitude e a fase de cada saída, para todas as frequências, quando forem dadas a amplitude e a fase de todas as entradas. É interessante notar que, se a entrada u tiver a direção de um vetor singular à direita v_i de $G(j\omega)$ (unitário), então, a saída y terá a direção do vetor singular à esquerda u_i de $G(j\omega)$ (unitário) e magnitude amplificada ou atenuada em função do valor singular σ_i associado.

Pode-se visualizar os aspectos geométricos da transformação linear $y = G(j\omega)u$ para o caso de duas entradas e duas saídas. À medida que a entrada unitária u percorre uma circunferência correspondente à todas as entradas possíveis, a saída y descreve uma elipse com semi-eixo maior igual a $\sigma_{\max}[G(j\omega)]$ e semi-eixo menor igual a $\sigma_{\min}[G(j\omega)]$ (Figura D.1).

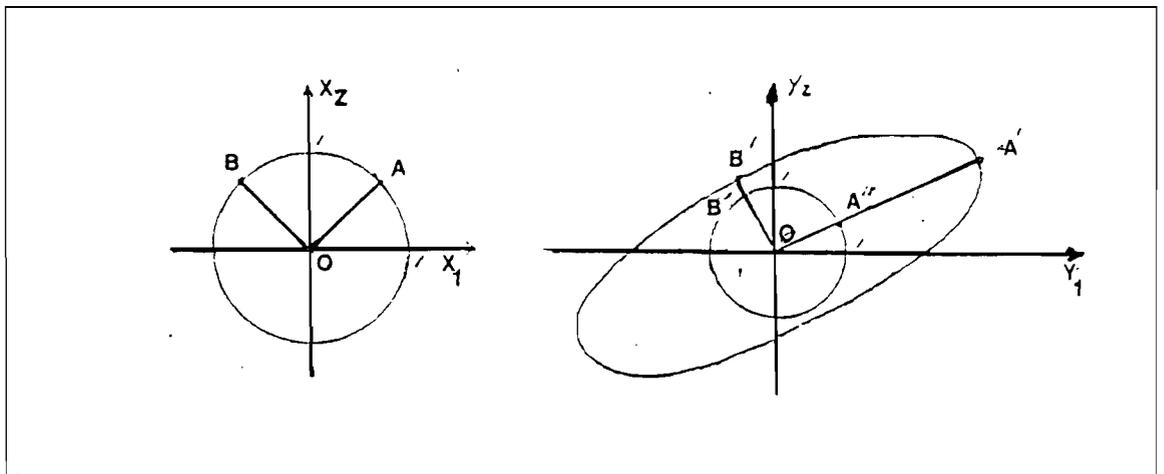


Fig. D.1 - Valores Singulares no caso de duas entradas e duas saídas.

Evidencia-se, assim, o caráter direcional de sistemas MIMO e a idéia de tamanho ou ganho de uma matriz, no sentido de que uma matriz de funções de transferência $G(j\omega)$ tem um ganho grande se $\sigma_{\min}[G(j\omega)]$ é grande e um

ganho pequeno se $\sigma_{\max}[G(j\omega)]$ é pequeno. Justifica-se, assim, o uso dos diagramas de valores singulares máximo e mínimo em função da frequência, sendo uma extensão do diagrama de Bode para o caso SISO, podendo ser analisado de forma semelhante. Cuidado especial, porém, deve ser tomado na sua utilização, pois, ao contrário de autovalores e autovetores, valores singulares são sensíveis à normalizações e à mudanças de unidades.

APÊNDICE EPÓLOS E ZEROS DE SISTEMAS
LINEARES MULTIVARIÁVEIS

Existem na literatura quatro tipos de zeros definidos para sistemas multivariáveis (MacFarlene e Karcianas, 1976): zeros do sistema, zeros de desacoplamento, zeros invariantes e zeros de transmissão. As definições não são equivalentes, porém, em certas condições os conjuntos de zeros obtidos são coincidentes.

Ao longo do texto, zeros de sistemas multivariáveis são definidos como zeros de transmissão.

Zeros de transmissão são, fisicamente, associados às propriedades de bloqueio de transmissão do sistema, sendo análogos à definição de zeros em sistemas SISO. Estes são definidos através da matriz de funções de transferência $G(s)$ na forma Smith-McMillan $M(s)$ (Kailath, 1980) onde:

$$G(s) = U_1(s)M(s)U_2(s) \quad , \quad (E.1)$$

$$M(s) = \begin{bmatrix} \text{diag}\{\varepsilon_i(s)/\psi_i(s)\} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (E.2)$$

$U_i(s)$ = matrizes unimodulares ($\det[U_i(s)] = \text{constante}$ não nula, independente de s).

Os zeros de transmissão são definidos como as raízes não nulas do polinômio do numerador $\varepsilon_i(s)$ de $M(s)$ e os pólos, como as raízes do polinômio do denominador $\psi_i(s)$ de $M(s)$. Se o sistema for observável e controlável, os pólos de $G(s)$ são os autovalores de A .

No caso em que o número de entradas é igual ao número de saídas e não existe cancelamento de pólos e zeros (o sistema é observável e controlável), os zeros de transmissão são obtidos de (Athans, 1986b):

$$\det G(s) = 0 \quad , \quad (E.3)$$

onde:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B \quad . \quad (E.4)$$

A interpretação física de zeros de transmissão, é como segue:

Seja o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad (E.5a)$$

$$y = Cx \quad . \quad (E.5b)$$

O sistema tem um zero em $s=z_k$ se existe um vetor $u_k \in R^m$ e um vetor $x_k \in R^n$ com as seguintes propriedades:

- a) se o estado inicial é $x(0) = x_k$ e
- b) se o vetor de entrada $u(t)$ é dado por:

$$u(t) = u_k e^{z_k t} \quad ; \quad t \geq 0 \quad , \quad (E.6)$$

então, a saída $y(t)$ é nula, isto é:

$$y(t) = 0 \quad ; \quad t \geq 0 \quad . \quad (E.7)$$

APÊNDICE FCRITÉRIO DE NYQUIST MULTIVARIÁVEL

Antes de expor o critério de Nyquist MIMO, alguns resultados importantes são mostrados:

- 1) Para o caso MIMO, pode-se obter a seguinte relação entre os polinômios característicos de malha aberta $\Phi_{M.A.}$ e de malha fechada $\Phi_{M.F.}$ (Kailath, 1980; Kwakernaak, 1972):

$$\Phi_{M.F.}(s) = \Phi_{M.A.}(s) \cdot \det[I+T(s)] \quad , \quad (F.1)$$

onde $T(s)=G(s)K(s)$.

Tem-se também:

$$\Phi_{M.A.}(s) = \det(sI-A) \quad , \quad (F.2)$$

$$\Phi_{M.F.}(s) = \det(sI-A+BC) \quad . \quad (F.3)$$

As raízes de $\Phi_{M.A.}(s)$ são os pólos de malha aberta (sem cancelamento de pólos e zeros) e as raízes de $\Phi_{M.F.}(s)$ são os pólos de malha fechada.

$\Phi_{M.A.}(s)$ pode ter raízes no semi-plano direito, isto é, a planta pode ter pólos instáveis. O que é realmente importante são as raízes de $\Phi_{M.F.}(s)$. O sistema será estável se $\Phi_{M.F.}(s)$ não tiver nenhuma raiz do semi-plano direito, inclusive sobre o eixo imaginário.

2) Teorema 1 (Princípio do Argumento): Seja C um contorno fechado no sentido horário no plano complexo s e seja $F(s)$ uma função escalar complexa.

Se:

- 1) $F(s)$ é analítica no contorno C ;
- 2) $F(s)$ tem Z zeros estritamente dentro do contorno C ;
- 3) $F(s)$ tem P pólos estritamente dentro do contorno C .

Então, a imagem de C sob o mapeamento $F(s)$ será um contorno fechado que irá envolver a origem O do plano complexo exatamente $(Z-P)$ vezes no sentido horário. Para simplificar, o Princípio do Argumento pode ser dado em uma notação mais concisa:

$$N(O, F(s), C) = Z - P \quad . \quad (F.4)$$

3) Seja $F(s) = F_1(s)F_2(s)$, sendo que não existe cancelamento de pólos e zeros entre $F_1(s)$ e $F_2(s)$. Obtém-se, do Princípio do Argumento:

$$N(O, F_1(s)F_2(s), C) = N(O, F_1(s), C) + N(O, F_2(s), C) \quad .$$

(F.5)

Pode-se, então, definir o contorno de Nyquist como mostra a Figura F.1, denotado por D_R , que inclui todo o eixo imaginário, evitando qualquer pólo de $T(s)$ que esteja exatamente sobre o eixo $j\omega$. O contorno de Nyquist é definido com $R \rightarrow \infty$ e $\varepsilon = 1/R \rightarrow 0$ e engloba todo o semi-plano direito.

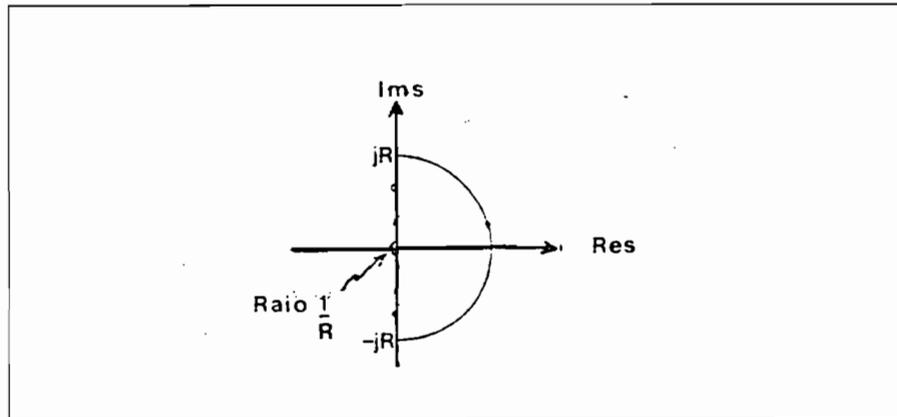


Fig. F.1 - Contorno de Nyquist D_R .

O contorno engloba todos os zeros de $\Phi_{MA}(s)$ do semi-plano direito fechado evitando zeros imaginários através de contorno de raio $1/R$.

No caso, interessa saber se existe alguma raiz de $\Phi_{M.F.}$ no semi-plano direito. O sistema em malha fechada será estável se, e somente se:

$$N(0, \Phi_{M.F.}(s), D_R) = 0, \quad (F.6)$$

ou da Equação F.1:

$$\begin{aligned} N(0, \Phi_{M.A.}(s) \cdot \det[I+T(s)], D_R) = \\ = N(0, \Phi_{M.A.}(s), D_R) + N(0, \det[I+T(s)], D_R) = 0. \end{aligned} \quad (F.7)$$

Seja $N(0, \Phi_{M.A.}(s), D_R) = P_U$ o número de pólos instáveis em malha aberta. Chega-se, naturalmente, ao Critério de estabilidade de Nyquist MIMO:

O sistema de malha fechada é estável se e somente se:

$$N(0, \det[I+T(s)], D_R) = -P_U \quad (\text{F.8})$$

ou alternativamente,

$$N(-1, -1+\det[I+T(s)], D_R) = -P_U \quad (\text{F.9})$$

APÊNDICE GTEOREMA DA ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE

Teorema 1: Teorema de Robustez quanto a estabilidade
(Lehtomaki, 1981)

A idéia básica deste teorema é a deformação contínua do Diagrama de Nyquist, desde o sistema nominal até o sistema real, sem mudar o número de envolvimentos do ponto crítico. Se isto pode ser feito, e o número de envolvimentos do ponto crítico não se altera, conclui-se que o sistema de malha fechada real é estável.

Seja $T_N(s)$ a matriz de funções de transferência de malha nominal, $T_R(s)$ a matriz de funções de transferência de malha real e $T(s,c)$ uma matriz de funções de transferência racionais, que são funções contínuas do escalar c , $0 \leq c \leq 1$, tal que

$$T(s,0) = T_N(s) \quad , \quad (G.1a)$$

$$T(s,1) = T_R(s) \quad . \quad (G.1b)$$

Suponha que:

- A1) Ambos $T_N(s)$ e $T_R(s)$ tem o mesmo número de pólos instáveis no semi-plano direito. Isto implica que os erros de modelamento não podem ser quaisquer. O número de pólos instáveis de malha aberta da planta real e da planta nominal deve ser o mesmo, porém suas localizações no semi-plano direito podem ser diferentes.

- A2) No eixo $j\omega$, os pólos de $T_N(s)$ e $T_R(s)$ devem ser idênticos.
- A3) O sistema realimentado nominal de malha fechada é estável.

Se para todo $s \in D_R$ e todo $c \in [0,1]$,

$$\det[I+T(s,c)] \neq 0 \quad , \quad (G.2)$$

então, o sistema real de malha fechada é estável.

Vale ressaltar que não é necessário verificar todos os s no contorno de Nyquist, pois $\|T(s,c)\| \rightarrow 0$ quando $|s| \rightarrow \infty$, uma vez que tanto a matriz de transferência real quanto a nominal são estritamente próprias. Logo, pode-se restringir s ao eixo positivo $j\omega$, $0 < \omega < \infty$.

Prova: Para qualquer $c \in [0,1]$ e para todo R suficientemente grande, o contorno de Nyquist D_R envolverá todos os pólos das matrizes de transferência de malha nominal e real do semi-plano direito aberto. Devido a hipótese A2 e a forma como foi construído o contorno D_R , este envolverá todos os pólos instáveis das matrizes de transferência de malha nominal e real, isto é, todos no semi-plano direito fechado. Da hipótese A3, da Equação G.2 e do critério de estabilidade de Nyquist MIMO, sabe-se que:

$$N(0, \det[I+T(s,0)], D_R) = -P_U \quad . \quad (G.3)$$

Agora, supondo-se que variando continuamente c em $[0,1]$, o número de envoltimentos dados por $N(0, \det[I+T(s,0)], D_R)$ muda. Desde que $\det[I+T(s,c)]$ é contínuo em s e em c , sua imagem forma um contorno fechado no plano complexo para qualquer $c \in [0,1]$. Segue-se então,

que a única maneira de se mudar o número de envoltimentos do ponto crítico zero, é se ter para algum c a imagem passando pelo ponto crítico, isto é, precisa existir um c_0 , $0 \leq c_0 \leq 1$, tal que:

$$\det[I+T(s,c_0)] = 0 \text{ para algum } s \in D_R . \quad (G.4)$$

As Equações G.2 e G.4 são contraditórias. Segue-se que o número de envoltimentos não pode mudar enquanto c varia em $[0,1]$ e, então, o número de envoltimentos deve permanecer constante em $-Pu$ para todo c . Em particular, isto precisa ser verdade para $c=1$ e, em vista da Equação G.1, deve-se ter:

$$N(0, \det[I+T_R(s)], D_R) = -Pu . \quad (G.5)$$

Finalmente, a Equação G.5, a hipótese A1, e o critério de Nyquist MIMO implicam na estabilidade do sistema realimentado MIMO.

(C.Q.D.)

A importância do Teorema 1 é que muitos testes de robustez quanto a estabilidade para o caso MIMO podem ser derivados em termos de condições que são equivalentes à Equação G.2. Isto significa que precisa-se explicitar como construir $T(s,c)$ para c em $[0,1]$.

Para o erro multiplicativo na saída tem-se:

$$E_{MS}(s) = [TR(s) - TN(s)] TN^{-1}(s) . \quad (G.6)$$

Pode-se então definir $T(s,\varepsilon)$, onde $T(s,0) = TN(s)$ e $T(s,1) = TR(s)$.

Substituindo $T_R(s)$ por $T(s, \varepsilon)$ e $E_{MS}(s)$ por $\varepsilon E(s)$, chega-se à:

$$T(s, \varepsilon) = [I + \varepsilon E_{MS}(s)] T_N(s) \quad . \quad (G.7)$$

Deve-se notar que tanto para o erro absoluto como o erro relativo tem-se:

$$T(s, \varepsilon) = (1 - \varepsilon) T_N(s) + \varepsilon T_R(s)$$

mostrando que $T(s, \varepsilon)$ é contínuo em $\varepsilon \in [0, 1]$ para todo $s \in D_R$ e que $T(s, \varepsilon)$ satisfaz $T(s, 0) = T_N(s)$ e $T(s, 1) = T_R(s)$.

Teorema 2: O polinômio $\tilde{\Phi}_{M.F.}(s)$ não possui zeros no semi-plano direito e, portanto, o sistema realimentado perturbado é estável se:

- 1) Condição A1-A3 do teorema 1.
- 2) $\sigma_{\min} [I + T_N^{-1}] > \sigma_{\max} [E(s)]$ para todo $s \in \Omega_R$, (G.8)

e

$$E(s) = [T_R(s) - T_N(s)] T_N^{-1}(s) \quad . \quad (G.9)$$

Prova: Da Equação G.7, tem-se:

$$\begin{aligned} I + T(s, \varepsilon) &= I + [I + \varepsilon E(s)] T_N(s) = \\ &= [I + T_N^{-1}(s) + \varepsilon E(s)] T_N(s) \quad . \end{aligned} \quad (G.10)$$

Assumindo-se que $T_N^{-1}(s)$ existe, então, $I + T(s, \varepsilon)$ é singular se e somente se, $[I + T_N^{-1}(s) + \varepsilon E(s)]$ é singular. Uma condição suficiente para isto é (Apêndice D):

$$\sigma_{\min} [I + T_N^{-1}] > \sigma_{\max} [\varepsilon E(s)] = \varepsilon \sigma_{\max} [E(s)] \quad . \quad (G.11)$$

APÊNDICE HDEMONSTRAÇÃO DA RECUPERAÇÃO

Lema: Considere a classe de MBC's cuja matriz função de transferência $K\rho(s)$ é dada por:

$$K\rho(s) = G\rho(sI - A + BG\rho + HC)^{-1}H, \quad (\text{H.1})$$

tal que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_i[A - HC] &< 0, \\ \operatorname{Re} \lambda_i[A - BG\rho] &< 0; \text{ para todo } 0 < \rho < \infty, \end{aligned}$$

e tal que:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho G\rho \rightarrow WC; \quad W'W = I. \quad (\text{H.2})$$

Então,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K\rho(s) \rightarrow [C(sI - A)^{-1}B]^{-1}C(sI - A)^{-1}H, \quad (\text{H.3})$$

onde a convergência é ponto a ponto em s .

Prova: Será frequentemente utilizado o lema de inversão de matriz (LIM), que estabelece:

$$\text{LIM: } (A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (\text{H.4})$$

Será utilizada a seguinte notação:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}, \quad (\text{H.5})$$

$$X(s) = (\Phi(s) + HC)^{-1}. \quad (\text{H.6})$$

Utilizando está notação, a Equação H.1 é dada por:

$$K\rho(s) = G\rho(X^{-1}(s) + BG\rho)^{-1}H \quad , \quad (H.7)$$

e aplicando LIM, obtém-se:

$$\begin{aligned} K\rho(s) &= G\rho[X(s) - X(s)B(I + G\rho X(s)B)^{-1}G\rho X(s)]H = \\ &= [G\rho X(s) - G\rho X(s)B(I + G\rho X(s)B)^{-1}G\rho X(s)]H = \\ &= [I - G\rho X(s)B(I + G\rho X(s)B)^{-1}G\rho X(s)]H \quad . \end{aligned} \quad (H.8)$$

Substituindo-se a primeira matriz identidade da Equação H.8 por:

$$I = [I + G\rho X(s)B][I + G\rho X(s)B]^{-1} \quad , \quad (H.9)$$

e fatorando, obtém-se:

$$\begin{aligned} K\rho(s) &= [I + G\rho X(s)B - G\rho X(s)B][I + G\rho X(s)B]^{-1}G\rho X(s)H = \\ &= [I + G\rho X(s)B]^{-1}G\rho X(s)H \quad . \end{aligned} \quad (H.10)$$

Multiplicando-se e dividindo-se por ρ , chega-se à:

$$K\rho(s) = [I \rho + \rho G\rho X(s)B]^{-1} \rho G\rho X(s)H \quad . \quad (H.11)$$

Considerando-se a Equação H.2, têm-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} K\rho(s) &\rightarrow [WCX(s)B]^{-1} WCX(s)H = \\ &= [CX(s)B]^{-1}W^{-1}WCX(s)H = \\ &= [CX(s)B]^{-1}CX(s)H \quad . \end{aligned} \quad (H.12)$$

Tomando-se separadamente as matrizes $CX(s)B$ e $CX(s)H$ e aplicando-se o LIM, têm-se:

$$\begin{aligned}
 CX(s)H &= C[\Phi^{-1}(s) + HC]^{-1}H = \\
 &= C[\Phi(s) - \Phi(s)H(I+C\Phi(s)H)^{-1}C\Phi(s)]H = \\
 &= C\Phi(s)H - C\Phi(s)H(I+C\Phi(s)H)^{-1}C\Phi(s)]H = \\
 &= [I - C\Phi(s)H(I+C\Phi(s)H)^{-1}]C\Phi(s)]H = \\
 &= [I + C\Phi(s)H - C\Phi(s)H](I + C\Phi(s)]H)^{-1}C\Phi(s)H = \\
 &= (I+C\Phi(s)H)^{-1}C\Phi(s)]H \quad .
 \end{aligned}
 \tag{H.13}$$

$$\begin{aligned}
 CX(s)B &= C[\Phi^{-1}(s) + HC]^{-1}B = \\
 &= C[\Phi(s) - \Phi(s)H(I+C\Phi(s)H)^{-1}C\Phi(s)]B = \\
 &= C\Phi(s)H - C\Phi(s)H(I+C\Phi(s)H)^{-1}C\Phi(s)]B = \\
 &= [I - C\Phi(s)H(I+C\Phi(s)H)^{-1}]C\Phi(s)]B = \\
 &= [I + C\Phi(s)H - C\Phi(s)H](I + C\Phi(s)]H)^{-1}C\Phi(s)B = \\
 &= (I+C\Phi(s)H)^{-1}C\Phi(s)]B \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{H.14}$$

e

$$(CX(s)B)^{-1} = (CX(s)B)^{-1}(I + CX(s)H) \quad .
 \tag{H.15}$$

Logo, a Equação H.3 pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\rho \rightarrow 0} K\rho(s) &\rightarrow (CX(s)B)^{-1}(I + CX(s)H)(I+C\Phi(s)H)^{-1}C\Phi(s)]H = \\
 &= (CX(s)B)^{-1}C\Phi(s)]H = \\
 &= [C(sI-A)^{-1}B]^{-1}[C(sI-A)^{-1}H] \quad .
 \end{aligned}
 \tag{H.16}$$

(C.Q.D.)

APÊNDICE IPROPRIEDADE DA SOLUÇÃO DO "CHEAP LQR"

Seja o problema do LQR :

Minimize

$$J = \int_0^{\infty} [y'(t)y(t) + \rho u'(t)u(t)] dt; \quad \rho > 0, \quad (\text{I.1})$$

sujeito as restrições dinâmicas:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad (\text{I.2a})$$

$$y = Cx(t). \quad (\text{I.2b})$$

A solução deste problema é a lei de controle, dada por:

$$u(t) = -G_{\rho}x(t), \quad (\text{I.3})$$

onde o ganho de controle G_{ρ} é dado por:

$$G_{\rho} = \frac{1}{\rho} B'K_{\rho}, \quad (\text{I.4})$$

e K_{ρ} é dado pela equação algébrica de Riccati:

$$0 = -K_{\rho}A - A'K_{\rho} - C'C + \frac{1}{\rho}K_{\rho}BB'K_{\rho}. \quad (\text{I.5})$$

Teorema 1: Seja o "cheap LQR", onde $\rho \rightarrow 0$.

Se :

- 1) O número de entradas (m) de controle u é o mesmo que o número de saídas (p) y;
- 2) [A,B] é estabilizável (ou controlável);
[A,C] é detetável (ou observável);
- 3) O modelo da planta G(s) é estritamente de fase mínima, ou seja, todos os zeros de transmissão de G(s) estão estritamente no semi-plano esquerdo.

Então:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho G\rho = WC; \quad W'W=I \quad . \quad (I.6)$$

Prova: Sob as hipóteses 1, 2 e 3, Kwakernaak e Sivan (1972) provaram que:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K\rho \rightarrow 0 \quad (I.7)$$

A hipótese 3 é a condição necessária e suficiente para este comportamento assintótico.

Logo, com $\rho \rightarrow 0$, a equação de Riccati (Equação) I.5) fornece:

$$-C'C + \frac{1}{\rho} K\rho BB'K\rho \rightarrow 0 \quad . \quad (I.8)$$

Reescrevendo a Equação I.4 como a seguir:

$$\rho G\rho = \frac{1}{\rho} B'K\rho \quad . \quad (I.9)$$

E das Equações I.8 e I.9, chega-se a:

$$(\rho G\rho)'(\rho G\rho) \rightarrow C'C, \text{ quando } \rho \rightarrow 0, \quad (\text{I.10})$$

o que implica em:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho G\rho \rightarrow WC, \text{ onde, } W'W=I$$

(C.Q.D.)

Esta última passagem deriva do seguinte fato da álgebra linear:

A equação matricial $X'X = M'M$ tem solução $X = WM$, onde $W'W = I$ (matriz unitária).

OBS.: Se o número de entradas m é menor que o número de saídas p , deve-se aumentar o vetor de entrada com $(p-m)$ componentes que não serão alimentadas pelo controlador. As colunas da matriz B para essas componentes adicionadas não podem introduzir zeros de transmissão instáveis. Se $m > p$, deve-se selecionar um vetor de controle com dimensão p de forma que não existam zeros de transmissão instáveis, e mantém-se as $(m-p)$ malhas fechadas (Doyle e Stein, 1979).

APÊNDICE JCOINCIDÊNCIA DE VALORES SINGULARES
EM TODAS FREQUÊNCIASObjetivo:

$$\sigma_i [C_a(j\omega I - A_a)^{-1} L_a] = \frac{1}{\omega} , \text{ para todo } \omega . \quad (\text{J.1})$$

Solução:

Conforme sugestão do Prof. E.L.L. Cabral, adota-se:

$$L_a = \begin{bmatrix} L_L \\ L_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(CA^{-1}B)^{-1} \\ A^{-1}B(CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} . \quad (\text{J.2})$$

Prova:

A partir das Equações 4.45 e 4.46, pode-se escrever:

$$C_a(sI - A_a)^{-1} L_a = \frac{C(sI - A)^{-1} B_{LL}}{s} + C(sI - A)^{-1} L_H . \quad (\text{J.3})$$

$$\text{Seja } L_H = -A^{-1} B_{LL} , \quad (\text{J.4})$$

então:

$$\begin{aligned} C_a(sI - A_a)^{-1} L_a &= C(sI - A)^{-1} \left[\frac{B_{LL}}{s} - A^{-1} B_{LL} \right] \\ &= C(sI - A)^{-1} \left[\frac{I}{s} - A^{-1} \right] B_{LL} \\ &= C(sI - A)^{-1} \frac{1}{s} \left[A - sI \right] A^{-1} B_{LL} \\ &= -\frac{1}{s} C A^{-1} B_{LL} . \end{aligned} \quad (\text{J.5})$$

se $L_L = -(CA^{-1}B)^{-1}$, então,

$$C_a(sI - A_a)^{-1}L_a = \frac{I}{s} \quad . \quad (J.6)$$

**PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS
EDITADAS PELO INPE**

RELATÓRIOS DE PESQUISA

- Reportam resultados de pesquisa tanto de natureza técnica quanto científica.

NOTAS TÉCNICO-CIENTÍFICAS

- Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, software, sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados e atlas, e documentação de projetos de engenharia.

MANUAIS TÉCNICOS

- Descrevem normas, procedimentos, instruções e orientações.

PUBLICAÇÕES DIDÁTICAS

- Apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

TESES E DISSERTAÇÕES

- Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

PUBLICAÇÕES SERIADAS

- Periódicos Técnico-científicos: Boletim de Sensoriamento Remoto, Climanálise: Boletim de Monitoramento e Análise Climática.
- Anais de Eventos