



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

INPE-5545-TDI/531

ESTIMAÇÃO SEQUENCIAL DE ÓRBITA UTILIZANDO O MODELO  
UNIFICADO DE ESTADOS

Ernesto Vieira Neto

Dissertação de Mestrado do curso de Ciência Espacial  
/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Hélio  
Koiti Kuga, aprovada em dezembro de 1993.

INPE  
São José dos Campos  
Fevereiro de 1994

**Publicado por:**

**Divisão de Ensino e Documentação - DED**

**Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE**

**Caixa Postal 515**

**12227-010 - São José dos Campos - SP - Brasil**

**Telex: 123.3530 INPE BR**

**Fone: (0123) 41.8977 - Ramal 324**

**Fax: 0123-21-8743**

- Solicita-se intercâmbio
- We ask for exchange
- Si sollecita intercambio
- On demande l'échange
- Mann bittet un Austausch
- Pidese canje
- Просим обмена
- 歡迎著作交換
- 出版物交換のお願い

**Publicação Externa - É permitida sua reprodução para interessados.**

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-5545-TDI/531

ESTIMAÇÃO SEQUENCIAL DE ÓRBITA UTILIZANDO O MODELO  
UNIFICADO DE ESTADOS

Ernesto Vieira Neto

Dissertação de Mestrado do curso de Ciência Espacial  
/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Hélio  
Koiti Kuga, aprovada em dezembro de 1993.

INPE  
São José dos Campos  
Fevereiro de 1994

ESTIMAÇÃO SEQUENCIAL DE ÓRBITA UTILIZANDO O MODELO  
UNIFICADO DE ESTADOS

Ernesto Vieira Neto

Dissertação de Mestrado do curso de Ciência Espacial  
/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelo Dr. Hélio  
Koiti Kuga, aprovada em dezembro de 1993.

INPE  
São José dos Campos  
Fevereiro de 1994


521.3

VIEIRA NETO, E.

Estimação sequencial de Órbita utilizando o modelo unificado de Estados. / Ernesto Vieira Neto. -- São José dos Campos: INPE, 1994. 108p. -- (INPE-5545-TDI/531)

1. Órbita. 2. Teoria hodografica. I. Título.

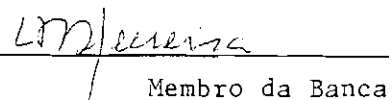
Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento a requisito exigido  
para a obtenção do Título de Mestre  
em Ciência Espacial

Dr. Wilson Custódio Canesin da Silva 

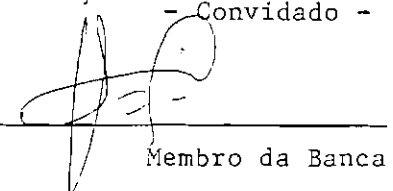
Presidente

Dr. Hélio Koiti Kuga 

Orientador

Dr. Luís Danilo Damasceno Ferreira 

Membro da Banca  
- Convidado -

Dr. Hans-Ulrich Pilchowski 

Membro da Banca

Candidato: Ernesto Vieira Neto

São José dos Campos, 16 de dezembro de 1993

Dedico este trabalho  
aos meus pais,  
Sebastião e Cleide,  
que me deram a vida e  
souberam me preparar  
para enfrentá-la.

Dedico também à memória de  
João Pinheiro,  
homem virtuoso  
que me incentivou  
para a ciência.

## AGRADECIMENTOS

Ao CNPq por ter me custeado neste dois anos e meio em que estive trabalhando na dissertação.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais pela oportunidade de ter realizado o mestrado e pelas facilidades concedidas para a realização deste trabalho.

Ao Doutor Hélio Koiti Kuga pela orientação e incentivo.

A Ulisses Thadeu Vieira Guedes, pelo apoio computacional e pelo bom humor.

A Ísis Aimée Torello, pelo carinho e conforto que tem me oferecido nos últimos meses.

E por falta de espaço, a todos que contribuíram direta, ou indiretamente, para a realização deste trabalho.



## RESUMO

A teoria hodográfica, desenvolvida inicialmente por Hamilton/Möbius, em meados do século XIX, e reintroduzida nos anos 60 por Altman, é apresentada neste trabalho como uma base para o modelo unificado de estados utilizado na determinação de órbita de satélites artificiais. O modelo completo define a dinâmica de atitude e de órbita de um corpo em órbita e habilita eficiência e rapidez computacional na análise de missões, determinação de órbita e previsões. Neste trabalho, a parte orbital do modelo unificado, junto com o filtro de Kalman, é implementado no problema de determinação de órbita, e os resultados são comparados com as formulações convencionais.

## ORBIT SEQUENTIAL ESTIMATION USING THE UNIFIED STATE MODEL

### ABSTRACT

The hodographic theory, developed firstly by Hamilton/Möbius, in the middle of the nineteenth century and reintroduced by Altman in the 1960', is presented in this work as the basis for the orbital unified state model in the orbit determination of artificial satellites. The full model defines the trajectory and attitude dynamics of an orbital spacecraft and enables efficient and rapid machine computation for mission analysis, orbit determination and prediction. In this work, the orbital part of the model, together with the Kalman filter, is implemented for the orbit determination problem and the results are compared with conventional formulations.

## SUMÁRIO

	Pág.
LISTA DE FIGURAS.....	xv
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xvii
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 2 - O MODELO UNIFICADO DE ESTADOS.....	5
2.1 - Introdução.....	5
2.2 - A teoria hodográfica.....	6
2.2.1 - Teoria hodográfica clássica.....	7
2.2.2 - Teoria hodográfica moderna.....	12
2.2.3 - Visualização de trajetórias hodográficas.....	18
2.3 - Os parâmetros de Euler para a órbita.....	21
2.4 - A dinâmica do modelo.....	23
2.5 - Considerações finais.....	26
CAPÍTULO 3 - EXPERIMENTOS NUMÉRICOS DO MODELO UNIFI- CADO.....	27
3.1 - Introdução.....	27
3.2 - Teste de curto período (12 horas).....	29
3.3 - Teste de longo período (30 dias).....	33
3.4 - Conclusões.....	37
CAPÍTULO 4 - DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA ATRAVÉS DO MODELO UNIFICADO DE ESTADOS.....	39
4.1 - Introdução.....	39
4.2 - Equacionamento do problema.....	40
4.3 - O filtro de Kalman.....	44
4.4 - Singularidade da matriz de covariância.....	45
4.5 - Considerações finais.....	47

CAPÍTULO 5 - RESULTADOS DO ESTIMADOR SEQUENCIAL DE ÓRBITA.....	49
5.1 - Introdução.....	49
5.2 - Precisão do procedimento de estimação.....	49
5.3 - Singularidade da matriz de covariância dos quaternions.....	55
5.4 - Comportamento dos parâmetros do modelo unificado.....	60
5.5 - Avaliação do modelo unificado de estados com medidas reais de distância.....	62
5.6 - Conclusão.....	68
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÃO.....	71
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	73
APÊNDICE A - DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DINÂMICAS DO MODELO UNIFICADO DE ESTADOS.....	77
APÊNDICE B - MATRIZ F.....	85

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
2.1 - Trajetória e sua velocidade hodográfica.....	6
2.2 - Órbita plana e sua hodógrafa.....	15
2.3 - Coordenadas de velocidade polar e retangular para a órbita plana.....	15
2.4 - Hodógrafa orbital em coordenadas retangulares..	16
2.5 - As invariâncias do vetor velocidade orbital....	16
2.6 - Hodográficas da velocidade orbital.....	17
2.7 - Transformações da hodógrafa orbital.....	18
2.8 - Vetores de velocidade relativa entre dois veículos orbitais.....	20
2.9 - Visualização de dados espaciais relativos para dois veículos espaciais.....	20
2.10 - Geometria para os parâmetro de Euler.....	22
2.11 - Os ângulos de Euler.....	23
2.12 - Geometria dos parâmetros de velocidade no espaço inercial.....	25
3.1 - Erros radiais de curto período.....	30
3.2 - Erros normais de curto período.....	31
3.3 - Erros transversais de curto período.....	32
3.4 - Erros radiais de longo período.....	34
3.5 - Erros normais de longo período.....	35
3.6 - Erros transversais de longo período.....	36
4.1 - Definição gráfica do vetor de medidas.....	42
5.1 - Vínculos dos quatérnions.....	56
5.2 - Efeito da singularização da matriz de covariância.....	58
5.3 - Erros em posição.....	59
5.4 - Erros em velocidade.....	59
5.5 - Erros dos parâmetros do modelo unificado.....	61
5.6 - Esquema de coleta de medidas de distância do Centro de Controle.....	63
5.7 - Resíduos de distância de todos os pontos.....	64

5.8 - Resíduos de distância sem os primeiros pontos..	65
5.9 - Resíduos de distância sem os dois primeiros pontos.....	66

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	- Vetor de Runge-Lenz
$A$	- Módulo do vetor de Runge-Lenz
$a$	- Aceleração
$a$	- Módulo do vetor aceleração
$a$	- Semi-eixo maior
$AZ$	- Azimute
$E$	- Energia
$\mathcal{E}$	- Operador esperança
$e$	- Excentricidade
$e_i$	- Quatérnion
$El$	- Elevação
$f$	- Fator de achatamento da Terra
$f$	- Anomalia verdadeira
$H$	- Altitude
$\iota$	- Inclinação
$i, j, k$	- Direções do sistema inercial
$K$	- Ganho de Kalman
$L$	- Vetor momento angular
$L$	- Módulo do vetor momento angular
$l$	- Vetor momento angular específico
$l$	- Módulo do vetor momento angular específico
$M$	- Anomalia média
$m$	- Massa
$P$	- Matriz de covariância
$p$	- Semilatus rectum
$r$	- Vetor posição
$r$	- Módulo do vetor posição
$R_T$	- Raio equatorial da Terra
$u$	- Vetor de estados do modelo unificado
$v$	- Vetor velocidade
$v$	- Módulo do vetor velocidade
$Z$	- Matriz de transformação
$\alpha, \beta, \gamma$	- Ângulos esféricos
$\delta$	- Delta de Dirac

$\Phi$	- Matriz de transição
$\phi$	- Latitude
$\lambda$	- Longitude
$\mu$	- Constante gravitacional
$\Omega$	- Nódo ascendente
$\omega$	- Argumento do perigeu
$\Omega, \iota, \nu$	- Ângulos de Euler
$\omega, \nu$	- Ruídos brancos gaussianos
$\rho$	- Distância, ou "range"
$\theta_g$	- Tempo sideral de Greenwich

#### Índices Superiores

$\tau$	- Transposta de vetor ou matriz
$\hat{\phantom{x}}$	- Valor estimado

#### Índices Inferiores

$e_1, e_2, e_3$	- Direções no plano da órbita, radial, tangencial e normal, respectivamente
$o$	- Orbital



## CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

A dinâmica de atitude é normalmente estudada separadamente da dinâmica de órbita, apesar de existir uma interrelação entre estas duas classes de movimentos. O acoplamento dinâmico entre os dois movimentos é aparente em satélites de órbitas consideradas baixas, onde o arrasto atmosférico se torna notório provocando perturbações tanto na atitude quanto na órbita. Também forças devido ao gradiente de gravidade influenciam a atitude e a órbita dos satélites. Além das forças físicas naturais, ainda existem aquelas artificiais, produzidas pelo homem em manobras de atitude ou de órbita, onde há uma mudança do centro de massa do satélite, provocando também perturbações que influenciam a dinâmica de atitude ou de órbita.

Em certos tipos de missões, como em reentrada por exemplo, o acoplamento dinâmico fica ainda mais crítico, obrigando a criação de vários tipos de modelos, porém nenhum de forma geral que pudesse atender aos vários tipos de observações que se dispõe do satélite.

Na década de 60 Samuel P. Altman começou a fazer uma série de estudos sobre a teoria hodográfica na solução de problemas da mecânica celeste que culminou com a criação de um modelo dinâmico que acoplou de forma genérica os dois tipos de movimentos. Este modelo, chamado por ele de modelo unificado de estados ("unified state model"), foi desenvolvido para usar variáveis de estado e de coordenadas, cujas equações definem vínculos dinâmicos que possuem propriedades atraentes para eficiência computacional. As variáveis de estado são momentos (uma forma direta para a atitude e de forma paramétrica para a órbita) e as variáveis de coordenadas são os parâmetros de Euler, que repre-

sentam as transformações de rotação dos eixos de referência. As variáveis de estado e de coordenadas definem a dinâmica de trajetória e de atitude de forma simples, comum e bem comportada, possibilitando o processamento separado de dois conjuntos de dados, um para a atitude e outro para a órbita, com o uso comum de várias funções lógicas.

Neste primeiro estudo do modelo unificado de estados é analisada somente a parte orbital do modelo, empregado num processo de estimação sequencial de órbita, que utiliza o filtro de Kalman. Utiliza-se o que há de melhor no modelo: sua estabilidade numérica, propriedades de regularização e capacidade de incorporar as acelerações perturbadoras na matriz de transição, possibilitando uma melhor estimativa na propagação da matriz de covariância.

No Capítulo 2 é apresentado um estudo da teoria hodográfica desde sua criação por Hamilton/Möbius, até sua utilização e reformulação por Altman, na década de 60. Com o desenvolvimento da teoria hodográfica, muitas das qualidades do modelo unificado ficam claros, como é o caso da regularização. Também é dada uma noção do comportamento geométrico da órbita no espaço hodográfico através da visualização da órbita neste espaço. O Capítulo apresenta a definição dos parâmetros de Euler para a órbita, e termina com o equacionamento dinâmico da parte orbital do modelo, onde fica evidente a relação com as acelerações perturbadoras. O desenvolvimento das equações são apresentadas em Apêndices.

Para comprovar a precisão do modelo unificado de estados, é apresentado no Capítulo 3 uma comparação entre o modelo unificado e o modelo newtoniano convencional em propagações de órbita de curto período (12 horas) e de longo período (30 dias).

A formulação do problema é apresentada no Capítulo 4, onde se esclarece o que foi feito para a determinação de órbita, mostrando o equacionamento do problema e apresentando as equações do filtro estendido de Kalman, na forma de Joseph. Ainda há uma pequena discussão sobre o problema da singularidade da matriz de covariância correspondente aos parâmetros de Euler.

Finalmente, no Capítulo 5, são apresentados os resultados da estimação sequencial de órbita, iniciando-se com uma análise das precisões do modelo na estimação de órbita com várias estações de rastreamento. Em seguida são mostrados os problemas devido à singularidade da matriz de covariância dos parâmetros de Euler. É apresentado também, um teste que mostra o comportamento dos desvios padrões das variáveis do modelo unificado, comparando com os desvios cometidos pelo estimador em relação a uma órbita de referência. Por último, é apresentado um teste com medidas reais do SCD-1, cedidas pelo Centro de Controle de Satélites da MECB.

## CAPÍTULO 2

## O MODELO UNIFICADO DE ESTADOS

## 2.1 - INTRODUÇÃO

Existem diversas formas de se determinar a trajetória orbital de um corpo, na ausência de perturbações. Por exemplo, pode-se utilizar a força de atração gravitacional de Newton, que é integrada analiticamente obtendo-se uma trajetória perfeita denominada solução analítica do movimento kepleriano. Se houver perturbações (como do geopotencial, arrasto atmosférico, etc.), o modelo newtoniano pode ser incrementado chegando a um modelo mais real. Mas ao incorporar as perturbações no modelo newtoniano, não é mais possível integrá-lo analiticamente e é necessário que se utilizem processos numéricos ou semi-numéricos para produzir as soluções do problema. Por exemplo, Gomes (1987) demonstrou que existem métodos de transformações de tempo, de estabilização do sistema de equações diferenciais ou de regularização, que melhoraram os resultados numéricos.

Além de expressar os elementos orbitais em coordenadas retangulares, é possível utilizar outros conjuntos de elementos, como por exemplo os elementos keplerianos (ou elementos orbitais clássicos), dentre outros. Um dos mais recentes conjuntos de elementos utilizados em dinâmica orbital é o modelo unificado de estados, desenvolvido por Altman (1972) em seu artigo "A unified state model of orbital trajectory and attitude dynamics", cujo vetor de estados é composto por parâmetros de velocidade e pelos parâmetros de Euler. Este Capítulo apresenta um estudo da teoria hodográfica que forma a base para o desenvolvimento das variáveis utilizadas no modelo, e demonstra que os parâmetros utilizados são regularizados, proporcionando vantagens em relação aos modelos usuais. Também pretende-se

apresentar uma pequena introdução sobre os parâmetros de Euler de forma a completar o entendimento sobre o modelo unificado de estados.

## 2.2 - A TEORIA HODOGRÁFICA

A teoria hodográfica da mecânica newtoniana, foi inicialmente concebida independentemente por Hamilton e Möbius nos idos de 1840 (Goldstein, 1976; Szebehely, 1967). Basicamente, a hodógrafa de um vetor é a trajetória produzida por sua derivada primeira, por exemplo, a trajetória produzida pela velocidade (Figura 2.1) é a hodógrafa dos vetores de posição. No espaço de velocidades a hodógrafa é um instrumento que facilita a visualização da aceleração.

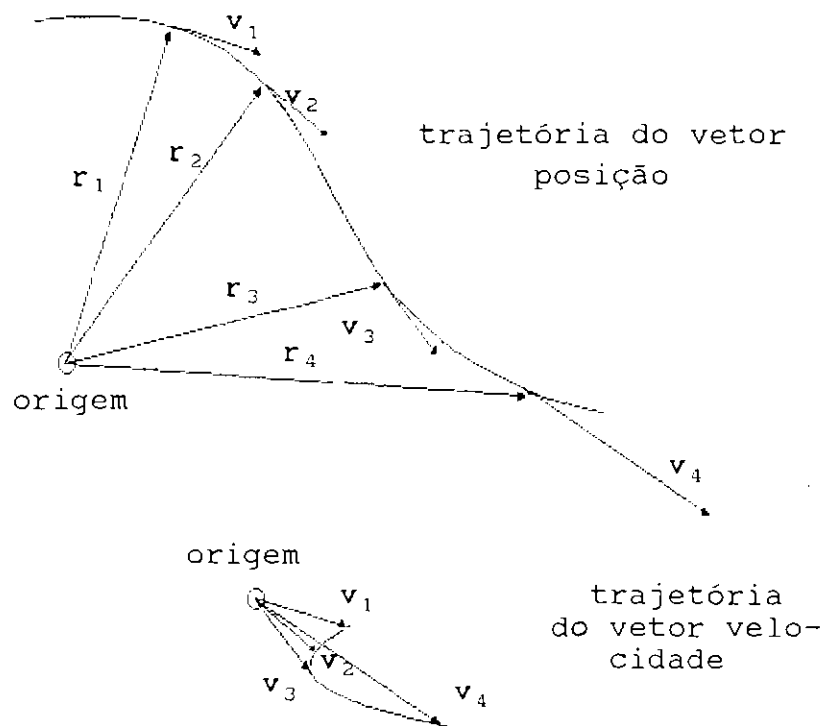


Fig. 2.1 - Trajetória e sua velocidade hodográfica.

FONTE: Altman (1966), p. 47.

Para facilidade de compreensão a teoria hodográfica será dividida em clássica, desenvolvida por

Hamilton/Möbius, e em moderna, desenvolvida por Altman.

### 2.2.1 - TEORIA HODOGRÁFICA CLÁSSICA

O movimento de um corpo num campo de força gravitacional ocorre num plano e, para energias negativas ( $E < 0$ ), a órbita deste corpo é periódica e fechada (Landau e Lifshitz, 1960; Goldstein, 1980). Devido ao princípio de conservação do momento angular é possível dar para o plano da órbita, uma orientação constante e fixa no espaço. Pode-se então definir dois vetores neste plano, tendo intensidades e direções arbitrárias. Estes dois vetores, juntos com o vetor momento angular orbital ( $L$ ), podem ser escolhidos de forma a serem ortogonais entre si. Um destes vetores, apontado na direção da periápise, é chamado de vetor de Runge-Lenz e designado por  $A$  (Goldstein, 1980; Heintz, 1974). O vetor de Runge-Lenz também é conhecido como vetor de Laplace, ou ainda, como vetor excentricidade (Goldstein, 1976). Este vetor pode ser determinado por argumentações físicas, como feito por Heintz (1974), ou de forma mais genérica, a exemplo de Goldstein (1980) como será demonstrado a seguir.

Para um campo central, a segunda lei de Newton vetorial é:

$$\ddot{\mathbf{r}} = f(r) \mathbf{r}/r, \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição e  $f(r)$  é a magnitude de uma força central. Fazendo o produto vetorial com o vetor momento angular específico  $\mathbf{l}$  ( $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ ), a Equação 2.1 pode ser desenvolvida como

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l} &= 1/r f(r) [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] = \\ &= 1/r f(r) [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}r^2], \end{aligned} \quad (2.2)$$

que pode ser simplificada para

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l} = r^2 f(r) \left[ \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} \right], \quad (2.3)$$

lembrando que

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 1/2 \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = r\dot{r}. \quad (2.4)$$

Depois de uma manipulação algébrica, chega-se a

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l}) = -r^2 f(r) \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (2.5)$$

Utilizando a força específica de Kepler  $f(r) = -\mu/r^2$ , sendo  $\mu$  a constante gravitacional do corpo massivo, tem-se:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l}) = \frac{d}{dt} \left( \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (2.6)$$

ou

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{A}, \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{A}$  é um vetor constante que, como foi dito anteriormente, é chamado de vetor de Runge-Lenz.

Como o vetor de Runge-Lenz é uma integral do movimento, ele tem a propriedade de derivar a equação da órbita de maneira simples, sem necessidade da utilização da equação de Binet. Se  $f$  for usado para indicar o ângulo entre  $\mathbf{r}$  e a direção fixa de  $\mathbf{A}$ , então o produto escalar entre  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{A}$  é:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = Ar \cos f = \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{l}) - \mu r. \quad (2.8)$$

Agora, fazendo a permutação do produto misto, e lembrando que  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ , tem-se

$$Ar \cos f = l^2 - \mu r \quad (2.9)$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{l^2} \left( 1 + \frac{A}{\mu} \cos f \right), \quad (2.10)$$

que é a equação da cônica, com

$$e = A/\mu \quad (2.11)$$

e

$$p = l^2/\mu, \quad (2.12)$$

onde  $e$  é a excentricidade e  $p$  o semilatus rectum.

Foram identificados dois vetores constantes ( $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{A}$ ) para o problema de Kepler, além disso existe uma constante de movimento escalar, que é a energia  $E$ . Como os vetores no espaço possuem três componentes independentes, isto corresponde a sete quantidades que se conservam. Mas, um sistema com três graus de liberdade, como este do problema de Kepler, possui seis constantes independentes do movimento, três correspondentes à posição inicial e três à velocidade inicial. Pode-se concluir então que as quantidades  $l$ ,  $A$  e  $E$  não são independentes. De fato existem duas relações ligando-as, uma delas é a ortogonalidade entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{l}$  ( $\mathbf{A} \cdot \mathbf{l} = 0$ ), e a outra vem da equação 2.11. Expressando a excentricidade na forma (Goldstein, 1980)



$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\mu^2}}, \quad (2.13)$$

chega-se a

$$A^2 = \mu^2 + \frac{2EL^2}{m}, \quad (2.14)$$

demonstrando que o vetor de Runge-Lenz mesmo sendo uma constante do movimento, não está ligado a nenhum novo princípio de conservação e sim a uma combinação do princípio de conservação do momento angular e de conservação da energia.

O vetor de Runge-Lenz pode ser utilizado para calcular a órbita do problema de Kepler no espaço de velocidades. Para isto, toma-se o produto vetorial do momento angular  $l$  com o vetor de Runge-Lenz  $A$  (Goldstein, 1976)

$$\begin{aligned} l \times A &= l \times (\dot{r} \times l) - \mu/r l \times r = \\ &= \dot{r}l^2 - \mu/r l \times r, \end{aligned} \quad (2.15)$$

ou

$$\dot{r} = \frac{B}{l^2} - \frac{\mu}{rl^2} r \times l, \quad (2.16)$$

onde  $B$  é o vetor constante  $l \times A$  normal ao semi-eixo maior. Se o eixo  $x$  for tomado ao longo do semi-eixo maior e o eixo  $y$  ao longo do semilatus rectum, a equação 2.16 fica

$$\dot{x}i + \dot{y}j = A/l j - \mu/l (\text{sen}f i - \text{cos}f j). \quad (2.17)$$

Em termos das componentes, tem-se:

$$\dot{x} = - \mu/l \operatorname{sen} f, \quad (2.18)$$

$$\dot{y} - A/l = \mu/l \operatorname{cos} f. \quad (2.19)$$

Elevando ao quadrado, e somando, tem-se:

$$\dot{x}^2 + (\dot{y} - A/l)^2 = (\mu/l)^2, \quad (2.20)$$

ou, utilizando as equações 2.11 e 2.12 , e ainda fazendo  $\mu=k^2$ , obtém-se

$$\dot{x}^2 + \left[ \dot{y} - \frac{ke}{\sqrt{p}} \right]^2 = \frac{k^2}{p}, \quad (2.21)$$

que é uma circunferência de raio  $\sqrt{k^2/p}$  com centro distante  $ke/\sqrt{p}$  do eixo  $y$ .

Através do método acima, também é possível transformar as órbitas parabólicas e hiperbólicas do espaço de posição em hodógrafas de velocidade, e todas estas transformações levarão a círculos, cujos únicos parâmetros que diferem, são o seu raio e sua distância do eixo  $y$ . No caso da elipse, onde o valor da excentricidade está entre 0 e 1, a sua hodógrafa mostra que o raio é maior que sua distância do eixo  $y$ . Para a parábola, a excentricidade é 1, então o raio da hodógrafa é igual a sua distância à origem, no eixo  $y$ . Finalmente, para a hipérbole, a excentricidade é maior que 1, e o raio da sua hodógrafa é menor que sua distância à origem.

O caráter circular da hodógrafa está ligado ao fato da natureza constante do vetor de Runge-Lenz. Na segunda metade do século 19 a hodógrafa era um tópico sempre discutido nos tratados britânicos de dinâmica (Goldstein, 1976). Maxwell, Thomson e Tait, e Routh, todos

provaram a circularidade da hodógrafa para a lei do inverso do quadrado e todos, de fato, utilizaram de alguma forma o fato da constância do vetor de Runge-Lenz nas demonstrações de sua prova.

### 2.2.2 - TEORIA HODOGRÁFICA MODERNA

Ironicamente, as implicações fundamentais da teoria hodográfica foram ignoradas ou perdidas no desenvolvimento da teoria da mecânica orbital, enquanto que a análise hodográfica de mecânica de fluidos tem sido um campo vital desde a mudança do século, onde o seu principal crédito foi o estudo bem sucedido do fluxo supersônico na década de 30 (Courant e Friedrichs, 1948; Carafoli, 1956). Na década de 60, Altman retornou ao estudo da teoria hodográfica e de sua utilização nos problemas de dinâmica orbital onde desenvolveu a hodógrafa polar básica a partir da equação de energia para a órbita (no vácuo) de um veículo num campo de força central (Altman, 1962):

$$E = m(v_{e1}^2 + v_{e2}^2)/2 - \mu m/r \quad (2.22)$$

onde  $v_{e1}$  e  $v_{e2}$  são as velocidades radial e tangencial, respectivamente. A equação 2.22 pode ser reescrita da forma

$$R^2 = v_{e1}^2 + (v_{e2} - C)^2 \quad (2.23)$$

onde

$$C = \mu m/L = \mu/rv_{e2} \quad , \quad (2.24)$$

$$R = \sqrt{2E/m + C^2} \quad , \quad (2.25)$$

onde  $L$  é o módulo do vetor momento angular. A Equação 2.23 é a equação de uma circunferência onde os parâmetros  $R$  e  $C$  representam, respectivamente, o raio e a distância à ori-

gem. O significado físico dos parâmetros  $C$  e  $R$  também estão associados com o momento angular e com a energia do sistema, como indicam as Equações 2.24 e 2.25.

Uma órbita pode ser descrita unicamente pelas componentes das velocidades radial e tangencial, como desenvolvido e é mostrado esquematicamente na Figura 2.2. Note que a hodógrafa mostrada na Figura 2.2 apresenta a magnitude verdadeira do vetor velocidade, embora a direção esteja deslocada do eixo de ordenadas pelo ângulo de visada  $\theta$ . Mas, para o caso de construções gráficas a direção do vetor na hodógrafa pode ser relacionada com a do espaço. Já que as direções dos vetores hodógrafos no espaço podem ser estabelecidos, é interessante definir as relações entre as coordenadas polar e retangular. As relações seguintes são obtidas a partir da Figura 2.3:

$$\dot{x} = v_x = v_{e2} \operatorname{sen} f - v_{e1} \operatorname{cos} f, \quad (2.26)$$

$$\dot{y} = v_y = v_{e2} \operatorname{cos} f + v_{e1} \operatorname{sen} f; \quad (2.27)$$

onde  $f$  está definido na Figura 2.2, mas

$$v_{e1} = R \operatorname{sen} f, \quad (2.28)$$

$$v_{e2} = C + R \operatorname{cos} f, \quad (2.29)$$

então

$$\dot{x} = C \operatorname{sen} f, \quad (2.30)$$

$$\dot{y} = R + C \operatorname{cos} f. \quad (2.31)$$

Conseqüentemente, a hodógrafa modificada mantém a direção do vetor no espaço como mostrado na Figura 2.4. Esta hodógrafa modificada pode ser identificada como uma forma alternativa da hodógrafa clássica mostrada na seção anterior

com

$$p = a(1 - e^2) = \mu/C^2, \quad (2.32)$$

onde  $a$  é o semi-eixo maior, e

$$e = R/C, \quad (2.33)$$

de tal forma que

$$C = \frac{k}{\sqrt{p}} \quad (2.34)$$

e

$$R = \frac{ke}{\sqrt{p}}. \quad (2.35)$$

Consequentemente, a hodógrafa clássica é idêntica à hodógrafa modificada, representada por

$$\dot{x}^2 + (\dot{y} - R)^2 = C^2. \quad (2.36)$$

Os parâmetros hodográficos  $C$  e  $R$  podem ser representados por vetores a partir da decomposição do vetor velocidade em duas componentes não ortogonais, como mostrado na Figura 2.5. A direção do vetor  $R$  é sempre perpendicular à linha das apsides, enquanto que o vetor  $C$  sempre aponta  $\pi/2$  à frente de  $r$ . Consequentemente, a hodógrafa da velocidade orbital é sempre um círculo, independente do tipo de coordenadas da órbita, se polar ou retangular, como mostra a Figura 2.6.

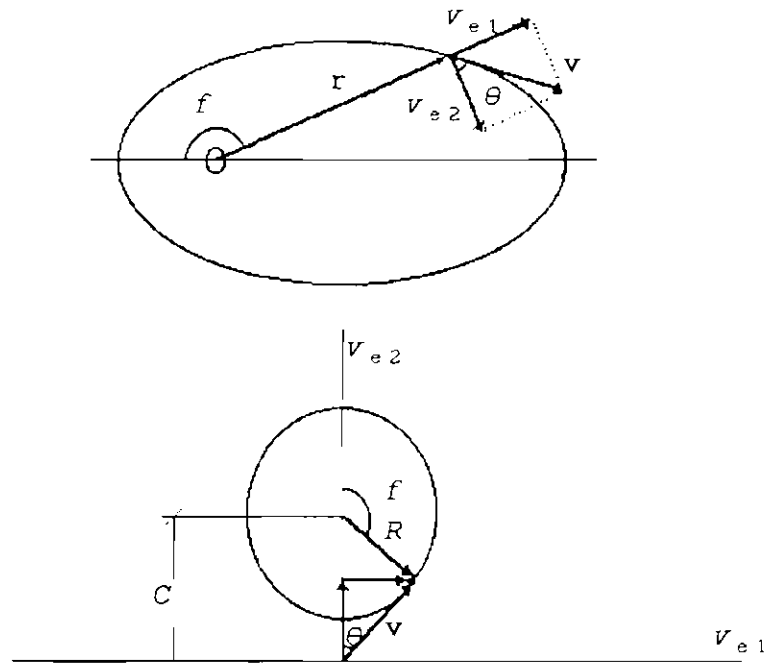


Fig. 2.2 - Órbita plana e sua hodógrafa.  
 FONTE: Altman (1062), p. 1109.

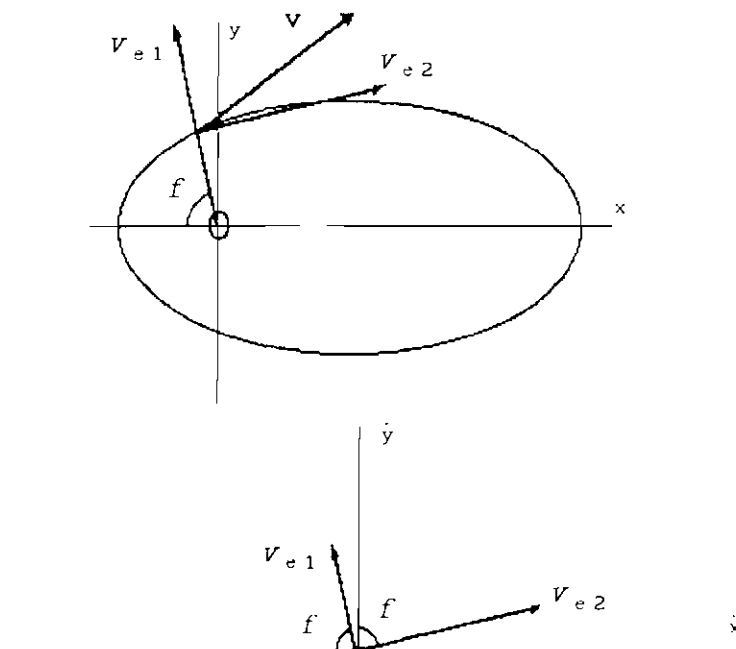


Fig. 2.3 - Coordenadas de velocidade polar e retangular para a órbita plana.  
 FONTE: Altman (1961), p. 1219.

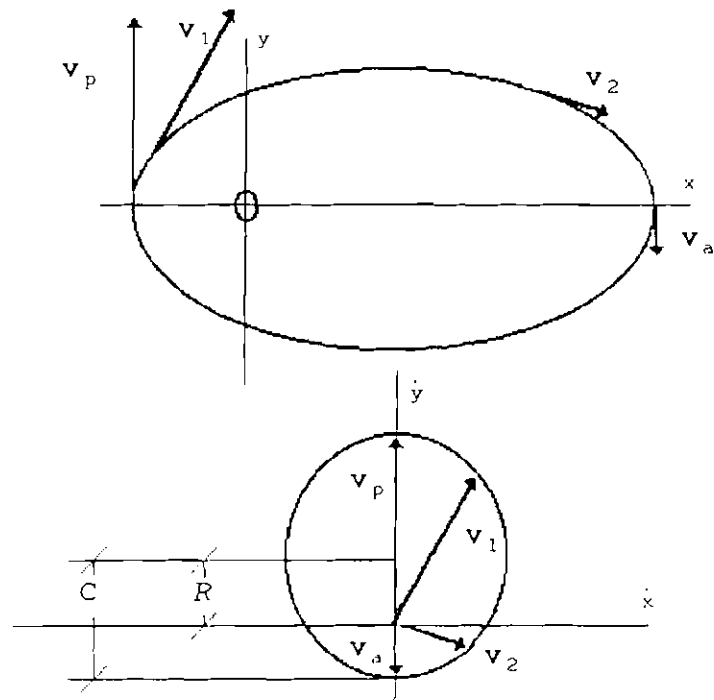


Fig. 2.4 - Hodógrafa orbital em coordenadas retangulares.  
FONTE: Altman (1961), p. 1219.

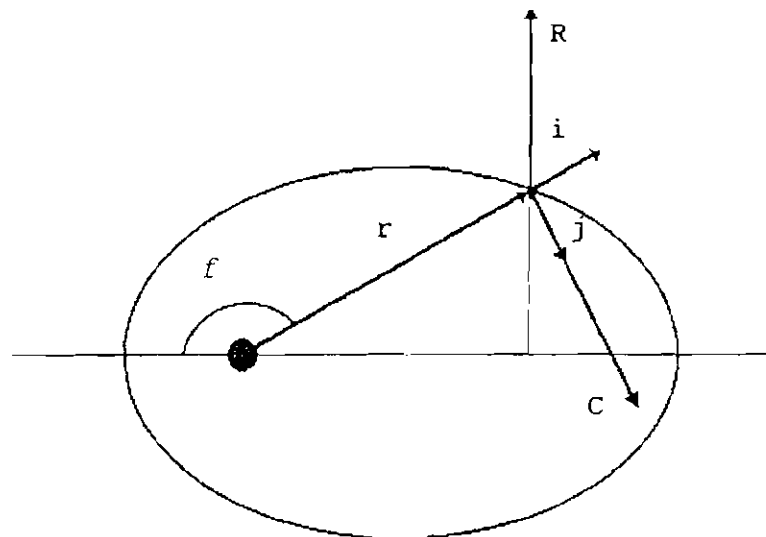
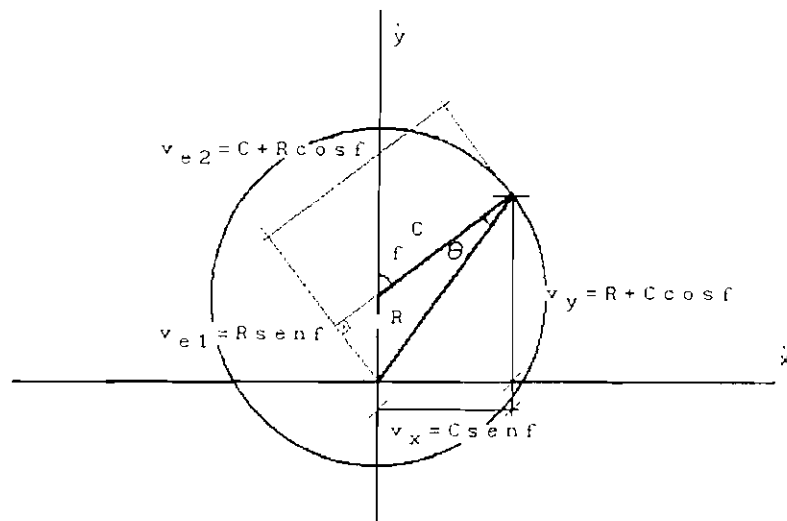
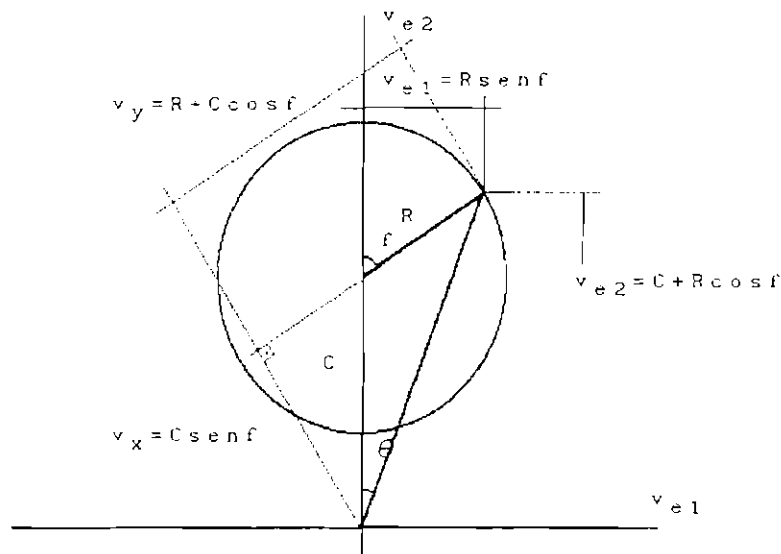


Fig. 2.5 - As invariâncias do vetor velocidade orbital.  
FONTE: Altman (1966), p. 49.



Em coordenadas retangulares



Em coordenadas polares

Fig. 2.6 - Hodógrafas da velocidade orbital.

FONTE: Altman (1966), p.51.

As transformações orbitais nos espaços vetoriais da posição e velocidade estão sumarizadas na Figura 2.7. Algumas relações características entre estas transformações são essencialmente notáveis. Primeiro, cada ponto de uma trajetória orbital, num dado espaço vetorial, se transforma num único ponto da trajetória orbital correspondente



no outro espaço vetorial. Além do mais, todos os ângulos correspondentes são iguais e de mesmo sentido, ou seja, as transformações hodográficas entre os espaços vetoriais da mecânica newtoniana são transformações conformes. Finalmente, a órbita no espaço vetorial da posição leva a uma inversão geométrica quando da transformação do espaço vetorial da velocidade, ou seja, numa superfície fechada o que está no interior passa a ser representado no exterior desta superfície, de forma que todos os "pontos no infinito" são transformados para a origem (Altman, 1966). A consequência deste fato é que todas as singularidades encontradas no espaço vetorial da posição, são eliminadas, como mostra as figuras geométricas contínuas e regulares dos círculos da Figura 2.7. Logo, as transformações hodográficas são transformações regularizadoras.

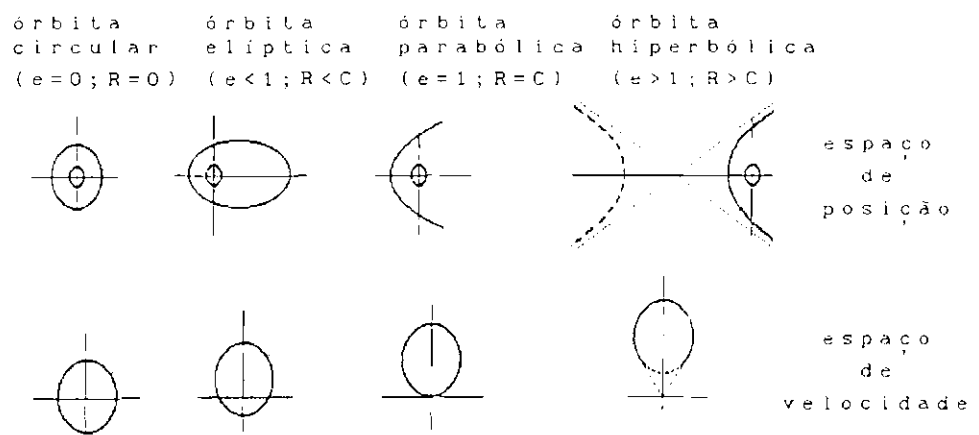


Fig. 2.7 - Transformações da hodógrafa orbital.

FONTE: Adaptado de Altman (1966), p. 53.

### 2.2.3 - VISUALIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS HODOGRÁFICAS

A trajetória hodográfica é uma representação gráfica efetiva dos vínculos dinâmicos, numa forma rigorosamente analítica. Conseqüentemente, a hodógrafa pode ser utilizada para a visualização da trajetória dinâmica. Esta

visualização pode ser extremamente valiosa tanto para rotinas computacionais no estudo de trajetórias, como para controle e comando de guiagem e operações de controle (Altman, 1966).

Devido ao conceito da hodógrafa, a trajetória no espaço hodográfico além de apresentar informações gráficas de um dado espaço vetorial ela também apresenta informações sobre os vetores de menor ordem da derivada que o formou. Conseqüentemente, a visualização da velocidade hodográfica apresentará dados de velocidade e posição. Como exemplo, as visualizações das velocidades hodográficas mostradas esquematicamente nas Figuras 2.8 e 2.9 podem apresentar:

1) posição e velocidade inerciais de um veículo espacial,

2) posição e velocidade relativas entre um veículo espacial e a superfície de um corpo celeste.

Projetos de visualização hodográficas poderão ser mais eficientes, pois

a) todas as velocidades hodográficas são círculos,

b) o espaço é transformado para o interior, de forma que todas as trajetórias são visualizadas dentro do limite de um círculo,

c) o círculo limitante representa a superfície esférica de um corpo celeste atrator, e

d) os pontos do infinito são visualizados no centro da nova representação.

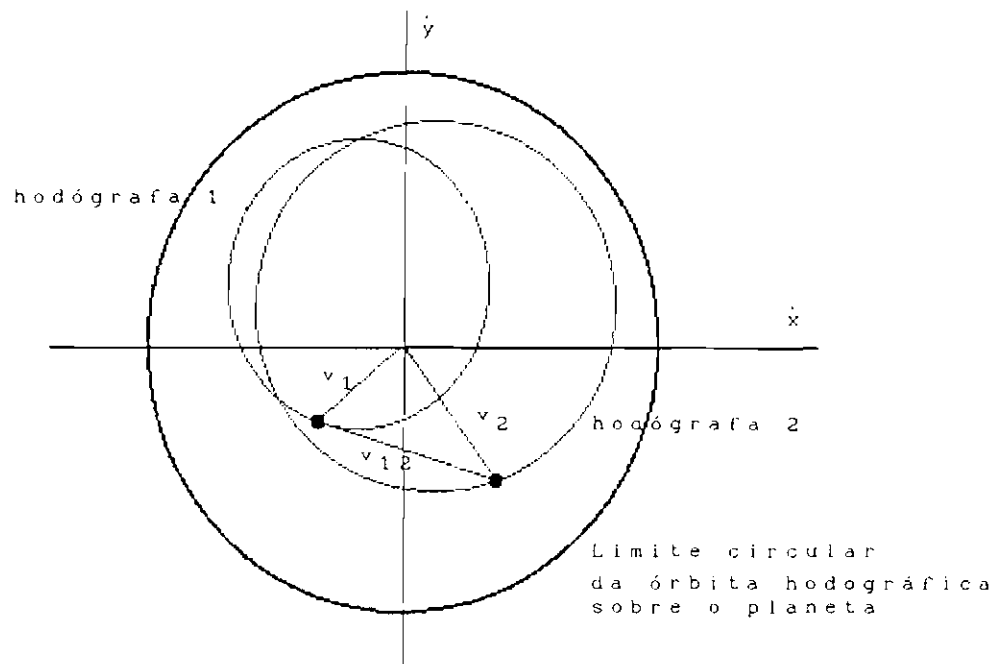


Fig. 2.8 - Vetores de velocidade relativa entre dois veículos orbitais.

FONTE: Altman (1966), p. 79.

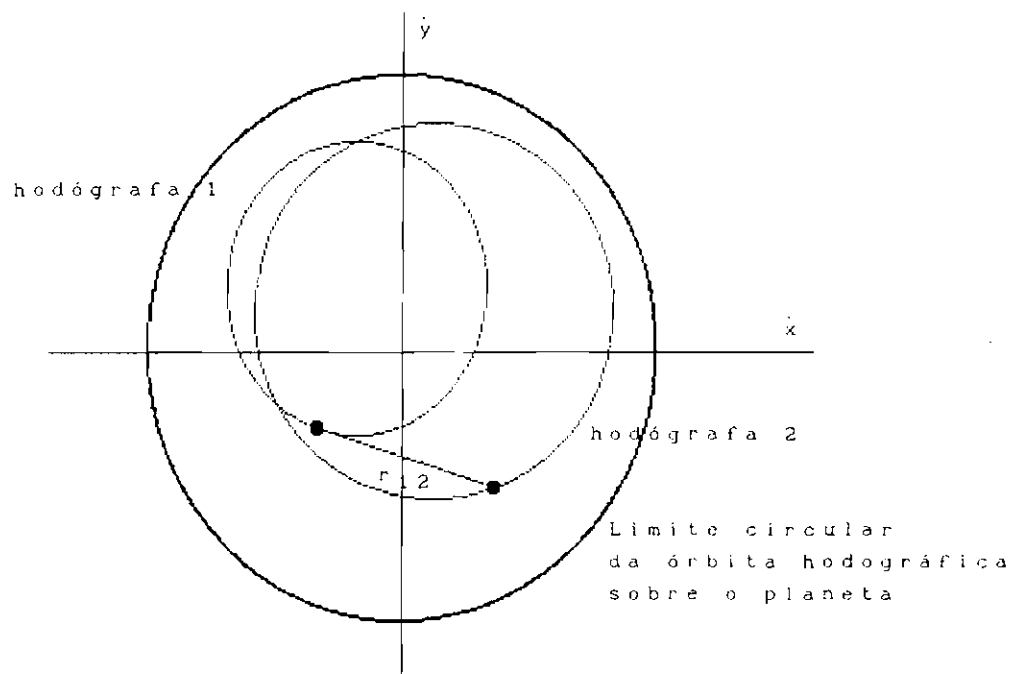


Fig. 2.9 - Visualização de dados espaciais relativos para dois veículos espaciais.

FONTE: Altman (1966), p. 79.

### 2.3 - OS PARÂMETROS DE EULER PARA A ÓRBITA

Os parâmetros de Euler e as consequentes equações de vínculos oferecem muitas vantagens computacionais. Altman inicialmente pesquisou e desenvolveu o modelo unificado de estados explorando o uso dos cossenos diretores. Sua decisão de empregar os parâmetros de Euler como variáveis de coordenadas foi baseado nos sucessos das demonstrações de exercícios típicos do modelo unificado de estados, com os parâmetros de Euler como variáveis coordenadas (Altman, 1972).

Os parâmetros de Euler definem um quatérnion unitário que pode ser empregado para descrever a rotação dos eixos de coordenadas. Consequentemente, a rotação das coordenadas do movimento orbital pode ser expressa por uma forma matricial de transformação de rotação.

A rotação de um eixo de coordenadas pode ser gerada por uma rotação sobre um eixo que parte da origem do plano inercial. Esta rotação é definida por um quatérnion unitário

$$q = e_4 + (e_1 i + e_2 j + e_3 k), \quad (2.37)$$

onde  $i$ ,  $j$ ,  $k$  são os versores das coordenadas inerciais, e os  $e_i$  são os parâmetros de Euler (Altman, 1972):

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \operatorname{sen} u/2 \\ \cos \beta \operatorname{sen} u/2 \\ \cos \gamma \operatorname{sen} u/2 \\ \cos u/2 \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

compostos por números reais de forma que

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 = 1. \quad (2.39)$$

Os ângulos esféricos  $(\alpha, \beta, \gamma)$  da Equação Matricial 2.38 são mostrados esquematicamente na Figura 2.10. Um outro modo de se definir os parâmetros de Euler é em termos dos ângulos de Euler  $(\Omega, \iota, \nu = \omega + f)$  mostrados na Figura 2.11. Desta forma a Equação Matricial 2.38 fica

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \iota/2 \cos [\Omega - \nu]/2 \\ \text{sen } \iota/2 \text{sen } [\Omega - \nu]/2 \\ \cos \iota/2 \cos [\Omega + \nu]/2 \\ \cos \iota/2 \text{sen } [\Omega + \nu]/2 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

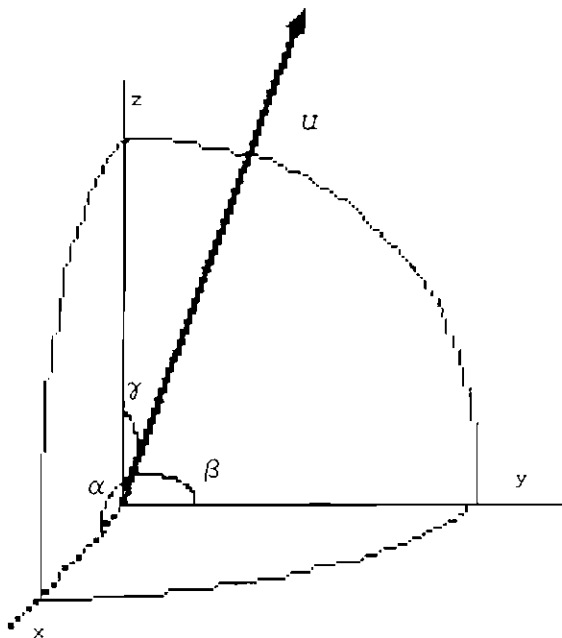


Fig. 2.10 - Geometria para os parâmetros de Euler.

FONTE: Adaptado de Altman (1972), p. 444.

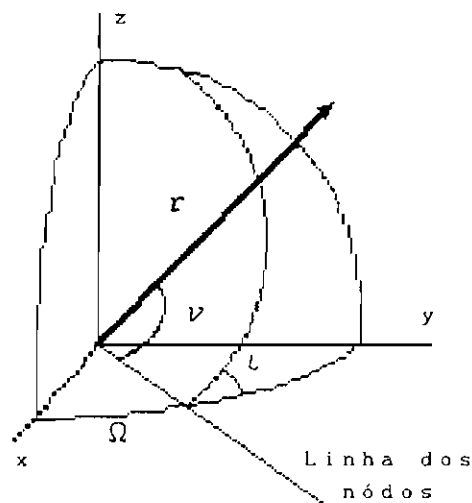


Fig. 2.11 - Os ângulos de Euler.

FONTE: Altman (1972), p. 444.

#### 2.4 - A DINÂMICA DO MODELO

A dinâmica do modelo unificado foi desenvolvida para o uso de variáveis de estado e de coordenadas, definindo equações de vínculo com propriedades convenientes na redução do custo computacional. As variáveis de estado podem ser posição (representando a energia potencial), velocidade (representando energia cinética), ou outra variável de estado que identifique a energia do sistema. As variáveis de coordenadas podem ser um conjunto de três parâmetros (como os ângulos de Euler), um conjunto de quatro parâmetros (como os parâmetros de Euler), ou um conjunto de nove parâmetros (como os cossenos diretores). No modelo unificado as variáveis de estado são formas paramétricas de momento, como visto na seção 2, e as variáveis de coordenadas são os parâmetros de Euler, uma representação da rotação dos eixos coordenados.

As equações dinâmicas da trajetória orbital são (Altman, 1972):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} C \\ R_{f1} \\ R_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p & 0 \\ \cos\gamma & -(1+p)\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & (1+p)\cos\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{e1} \\ a_{e2} \\ a_{e3} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

para os parâmetros hodográficos da órbita, onde a variável de estado  $R$  foi de-composta em duas componentes ( $R_{f1}$  e  $R_{f2}$ ) no plano orbital instantâneo, com  $R_{f1}$  ao longo do eixo  $X'$  (Figura 2.12) e  $R_{f2}$  normal a  $R_{f1}$ . E para os quatérnions (Wertz, 1978), tem-se

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_{o1} \\ e_{o2} \\ e_{o3} \\ e_{o4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{o1} \\ e_{o2} \\ e_{o3} \\ e_{o4} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Juntamente com as seguintes relações auxiliares:

$$p = C/v_{e2} \quad (2.43)$$

$$\begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{f1} \\ R_{f2} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\begin{bmatrix} \sin\gamma \\ \cos\gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{e_{o3}^2 + e_{o4}^2} \begin{bmatrix} 2e_{o3}e_{o4} \\ e_{o4}^2 - e_{o3}^2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\gamma = \chi + \omega \quad (2.46)$$

$$\omega_1 = a_{e3}/v_{e2} \quad (2.47)$$

$$\omega_3 = C v_{e2}^2 / \mu \quad (2.48)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{e1} \\ a_{e2} \\ a_{e3} \end{bmatrix} = \sum \mathbf{a}_i \quad (2.49)$$

onde o vetor  $a$  representa o vetor aceleração e  $\Sigma$  é o somatório das acelerações perturbadoras. Os sub-índices "o" significam orbital, os " $e_i$ " indicam as direções 1 radial, 2 transversal e 3 normal. O desenvolvimento das equações dinâmicas dos parâmetros de velocidade, baseadas na teoria hodográfica, assim como as equações dinâmicas dos parâmetros de Euler, podem ser encontrado no Apêndice A. Note que todas as equações diferenciais são funções de primeira ordem das acelerações perturbadoras  $a_i$ . As componentes da tríade de rotação de cada fonte de aceleração perturbadora são somados em cada instante de tempo (ou intervalo computacional) para uso nas equações 2.41 e/ou 2.46.

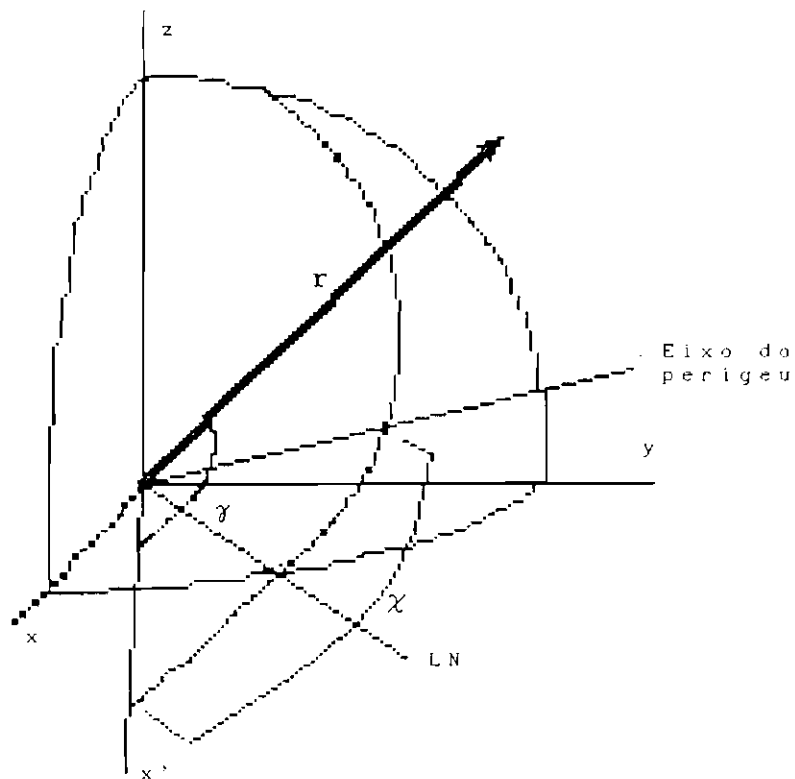


Fig. 2.12 - Geometria dos parâmetros de velocidade no espaço inercial

FONTE: Adaptado de Altman (1972), p. 429.



## 2.5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo unificado de estados foi desenvolvido a partir da teoria hodográfica, mostrando sua eficiência devido a regularização e sua forma em variável de estado. Neste capítulo foi desenvolvido a parte orbital do modelo unificado de estados. No entanto este modelo foi desenvolvido para operar tanto com a trajetória orbital, como com a dinâmica de atitude (Altman, 1972), devido a inter-relação existente entre estas duas categorias de movimento (como exemplos, as forças devido ao gradiente de gravidade e o arrasto atmosférico). A intenção neste trabalho é operar apenas com a parte orbital do modelo.

Este modelo apresenta propriedades analíticas interessantes, como foi mostrado na seção 2.2, e nos próximos capítulos será mostrada sua precisão numérica através de testes e aplicações.

## CAPÍTULO 3

## EXPERIMENTOS NUMÉRICOS DO MODELO UNIFICADO

## 3.1 - INTRODUÇÃO

O modelo unificado de estados apresenta excelentes propriedades numéricas devido a suas características de regularização do movimento orbital. Para demonstrar este fato foram elaboradas simulações computacionais onde serão apresentados os resultados de uma propagação numérica de órbita realizada com o modelo unificado e com o modelo gravitacional de Newton. Os resultados dos dois modelos foram comparados com uma órbita de referência, obtida através de uma solução analítica. Para propagar as órbitas numéricas foi utilizado o integrador Runge-Kutta de oitava ordem com coeficientes de Fehlberg (Kondapalli e Kuga, 1986). Foram utilizados passos de 120 segundos nas integrações numéricas e na propagação analítica. A tolerância no erro do integrador Runge-Kutta foi de  $10^{-10}$ . A órbita de referência é uma órbita fictícia bem caracterizada, semelhante à órbita do satélite SCD-1 da MECB, descrita abaixo, em termos dos elementos keplerianos:

$$a = 7139000 \text{ m}$$

$$e = 0.004$$

$$i = 25^\circ$$

$$\omega = 0^\circ$$

$$\Omega = 0^\circ$$

$$M = 0^\circ$$

onde  $a$  é o semi-eixo maior, e a excentricidade,  $i$  a inclinação,  $\omega$  o argumento do perigeu,  $\Omega$  o nódo ascendente e  $M$  a anomalia média.

O modelo gravitacional de Newton para o problema de dois corpos é dada pela equação:

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} ,$$

onde  $\mu$  é a constante gravitacional terrestre e  $\mathbf{r}$  o vetor posição. O " $\cdot$ " representa a derivada temporal ( $d/dt$ ). As equações do modelo unificado foram apresentadas no capítulo anterior e, no caso do problema dos dois corpos, elas podem ser simplificadas para:

$$\dot{C} = 0 ,$$

$$\dot{R}_{r1} = 0 ,$$

$$\dot{R}_{r2} = 0 .$$

As equações para os quatérnions não são modificadas.

Para o problema dos dois corpos, ou seja, o movimento kepleriano, foram realizados dois tipos de experimentos, um de curto período de cerca de 12 horas, e outro de longo período de 30 dias. Estes testes tem por objetivo verificar o comportamento dos erros numéricos em intervalos pequenos, e como os erros crescem quando longos períodos de integração são utilizados. O problema dos dois corpos pode ser considerado um teste válido pois abrange a componente de aceleração de maior magnitude, além de ter solução analítica. A solução analítica de referência foi obtida conforme algoritmo descrito em Kuga (1986).

### 3.2 - TESTE DE CURTO PERÍODO (12 HORAS)

Para avaliar as diferenças entre o modelo unificado e o modelo newtoniano, os erros de posição em relação à órbita analítica foram projetados nas componentes radial, normal e transversal da órbita de referência, cujo método é muito utilizado e está bem detalhado em Fabri (1987). A Figura 3.1 mostra os erros radiais do modelo newtoniano e do modelo unificado.

Os erros radiais estão em torno de  $-1 \times 10^{-8}$  m para o modelo unificado e  $9 \cdot 10^{-5}$  para o modelo newtoniano, mostrando que os desvios do modelo newtoniano estão cerca de dez mil vezes maiores do que os do modelo unificado para o intervalo testado.

Na avaliação do erro normal, Figura 3.2, tanto o modelo newtoniano quanto o modelo unificado mantiveram os desvios no patamar da tolerância do integrador ( $10^{-10}$ ). Ambas as médias estão em torno de 0 m.

No caso do erro transversal, Figura 3.3, as médias estão crescendo quase que exponencialmente, porém o erro no modelo newtoniano é quase dez mil vezes maior do que o erro relativo cometido pelo modelo unificado, ao fim do intervalo analisado. A componente transversal é a que apresenta maior erro em magnitude e é a componente crítica em termos de previsão orbital. O modelo newtoniano apresentou desvio final de quase 4 mm, e o modelo unificado de 0.0003 mm.

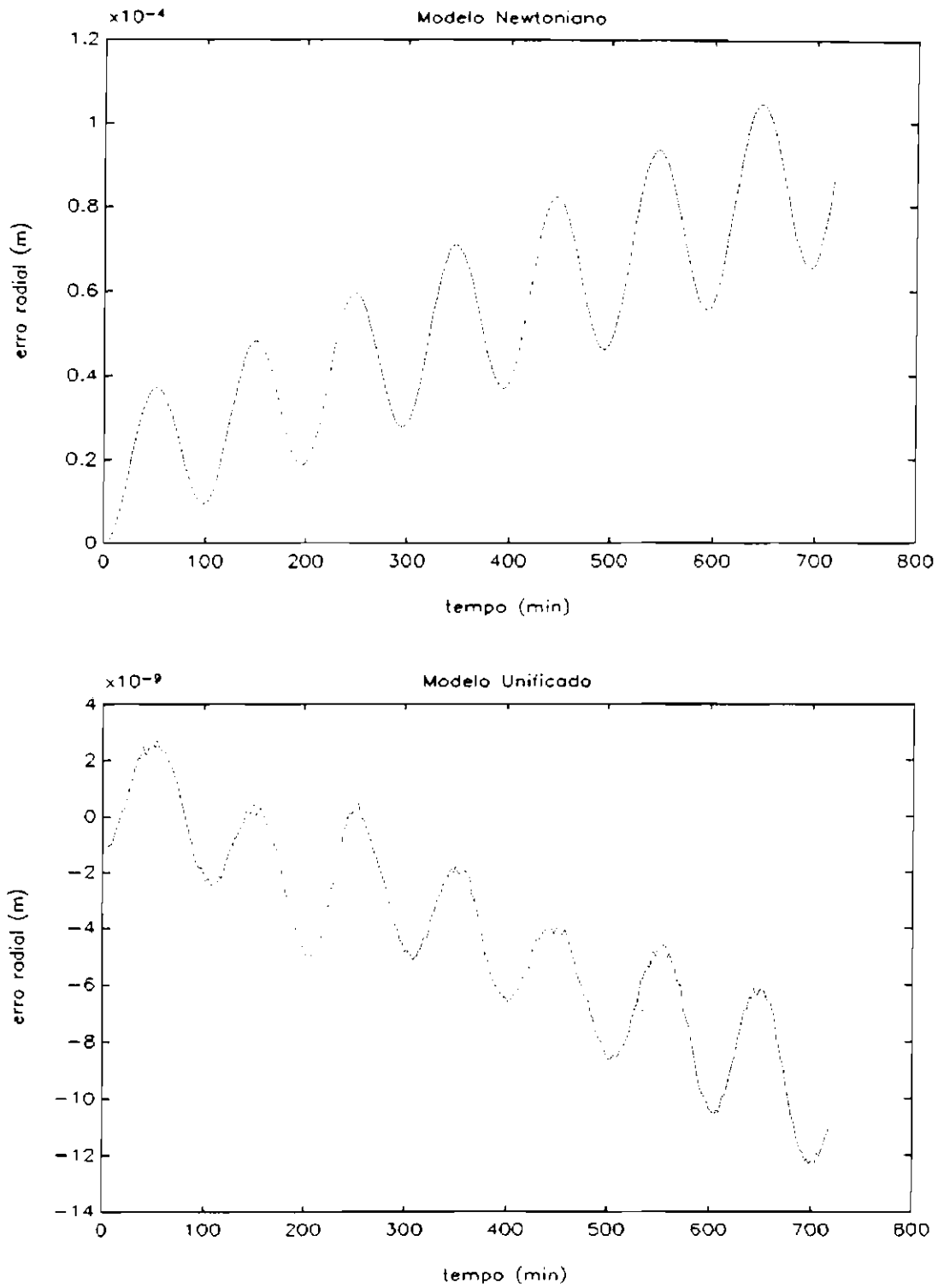


Fig. 3.1 - Erros radiais de curto período.

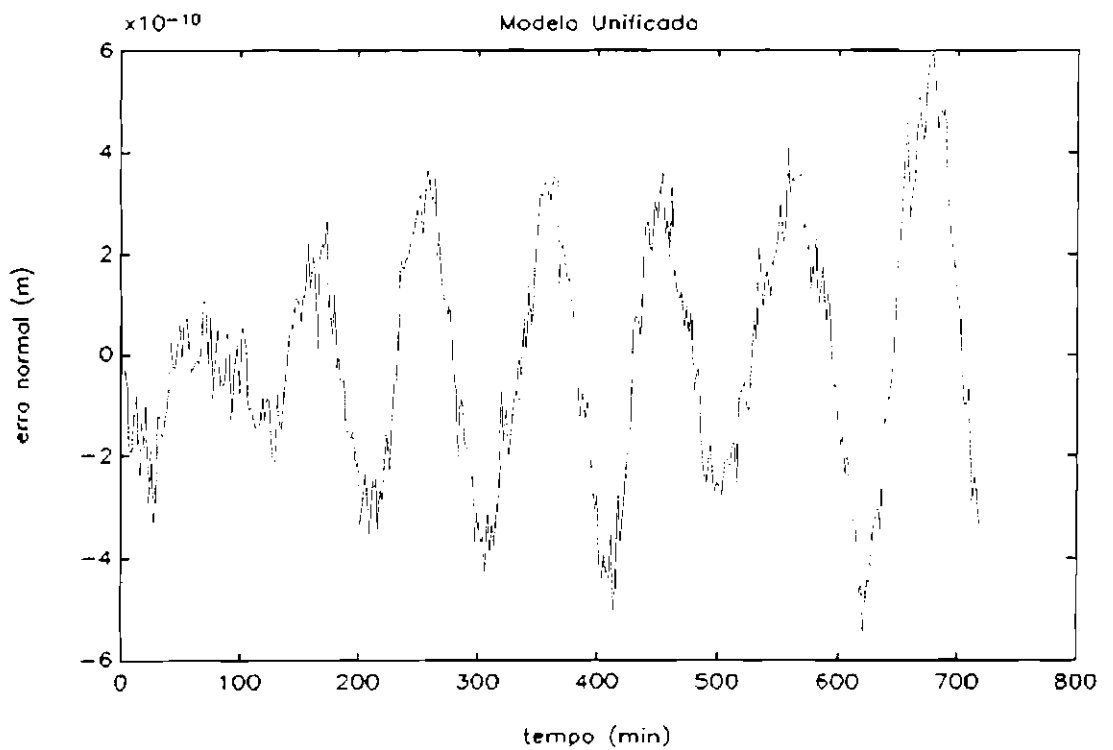
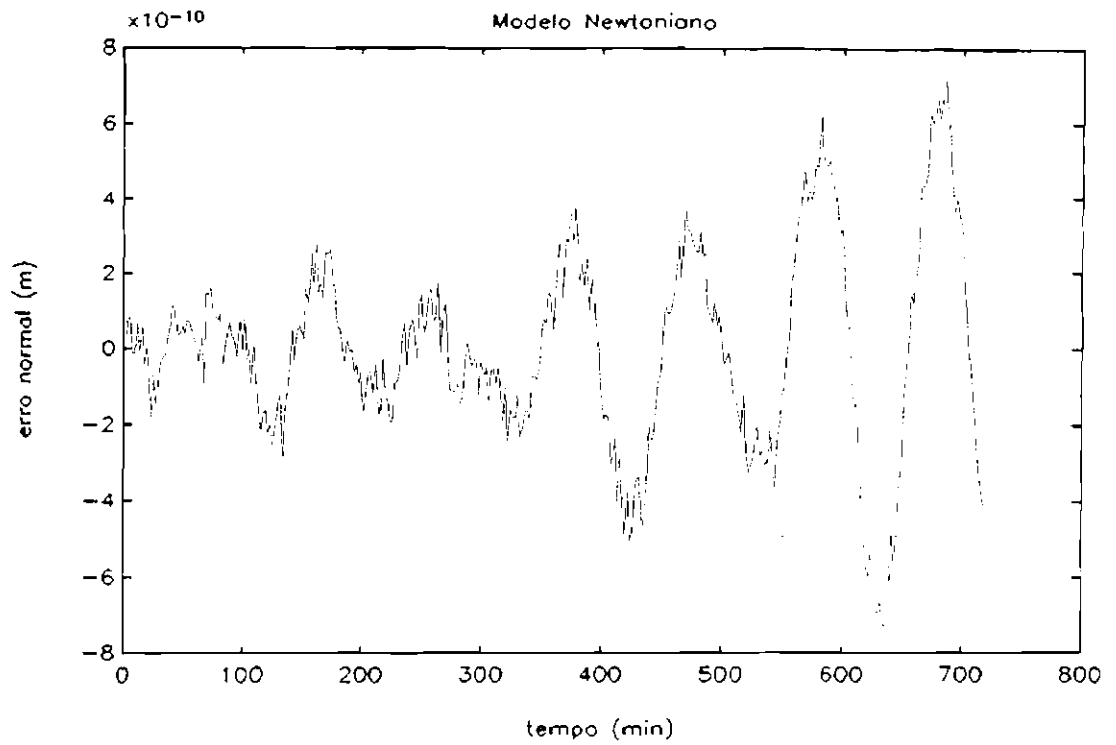


Fig. 3.2 - Erros normais de curto período.

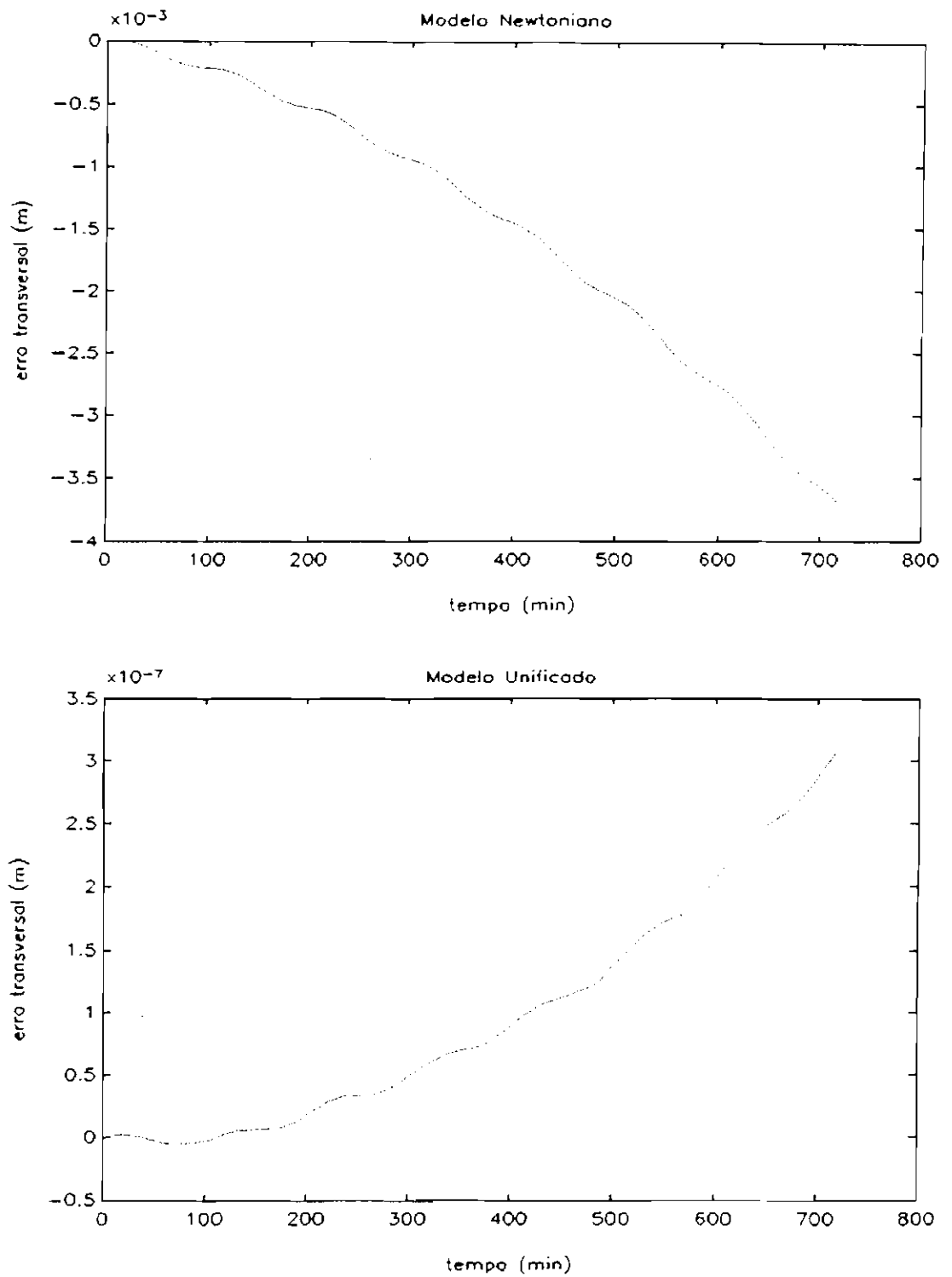


Fig. 3.3 - Erros transversais de curto período.

### 3.3 - TESTE DE LONGO PERÍODO (30 DIAS)

Neste teste de longo período, foram adotados os mesmos critérios do teste de curto período, porém a órbita foi propagada por 30 dias.

As médias dos erros radiais de ambos os modelos, Figura 3.4, estão tendendo a crescer e as amplitudes finais das oscilações estão em torno de  $-5.10^{-6}$  m a  $4.10^{-6}$  m para o modelo unificado e em torno de  $-0,03$  m a  $0,04$  m para o modelo newtoniano, o que produz uma faixa de erro 5 mil a 10 mil vezes maior para o modelo newtoniano em relação ao modelo unificado. No fim do período testado, o erro radial médio foi da ordem de  $5.10^{-3}$  m para o modelo newtoniano e de  $5.10^{-7}$  m para o modelo unificado.

Apesar de apresentar uma diferença pequena para o erro normal de longo período, Figura 3.5, o erro do modelo newtoniano foi pouco menor que o do modelo unificado. As médias de ambos os modelos continuaram em torno de 0 m, assim como suas amplitudes de oscilação também continuam pequenas, da ordem de  $3.10^{-9}$  m para os dois modelos. Deve-se levar em conta que estes erros são da ordem da tolerância do integrador usado ( $10^{-10}$ ), de maneira que tais conclusões podem não ser definitivas.

O erro transversal, Figura 3.6, está crescendo com perfil exponencial para ambos os modelos. No entanto, no final dos 30 dias de propagação, o erro do modelo unificado está em torno de  $1,2.10^{-3}$  m e em torno de  $-9$  m para o modelo newtoniano, mostrando que os erros estão cerca de 6 mil vezes maiores no modelo newtoniano em relação ao modelo unificado.



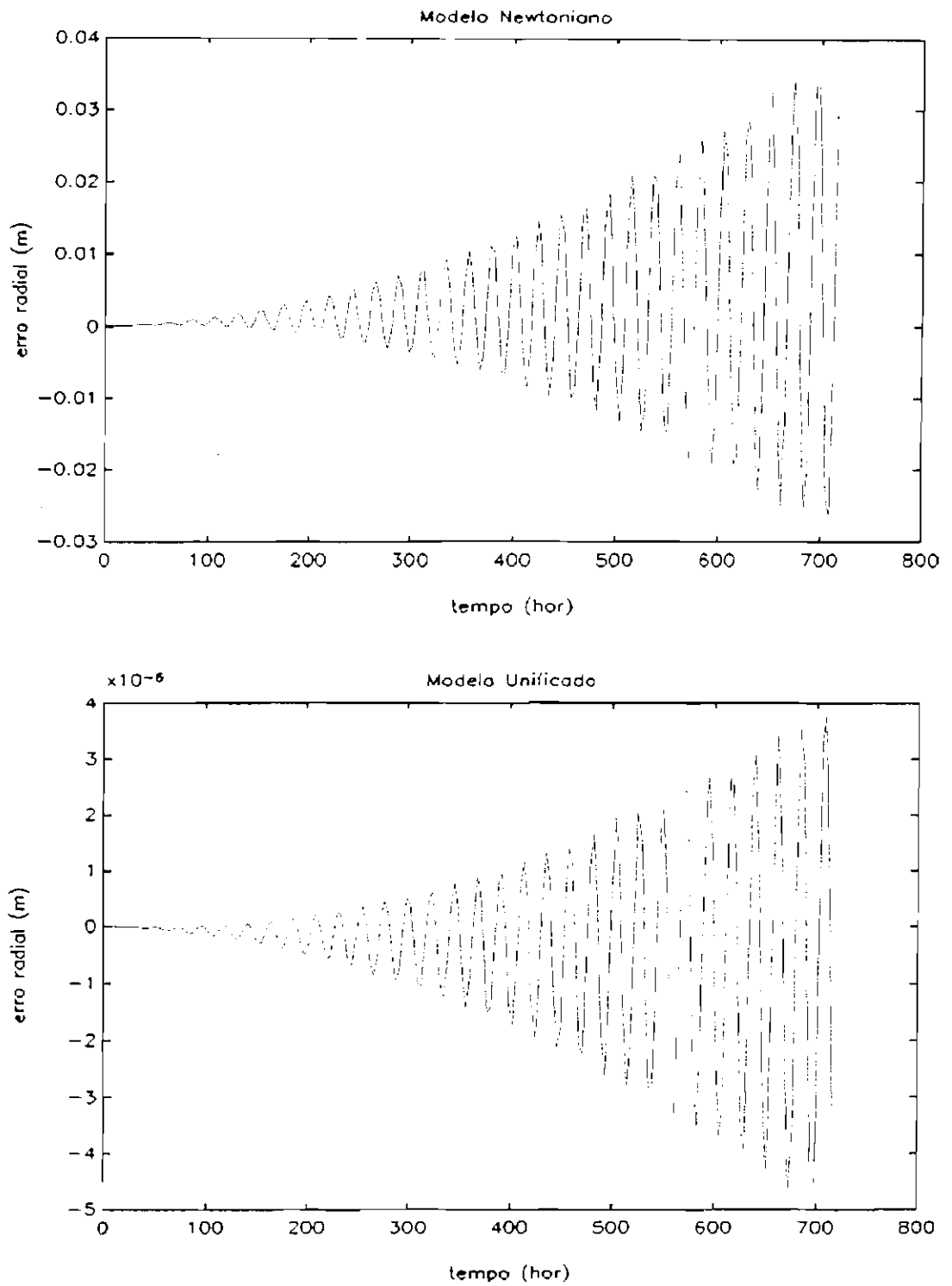


Fig. 3.4 - Erros radiais de longo período.

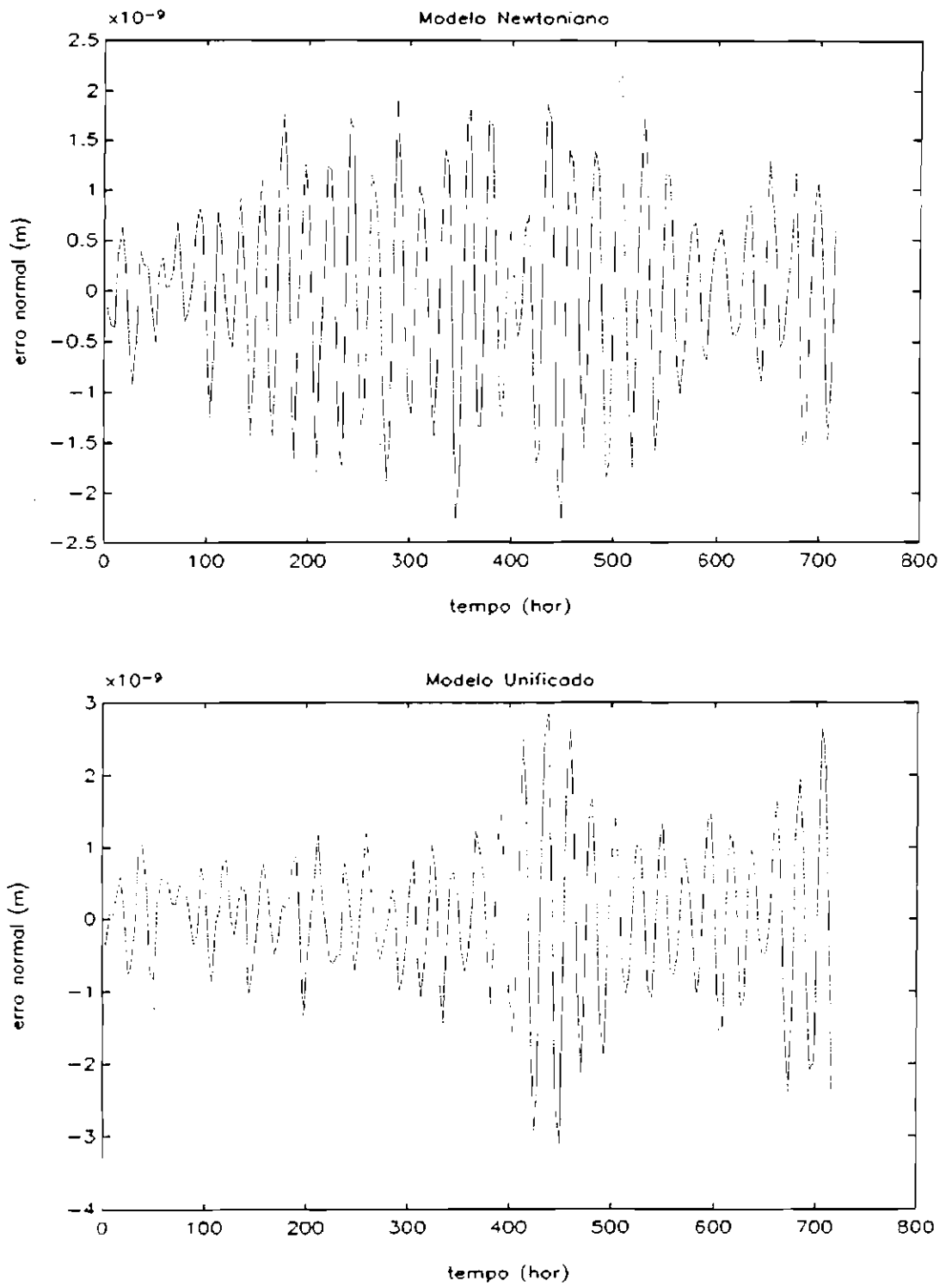


Fig. 3.5 - Erros normais de longo período.

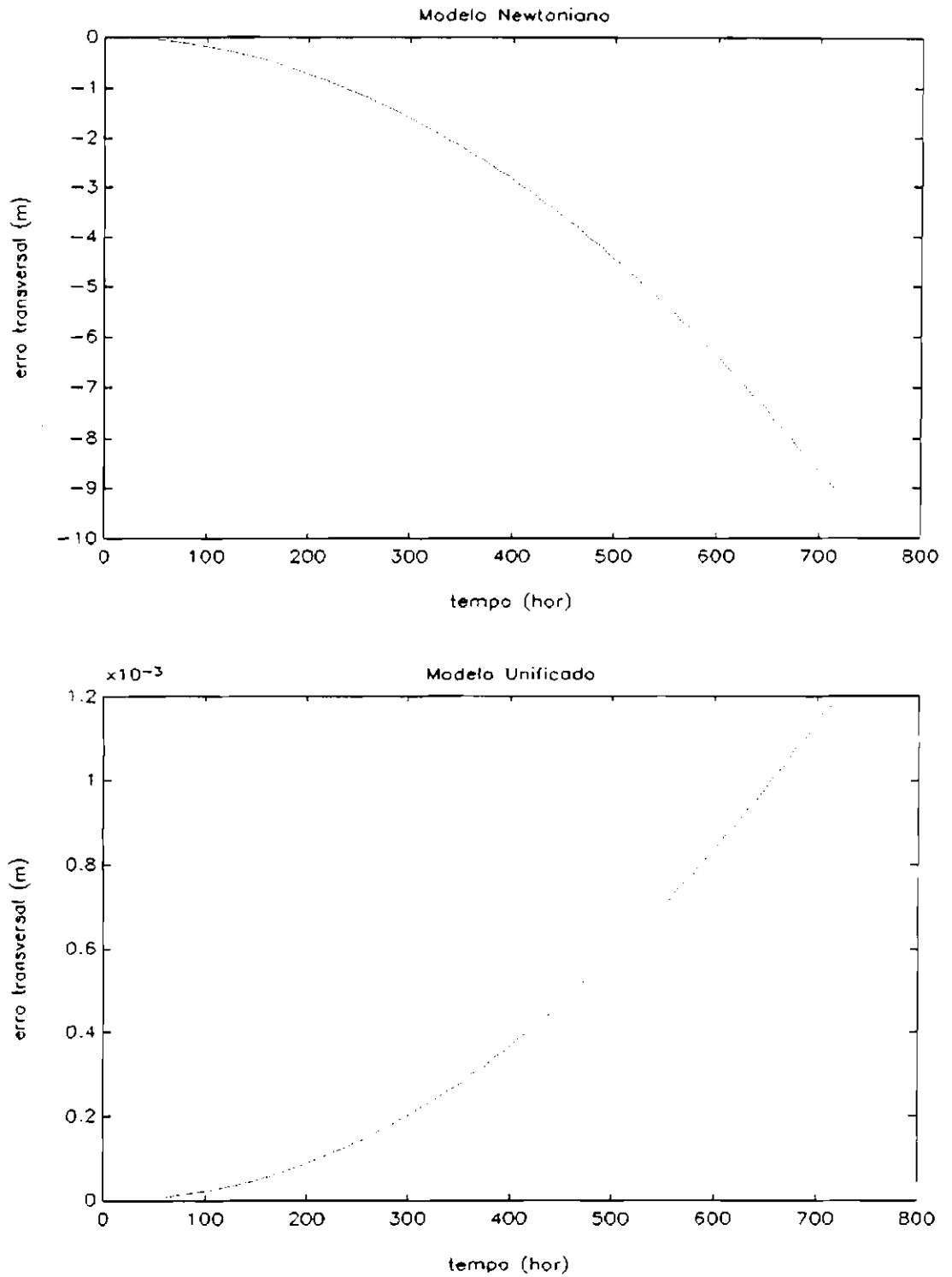


Fig. 3.6 - Erros transversais de longo período.

### 3.4 - CONCLUSÕES

As precisões envolvidas no teste de curto período são melhores do que as de longo período, demonstrando que, no início, os dois modelos seguem a solução analítica, embora o modelo unificado apresente resultados melhores. Os desvios de longo período caracterizam melhor o que poderá ocorrer se a propagação continuar: a amplitude dos erros aumentarão cada vez mais, fazendo com que os resultados não tenham significado depois de um determinado período. No entanto, nota-se que este período será mais longo para o modelo unificado, já que ele está divergindo mais lentamente do que o modelo gravitacional de Newton.

O modelo unificado mostrou, em geral, ter desempenho superior ao modelo newtoniano. Isto se deve principalmente ao fato de que o modelo unificado é regularizado, como foi demonstrado no Capítulo anterior e mencionado no início deste Capítulo. Devido à grande simplicidade do modelo newtoniano, o tempo de processamento deste modelo foi menor do que o do modelo unificado, mas a diferença não foi substancial. Para modelos mais completos incluindo perturbações a tendência será de equivalência de tempo de processamento.



## CAPÍTULO 4

## DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA ATRAVÉS DO MODELO UNIFICADO DE ESTADOS

## 4.1 - INTRODUÇÃO

Determinação de órbita de satélite artificial é o processo de obtenção dos valores dos parâmetros que caracterizam o movimento orbital do satélite, levando em conta um conjunto de observações deste corpo (Raol e Sinha, 1985). Com o conhecimento da órbita do satélite, é possível o acompanhamento da execução de suas tarefas operacionais, tais como telemetria, telecomandos, etc., de modo a ter um aproveitamento máximo da missão do satélite (Kuga, 1989).

Os modelos matemáticos utilizados para a determinação de órbita, devido a problemas de implementação (memória computacional, tempo de processamento, etc.), não conseguem abranger todas as perturbações que possam modificar a trajetória orbital de um satélite, necessitando-se assim que se faça periodicamente a correção dos parâmetros orbitais. Para isto, é necessário o conhecimento das medidas ou de observações do satélite e a utilização de alguma técnica de estimação para extrair informações dos dados medidos e daí fazer a devida correção.

As duas técnicas de estimação mais discutidas na literatura são o estimador de mínimos quadrados, apresentada pela primeira vez por Gauss, nos idos de 1800, e o filtro de Kalman, desenvolvido por Kalman na década de 60. O método de mínimos quadrados processa as medidas em lote, ou seja, reúne todas as medidas disponíveis, do tempo inicial ao tempo atual, e estima o estado, por isto, é também conhecido como estimador de época. Já o filtro de Kal-

man processa as medidas sequencialmente, ou seja, toda vez que uma medida está disponível, ela é processada e um novo estado é estimado.

Este Capítulo apresenta o equacionamento do modelo unificado de estados, aplicado ao problema de determinação de órbita. O modelo unificado de estados para tal problema é composto de parâmetros de velocidade (ou hodo-gráficos), representando as variáveis de estado, e dos parâmetros de Euler (ou quatérnions), representando as variáveis de coordenadas. As características do modelo unificado foram apresentadas no Capítulo 2 e o teste para comprovar sua precisão numérica foi apresentado no Capítulo 3. Optou-se também neste trabalho pela estimação sequencial do filtro de Kalman.

#### 4.2 - EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

O problema de estimação de órbita pode ser esquematizado matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{du}{dt} = f(u, t) + G(t)\omega(t) \quad (4.1)$$

onde  $u$  é um vetor de dimensão  $m$ , com os parâmetros que se quer estimar, governado pela dinâmica  $f$ , que também é um vetor de dimensão  $m$ , e perturbado por fatores diversos, porém modelados como ruído branco gaussiano  $\omega$  também de dimensão  $m$ , de média nula e covariância

$$E\{\omega(t)\omega(t')^T\} = Q(t) \delta(t-t'), \quad (4.2)$$

onde  $\delta(t-t')$  é a função delta de Dirac, definida como tendo o valor zero para todos os valores de  $t-t'$ , exceto se  $t = t'$ , onde a função tem valor infinito de tal forma que a integral da função cruzando a singularidade seja unitária (Gelb, 1974).  $Q$  é a matriz de densidade espectral (Gelb,

1974). A matriz  $G$  da equação 4.1 é uma matriz de pesos e de dimensão  $m \times m$ .

O vetor de estados neste trabalho será composto pela parte hodográfica e pela parte dos quatérnions como especificado a seguir:

$$u(t) = \left[ C \ R_{f1} \ R_{f2} \ e_{o1} \ e_{o2} \ e_{o3} \ e_{o4} \right]^T, \quad (4.3)$$

onde cada termo tem seu significado e sua respectiva dinâmica já detalhados no capítulo 2.

As medidas serão modeladas pela equação

$$z(t_i) = h(u(t_i)) + v(t_i), \quad (4.4)$$

onde  $z$  é um vetor das  $n$  medidas, ligadas ao estado pelo vetor  $h$ , de dimensão  $n$ , e perturbado por um vetor modelado como ruído branco gaussiano  $v$  de dimensão  $n$ , de média nula e covariância

$$E\{v(t_i)v(t_j)^T\} = R(t) \delta(t_i - t_j) \quad (4.5)$$

onde  $R$  é uma matriz de densidade espectral do ruído branco, de dimensão  $n \times n$ .

Nas simulações de órbita estudadas neste trabalho foi montado um vetor de medidas discreto composto pelas variáveis de azimute, elevação e distância (ou "range"), definidos na Figura 4.1, apresentados abaixo na forma de vetor de estado:

$$z(t_i) = \left[ AZ \ El \ \rho \right]^T. \quad (4.6)$$



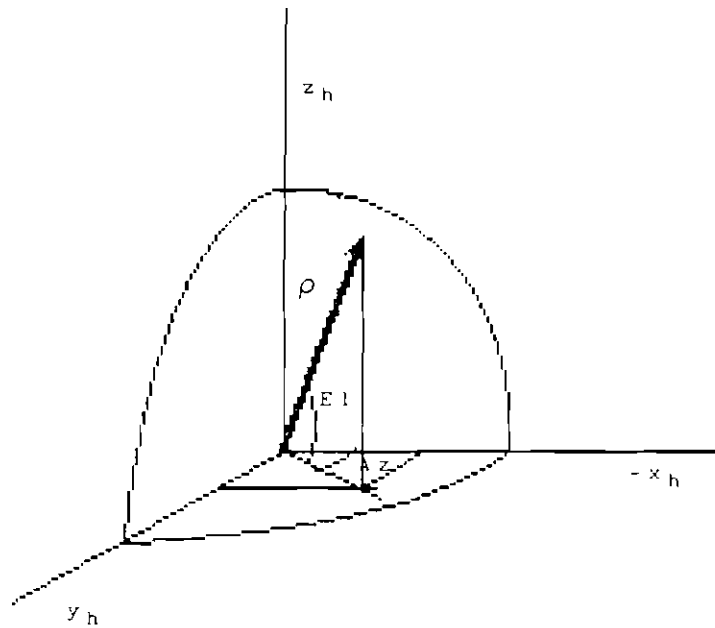


Fig. 4.1 - Definição gráfica do vetor de medidas.

A relação entre as observações e o vetor de estados

$$z(t_i) = h(u(t_i)) \quad (4.7)$$

é mostrada nas equações que se seguem

$$Az = \text{arc tg} \left[ \frac{y_h}{-x_h} \right] ; \quad (4.8)$$

$$El = \text{arc sen} \left[ \frac{z_h}{\rho} \right] ; \quad (4.9)$$

$$\rho = \sqrt{x_h^2 + y_h^2 + z_h^2} ; \quad (4.10)$$

$$x_h = K \text{ sen} \phi - z_A \text{ cos} \phi ; \quad (4.11)$$

$$y_h = y_A \text{ cos} \lambda - x_A \text{ sen} \lambda ; \quad (4.12)$$

$$z_h = K \cos\phi + z_A \cos\phi ; \quad (4.13)$$

$$K = x_A \cos\lambda + y_A \operatorname{sen}\lambda ; \quad (4.14)$$

$$x_A = x_T - G1 \cos\phi \cos\lambda ; \quad (4.15)$$

$$y_A = y_T - G1 \cos\phi \operatorname{sen}\lambda ; \quad (4.16)$$

$$z_A = z_T - G2 \operatorname{sen}\phi ; \quad (4.17)$$

$$G1 = \frac{R_T}{\sqrt{1 - f(2-f)\operatorname{sen}^2\phi}} + H ; \quad (4.18)$$

$$G2 = \frac{R_T(1-f)^2}{\sqrt{1 - f(2-f)\operatorname{sen}^2\phi}} + H ; \quad (4.19)$$

$$x_T = r \left[ e_{11} \cos\theta_g + e_{12} \operatorname{sen}\theta_g \right] ; \quad (4.20)$$

$$y_T = r \left[ e_{12} \cos\theta_g - e_{11} \operatorname{sen}\theta_g \right] ; \quad (4.21)$$

$$z_T = r e_{13} ; \quad (4.22)$$

$$r = \frac{\mu}{C\bar{V}_{e2}} ; \quad (4.23)$$

$$e_{11} = 1 - 2(e_{02}^2 + e_{03}^2) ; \quad (4.24)$$

$$e_{12} = 2(e_{01}e_{02} + e_{03}e_{04}) ; \quad (4.25)$$

$$e_{13} = 2(e_{01}e_{03} - e_{02}e_{04}) , \quad (4.26)$$

onde  $\phi$  é a latitude;  $\lambda$  a longitude;  $R_T$  é o raio equatorial da Terra;  $f$  é o fator de achatamento terrestre;  $H$  a altitude da estação;  $\theta_g$  é o tempo sideral de Greenwich;  $\mu$  é a

constante gravitacional da Terra;  $v_{e2}$  é a velocidade transversal.

#### 4.3 - O FILTRO DE KALMAN

O filtro de Kalman propriamente dito, é utilizado para fenômenos lineares, no entanto, a partir de certas considerações, pode-se utilizar o filtro estendido de Kalman, desenvolvido por vários autores como Gelb (1974), Maybeck (1980), etc., na solução do problema de estimação orbital. Para melhorar a estabilidade numérica do filtro foi utilizado uma variante do filtro de Kalman, conhecido como forma de Joseph (Kuga, 1982).

O filtro de Kalman, pode ser dividido em duas partes: propagação e atualização. A primeira parte integra o estado e a matriz de covariância, do tempo inicial  $i - 1$ , até o tempo  $i$ , quando uma das medidas está disponível. A segunda parte atualiza o estado e a matriz de covariância do estado utilizando-se do resíduo e do ganho de Kalman. O algoritmo está sumarizado abaixo:

a) propagação:

$$u(t_i) = u(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(\tau) d\tau , \quad (4.27)$$

$$P(t_i) = \Phi(t_{i-1}, t_i)P(t_{i-1})\Phi(t_{i-1}, t_i)^T + \Gamma(t_i) , \quad (4.28)$$

onde  $P$  é a matriz de covariância do estado,  $\Phi$  a matriz de transição e  $\Gamma$  é uma matriz que incorpora o ruído branco na dinâmica do modelo, definida por:

$$\Gamma = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_{i-1}, \tau) G(\tau) Q(\tau) G(\tau)^T \Phi(t_{i-1}, \tau)^T d\tau ;$$

b) atualização:

$$K(t_i) = P(t_i) H(t_i)^T \left[ H(t_i) P(t_i) H(t_i)^T + R(t_i) \right]^{-1}, \quad (4.29)$$

$$\hat{u}(t_i) = u(t_i) + K(t_i) \left[ y(t_i) - h(u, t_i) \right], \quad (4.30)$$

$$\hat{P}(t_i) = W P(t_i) W^T + K(t_i) R(t_i) K(t_i)^T, \quad (4.31)$$

onde

$$W = \left[ I - K(t_i) H(t_i) \right]$$

e

$$H(t_i) = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{u=u(t_i)}$$

A forma de se calcular a matriz de transição  $\Phi$ , está detalhada no Apêndice A2.

#### 4.4 - SINGULARIDADE DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA

Como os quatérnions não são independentes entre si, pois suas componentes têm que obedecer ao vínculo de norma unitária (ver Capítulo 2), sua utilização no vetor de estados faz com que a matriz de covariância seja singular. Devido a erros numéricos, esta singularidade é difícil de ser mantida no processo de estimação. Ferraresi (1987) apresentou três procedimentos para evitar este problema baseando-se em transformações que permitem a substituição da matriz de covariância por outra matriz não singular e de

dimensão menor. Os procedimentos são: representação truncada da matriz de covariância; representação reduzida da matriz de covariância, empregando propriedades da matriz de rotação; representação reduzida da matriz de covariância através do vetor de erros dos quatérnions. Todos estes procedimentos foram empregados em determinação de atitude de satélite, onde o vetor de estados é formado pelos quatérnions e pelas derivas dos eixos de referência.

Neste estudo preliminar do comportamento do modelo unificado de estados em determinação de órbita, o principal objetivo é a qualificação deste modelo, sem preocupação com o desempenho computacional em termos de tempo de processamento, memória ou otimização. Deste modo, devido a um bom desempenho do modelo nos primeiros testes, onde não se levou em conta a singularidade da matriz de covariância, optou-se pela utilização de um método não convencional, reduzindo a matriz de covariância e depois expandindo-a, garantindo assim, sua singularidade. Este método simples pode ser exposto a seguir: seja a matriz de covariância dos quatérnions definida por

$$P_q = ZP_R Z^T \quad (4.32)$$

onde  $P_R$  é uma matriz de covariância reduzida e não singular e  $Z$  é (Ferraresi, 1987; Varotto, 1986)

$$Z = \begin{bmatrix} e_4 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_4 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_4 \\ -e_1 & -e_2 & -e_3 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Uma das propriedades da matriz  $Z$  é que

$$ZZ^T = I_{3 \times 3}, \quad (4.34)$$

de forma que

$$P_R = Z^T P_q Z . \quad (4.35)$$

A aplicação dessas equações produz a expansão e redução da matriz de covariância para contornar o problema da singularidade. No Capítulo 5, serão mostrados vários experimentos com a aplicação dessa técnica.

#### 4.5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

A teoria apresentada neste capítulo mostra como será realizada a determinação sequencial de órbita, utilizando o modelo unificado de estados e o filtro estendido de Kalman. Aplicações serão realizadas no próximo Capítulo, onde serão apresentados testes que qualificam o modelo proposto.



## CAPÍTULO 5

## RESULTADOS DO ESTIMADOR SEQUENCIAL DE ÓRBITA

## 5.1 - INTRODUÇÃO

O modelo unificado de estados, junto com o filtro estendido de Kalman, na forma de Joseph, descritos nos Capítulos anteriores, foram utilizados na construção de um estimador sequencial de órbita, não adaptativo. Este Capítulo apresenta uma série de testes que foram realizados com este estimador, no intuito de qualificar o modelo unificado de estados na solução do problema de determinação de órbita.

## 5.2 - PRECISÃO DO PROCEDIMENTO DE ESTIMAÇÃO

Com o objetivo de se conhecer as precisões do modelo unificado, foi construída uma tabela onde são apresentadas as características dos erros cometidos e o comportamento dos resíduos. Para a obtenção dos dados da tabela, foi simulada uma órbita de referência, perturbada pelo coeficiente  $J_2$  do geopotencial terrestre e cujos elementos orbitais iniciais foram:

$$a = 7139000 \text{ m}$$

$$e = 0.004$$

$$i = 25^\circ$$

$$\omega = 10^\circ$$

$$\Omega = 5^\circ$$

$$M = 0^\circ$$



onde  $a$  é o semi-eixo maior,  $e$  é a excentricidade,  $i$  a inclinação,  $\omega$  o argumento do perigeo,  $\Omega$  o nó ascendente e  $M$  é a anomalia verdadeira. A órbita de referência foi propagada por um dia, a partir do instante 0 horas, 30 minutos e 0 segundos do dia 12 de agosto de 1993. O algoritmo de propagação utiliza a sub-rotina GEM 10 para cálculo da aceleração do geopotencial, conforme descrita em Kuga et alli (1983).

A partir da órbita de referência foram simuladas medidas para as seguintes estações:

Fictícia 1	$\lambda = 0^\circ$	$\phi = -15^\circ$	$H = 0$ m
Fictícia 2	$\lambda = 120^\circ$	$\phi = 0^\circ$	$H = 0$ m
Fictícia 3	$\lambda = 240^\circ$	$\phi = 15^\circ$	$H = 0$ m
Kourou	$\lambda = 307.359598^\circ$	$\phi = 5.098794^\circ$	$H = 161.618$ m
Malind	$\lambda = 40.19425^\circ$	$\phi = -2.995639^\circ$	$H = -7.4$ m
Carnavon	$\lambda = 113.70641^\circ$	$\phi = -24.866212^\circ$	$H = 70$ m

onde  $\lambda$  é a longitude,  $\phi$  a latitude e  $H$  a altitude da estação.

Foram simuladas medidas de azimute, elevação e "range" para as estações acima. Estas medidas foram combinadas para formarem nove grupos distintos compostos de uma a três estações. As medidas foram geradas com intervalos de um minuto entre cada medida de mesmo tipo, e intervalo de dez segundos entre as medidas de azimute-elevação e a medida de "range". Estas medidas foram corrompidas por ruídos brancos gaussianos de média nula. As covariâncias dos ruídos brancos foram divididas em dois grupos: um com desvios padrões de  $0.0001^\circ$  para a elevação e o azimute e de 1 m para o "range", compondo os três primeiros grupos com precisões irrealísticas; outro com desvios padrões de  $0.01^\circ$  para a elevação e o azimute e de 100 m para o "range", compondo os seis últimos grupos de precisões compatíveis com a

realidade. As covariâncias com maior precisão foram utilizadas somente na simulação das medidas das estações fictícias.

Os valores do estado do modelo unificado para o início da estimação foram

$$C = 7470.390816922585$$

$$R_{f1} = -8.137286156430202$$

$$R_{f2} = 32.45673076974861$$

$$e_{o1} = 0.2162176931146807$$

$$e_{o2} = 0.009310261927278677$$

$$e_{o3} = 0.1274057022464940$$

$$e_{o4} = 0.9679519694913012$$

cujos valores iniciais correspondem a erros de desvio padrão, em coordenadas inerciais, de mil metros na posição e de 1 m/s na velocidade, em relação à órbita de referência. Para a matriz de covariância, os valores dos desvios padrões iniciais dos parâmetros do modelo unificado são: 2 para o parâmetro  $C$ ; 4 para o parâmetro  $R$ ;  $4 \times 10^{-5}$  para os quatérnions. Foram testados vários valores para a matriz  $\Gamma$  (a explicação sobre esta matriz está no Capítulo 4) e apresentados somente os melhores resultados. A órbita modelada pelo estimador considerou somente o movimento kepleriano.

Os erros de posição e velocidade foram obtidos a partir da comparação da órbita de referência com a órbita estimada. A média destes erros, é definida por

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad ; \quad (5.1)$$

onde os  $x_i$  representam os erros medidos e  $n$  o número de medidas, estão apresentadas nas colunas POS. e VEL. da Tabela 5.1.

Os resíduos foram calculados antes do processamento dos dados na fase de atualização do filtro. Na Tabela 5.1 estão apresentados os erros quadráticos médios, definidos por

$$EQM = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad (5.2)$$

onde  $\varepsilon_i = x_i - \bar{x}$ .

Para o cálculo dos erros e dos EQM, foram desprezadas as duas primeiras passagens e eliminadas as três primeiras medidas de cada passagem, a fim de ilustrar as precisões obtidas após a convergência do filtro.

TABELA 5.1 - PRECISÕES DO ESTIMADOR USANDO O MODELO UNIFICADO DE ESTADOS

ESTAÇÕES	Qtde OBS.	Qtde PAS.	POS. (m)	VEL. (m/s)	AZI. (°)	ELE. (°)	DIS. (m)
MFIC3	70	7	5.9195	0.1177	2.58E-4	1.81E-4	4.56
MFIC13	173	16	5.0784	0.0635	1.93E-4	1.45E-4	3.46
MFIC123	243	25	4.7169	0.0236	1.81E-4	1.39E-4	3.08
RFIC1	83	8	199.69	0.4795	1.37E-2	1.07E-2	160.2
RFIC13	173	16	206.98	0.2428	1.28E-2	1.04E-2	147.5
RFIC123	243	25	203.68	0.2755	1.34E-2	1.10E-2	142.8
KO	92	11	193.02	0.2864	1.14E-2	1.17E-2	150.2
KOCA	163	18	173.20	0.2525	1.19E-2	1.04E-2	154.3
KOCAMA	237	25	167.34	0.1573	1.06E-2	1.09E-2	152.1

Na coluna ESTAÇÕES estão listados os grupos, descritos anteriormente, cujas siglas representam:

MFIC3 - estação fictícia 3 com a precisão maior;

MFIC13 - estações fictícias 1 e 3 com a precisão maior;

MFIC123 - estações fictícias 1, 2 e 3 com a precisão maior;

RFIC1 - estação fictícia 1 com a precisão realística;

RFIC13 - estações fictícias 1 e 3 com a precisão realística;

RFIC123 - estações fictícias 1, 2 e 3 com a precisão realística;

KO - estação Kourou;

KOCA - estações Kourou e Carnavon;

KOCAMA - estações Kourou, Carnavon e Malind.

Na coluna Qtde OBS. está a quantidade de dados observados e que foram utilizados para o cálculo das médias e dos erros quadráticos médios.

Na coluna Qtde PAS. está listado o total de passagens para cada conjunto de estações.

Nas colunas POS. e VEL. estão as médias dos erros cometidos pelo estimador em posição e velocidade, respectivamente. As unidades são metros para a posição e metros por segundo para a velocidade.

As colunas AZI., ELE. e DIS. apresentam os erros quadráticos médios para os resíduos de azimute, elevação e "range", respectivamente. As unidades são graus, para o azimute e elevação, e metros para o "range". É utilizada a notação computacional, onde E representa 10 elevado ao número da direita.

O comportamento do modelo para as medidas com precisão maior apresenta bons resultados, demonstrando que à medida que o número de estações vão aumentando, diminuem os erros reais e os resíduos. Porém o erro quadrático médio do "range" fica um pouco acima da faixa de três desvios padrões, que neste caso é de 3 m, demonstrando que alguns dos pontos ficaram fora desta faixa. Feita a contagem dos pontos que estavam dentro da faixa de três desvios padrões, o resultado foi de 51% dos pontos para uma estação, 65% para duas estações e de 71% para três estações. A convergência do estimador com o modelo é boa, pois o desvio padrão inicial da posição era de um quilometro e diminuiu para próximo de 5 metros, ou seja, duzentas vezes menor. O

mesmo acontece com a velocidade, cujo desvio padrão inicial era de um metro por segundo e sua média fica próximo de 0.06 metros por segundos.

Para o caso de precisões realísticas, os resultados ficaram melhores para o caso das estações reais, salientando porém que o ajuste correto da matriz  $\Gamma$  pode modificar esta situação. Os erros quadráticos médios dos resíduos estão todos menores do que três desvios padrões, que neste caso são de  $0.03^\circ$  para os ângulos e de 300 m para o "range". A média da posição está convergindo para 200 m no caso das estações fictícias e para 180 m para as estações verdadeiras. Tais testes atestam as precisões que são possíveis de serem obtidas neste procedimento.

### 5.3 - SINGULARIDADE DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA DOS QUATÉRNIONS

Conforme foi mencionado no Capítulo 4, a matriz de covariância para os quatérnions é singular, devido a condição de norma unitária para os suas componentes. Para este primeiro estudo do modelo unificado, optou-se por forçar a singularidade da matriz de covariância através de uma transformação que reduz a matriz de covariância e depois a expande. Nesta seção serão apresentados os resultados das experiências feitas com este método.

Foram utilizados os mesmos parâmetros da seção anterior para a órbita simulada, e escolhidas as medidas simuladas da estação fictícia 3 com a precisão realística, ou seja,  $0.01^\circ$  de desvio padrão para os ângulos e 100 m de desvio padrão para o "range".

Foram realizados três tipos de experimentos com a singularização forçada no estimador: fazendo a singularização forçada antes da atualização dos dados; depois

da atualização dos dados; não utilização de nenhum método para a singularização.

A Figura 5.1 apresenta o comportamento do vínculo de norma unitária para os três experimentos. Como pode ser notado, para os três métodos é garantida a norma unitária até a quarta casa decimal, porém fazendo a singularização forçada antes da atualização, esta precisão tende a ser uniforme. Os outros dois métodos possuem comportamentos similares apesar do método sem forçar a singularização oscilar com amplitudes bem maiores.

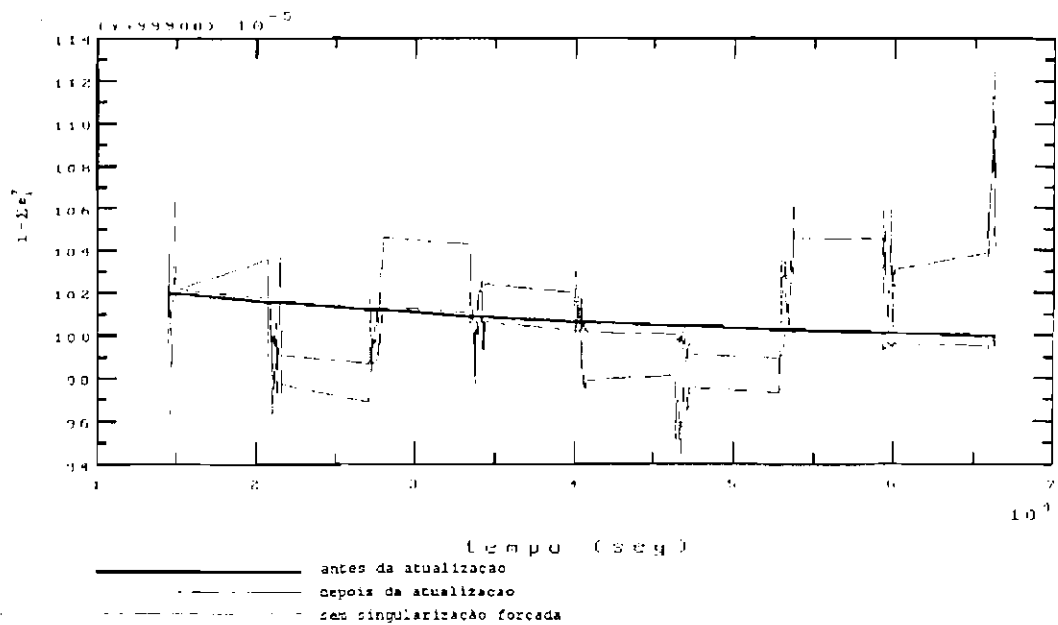


Fig. 5.1 - Vínculo dos quatérnions.

No estudo do comportamento da singularidade da matriz de covariância utilizou-se a seguinte propriedade (Ferraresi, 1987)

$$N = q^T P q = 0$$

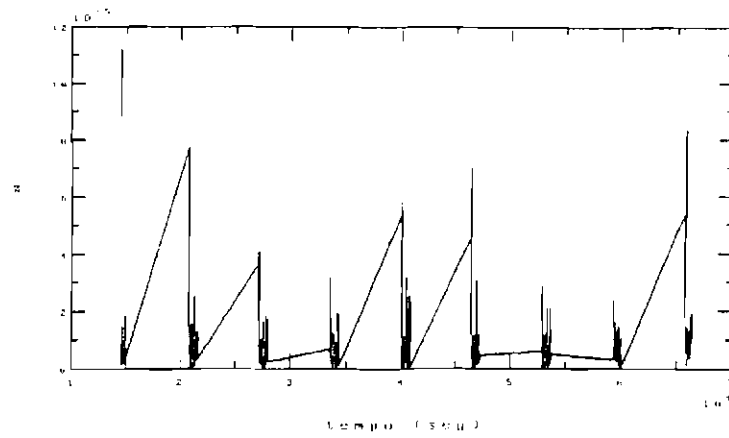
se e somente se  $q$  for um vetor nulo de  $P$ , ou seja  $P$  é sin-

gular. Além disso, fez-se a normalização da matriz  $P$ , já que as covariâncias dos quatérnions são números pequenos que comprometem a correta interpretação dos resultados.

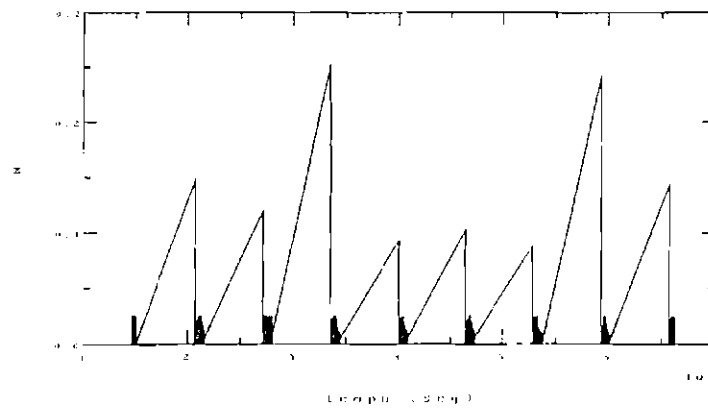
A Figura 5.2 apresenta os valores de  $N$  para os três casos. Nota-se que quando não se utilizou o método para forçar a singularização (Fig. 5.2c),  $N$  é quase a unidade significando que a matriz de covariância dos quatérnions não é singular. O método onde se forçou a singularização antes da atualização dos dados (Fig. 5.2a) apresenta um resultado bem melhor em comparação com o método onde se forçou a singularização depois da atualização (Fig. 5.2b), e em ambos os casos os valores de  $N$  são pequenos significando que a matriz de covariância tende a ser singular, principalmente nos momentos em que existem medidas para serem atualizadas.

Nas Figuras 5.3 e 5.4 são apresentados os erros de posição e velocidade, respectivamente, cometidos em uma passagem. Nota-se nos dois casos que os menores erros, na maioria das vezes, foram cometidos quando se forçou a singularização antes da atualização dos dados, e os maiores erros aconteceram, na maioria das vezes, quando não se forçou a singularização da matriz de covariância. Apesar de se ter conseguido uma melhora dos resultados quando se forçou a singularização, as diferenças entre os erros não são muito relevantes (em média, menores que 50 m para a posição e menores que 0.1 m/s para a velocidade). Porém, há de se ressaltar que foi utilizado um método não convencional para se estudar a influência da perda de singularidade da matriz de covariância dos quatérnions e, portanto, existe ainda a necessidade de se aprofundar o estudo deste assunto em trabalhos futuros.

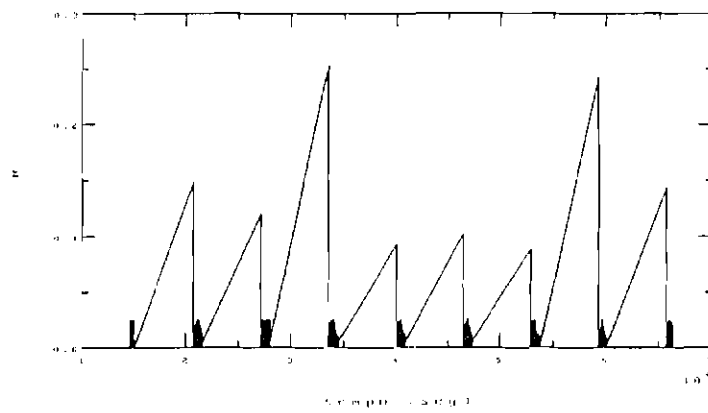




a) antes da atualização



b) depois da atualização



c) sem singularização forçada

Fig. 5.2 - Efeito da singularização da matriz de covariância.

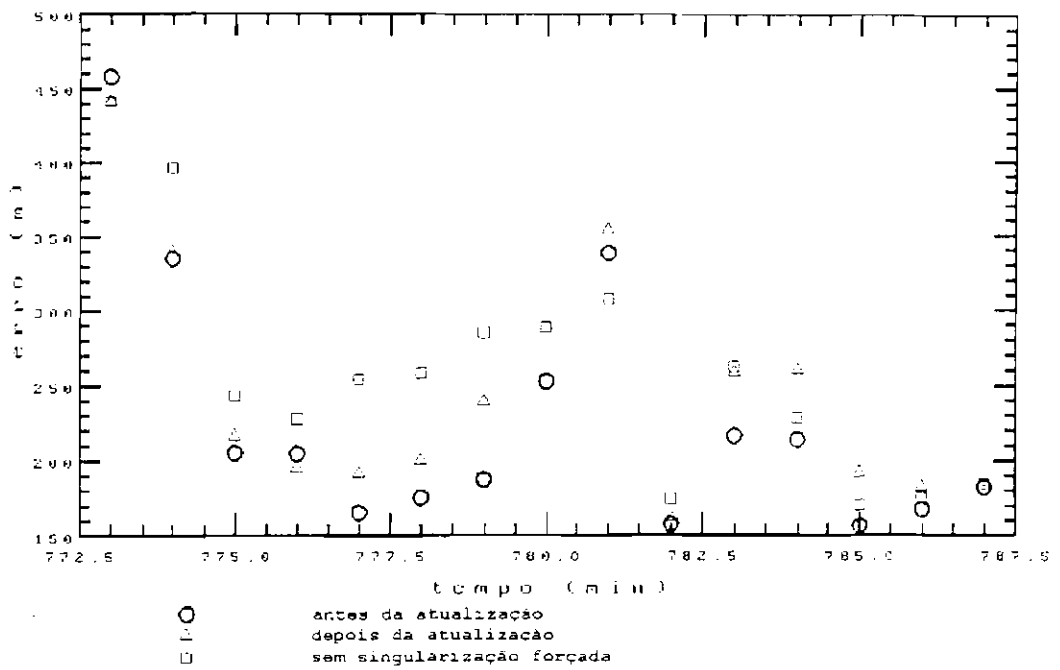


Fig. 5.3 - Erros em posição.

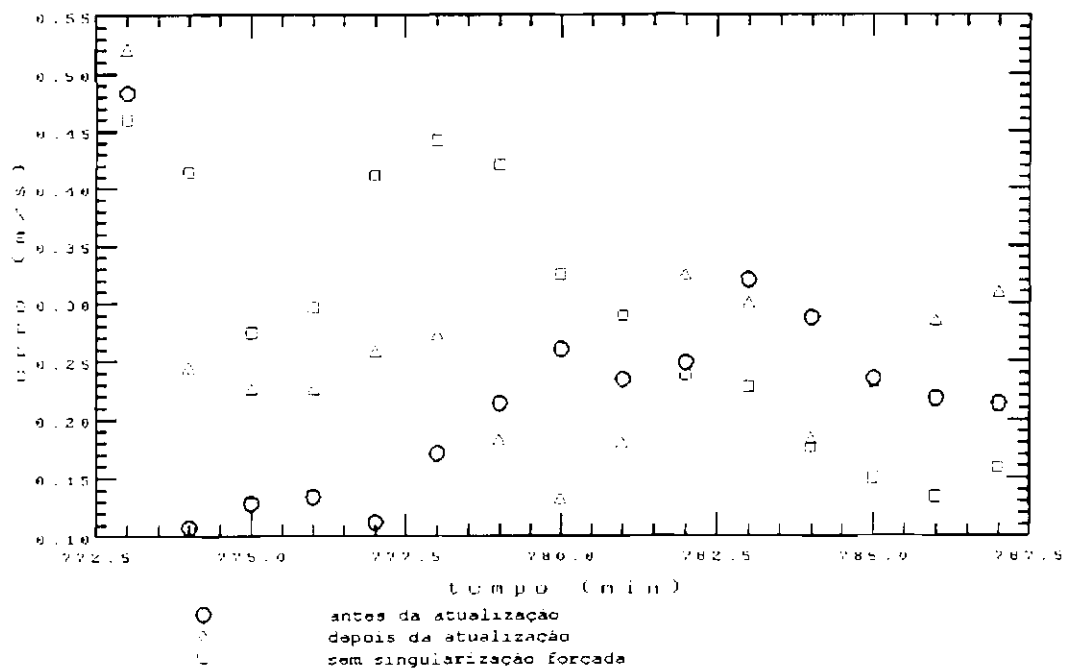


Fig. 5.4 - Erros em velocidade.

O estimador utilizado na preparação da Tabela 5.1 da seção anterior utilizou o método de singularização forçada antes da atualização dos dados, já que este método apresentou os melhores resultados.

#### 5.4 - COMPORTAMENTO DOS PARÂMETROS DO MODELO UNIFICADO

Utilizando os mesmos parâmetros de órbita apresentados na seção anterior, foram calculados os erros cometidos pelos parâmetros do modelo unificado e comparados com seus respectivos desvios padrões. Os erros cometidos pelo estimador nos parâmetros do modelo foram calculados transformando a órbita de referência, que está em coordenadas inerciais, para as coordenadas do modelo, e daí comparando-os conforme as seguintes definições:

$$Err_C = C_o - C , \quad (5.3)$$

$$Err_R = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (R_{oi} - R_i)^2} , \quad (5.4)$$

$$Err_e = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (e_{oi} - e_i)^2} , \quad (5.5)$$

onde os sub-índices  $o$  representam os parâmetros da órbita de referência transformados para o modelo unificado,  $Err_C$  o erro cometido no parâmetro  $C$ ,  $Err_R$  o erro cometido no parâmetro  $R$  e  $Err_e$  o erro cometido para os quatérnions.

Os resultados estão apresentados na Figura 5.5, onde foram desprezados os 25 primeiros valores da primeira passagem, só apresentando os valores depois da convergência. Nota-se que os erros cometidos no parâmetro  $C$  e nos parâmetros de Euler, estão abaixo de um desvio padrão.

Para o parâmetro  $R$  os erros estão da ordem de um desvio padrão. Estes resultados demonstram que o filtro está sendo eficaz, fazendo com que os valores iniciais, não corretos, convirjam para os valores corretos da órbita à medida que as observações desta órbita vão sendo processados.

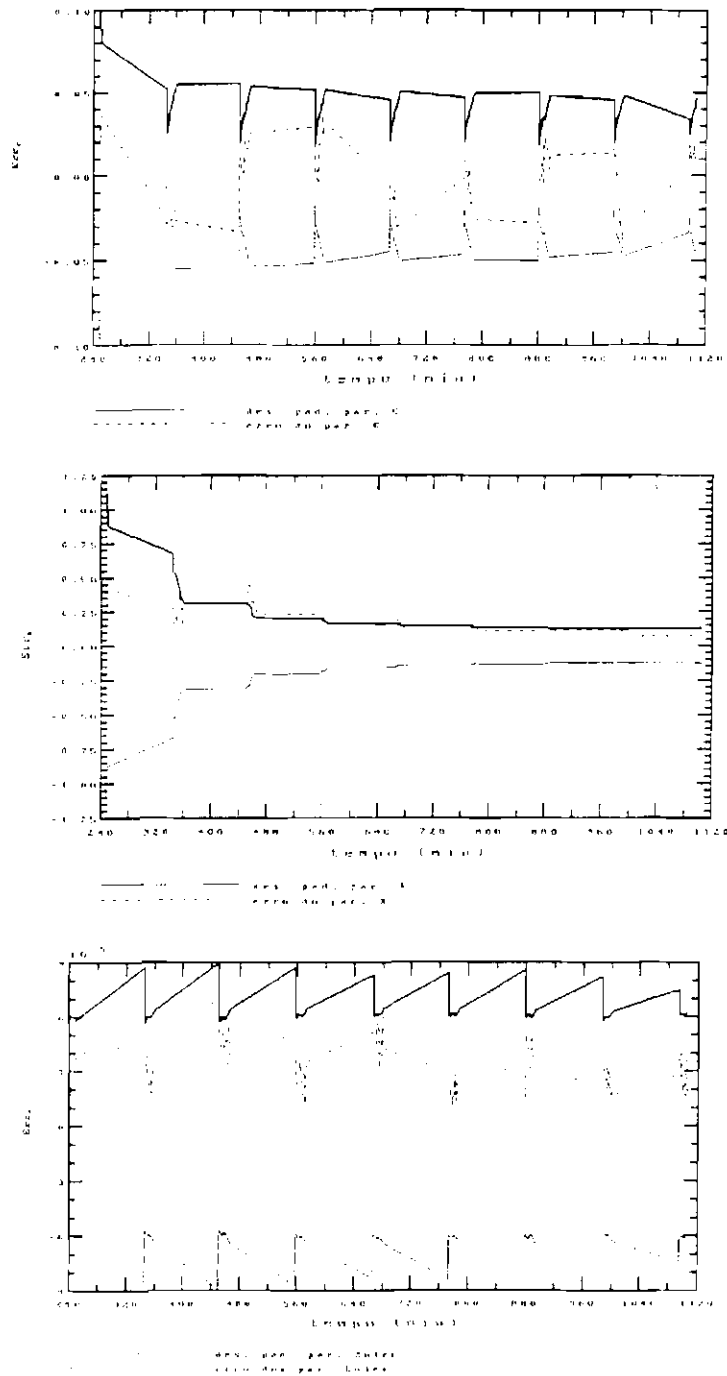


Fig. 5.5 - Erros dos parâmetros do modelo unificado.

## 5.5 - AVALIAÇÃO DO MODELO UNIFICADO DE ESTADOS COM MEDIDAS REAIS DE DISTÂNCIA

Esta seção ilustra a aplicação do modelo unificado de estados na determinação de órbita do satélite SCD1 da MECB. O objetivo do teste é verificar preliminarmente as precisões que podem ser atingidas em comparação com o sistema de determinação de órbita do Centro de Controle da MECB. A comparação não é totalmente válida, pois o Centro de Controle trabalha com modelos precisos das medidas que levam em conta o atraso de propagação do sinal da medida de distância, a correção troposférica, o efeito Doppler, e os atrasos no equipamento da estação e no "transponder" do satélite. O modelo de medidas adotado nesta dissertação é puramente geométrico, conforme mostra o Capítulo 4, e seguramente não tem a precisão necessária, mas é suficiente para permitir uma comparação grosseira de resultados. Além disso, o Centro de Controle aplica o método de mínimos quadrados, dificultando a comparação.

Nesta aplicação a estimação sequencial de órbita foi realizada utilizando medidas de distância do SCD-1 cedidas pelo Centro de Controle de Satélites da MECB. Estas medidas foram obtidas pela estação de Cuiabá, Mato Grosso, cujo desvio padrão adotado foi de 100 m. A estação de Cuiabá localiza-se a  $303.93024^\circ$  de longitude e  $-15.555008^\circ$  de latitude, a uma altitude de 235.682 m. As medidas coletadas são de sete passagens consecutivas. Em cada passagem existem alguns conjuntos de medidas, formados por grupos de três medidas (tripla) separadas por intervalos de 8.5 segundos. Estas medidas foram previamente pré-processadas, comprimidas e suavizadas, de maneira a retirar componentes grosseiras de ruído. A Figura 5.6 mostra esquematicamente a coleção de medidas.

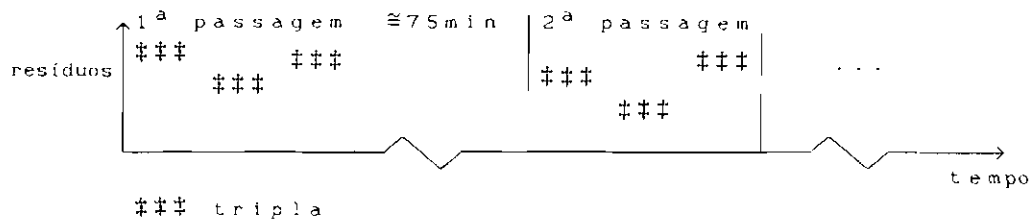


Fig. 5.6 - Esquema de coleta de medidas de distância do Centro de Controle

Os valores iniciais da órbita (chute inicial), em coordenadas inerciais foram:

$$x = -3958885 \text{ m} ;$$

$$y = 5402700 \text{ m} ;$$

$$z = 2490068 \text{ m} ;$$

$$\dot{x} = -6200.0151 \text{ m/s} ;$$

$$\dot{y} = -3753.0549 \text{ m/s} ;$$

$$\dot{z} = -1789.1827 \text{ m/s} ;$$

que foram transformados para as coordenadas do modelo unificado de estados. O tempo inicial foi 12 horas, 30 minutos e zero segundos do dia 02 de novembro de 1993.

O modelo de órbita inclui somente a perturbação do coeficiente  $J_2$ , de forma que um ajuste preciso não é esperado. A Figura 5.7 mostra os resíduos de todas as medidas, para as 07 passagens sobre Cuiabá. Uma análise visual deste resultado não é muito boa, apesar da média parecer estar em torno de zero, existem pontos com 15 Km de erro, e mesmo um ponto perto dos -90 Km. A análise estatística confirma a análise visual: dos 72 pontos considerados, apenas 54% estão dentro da faixa de três desvios padrões,

que é de 300m. A média destes pontos é de -1894.4038 m e o erro quadrático médio é de 10824.0763 m.

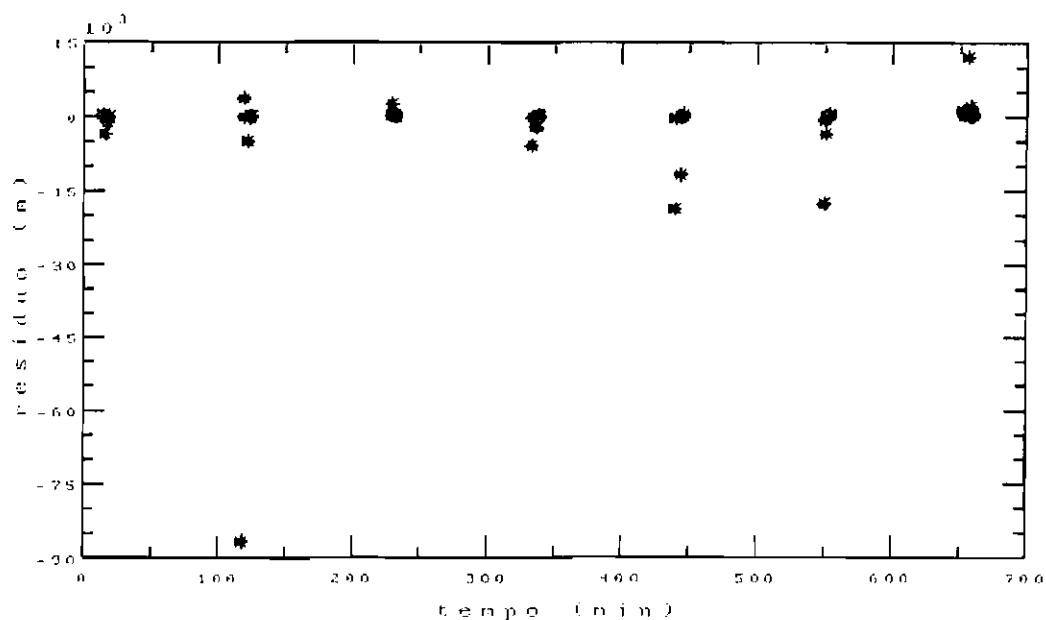


Fig. 5.7 - Resíduos de distância de todos os pontos.

Como foi dito anteriormente, as medidas foram coletadas em triplas. Como o filtro necessita de algumas medidas para convergir, foi feito um estudo com os resíduos retirando-se o primeiro resíduo de cada tripla. O resultado pode ser observado na Figura 5.8.

Os pontos agora estão dentro da faixa de um quilometro, com um ponto isolado perto dos 4 Km. A análise estatística também melhora muito: 75% dos 48 pontos restantes estão dentro da faixa de três desvios padrões, a média ficou em 1.3852 m e o erro quadrático médio é de 587.8404 m. Isto demonstra a capacidade de convergência do estimador, pois retirando somente os primeiros pontos de cada tripla, o erro quadrático médio foi reduzidos quase 20 vezes.

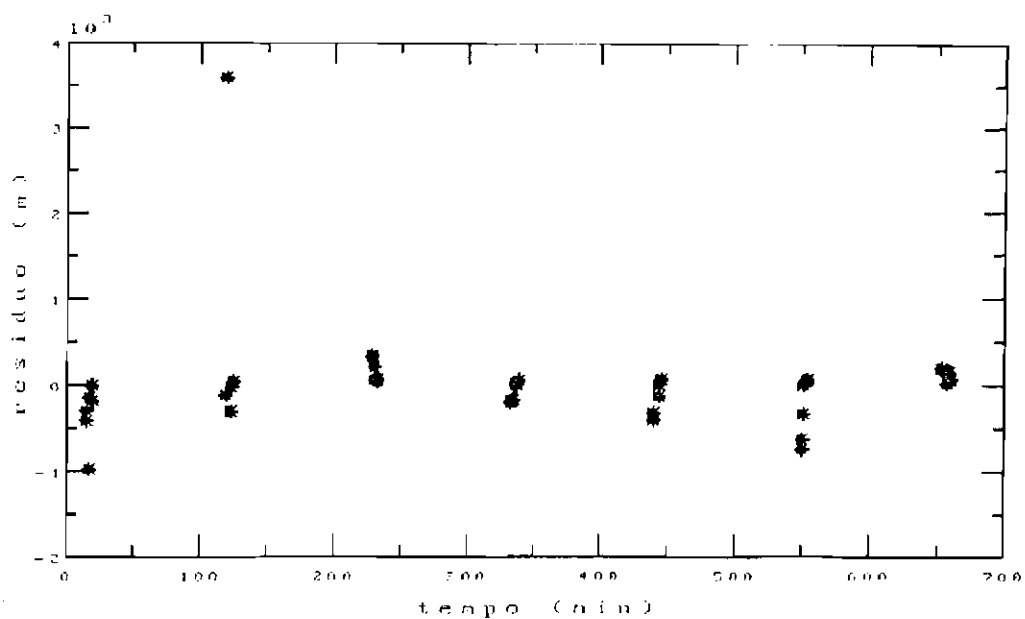


Fig. 5.8 - Resíduos de distância sem os primeiros pontos.

Continuando com a teoria de que o filtro necessita de algumas medidas para convergir, retirou-se os segundos pontos da tripla. O resultado está na Figura 5.9.

Agora os resíduos estão dentro da faixa de 400 m com um ponto perto dos -800 m. A análise estatística mostra que o erro quadrático médio se reduziu para 219.4727 m, a média está em -43.5857 m e 83% dos pontos estão dentro da faixa de três desvios padrões.



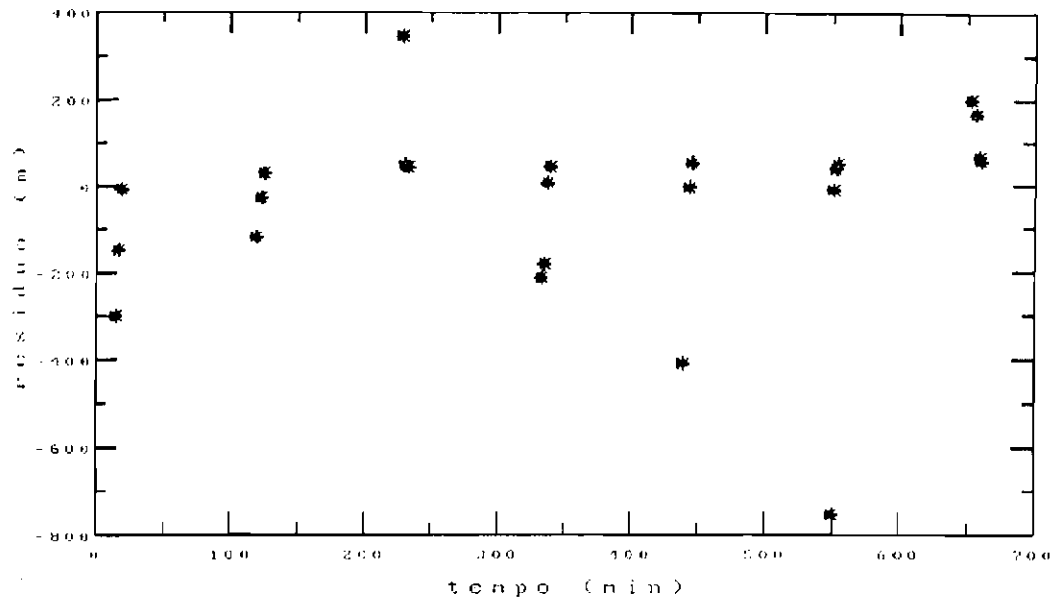


Fig. 5.9 - Resíduo de distância sem os dois primeiros pontos.

Como o intervalo de tempo entre passagens é de cerca de 75 minutos, é de se esperar um resíduo grosseiro nas primeiras medidas da passagem, devido ao erro de propagação da órbita. Para retirar este efeito da análise estatística, suprimiu-se a primeira medida de cada passagem, além de se retirar os dois primeiros pontos de cada tripla. A análise estatística é bem interessante, o erro quadrático médio é de 80.1165 m, enquanto que a média é de 12.5165 m. Retirando-se os dois primeiros resíduos de cada passagem, o erro quadrático médio cai para 23.3061 m e a média fica em 37.3878 m. Nestes dois experimentos todos os resíduos estavam dentro da faixa de três desvios padrões.

Comparando estes resultados com o estimador do Centro de Controle de Satélites da MECB, que é um estimador de mínimos quadrados, os resultados aqui obtidos podem parecer inferiores, já que para as mesmas medidas o estimador apresenta erro quadrático médio da ordem de centena de metros em três iterações. Para o mesmo conjunto de

medidas, o "software" do Centro de Controle produziu média de -20.01 m e erro quadrático médio de 121.97 m.

Estes resultados estão sumarizados na Tabela 5.2, onde a coluna TESTE apresenta as formas que o resíduo de distância foram classificadas:

- 1 - com todos os resíduos;
- 2 - sem os primeiros resíduos de cada tripla;
- 3 - sem os dois primeiros resíduos de cada tripla;
- 4 - sem os dois primeiros resíduos de cada tripla e sem o primeiro resíduo de cada passagem;
- 5 - sem os dois primeiros resíduos de cada tripla e sem o dois primeiros resíduos de cada passagem.

A coluna TESTE da Tabela 5.2 também apresenta resultados de três iterações do estimador de mínimos quadrados do Centro de Controle:

- CCS1 - mínimos quadrados com uma iteração;
- CCS2 - mínimos quadrados com duas iterações;
- CCS3 - mínimos quadrados com três iterações.

A coluna MÉDIA da Tabela 5.2, apresenta as médias dos resíduos. A coluna EQM apresenta o erro quadrático médio e  $3\sigma$  significa a porcentagem dos pontos dentro da faixa de três desvios padrões. Nota-se que a média e erro quadrático médio do teste 3 já são compatíveis com o resultado final do Centro de Controle (CCS3). Por outro lado, nota-se que a média é tendenciosa (diferente de ze-

ro), devido principalmente ao modelo simplificado da órbita usando somente o coeficiente zonal  $J_2$ . As discrepâncias adicionais devem ser creditadas aos diferentes modelos da medida de distância utilizados.

TABELA 5.2 - RESULTADOS COM MEDIDAS REAIS DO SCD-1

TESTE	MÉDIA (M)	EQM (M)	$3\sigma$ (%)
1	-1894.4	10824.1	54
2	1.4	587.8	75
3	-43.6	219.5	83
4	12.5	80.1	100
5	37.4	23.3	100
CCS1	-945.8	2619.5	12
CCS2	-23.8	122.2	100
CCS3	-20.0	121.9	100

Por fim, a análise destes resultados mostra que o processo pode ser implementado e utilizado em ambientes operacionais de Centros de Controles, desde que se estenda a modelagem de órbita, das medidas, e das transformações de coordenadas às precisões compatíveis com as necessárias ao Centro de Controle.

## 5.6 - CONCLUSÃO

O estimador de órbita usando o modelo unificado de estados apresentou resultados com precisões coerentes e teve um desempenho estatisticamente consistente, conforme os resultados apresentados nas Tabelas. As Figuras dos gráficos de erro em geral mostram um estimador conservador, com a covariância maior ou igual aos erros cometidos. Com um estudo mais aprofundado sobre a singularidade da matriz de covariância dos quatérnions, pode ocorrer uma eventual melhora da precisão dos resultados. Além disso,

com o estudo do comportamento dos parâmetros do modelo unificado foi possível determinar bons valores para a matriz  $\Gamma$ , que incorpora os ruídos na dinâmica, possibilitando o estudo de métodos adaptativos nos futuros trabalhos.

Em adição, os testes com dados realísticos do satélite SCD-1 demonstram o quanto é promissor a utilização do modelo unificado de estados na determinação de órbita.



## CAPÍTULO 6

## CONCLUSÃO

Para a compreensão da parte orbital do modelo foi necessário o desenvolvimento da teoria hodográfica, a qual dá um novo enfoque ao estudo dos problemas de mecânica celeste, além de apresentar várias propriedades de interesse, tais como a regularização do movimento orbital. Devido à formulação pela teoria hodográfica, a parte orbital do modelo unificado é função somente das acelerações perturbadoras, fazendo com que sua matriz de transição, usada na propagação da matriz de covariância, também o seja, facilitando a implementação computacional de métodos de determinação de órbita baseados no filtro de Kalman.

Os testes preliminares de estimação de órbita com o modelo unificado de estados, apresentados neste trabalho, demonstram que este modelo pode se qualificar para o uso em estações de rastreamento existentes ou a bordo de satélites artificiais, substituindo os modelos usualmente utilizados.

A utilização do modelo unificado em determinação de órbita, ainda apresenta outras possibilidades além da forma apresentada neste trabalho. Ele pode por exemplo, ser utilizado somente na integração da órbita e utilizar as coordenadas inerciais para o processamento de medidas orbitais, como proposto por Raol & Sinha (1984), evitando desta forma, a necessidade de se calcular as matrizes que transformam o conjunto de medidas para o sistema do modelo unificado.

Devido à escassa informação existente sobre o modelo unificado na literatura, foi necessário que se desenvolvessem neste trabalho muitas das equações necessá-

rias à utilização do estimador de órbita, além das próprias equações do modelo. Este fato também estimula a continuação das pesquisas sobre o assunto, pois, além do domínio do conhecimento que se obterá, se conseguirá também o aprimoramento do modelo, utilizando-o para problemas específicos, contribuindo assim para o enriquecimento deste assunto na literatura.

Como sugestão para a sequência natural deste trabalho, deve-se fazer o acoplamento da parte orbital com a parte de atitude do modelo, proporcionando procedimentos computacionais que poderão trazer muitas vantagens para o processamento a bordo de satélites artificiais, com consequente redução da carga computacional. Ressalta-se porém, a necessidade de um estudo sobre a singularidade da matriz de covariância dos quatérnions, que poderá trazer vantagens adicionais para o modelo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Altman, S.P.; Pistiner, J.S. Hodograph analysis of the orbital transfer problem for coplanar, non-aligned elliptical orbits. *ARS Journal*, 31(9):1217-1225, sept., 1961.
- Altman, S.P. Hodograph transformation and mapping of the orbital conics. *ARS Journal*, 32(7):1109-1111, july, 1962.
- \_\_\_\_\_ The hodographic theory of Newtonian mechanics. In: *Recent developments in space flight mechanics*. Tarzana, CA, AAS, 1966. V. 9. p. 45-102.
- \_\_\_\_\_ A unified state model of orbital trajectory and attitude dynamics. *Celestial Mechanics*, 6:425-446, 1972.
- Carafoli, E. *High-speed aerodynamics*. London, Pergamon Press, 1956.
- Courant, R.; Friedrichs, K.O. *Supersonic flow and shock waves*. London, Interscience, 1948.
- Fabri, S.M. *Propagação analítica de órbita de satélites artificiais*. (Tese de mestrado em Ciências Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, 1987. (INPE-4454-TDL/315).
- Ferraresi, V.A. *Utilização conjunta de sensores inerciais em determinação de atitude de satélites via filtro de Kalman*. (Tese de mestrado em Ciências Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, 1987. (INPE-4313-TDL/280).
- Gelb, A. *Applied optimal estimation*. Cambridge, MA, MIT Press. 1974.



Goldstein, H. *Classical mechanics*. New York, NY, Addison-Wesley, 1980.

\_\_\_\_\_ More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector. *American Journal of Physics*, 44(11):1123-1124, 1976.

Gomes, S.C.P. *Investigação sobre os efeitos da transformação de tempo, estabilização e regularização em propagação numérica de órbita*. (Tese de mestrado em Ciências Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, 1987 (INPE-4555-TDL/330).

Heintz, W.H. Determination of the Runge-Lenz vector. *American Journal of Physics*, 42(11):1078-1082, 1974.

Kondapalli, R.R.;Kuga, H.K. *Manual de uso de um conjunto de integradores numéricos para problemas de condições iniciais*. São José dos Campos, INPE, 1986. (INPE-3830-RPI/154).

Kuga, H.K. *Análise numérica preliminar dos métodos de estimação sequencial*. São José dos Campos, INPE, 1982. (INPE-2517-RPI/072).

\_\_\_\_\_ *Matriz de transição do movimento kepleriano elíptico*. São José dos Campos, INPE, 1986. (INPE-3739-NTE/250).

\_\_\_\_\_ *Determinação de órbita de satélites artificiais terrestres através de técnicas de estimação combinadas a técnicas de suavização de estados*. (Tese de doutorado em Ciências Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, 1989. (INPE-4959-TDL/388).

Kuga, H.K.; Medeiros, V.M.; Carrara, V. *Cálculo recursivo da aceleração do geopotencial*. São José dos Campos, INPE, 1983. (INPE-2735-RPE/433).

Landau, L.D.; Lifshitz, E.M. *Mechanics*. Reading, MA, Addison-Wesley, 1960.

Maybeck, P.S. *Stochastic models, estimation and control*. New York, NY, Academic Press, 1980. V. 2.

Raol, J.R.; Sinha, N.K. Orbit determination via UD-filters. In: *Proceedings of 23rd IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, NV, dec. 1984.

\_\_\_\_\_ On the orbit determination problem. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 21(3):274-290, may 1985.

Szebehely, V. *Theory of orbits*. London, Academic Press, 1967.

Varotto, S.E.C. *Determinação da atitude de satélites artificiais através da aplicação conjunta de técnicas de estimação ótima estática e dinâmica*. (Tese de mestrado em Ciências Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. São José dos Campos, 1986. (INPE-4415-TDL/306).

Wertz, J.R. *Spacecraft attitude determination and control*. London, Ridel, 1978.



## APÊNDICE A

## DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES DINÂMICAS DO MODELO UNIFICADO DE ESTADOS

Este Apêndice apresenta o desenvolvimento das equações dinâmicas do modelo unificado de estados. O "." representa a derivada temporal  $d/dt$ , e os sub-índices 1, 2 e 3 representam as direções radial, transversal e normal, do plano da órbita.

No plano da órbita, o vetor posição  $r$ , o vetor velocidade  $v$  e o vetor aceleração  $a$ , podem ser representados por:

$$r = r e_1 ; \quad (A.1)$$

$$v = \dot{r} = \dot{r} e_1 + r \dot{f} e_2 = v_{e1} e_1 + v_{e2} e_2 ; \quad (A.2)$$

$$a = \dot{v} = a_{e1} e_1 + a_{e2} e_2 + a_{e3} e_3 . \quad (A.3)$$

onde  $f$  é a anomalia verdadeira. As derivadas das componentes do vetor velocidade são:

$$\dot{v}_{e1} = \ddot{r} ; \quad (A.4)$$

$$\dot{v}_{e2} = \frac{v_{e1} v_{e2}}{r} + r \ddot{f} . \quad (A.5)$$

As componentes radial e transversal da aceleração, são:

$$a_{e1} = \ddot{r} - r \dot{f}^2 ; \quad (A.6)$$

$$a_{e2} = 2 \dot{r} \dot{f} + r \ddot{f} , \quad (A.7)$$

que, podem ser escritas em função das componentes da velocidades e de suas derivadas:

$$a_{e1} = \dot{V}_{e1} - \frac{V_{e2}^2}{r} ; \quad (\text{A.8})$$

$$a_{e2} = \dot{V}_{e2} + \frac{V_{e1}V_{e2}}{r} . \quad (\text{A.9})$$

O vetor momento angular orbital pode ser definido por:

$$L = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = Le_3 , \quad (\text{A.10})$$

onde

$$L = mrv_{e2} , \quad (\text{A.11})$$

e cuja derivada temporal é:

$$\dot{L} = mra_{e2} . \quad (\text{A.12})$$

O parâmetro  $C$  do modelo unificado é representado por:

$$C = \frac{\mu m}{L} = \frac{\mu}{rV_{e2}} . \quad (\text{A.13})$$

Logo, sua derivada temporal é:

$$\dot{C} = \frac{\mu m}{L^2} \dot{L} = -pa_{e2} , \quad (\text{A.14})$$

com

$$p = C/V_{e2} . \quad (\text{A.15})$$

Em termos dos parâmetros de velocidade, as velocidades radial e transversal são (equações 2.28 e 2.29)

$$v_{e1} = R \operatorname{sen} f ; \quad (\text{A.16})$$

$$v_{e2} = R \operatorname{cos} f + C . \quad (\text{A.17})$$

O vetor  $R$  pode ser representado no plano orbital instantâneo:

$$R = R_{f1}f_1 + R_{f2}f_2 , \quad (\text{A.18})$$

onde as direções  $f_1$  e  $f_2$  estão descritas na figura 2.12. Logo, suas componentes são:

$$R_{f1} = -R \operatorname{sen} \chi ; \quad (\text{A.19})$$

$$R_{f2} = R \operatorname{cos} \chi . \quad (\text{A.20})$$

O ângulo  $\chi$  vai do eixo  $X'$  à linha do perigeu (Fig 2.12), e ele pode ser representado pelo ângulo  $\gamma$ , que vai do eixo  $X'$  até a posição do satélite:

$$\gamma = f + \chi . \quad (\text{A.21})$$

As velocidades em função deste ângulo ficam:

$$v_{e1} = R_{f1} \operatorname{cos} \gamma + R_{f2} \operatorname{sen} \gamma ; \quad (\text{A.22})$$

$$v_{e2} = -R_{f1} \operatorname{sen} \gamma + R_{f2} \operatorname{cos} \gamma + C . \quad (\text{A.23})$$

Colocando os parâmetros  $R_{f1}$  e  $R_{f2}$  em função das velocidades, tem-se:

$$R_{f1} = v_{e1} \operatorname{cos} \gamma - v_{e2} \operatorname{sen} \gamma + C \operatorname{sen} \gamma ; \quad (\text{A.24})$$

$$R_{f2} = v_{e1} \operatorname{sen} \gamma + v_{e2} \operatorname{cos} \gamma - C \operatorname{cos} \gamma . \quad (\text{A.25})$$

Derivando, tem-se:

$$\dot{R}_{f1} = a_{e1} \cos\gamma - (1+p) a_{e2} \operatorname{sen}\gamma + C \dot{\gamma} \cos\gamma ; \quad (\text{A.26})$$

$$\dot{R}_{f2} = a_{e1} \operatorname{sen}\gamma + (1+p) a_{e2} \cos\gamma + C \dot{\gamma} \operatorname{sen}\gamma . \quad (\text{A.27})$$

Considerando que as variações em  $\chi$  são muito menores que as variações em  $f$ , ou seja,  $\dot{\chi} \ll \dot{f}$ , então

$$\dot{\gamma} = \dot{f} = \frac{v_{e2}}{r} , \quad (\text{A.28})$$

e

$$C \dot{\gamma} = \frac{\mu}{r} = -a_g , \quad (\text{A.29})$$

onde  $a_g$  é a aceleração devido à gravidade. Fazendo

$$a_{e1}' = a_{e1} - a_g , \quad (\text{A.30})$$

tem-se

$$\dot{R}_{f1} = a_{e1}' \cos\gamma - (1+p) a_{e2} \operatorname{sen}\gamma ; \quad (\text{A.31})$$

$$\dot{R}_{f2} = a_{e1}' \operatorname{sen}\gamma + (1+p) a_{e2} \cos\gamma . \quad (\text{A.32})$$

Quando  $a_{e1}' = 0$ ,  $a_{e1} = a_g$ , ou seja, a única aceleração radial é a aceleração devido a força gravitacional.

Para o cálculo das velocidades angulares, deriva-se o vetor momento angular:

$$\dot{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = mr(a_{e2}\mathbf{e}_3 - a_{e3}\mathbf{e}_2) \quad (\text{A.33})$$

ou

$$\dot{L} = \dot{L}e_3 + L\dot{e}_3 \quad , \quad (A.34)$$

logo:

$$v_{e2}\dot{e}_3 = -a_{e3}e_2 \quad . \quad (A.35)$$

Os versores  $e_2$  e  $e_3$  podem ser representados no sistema inercial através dos ângulos de Euler,  $\Omega$ ,  $\iota$  e  $\nu = \omega + f$  (Goldstein, 1980):

$$\begin{aligned} e_2 = & - (\text{sen}\nu \cos\Omega + \cos\iota \text{sen}\Omega \cos\nu) i - \\ & - (\text{sen}\nu \text{sen}\Omega - \cos\iota \cos\Omega \cos\nu) j + \\ & + \cos\nu \text{sen}\iota k \quad ; \end{aligned} \quad (A.36)$$

$$e_3 = \text{sen}\iota \text{sen}\Omega i - \text{sen}\iota \cos\Omega j + \cos\iota k \quad , \quad (A.37)$$

cuja derivada é:

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 = & (\dot{\iota} \cos\iota \text{sen}\Omega + \dot{\Omega} \text{sen}\iota \cos\Omega) i - \\ & - (\dot{\iota} \cos\iota \cos\Omega - \dot{\Omega} \text{sen}\iota \text{sen}\Omega) j - \dot{\iota} \text{sen}\iota k \quad . \end{aligned} \quad (A.38)$$

Igualando as componentes da direção  $k$  tem-se

$$v_{e2} \dot{\iota} \text{sen}\iota = a_{e3} \cos\nu \text{sen}\iota \quad , \quad (A.39)$$

$$\dot{\iota} = \frac{a_{e3}}{v_{e2}} \cos\nu \quad . \quad (A.40)$$

Agora igualando as componentes da direção  $i$  e substituindo o valor de  $\dot{\iota}$  encontrado agora, tem-se:

$$\dot{\Omega} = \frac{a_{e3} \text{sen}\nu}{v_{e2} \text{sen}\iota} \quad . \quad (A.41)$$



Para encontrar a relação com o ângulo  $\nu$ , toma-se a derivada do vetor posição:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_1 + r\dot{\mathbf{e}}_1, \quad (\text{A.42})$$

logo

$$r\dot{\mathbf{e}}_1 = v_{e2}\mathbf{e}_2, \quad (\text{A.43})$$

a componente de  $\mathbf{e}_1$  em relação aos ângulos de Euler é (Goldstein, 1980):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 = & (\cos\nu \operatorname{sen}\Omega - \cos\iota \operatorname{sen}\Omega \operatorname{sen}\nu) \mathbf{i} + \\ & + (\cos\nu \operatorname{sen}\Omega + \cos\iota \cos\Omega \operatorname{sen}\nu) \mathbf{j} + \\ & + \operatorname{sen}\nu \operatorname{sen}\iota \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

portanto,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 = & - (\dot{\nu} \operatorname{sen}\nu \operatorname{sen}\Omega - \dot{\Omega} \cos\nu \cos\Omega - \\ & - \dot{\iota} \operatorname{sen}\iota \operatorname{sen}\Omega \operatorname{sen}\nu + \dot{\Omega} \cos\iota \cos\Omega \operatorname{sen}\nu + \\ & + \dot{\nu} \cos\iota \operatorname{sen}\Omega \cos\nu) \mathbf{i} - (\dot{\nu} \operatorname{sen}\nu \operatorname{sen}\Omega - \\ & - \dot{\Omega} \cos\nu \cos\Omega + \dot{\iota} \operatorname{sen}\iota \cos\Omega \operatorname{sen}\nu + \\ & + \dot{\Omega} \cos\iota \operatorname{sen}\Omega \operatorname{sen}\nu - \dot{\nu} \cos\iota \cos\Omega \cos\nu) \mathbf{j} + \\ & + (\dot{\nu} \cos\nu \operatorname{sen}\iota + \dot{\iota} \operatorname{sen}\nu \cos\iota) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Igualando as componentes  $\mathbf{k}$  e substituindo o valor de  $\dot{\iota}$ , tem-se

$$\dot{\nu} = \frac{v_{e2}}{r} - \frac{a_{e3} \operatorname{sen} \nu \cos \iota}{v_{e2} \operatorname{sen} \iota} . \quad (\text{A.46})$$

Os valores de  $\omega$  que vão na matriz dinâmica dos quatérnions (Wertz, 1978) são:

$$\omega_1 = \dot{\Omega} \operatorname{sen} \iota \operatorname{sen} \nu + \dot{\iota} \cos \nu ; \quad (\text{A.47})$$

$$\omega_2 = \dot{\Omega} \operatorname{sen} \iota \cos \nu - \dot{\iota} \operatorname{sen} \nu ; \quad (\text{A.48})$$

$$\omega_3 = \dot{\Omega} \cos \iota + \dot{\nu} . \quad (\text{A.49})$$

Substituindo os valores encontrados, tem-se

$$\omega_1 = \frac{a_{e3}}{v_{e2}} ; \quad (\text{A.50})$$

$$\omega_2 = 0 ; \quad (\text{A.51})$$

$$\omega_3 = \frac{C v_{e2}^2}{\mu} . \quad (\text{A.52})$$



## APÊNDICE B

## MATRIZ F

A matriz de transição  $\Phi$ , é calculada a partir da equação diferencial

$$\dot{\Phi} = F\Phi, \quad (\text{B.1})$$

onde  $F$  é dado por:

$$F = \frac{\partial f(u)}{\partial u}, \quad (\text{B.2})$$

sendo  $u$  o vetor de estados do modelo unificado de estados e  $f(u)$  é a sua dinâmica, determinada pelas equações 2.41 e 2.42.

A matriz  $F$  está apresentada abaixo componente a componente:

$$F_{11} = - \frac{a_{e2}}{V_{e2}} (1-p) \quad (\text{B.3})$$

$$F_{21} = - \frac{a_{e2}}{V_{e2}} (1-p) \text{sen}\gamma \quad (\text{B.4})$$

$$F_{31} = \frac{a_{e2}}{V_{e2}} (1-p) \text{cos}\gamma \quad (\text{B.5})$$

$$F_{41} = \frac{1}{2} \left[ \frac{V_{e2} e_{o2}}{\mu} (V_{e2} + 2C) - \frac{\omega_1 e_{o4}}{V_{e2}} \right] \quad (\text{B.6})$$

$$F_{51} = - \frac{1}{2} \left[ \frac{V_{e2} e_{o1}}{\mu} (V_{e2} + 2C) + \frac{\omega_1 e_{o3}}{V_{e2}} \right] \quad (\text{B.7})$$

$$F_{61} = \frac{1}{2} \left[ \frac{v_{e2} e_{o4}}{\mu} (v_{e2} + 2C) + \frac{\omega_1 e_{o2}}{v_{e2}} \right] \quad (\text{B.8})$$

$$F_{71} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{v_{e2} e_{o3}}{\mu} (v_{e2} + 2C) - \frac{\omega_1 e_{o1}}{v_{e2}} \right] \quad (\text{B.9})$$

$$F_{12} = -\frac{a_{e2}}{v_{e2}} p \operatorname{sen} \gamma \quad (\text{B.10})$$

$$F_{22} = -\frac{a_{e2}}{v_{e2}} p \operatorname{sen}^2 \gamma \quad (\text{B.11})$$

$$F_{32} = \frac{a_{e2}}{v_{e2}} p \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma \quad (\text{B.12})$$

$$F_{42} = -\frac{\operatorname{sen} \gamma}{2} \left[ \frac{2C v_{e2} e_{o2}}{\mu} - \frac{\omega_1 e_{o4}}{v_{e2}} \right] \quad (\text{B.13})$$

$$F_{52} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{2} \left[ \frac{2C v_{e2} e_{o1}}{\mu} + \frac{\omega_1 e_{o3}}{v_{e2}} \right] \quad (\text{B.14})$$

$$F_{62} = -\frac{\operatorname{sen} \gamma}{2} \left[ \frac{2C v_{e2} e_{o4}}{\mu} + \frac{\omega_1 e_{o2}}{v_{e2}} \right] \quad (\text{B.15})$$

$$F_{72} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{2} \left[ \frac{2C v_{e2} e_{o3}}{\mu} - \frac{\omega_1 e_{o1}}{v_{e2}} \right] \quad (\text{B.16})$$

$$F_{13} = \frac{a_{e2}}{v_{e2}} p \cos \gamma \quad (\text{B.17})$$

$$F_{23} = \frac{a_{e2}}{v_{e2}} p \cos \gamma \operatorname{sen} \gamma \quad (\text{B.18})$$

$$F33 = -\frac{a_{e2}}{v_{e2}} p \cos^2\gamma \quad (\text{B.19})$$

$$F43 = \frac{\cos\gamma}{2} \left[ \frac{2Cv_{e2}e_{o2}}{\mu} - \frac{\omega_1 e_{o4}}{v_{e2}} \right] \quad (\text{B.20})$$

$$F53 = -\frac{\cos\gamma}{2} \left[ \frac{2Cv_{e2}e_{o1}}{\mu} + \frac{\omega_1 e_{o3}}{v_{e2}} \right] \quad (\text{B.21})$$

$$F63 = \frac{\cos\gamma}{2} \left[ \frac{2Cv_{e2}e_{o4}}{\mu} + \frac{\omega_1 e_{o2}}{v_{e2}} \right] \quad (\text{B.22})$$

$$F73 = -\frac{\cos\gamma}{2} \left[ \frac{2Cv_{e2}e_{o3}}{\mu} - \frac{\omega_1 e_{o1}}{v_{e2}} \right] \quad (\text{B.23})$$

$$F14 = -2p \left[ a_x e_{o2} - 2a_y e_{o1} + a_z e_{o4} \right] \quad (\text{B.24})$$

$$F24 = 2 \left\{ \left[ a_y e_{o2} + a_z e_{o3} \right] \cos\gamma - \right. \\ \left. - (1+p) \sin\gamma \left[ a_x e_{o2} - 2a_y e_{o1} + a_z e_{o4} \right] \right\} \quad (\text{B.25})$$

$$F34 = 2 \left\{ \left[ a_y e_{o2} + a_z e_{o3} \right] \sin\gamma + \right. \\ \left. + (1+p) \cos\gamma \left[ a_x e_{o2} - 2a_y e_{o1} + a_z e_{o4} \right] \right\} \quad (\text{B.26})$$

$$F44 = \frac{e_{o4}}{v_{e2}} \left[ a_x e_{o3} - a_y e_{o4} - 2a_z e_{o1} \right] \quad (\text{B.27})$$

$$F54 = \frac{e_{03}}{v_{e2}} \left( a_x e_{03} - a_y e_{04} - 2a_z e_{01} \right) - \frac{\omega_3}{2} \quad (\text{B.28})$$

$$F64 = - \frac{e_{02}}{v_{e2}} \left( a_x e_{03} - a_y e_{04} - 2a_z e_{01} \right) \quad (\text{B.29})$$

$$F74 = - \frac{e_{01}}{v_{e2}} \left( a_x e_{03} - a_y e_{04} - 2a_z e_{01} \right) - \frac{\omega_1}{2} \quad (\text{B.30})$$

$$F15 = - 2p \left( a_x e_{01} + a_z e_{03} \right) \quad (\text{B.31})$$

$$F25 = - 2 \left\{ \left[ 2a_x e_{02} - a_y e_{01} + a_z e_{04} \right] \cos \gamma + \right. \\ \left. + (1+p) \sin \gamma \left( a_x e_{01} + a_z e_{03} \right) \right\} \quad (\text{B.32})$$

$$F35 = - 2 \left\{ \left[ 2a_x e_{02} - a_y e_{01} + a_z e_{04} \right] \sin \gamma - \right. \\ \left. - (1+p) \cos \gamma \left( a_x e_{01} + a_z e_{03} \right) \right\} \quad (\text{B.33})$$

$$F45 = \frac{e_{04}}{v_{e2}} \left( a_x e_{04} + a_y e_{03} - 2a_z e_{02} \right) + \frac{\omega_3}{2} \quad (\text{B.34})$$

$$F55 = \frac{e_{03}}{v_{e2}} \left( a_x e_{04} + a_y e_{03} - 2a_z e_{02} \right) \quad (\text{B.35})$$

$$F65 = - \frac{e_{02}}{v_{e2}} \left( a_x e_{04} + a_y e_{03} - 2a_z e_{02} \right) - \frac{\omega_1}{2} \quad (\text{B.36})$$

$$F75 = - \frac{e_{01}}{v_{e2}} \left( a_x e_{04} + a_y e_{03} - 2a_z e_{02} \right) \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned}
F16 = & - 2p \left\{ \frac{\beta a_{e2}}{v_{e2}} \left\{ (e_{o4} - e_{o3} \text{sen} \gamma) R_{f1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + e_{o3} (1 + \text{cos} \gamma) R_{f2} \right\} - \right. \\
& \left. - a_x e_{o4} + 2a_y e_{o3} - a_z e_{o2} \right\} \quad (B.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F26 = & -2 \left\{ \beta \left\{ \left[ a_{e1} + \frac{a_{e2} p \text{sen} \gamma R_{f2}}{v_{e2}} \right] \times \right. \right. \\
& \times e_{o3} (1 + \text{cos} \gamma) + \left[ (1+p) a_{e2} + \frac{a_{e2} p \text{sen} \gamma R_{f1}}{v_{e2}} \right] \times \\
& \times (e_{o4} - e_{o3} \text{sen} \gamma) \left. \right\} + \left\{ 2a_x e_{o3} - a_y e_{o4} - \right. \\
& \left. - a_z e_{o1} \right\} \text{cos} \gamma - (1+p) \text{sen} \gamma \left\{ a_x e_{o4} + 2a_y e_{o3} - \right. \\
& \left. - a_z e_{o2} \right\} \left. \right\} \quad (B.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F36 = & 2 \left\{ \beta \left\{ \left[ a_{e1} + \frac{a_{e2} p \text{cos} \gamma R_{f1}}{v_{e2}} \right] \times \right. \right. \\
& \times (e_{o4} - e_{o3} \text{sen} \gamma) - \left\{ (1+p) a_{e2} - \right. \\
& \left. - \frac{a_{e2} p \text{cos} \gamma R_{f2}}{v_{e2}} \right\} e_{o3} (1 + \text{cos} \gamma) \left. \right\} -
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \left( 2a_x e_{03} - a_y e_{04} - a_z e_{01} \right) \text{sen} \gamma - \\
& - (1+p) \text{cos} \gamma \left[ a_x e_{04} + 2a_y e_{03} - a_z e_{02} \right] \} \quad (\text{B.40})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F46 &= - \beta \left[ \frac{2Cv_{e2} e_{02}}{\mu} - \frac{\omega_1 e_{04}}{v_{e2}} \right] \times \\
& \times \left[ (e_{04} - e_{03} \text{sen} \gamma) R_{f1} + e_{03} (1 + \text{cos} \gamma) R_{f2} \right] + \\
& + \frac{e_{04}}{v_{e2}} \left[ a_x e_{01} + a_y e_{02} \right] \quad (\text{B.41})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F56 &= \beta \left[ \frac{2Cv_{e2} e_{01}}{\mu} + \frac{\omega_1 e_{03}}{v_{e2}} \right] \times \\
& \times \left[ (e_{04} - e_{03} \text{sen} \gamma) R_{f1} + e_{03} (1 + \text{cos} \gamma) R_{f2} \right] + \\
& + \frac{e_{03}}{v_{e2}} \left[ a_x e_{01} + a_y e_{02} \right] + \frac{\omega_1}{2} \quad (\text{B.42})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F66 &= - \beta \left[ \frac{2Cv_{e2} e_{04}}{\mu} + \frac{\omega_1 e_{02}}{v_{e2}} \right] \times \\
& \times \left[ (e_{04} - e_{03} \text{sen} \gamma) R_{f1} + e_{03} (1 + \text{cos} \gamma) R_{f2} \right] + \\
& + \frac{e_{02}}{v_{e2}} \left[ a_x e_{01} + a_y e_{02} \right] \quad (\text{B.43})
\end{aligned}$$

$$F76 = \beta \left[ \frac{2Cv_{e2} e_{03}}{\mu} - \frac{\omega_1 e_{01}}{v_{e2}} \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ (e_{04} - e_{03} \text{sen} \gamma) R_{f1} + e_{03} (1 + \text{cos} \gamma) R_{f2} \right] - \\
& - \frac{e_{01}}{v_{e2}} \left[ a_x e_{01} + a_y e_{02} \right] - \frac{\omega_3}{2}
\end{aligned} \tag{B.44}$$

$$\begin{aligned}
F17 = -2p \left\{ \left[ \frac{\beta a_{e2}}{v_{e2}} (e_{03} - e_{04} \text{sen} \gamma) R_{f1} - \right. \right. \\
\left. \left. - e_{04} (1 - \text{cos} \gamma) R_{f2} \right] - a_x e_{03} - a_z e_{01} \right\}
\end{aligned} \tag{B.45}$$

$$\begin{aligned}
F27 = 2 \left\{ \beta \left\{ \left[ a_{e1} + \frac{a_{e2} p \text{sen} \gamma R_{f2}}{v_{e2}} \right] \times \right. \right. \\
\left. \left. \times e_{04} (1 - \text{cos} \gamma) - \left[ (1+p) a_{e2} + \frac{a_{e2} p \text{sen} \gamma R_{f1}}{v_{e2}} \right] \times \right. \right. \\
\left. \left. \times (e_{03} - e_{04} \text{sen} \gamma) \right\} + \left[ a_y e_{03} - a_z e_{02} \right] \text{cos} \gamma + \right. \\
\left. + (1+p) \text{sen} \gamma \left[ a_x e_{03} - a_z e_{01} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{B.46}$$

$$\begin{aligned}
F37 = 2 \left\{ \beta \left\{ \left[ a_{e1} + \frac{a_{e2} p \text{cos} \gamma R_{f1}}{v_{e2}} \right] \times \right. \right. \\
\left. \left. \times (e_{03} - e_{04} \text{sen} \gamma) + \left[ (1+p) a_{e2} - \frac{a_{e2} p \text{cos} \gamma R_{f2}}{v_{e2}} \right] \times \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times e_{o4}(1 - \cos\gamma) \} + \left[ a_y e_{o3} - a_z e_{o2} \right] \text{sen}\gamma - \\ & - (1+p)\cos\gamma \left[ a_x e_{o3} - a_z e_{o1} \right] \} \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

$$\begin{aligned} F47 = & - \beta \left[ \frac{2Cv_{e2}e_{o2}}{\mu} - \frac{\omega_1 e_{o4}}{v_{e2}} \right] \times \\ & \times \left[ (e_{o3} - e_{o4}\text{sen}\gamma)R_{f1} - e_{o4}(1 - \cos\gamma)R_{f2} \right] + \\ & + \frac{e_{o4}}{v_{e2}} \left[ a_x e_{o2} - a_y e_{o1} \right] - \frac{\omega_1}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

$$\begin{aligned} F57 = & \beta \left[ \frac{2Cv_{e2}e_{o1}}{\mu} + \frac{\omega_1 e_{o3}}{v_{e2}} \right] \times \\ & \times \left[ (e_{o3} - e_{o4}\text{sen}\gamma)R_{f1} - e_{o4}(1 - \cos\gamma)R_{f2} \right] + \\ & + \frac{e_{o3}}{v_{e2}} \left[ a_x e_{o2} - a_y e_{o1} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

$$\begin{aligned} F67 = & - \beta \left[ \frac{2Cv_{e2}e_{o4}}{\mu} + \frac{\omega_1 e_{o2}}{v_{e2}} \right] \times \\ & \times \left[ (e_{o3} - e_{o4}\text{sen}\gamma)R_{f1} - e_{o4}(1 - \cos\gamma)R_{f2} \right] + \\ & + \frac{e_{o2}}{v_{e2}} \left[ a_x e_{o2} - a_y e_{o1} \right] + \frac{\omega_3}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

$$F77 = \beta \left[ \frac{2Cv_{e2}e_{o3}}{\mu} - \frac{\omega_1 e_{o1}}{v_{e2}} \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ (e_{03} - e_{04} \operatorname{sen} \gamma) R_{r1} - e_{04} (1 - \operatorname{cos} \gamma) R_{r2} \right] - \\ & - \frac{e_{01}}{V_{e2}} \left( a_x e_{02} - a_y e_{01} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

onde os  $a_i$  são as acelerações perturbadoras nas coordenadas inerciais, que no caso no movimento kepleriano valem:

$$a_x = 0. \quad (\text{B.52})$$

$$a_y = 0. \quad (\text{B.53})$$

$$a_z = 0. \quad (\text{B.54})$$

A transformação das acelerações do sistema inercial para o plano da órbita é dada pelas equações:

$$a_{e1} = e_{11} a_x + e_{12} a_y + e_{13} a_z \quad (\text{B.55})$$

$$a_{e2} = e_{21} a_x + e_{22} a_y + e_{23} a_z \quad (\text{B.56})$$

$$a_{e3} = e_{31} a_x + e_{32} a_y + e_{33} a_z \quad (\text{B.57})$$

onde,

$$e_{11} = 1 - 2(e_{02}^2 + e_{03}^2) \quad (\text{B.58})$$

$$e_{12} = 2(e_{01} e_{02} + e_{03} e_{04}) \quad (\text{B.59})$$

$$e_{13} = 2(e_{01} e_{03} - e_{02} e_{04}) \quad (\text{B.60})$$

$$e_{21} = 2(e_{01} e_{02} - e_{03} e_{04}) \quad (\text{B.61})$$

$$e_{22} = 1 - 2(e_{01}^2 + e_{03}^2) \quad (\text{B.62})$$

$$e_{23} = 2(e_{02} e_{03} + e_{01} e_{04}) \quad (\text{B.63})$$

$$e_{31} = 2(e_{o1}e_{o3} + e_{o2}e_{o4}) \quad (\text{B.64})$$

$$e_{32} = 2(e_{o2}e_{o3} - e_{o1}e_{o4}) \quad (\text{B.65})$$

$$e_{33} = 1 - 2(e_{o1}^2 + e_{o2}^2) \quad (\text{B.66})$$

