

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

**INPE-7179-TDI/680**

**CONTROLE DISCRETO DA ATITUDE DE SATÉLITES  
ARTIFICIAIS COM APÊNDICES FLEXÍVEIS.**

Marcelo Ricardo Alves da Costa Tredinnick

Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle – ETE/CMC, orientada pelo Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza e pelo Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza, aprovada em 26 de fevereiro de 1999.

INPE  
São José dos Campos  
1999

629.7.062.2

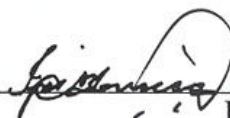
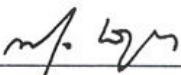



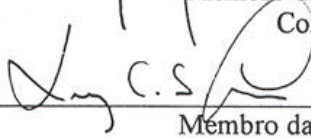
TREDINNICK, M.R.A.C.

Controle discreto da atitude de satélites artificiais com apêndices flexíveis./ M.R.A.C.Tredinnick – São José dos Campos : INPE , 1999.

262p. – (INPE-7179-TDI/680).

1.Controle de atitude. 2.Estruturas. 3.Estabilidade.  
4. Mapeador de plano S para plano Z. 5. Modos de  
vibração. 6.Satélites artificiais. I.Título.

Aprovado pela Banca Examinadora em cumprimento a requisito exigido para a obtenção do Título de **Mestre** em **ETE/Mecânica Espacial e Controle**.

Dr. Ijar Milagre da Fonseca	 _____ Presidente
Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza	 _____ Orientador
Dr. Luiz Carlos Gadelha de Souza	 _____ Orientador
Dr. Valdemir Carrara	 _____ Membro da Banca
Dr. Takashi Yoneyama	 _____ Membro da Banca Convidado
Dr. Luís Carlos Sandoval Goes	 _____ Membro da Banca Convidado

Candidato (a) : Marcelo Ricardo Alves da Costa Tredinnick

São José dos Campos, 26 de fevereiro de 1999.

*“A partir das coisas mais simples descobrirei a verdade.”*

( Johann Gregor Mendel – 1822-1884 )



A minha esposa Patrícia e aos meus pais Marília e Felipe.

### **AGRADECIMENTOS:**

- À Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos que financiou este programa de Mestrado;
- À banca examinadora pelas sugestões que enriqueceram o conteúdo deste trabalho.
- aos meus dois orientadores por todos os ensinamentos fornecidos durante o Mestrado: ao Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza em Controle Digital e ao Dr. Luis Carlos Gadelha de Souza em Estruturas Flexíveis;
- à minha esposa Patrícia pelo apoio e incentivo.
- ao colega Adenilson R. Silva pelo modelo analógico do CBERS-1 que foi por mim adaptado para ser usado neste trabalho.

## RESUMO

Este trabalho discute e simula o controle em tempo discreto de satélites artificiais com apêndices flexíveis, e a sua estabilidade em função de períodos de amostragem crescentes. Devido a aumentos crescentes da demanda de serviços no segmento espacial as dimensões dos apêndices tendem a crescer tornando-se assim mais flexíveis. Como resultado, é importante investigar os efeitos das características digitais tais como a amostragem no tempo, atrasos (em entradas, processamento e saídas) e a quantização em amplitude. Neste trabalho somente os efeitos da amostragem no tempo são investigados. O projeto de um controlador Proporcional+Derivativo (PD) em tempo discreto é feito considerando aspectos tais como o mascaramento (“aliasing”) e as oscilações escondidas (“hidden oscillations”). O controlador PD é testado com 2 plantas: um oscilador harmônico, e um modelo do satélite “China-Brazil Earth Resources Satellite” - (CBERS-1), comparando o PD analógico, com PDs discretos obtidos por mapeamentos s-z clássicos (Tustin e Schneider), e por um novo mapeamento s-z proposto neste trabalho, usando as mesmas condições de simulação (ganhos de controle, etc.) para efeito de comparação. O critério de estabilidade de Jury, root-loci, respostas transitórias, e respostas em regime com aquelas plantas foram usadas para analisar seus desempenhos. Vários métodos de estabilização são inferidos. Dentre eles, o uso do novo mapeamento apresentou o melhor desempenho, mostrando-se promissor.

# **DISCRETE-TIME ATTITUDE CONTROL OF ARTIFICIAL SATELLITES WITH FLEXIBLE APPENDAGES**

## **ABSTRACT**

This work discusses and simulates the discrete-time control of artificial satellites with flexible appendages, and its stability in function of growing sampling periods. Due to mission needs the dimensions of the appendages tend to increase becoming more flexible. As a result, it is important to investigate the effects of digital characteristics such as sampling period, delays (in inputs, processing and outputs) and amplitude quantization on it. In this work only the sampling period effects are investigated. The discrete-time PD controller design is done considering aspects such as the aliasing and the hidden oscillations. The PD controller is tested with 2 plants: an harmonic oscillation, and a model of the China-Brazil Earth Resources Satellite - (CBERS-1), comparing the analog PD, with standard discrete-time PD obtained by classic s-z mappings (Tustin and Schneider) and by a new s-z mapping proposed in this work, using the same simulation conditions (control gains, etc.). The Jury stability criterion, root-loci, transient and steady state responses with those plants were used to analyze their performances. Some many stabilization methods were inferred. The new method has shown the best performance amongst the approaches tested.

# SUMÁRIO

Pág.

**LISTA DE FIGURAS**

**LISTA DE TABELAS**

**LISTA DE SÍMBOLOS**

**LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS**

<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO, OBJETIVOS, JUSTIFICATIVAS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....</b>	<b>39</b>
1.1 - Introdução.....	39
1.2 - Objetivos deste Trabalho.....	40
1.3 - Justificativas deste Trabalho .....	40
1.4 - Organização deste Trabalho .....	41
<b>CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>45</b>
2.1 - Introdução à Modelagem de Estruturas Flexíveis.....	45
2.2 - Controle Digital .....	47
2.3 - Estabilidade.....	52
<b>CAPÍTULO 3 - MODELAGEM DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS.....</b>	<b>55</b>
3.1 - Introdução.....	55

3.2 - Elementos de Modelagem de Estruturas Flexíveis.....	55
3.2.1 - Princípios Estendido e Generalizado de Hamilton.....	55
3.2.2 - Abordagem Lagrangiana.....	62
3.2.3 - Vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko.....	66
3.2.4 - O Problema Diferencial do Autovalor.....	69
3.3 - Método dos Modos Assumidos.....	73
3.4 - Representação do Sistema em Variáveis de Estado Modais.....	76
3.5 - Um Modelo Analógico da Estrutura do Satélite CBERS-1.....	77
3.6 - Equivalente Discreto no Tempo de um Modelo Estrutural do Satélite CBERS-1.....	79

**CAPÍTULO 4 - CONTROLE EM TEMPO DISCRETO DE FUNÇÕES DE  
TRANSFERÊNCIA ANALÓGICAS..... 81**

4.1 - Introdução.....	81
4.2 - A Transformada-Z e Equivalências Discretas: Filtros Discretos.....	89
4.2.1 - Integração Numérica: Mapeamento de Equações a Diferenças.....	91
4.3 - A Discretização no Tempo de Funções de Transferência.....	99
4.3.1 - Controle Proporcional + Derivativo.....	99
4.3.2 - Oscilador Harmônico Simples, Forçado e Não Amortecido.....	101
4.3.3 - Oscilador Harmônico Simples, Forçado e Amortecido.....	102
4.4 - PD Analógico + Oscilador Harmônico Analógico.....	103

4.5 - Controle Discreto de um Oscilador Harmônico e Sua Estabilidade.....	104
4.5.1 - PD + Oscilador Harmônico Livre .....	104
4.5.2 - PD + Oscilador Harmônico Amortecido .....	106
4.5.3 - Análise por “Root-Locus” e Resposta Transitória dos Sistemas Descritos.....	107
4.5.4 - Aplicação do Critério de Estabilidade de Jury ao Oscilador Harmônico Simples com Controle PD Projetado por Tustin .....	126
<b>CAPÍTULO 5 - SIMULAÇÃO COM CONTROLE EM TEMPO DISCRETO DE UM MODELO ANALÓGICO DO CBERS-1 E SUA ESTABILIDADE.....</b>	<b>137</b>
5.1 - Introdução.....	137
5.2 - Planta Analógica e Controle PD Analógico .....	143
5.3 - Planta Analógica e Controle PD Discreto por Tustin .....	147
5.4 - Planta Analógica e Controle PD Discreto por Tustin, com Pré-Filtro “Anti-Aliasing” .....	158
5.5 - Equivalente “Zero-Order Hold” da Planta Analógica e Controle PD Discreto por Tustin .....	166
5.6 - Planta Analógica, Controle PD Discreto por Tustin, com Razão de Amortecimento Muito Elevada .....	183
5.7 - Planta Analógica Para Dois Modos Flexíveis, Razão de Amortecimento Muito Elevada, e Controle PD Discreto no Tempo por Schneider.....	195
5.8 - Comparações .....	199

<b>CAPÍTULO 6 - ESTABILIZAÇÃO DO CONTROLE EM TEMPO DISCRETO DE SATÉLITES COM APÊNDICES FLEXÍVEIS</b> .....	<b>203</b>
6.1 - Estabilização por Redução do Período de Amostragem .....	203
6.2 - Estabilização por Emprego de Filtro “Anti-Aliasing” .....	203
6.3 - Estabilização por Redução dos Ganhos.....	203
6.4 - Estabilização por Aumento do Amortecimento Estrutural.....	204
6.5 - Estabilização por Mudança do Mapeamento S-Z.....	204
6.6 - Críticas à Regra de Schneider.....	204
6.7 - Estabilização por Mudança do Mapeamento S-Z: Controle PD Projetado por uma Nova Regra.....	207
6.8 - Simulações com a Nova Regra .....	209
6.8.1 - Simulação com o Oscilador Harmônico Amortecido e PD Discreto no Tempo Projetado Pela Nova Regra.....	209
6.8.2 - Estabilização de um Modelo Analógico do CBERS-1 Utilizando um Modo Flexível com PD Projetado Pela Nova Regra .....	215
6.8.3 - Estabilização de um Modelo Analógico do CBERS-1 Utilizando Dois Modos Flexíveis com PD Projetado Pela Nova Regra.....	216
<b>CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES, SUGESTÕES E RECOMENDAÇÕES</b> .....	<b>221</b>
7.1 - Conclusões.....	221
7.2 - Sugestões e Recomendações.....	222
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>225</b>



<b>BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR .....</b>	<b>235</b>
<b>APÊNDICE A - APROXIMAÇÃO BUTTERWORTH AO FILTRO IDEAL .....</b>	<b>239</b>
<b>APÊNDICE B - EQUAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS DISCRETA NO TEMPO .....</b>	<b>243</b>
<b>APÊNDICE C - CÁLCULO DA ENERGIA CINÉTICA DO CBERS-1 UTILIZANDO A ÁLGEBRA DE VETRIZES E CONSIDERANDO O DESLOCAMENTO DO CENTRO DE MASSA PROVOCADO POR DEFORMAÇÕES ELÁSTICAS NO PAINEL FLEXÍVEL.....</b>	<b>245</b>
<b>APÊNDICE D - DEGRADAÇÃO DO DESEMPENHO DE SISTEMAS DISCRETOS EM MALHA-FECHADA DEVIDO ÀS DINÂMICAS NÃO MODELADAS E AOS FENÔMENOS DO MASCARAMENTO E DAS OSCILAÇÕES ESCONDIDAS .....</b>	<b>247</b>

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
3.1 - MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA SOBRE UMA SUPERFÍCIE DE VÍNCULO. ....	56
3.2 - INTERPRETAÇÃO GRÁFICA DE UM DESLOCAMENTO VIRTUAL.....	61
3.3 - TRAJETÓRIAS REAL E PERTURBADA.....	64
3.4 - VIGA DE EULER-BERNOULLI. ....	67
3.5 - VIGA DE TIMOSHENKO. ....	68
3.6 - EIXOS DE ATITUDE PARA A SIMULAÇÃO COM UM MODELO DO SATÉLITE CBERS-1.....	79
4.1 - DIAGRAMA DE BLOCOS DE UM SISTEMA COM CONTROLE DIGITAL.....	81
4.2 - AMOSTRAGEM DE UM SINAL.....	83
4.3 - ESPECTRO NORMALIZADO DE FOURIER DE UM SINAL DE ENTRADA COM LARGURA DE BANDA FINITA.....	84
4.4 - SINAL AMOSTRADO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	84
4.5 - REPRESENTAÇÃO ANALÓGICA EM MALHA-FECHADA.....	85
4.6 - EQUIVALÊNCIA DIGITAL DA FIGURA 4.5.....	86
4.7 - SISTEMA DIGITAL MANIPULADO. ....	86
4.8 - A/D GENERALIZADO. ....	87
4.9 - D/A GENERALIZADO. ....	87
4.10 - SIMPLIFICAÇÃO DO MODELO DIGITAL GENERALIZADO. ....	88

4.11 - EQUIVALENTE DISCRETO DO SISTEMA ANALÓGICO.....	88
4.12 - REGIÃO DE CONVERGÊNCIA PARA A EQUAÇÃO (4.1).....	89
4.13 - REGIÃO DE CONVERGÊNCIA DA EQUAÇÃO (4.2). ....	90
4.14 - INTEGRADOR “BACKWARD” NO DOMÍNIO DO TEMPO. ....	91
4.15 - MAPEAMENTO DO PLANO S PARA O PLANO Z PELA A EQUIVALÊNCIA “BACKWARD” .....	92
4.16 - MAPEAMENTO “BACKWARD” ATUANDO COMO INTEGRADOR EM Z.....	92
4.17 - EQUIVALÊNCIA “BACKWARD” ATUANDO COMO INTEGRADOR EM $K.T_s$ . ....	93
4.18 - INTEGRADOR “FORWARD” NO DOMÍNIO DO TEMPO. ....	94
4.19 - MAPEAMENTO DO PLANO S PARA O PLANO Z PELA A APROXIMAÇÃO “FORWARD”. ....	94
4.20 - APROXIMAÇÃO “FORWARD” ATUANDO COMO INTEGRADOR. ....	95
4.21 - APROXIMAÇÃO “FORWARD” ATUANDO COMO INTEGRADOR. ....	96
4.22 - INTEGRADOR TUSTIN NO DOMÍNIO DO TEMPO.....	97
4.23 - MAPEAMENTO ENTRE OS PLANOS S E Z PELO INTEGRADOR TUSTIN. ....	97
4.24 - DIAGRAMA EM BLOCOS BÁSICO DO INTEGRADOR POR TUSTIN.....	98
4.25 - TUSTIN COMO INTEGRADOR.....	98
4.26 - DIAGRAMA DE BLOCOS DO SISTEMA ANALÓGICO EM MALHA FECHADA.....	104
4.27 - DIAGRAMA DE BLOCOS DO OSCILADOR HARMÔNICO CONTROLADO POR PD DISCRETO NO TEMPO. ....	105

4.28 - ROOT-LOCUS NO PLANO-S PARA O SISTEMA TOTALMENTE ANALÓGICO DA FIGURA 4.26.....	108
4.29 - RESPOSTA AO IMPULSO UNITÁRIO PARA O SISTEMA TOTALMENTE ANALÓGICO.....	108
4.30 - ROOT-LOCUS NO PLANO-Z PARA $T_S = 0,1$ SEGUNDOS. ....	109
4.31 - RESPOSTA AO IMPULSO UNITÁRIO PARA $T_S = 0,1$ SEGUNDOS: CLARAMENTE TEMOS A ESTABILIDADE PARA ESTE CASO. ....	110
4.32 - ROOT-LOCUS NO PLANO-Z PARA O CONTROLE PD DISCRETO POR TUSTIN, COM $T_S = 1,6$ SEGUNDOS: OBSERVAR O PÓLO FORA DO CÍRCULO UNITÁRIO, REPRESENTANDO UM FATOR INSTABILIZANTE. ....	111
4.33 - RESPOSTA INSTÁVEL AO PULSO UNITÁRIO PARA $T_S = 1,6$ SEGUNDOS. ....	112
4.34 - ROOT-LOCUS DO OSCILADOR-HARMÔNICO PARA $T_S = 0,58$ SEGUNDOS.....	113
4.35 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO PARA A CONFIGURAÇÃO DE PÓLOS DO “ROOT-LOCUS” DA FIGURA 4.34. ....	113
4.36 - ROOT-LOCUS DO OSCILADOR-HARMÔNICO PARA $T_S = 0,59$ SEGUNDOS.....	114
4.37 - DETALHE INSTABILIZADOR DA FIGURA 4.36. ....	115
4.38 - RESPOSTA INSTÁVEL AO PULSO UNITÁRIO RELATIVA AOS DOIS ÚLTIMOS ROOT-LOCIS: FIGURAS 4.36 E 4.37. ....	115
4.39 - ROOT-LOCUS NO PLANO-Z PARA $T_S = 0,1$ SEGUNDOS. ....	116
4.40 - RESPOSTA AO IMPULSO UNITÁRIO PARA $T_S = 0,1$ SEGUNDOS.....	116
4.41 - ROOT-LOCUS NO PLANO-Z PARA $T_S = 1,6$ SEGUNDOS. ....	117
4.42 - RESPOSTA INSTÁVEL AO PULSO UNITÁRIO PARA $T_S = 1,6$ SEGUNDOS. ....	117

4.43 - ROOT-LOCUS PARA O CASO INSTÁVEL DO LIMAR DE ESTABILIDADE. ....	118
4.44 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO PARA O ROOT-LOCUS DA FIGURA 4.43. ....	118
4.45 - ROOT-LOCUS DO OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO. ....	119
4.46 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO PARA O ROOT-LOCUS DA FIGURA 4.45. ....	119
4.47 - ROOT-LOCUS COM O Z.O.H. DO OSCILADOR HARMÔNICO SOBRE- AMORTECIDO CONTROLADO POR PD PROJETADO COM A REGRA DE TUSTIN..	121
4.48 - ROOT-LOCUS PARA O Z.O.H. DO OSCILADOR HARMÔNICO SOBRE- AMORTECIDO CONTROLADO POR PD PROJETADO COM A REGRA DE TUSTIN..	122
4.49 - ROOT-LOCUS PARA O Z.O.H. DO OSCILADOR HARMÔNICO SOBRE- AMORTECIDO CONTROLADO POR PD PROJETADO COM A REGRA DE TUSTIN..	122
4.50 - ROOT-LOCUS DO OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO COM PD PROJETADO POR SCHNEIDER. ....	123
4.51 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO. ....	124
4.52 - ROOT-LOCUS DO OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO COM PD POR SCHNEIDER. ....	124
4.53 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO. ....	125
4.54 - ROOT-LOCUS DO OSCILADOR HARMÔNICO NÃO-AMORTECIDO COM PD POR SCHNEIDER. ....	125
4.55 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO. ....	126
4.56 - GRÁFICO DE $F_1(T_s)$ . ....	132
4.57 - GRÁFICO DE $F_2(T_s)$ . ....	133
4.58 - GRÁFICO DE $F_3(T_s)$ . ....	133

4.59 - GRÁFICO DE $F_1(T_s)$ . .....	134
4.60 - GRÁFICO DE $F_2(T_s)$ . .....	134
4.61 - GRÁFICO DE $F_3(T_s)$ . .....	135
5.1 - SISTEMA ORIGINALMENTE DESENVOLVIDO POR SILVA (1997) PARA O CASO TOTALMENTE ANALÓGICO, AGORA COM CONTROLE DISCRETO NO TEMPO PARA ATENDER ÀS SIMULAÇÕES DE ATITUDE. ....	139
5.2 - BLOCO DE CONTROLE NOS TRÊS EIXOS. ....	139
5.3 - ESTRUTURA INTERNA DO BLOCO DE CONTROLE DA FIGURA 5.2. ....	140
5.4 - DETALHE PARA O CONTROLE DE “ROLL” .....	140
5.5 - DETALHE DO CONTROLE DE “PITCH” .....	141
5.6 - DETALHE DO CONTROLE DE “YAW” .....	141
5.7 - DETALHE DE CONSTRUÇÃO DE UMA “S-FUNCTION” GRÁFICA. ....	141
5.8 - “S-FUNCTION” GRÁFICA DE TESTE. ....	142
5.9 - “S-FUNCTION” DESAGRUPADA. ....	142
5.10 - ÂNGULOS DE ATITUDE PARA O CONTROLE PD ANALÓGICO DA PLANTA ANALÓGICA (CBERS-1). ....	143
5.11 - COORDENADAS GENERALIZADAS RELATIVAS AO PRIMEIRO MODO. ....	144
5.12 - COORDENADAS GENERALIZADAS RELATIVAS AO SEGUNDO MODO. ....	144
5.13 - COORDENADAS GENERALIZADAS RELATIVAS AO TERCEIRO MODO. ....	145
5.14 - COORDENADAS GENERALIZADAS RELATIVAS AO QUARTO MODO. ....	145
5.15 - COORDENADAS GENERALIZADAS RELATIVAS AO QUINTO MODO. ....	146

5.16 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE.....	146
5.17 - ÂNGULOS DE ATITUDE.....	147
5.18 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	148
5.19 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	148
5.20 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O TERCEIRO MODO.....	149
5.21 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUARTO MODO. ....	149
5.22 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUINTO MODO. ....	150
5.23 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE.....	150
5.24 - ÂNGULOS DE ATITUDE.....	151
5.25 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	152
5.26 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	152
5.27 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O TERCEIRO MODO.....	153
5.28 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUARTO MODO. ....	153
5.29 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUINTO MODO. ....	154
5.30 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE.....	154
5.31 - ÂNGULOS DE ATITUDE.....	155
5.32 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	155
5.33 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	156
5.34 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O TERCEIRO MODO.....	156
5.35 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUARTO MODO. ....	157

5.36 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUINTO MODO. ....	157
5.37 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE. ....	158
5.38 - ÂNGULOS DE ATITUDE. ....	159
5.39 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	159
5.40 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	160
5.41 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O TERCEIRO MODO. ....	160
5.42 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUARTO MODO. ....	161
5.43 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUINTO MODO. ....	161
5.44 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE. ....	162
5.45 - ÂNGULOS DE ATITUDE. ....	162
5.46 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	163
5.47 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	163
5.48 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O TERCEIRO MODO. ....	164
5.49 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUARTO MODO. ....	164
5.50 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUINTO MODO. ....	165
5.51 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE. ....	165
5.52 - ÂNGULOS DE ATITUDE. ....	166
5.53 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	166
5.54 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	167
5.55 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O TERCEIRO MODO. ....	167



5.56 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUARTO MODO. ....	168
5.57 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUINTO MODO. ....	168
5.58 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE. ....	169
5.59 - ÂNGULOS DE ATITUDE. ....	169
5.60 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	170
5.61 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	170
5.62 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O TERCEIRO MODO. ....	171
5.63 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUARTO MODO. ....	171
5.64 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUINTO MODO. ....	172
5.65 - SINAIS DE CONTROLE DA ATITUDE. ....	172
5.66 - ÂNGULOS DE ATITUDE. ....	173
5.67 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	173
5.68 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	174
5.69 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O TERCEIRO MODO. ....	174
5.70 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUARTO MODO. ....	175
5.71 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUINTO MODO. ....	175
5.72 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE. ....	176
5.73 - ÂNGULOS DE ATITUDE. ....	176
5.74 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	177
5.75 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	177

5.76 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O TERCEIRO MODO.....	178
5.77 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUARTO MODO. ....	178
5.78 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUINTO MODO. ....	179
5.79 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE.....	179
5.80 - ÂNGULOS DE ATITUDE.....	180
5.81 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	180
5.82 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	181
5.83 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O TERCEIRO MODO.....	181
5.84 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUARTO MODO. ....	182
5.85 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUINTO MODO. ....	182
5.86 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE.....	183
5.87 - ÂNGULOS DE ATITUDE.....	184
5.88 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	184
5.89 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	185
5.90 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O TERCEIRO MODO.....	185
5.91 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUARTO MODO. ....	186
5.92 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUINTO MODO. ....	186
5.93 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE.....	187
5.94 - ÂNGULOS DE ATITUDE.....	187
5.95 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	188

5.96 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	188
5.97 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O TERCEIRO MODO. ....	189
5.98 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUARTO MODO. ....	189
5.99 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O QUINTO MODO. ....	190
5.100 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE. ....	190
5.101 - ÂNGULOS DE ATITUDE. ....	191
5.102 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O ÚNICO MODO SIMULADO. ....	191
5.103 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE. ....	192
5.104 - ÂNGULOS DE ATITUDE. ....	193
5.105 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	193
5.106 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	194
5.107 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE. ....	194
5.108 - ÂNGULOS DE ATITUDE. ....	197
5.109 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	197
5.110 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	198
5.111 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE. ....	198
6.1 - PÓLO INSTABILIZADOR DA REGRA DE SCHNEIDER. ....	205
6.2 - GRÁFICO DE $Z_1$ . ....	206
6.3 - GRÁFICO DE $Z_2$ . ....	207
6.4 - MAPEAMENTOS S-Z PARA A NOVA REGRA, TUSTIN E BACKWARD. ....	208

6.5 - DIAGRAMA DE BLOCOS DO CONTROLE EM TEMPO DISCRETO.....	209
6.6 - ROOT-LOCUS DO SISTEMA EM MALHA FECHADA COM A NOVA REGRA. ....	210
6.7 - RESPOSTA TRANSITÓRIA PARA O SISTEMA EM MALHA FECHADA COM A NOVA REGRA. ....	210
6.8 - ROOT-LOCUS DO SISTEMA EM MALHA FECHADA COM A REGRA DE TUSTIN.....	211
6.9 - RESPOSTA TRANSITÓRIA PARA O SISTEMA EM MALHA FECHADA COM A REGRA DE TUSTIN. ....	211
6.10 - ROOT-LOCUS PARA O Z.O.H. DO OSCILADOR HARMÔNICO SOBRE- AMORTECIDO CONTROLADO POR PD PROJETADO COM A NOVA-REGRA PARA $\xi = 0,001$ .....	212
6.11 - ROOT-LOCUS PARA O Z.O.H. DO OSCILADOR HARMÔNICO SOBRE- AMORTECIDO CONTROLADO POR PD PROJETADO COM A NOVA-REGRA PARA $\xi = 0,13$ .....	213
6.12 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO RELATIVO AO “ROOT-LOCUS” DA FIGURA 6.11. ....	213
6.13 - ROOT-LOCUS PARA O Z.O.H. DO OSCILADOR HARMÔNICO SOBRE- AMORTECIDO CONTROLADO POR PD PROJETADO COM A NOVA-REGRA PARA $\xi = 0,2$ .....	214
6.14 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO RELATIVO AO ROOT-LOCUS DA FIGURA 6.13. ....	214
6.15 - ÂNGULOS DE ATITUDE.....	215
6.16 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O ÚNICO MODO SIMULADO.....	216
6.17 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE. ....	216

6.18 - ÂNGULOS DE ATITUDE.....	217
6.19 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O PRIMEIRO MODO. ....	218
6.20 - COORDENADAS GENERALIZADAS PARA O SEGUNDO MODO. ....	218
6.21 - SINAIS DE CONTROLE DE ATITUDE.....	219
A.1 - DIAGRAMAS DE BODE (MÓDULO E FASE) PARA FILTROS BUTTERWORTH DE ORDENS 4 E 16.....	240
A.2 - RESPOSTAS AO DEGRAU UNITÁRIO PARA FILTROS BUTTERWORTH DE ORDENS 4 E 16.....	240
A.3 - LOCALIZAÇÃO DOS PÓLOS DE UM FILTRO BUTTERWORTH DE QUARTA ORDEM.....	241
A.4 - POSIÇÃO DOS PÓLOS DE UM FILTRO BUTTERWORTH DE ORDEM 16.....	241
C.1 - ESQUEMA VETORIAL PARA OS CÁLCULOS DA ENERGIA CINÉTICA. ....	245
D.1 - OSCILADOR HARMÔNICO DUPLO E AMORTECIDO.....	247
D.2 - ROOT-LOCUS PARA O CASO ANALÓGICO COM UM MODO.....	253
D.3 - RESPOSTA AO IMPULSO UNITÁRIO PARA O CASO ANALÓGICO E COM UM MODO.....	254
D.4 - ROOT-LOCUS PARA O CASO COM TUSTIN E UM MODO. ....	254
D.5 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO PARA O CASO COM TUSTIN E UM MODO. ....	255
D.6 - ROOT-LOCUS PARA O CASO COM A NOVA-REGRA E UM MODO. ....	255
D.7 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO PARA O CASO COM A NOVA-REGRA E UM MODO.....	256
D.8 - ROOT-LOCUS PARA O CASO ANALÓGICO E DOIS MODOS. ....	256

D.9 - RESPOSTA AO IMPULSO UNITÁRIO PARA O CASO ANALÓGICO E DOIS MODOS.	257
D.10 - DETALHE DO TRANSITÓRIO PARA O CASO ANALÓGICO. ....	257
D.11 - ROOT-LOCUS PARA O CASO COM TUSTIN E DOIS MODOS. ....	258
D.12 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO PARA O CASO COM TUSTIN E DOIS MODOS ..	258
D.13 - DETALHE DO TRANSITÓRIO PARA O CASO COM TUSTIN E DOIS MODOS. ....	258
D.14 - ROOT-LOCUS PARA O CASO COM A NOVA-REGRA E DOIS MODOS. ....	259
D.15 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO PARA O CASO COM A NOVA-REGRA E DOIS MODOS.....	259
D.16 - DETALHE DO TRANSITÓRIO PARA O CASO COM A NOVA-REGRA E DOIS MODOS.....	260
D.17 - ROOT-LOCUS PARA O CASO COM TUSTIN, DOIS MODOS E $T_s = 1,6$ SEGUNDOS. ....	260
D.18 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO PARA O CASO COM TUSTIN, DOIS MODOS E $T_s = 1,6$ SEGUNDOS.....	261
D.19 - ROOT-LOCUS PARA O CASO COM A NOVA REGRA, DOIS MODOS E $T_s = 1,6$ SEGUNDOS. ....	261
D.20 - RESPOSTA AO PULSO UNITÁRIO PARA O CASO COM A NOVA REGRA, DOIS MODOS E $T_s = 1,6$ SEGUNDOS. ....	262
D.21 - PROPAGAÇÃO DO PÓLO INSTABILIZADOR PARA AS SIMULAÇÕES EXECUTADAS COM A REGRA DE TUSTIN. ....	262

## LISTA DE TABELAS

	Pág.
4.1 - TABELA DE JURY GENERALIZADA.....	127
5.1 - MODOS DE VIBRAÇÃO PARA O MODELO ASSIMÉTRICO DO CBERS-1 UTILIZADO NESTE TRABALHO.....	138
5.2 - RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES PARA O MODELO DO CBERS-1 UTILIZADO NESTE TRABALHO COM CONTROLE PD PROJETADO POR APROXIMAÇÃO TUSTIN.....	200
A.1 - POLINÔMIOS DE BUTTERWORTH.....	242

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\omega_{\max}$	máxima componente espectral de um sinal
$\omega_S$	taxa de amostragem
$\omega_N$	freqüência de Nyquist
$T_S$	período de amostragem
A/D	conversor analógico / digital
D/A	conversor digital / analógico
$v$	ruído de alta freqüência
$w$	ruído de baixa freqüência
$r$	sinal de entrada do sistema em malha fechada
$u$	sinal de controle
$y$	sinal de saída do sistema em malha fechada
$e$	sinal de erro
$EI$	elasticidade (“stiffness”)
$\psi(k.T_S)$	simbologia genérica para sinal discreto no domínio do tempo
$\psi(t)$	simbologia genérica para sinal analógico no domínio do tempo
$\Psi(z)$	simbologia genérica para sinal discreto no domínio da freqüência
$\Psi(s)$	simbologia genérica para sinal analógico no domínio da freqüência



$G_{h0}(z)$	planta com segurador de ordem zero
$r_0$	raio inferior de convergência
$\omega_{pw}$	freqüência de correção "prewarping"
PD	controle proporcional + derivativo
$P(z)$	polinômio característico do sistema discreto em malha fechada
$k_p$	ganho do controle proporcional
$k_d$	ganho do controle derivativo

## **LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS**

SISO - Single Input, Single Output

MIMO - Multiple Input, Multiple Output

CBERS - China Brazil Earth Resources Satellite

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO, OBJETIVOS, JUSTIFICATIVAS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

#### 1.1 - INTRODUÇÃO

Com o aumento da demanda de serviços de tecnologia e também buscando atender às necessidades atuais do progresso da Ciência Espacial, as estruturas espaciais estão se sofisticando rapidamente, tornando-se cada vez mais complexas. Parece paradoxal querer aumentar as capacidades de tais sistemas complexos sem causar obrigatoriamente um acréscimo muito grande de massa, mas é o que tem-se tentado fazer mediante incontáveis esforços de pesquisadores por todo o mundo.

À medida que se aumentam as dimensões estruturais de uma antena, painel solar, ou até mesmo uma treliça de uma estação espacial (por ex. a *International Space Station* - ISS), mais flexíveis estes elementos se tornam e, como resultado, seus modos de vibração deverão ser considerados em seus modelos de maneira a permitir que o projeto do sistema de controle apresente uma forma mais robusta, podendo assim melhor controlar tais vibrações. Por isto mesmo, satélites com apêndices flexíveis, tais como o “*China–Brazil Earth Resources Satellite*” - (CBERS-1), devem levar em conta os modos de vibração de seus apêndices flexíveis (um painel solar) de modo a aumentar a precisão de apontamento em suas missões espaciais. Tais vibrações surgem devidas a muitos fatores: manobras de atitude, vento solar, colisões com partículas, etc.

Conforme detalhado na literatura por Deets e Szalai (1972); Ohkami *et al.* (1979); Franklin e Powell (1981) e numa monografia elaborada pelo autor Tredinnick (1997) percebe-se que é interessante usar sinais digitais no sistema de controle, pois estes podem ser manipulados por um computador digital que contém em sua memória um programa de controle que calculará quais

atuadores deverão ser acionados, e por quanto tempo cada um deverá continuar acionado para corrigir uma situação indesejável à missão. Além disso, os sinais digitais estão sendo muito usados atualmente por facilitarem substituições de programas, operações lógicas e poderem ser processados / transmitidos de forma muito mais imune ao ruído do que os sinais analógicos. Mas existem problemas inerentes ao uso dos controladores digitais, em virtude de: 1) da amostragem no tempo; 2) da quantização em amplitude; 3) e dos atrasos de entrada, processamento, e saída de dados. Estudar o primeiro problema é o escopo deste trabalho, como se segue.

## **1.2 - OBJETIVOS DESTE TRABALHO**

Este trabalho objetiva estudar e simular o controle em tempo discreto da atitude de satélites artificiais com apêndices flexíveis, e a sua estabilidade em função de períodos de amostragem crescentes. Foi possível aplicar estes estudos a um modelo do satélite CBERS-1, satélite que é fruto de um acordo binacional de cooperação tecnológica na área espacial entre o Brasil (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE) e a China (*Chinese Academy of Science and Technology* - CAST). Também foi possível o desenvolvimento de uma nova regra de mapeamento entre os planos s e z (analógico e digital) que demonstrou um melhor desempenho que as existentes na literatura. Este resultado representa uma contribuição deste trabalho.

## **1.3 - JUSTIFICATIVAS DESTE TRABALHO**

A implementação de controles digitais no CBERS-1 e nos seus sucessores (CBERS-2, etc.) demanda uma base teórica sólida para favorecer o emprego deste tipo de tecnologia. Este trabalho se dedicará especificamente ao controle digital de satélites com apêndices flexíveis. O estudo de tal tipo de controle é de interesse na área espacial atualmente, tal como verifica-se no desenvolvimento do projeto da Estação Espacial Internacional, com seus imensos módulos de montagem (Modi, 1990; Souza, 1992 e 1997). Outro

exemplo é o telescópio espacial Hubble (Bukley, 1993). A faixa de aplicações espaciais e não espaciais de tais estudos é muito ampla e assim sendo abre espaço para projetos tecnologicamente mais sofisticados.

Tal tipo de estudo é necessário ao INPE uma vez que o Brasil está envolvido em projetos de satélites como os da série CBERS que contém um corpo central rígido e um longo painel solar flexível. Este estudo contribui também com aspectos de modelagem uma vez que uma estrutura flexível possui infinitos modos de vibração e seu modelo precisa ser compatibilizado com as limitações de um controle digital com frequência finita. Devido aos problemas da interação estrutura & controle procura-se nos projetos de grandes estruturas espaciais obter um compromisso entre tamanho, mínima massa necessária e rigidez (Huntress, 1996 e Lala, 1994). Este compromisso nem sempre é fácil de ser obtido pois a combinação do grande porte de uma estrutura com a sua mínima massa necessária leva a uma estrutura altamente flexível.

#### **1.4 - ORGANIZAÇÃO DESTE TRABALHO**

No Capítulo 1 pode-se ter uma idéia da grande aplicabilidade de controladores digitais em sistemas de controle com os mais diversos tipos de plantas. Também pode-se tomar conhecimento dos objetivos, justificativa e organização deste trabalho.

No Capítulo 2 faz-se uma revisão bibliográfica dos temas: Controle Digital, Modelagem de Estruturas Flexíveis e Estabilidade. São revistos alguns dos mais importantes trabalhos realizados em cada um destes campos de pesquisa, que possuem algum vínculo com este trabalho.

O Capítulo 3 trata da modelagem de estruturas flexíveis, dando de forma detalhada os elementos teóricos a respeito dos métodos básicos de modelamento. Será dada uma ênfase ao estudo do método dos modos assumidos por ter sido o modelo aqui estudado calculado por tal método para a modelagem do satélite CBERS-1 (Silva, 1997).

No Capítulo 4 tem-se um panorama teórico sobre Controle Digital onde sólidos conhecimentos a respeito do tema são apresentados de um modo claro e detalhado, podendo servir futuramente como fonte de consulta para outros trabalhos. Neste capítulo um sistema simples é apresentado e é controlado por um controle analógico e por seu equivalente discreto. A razão para isto é também simples: partindo de sistemas mais simples, sem muita complexidade, podemos formular hipóteses e testá-las com a certeza de que os resultados não serão mascarados por algum detalhe de uma dinâmica complexa (não perfeitamente modelável), bem como teremos não apenas uma compreensão mais veloz do que estará ocorrendo na simulação mas, sobretudo, uma segurança maior ao tirar conclusões a respeito dos resultados obtidos. O trabalho prioriza as características inerentes aos sistemas discretos, evidenciando em detalhes dois dos principais problemas relativos a este tipo de sistemas: mascaramento e oscilações ocultas. A quantização e os atrasos nas entradas e saídas e no processamento não são considerados nesta introdução teórica.

No Capítulo 5 podemos encontrar as principais simulações que foram realizadas utilizando um modelo para a planta do satélite CBERS-1 via controle Proporcional+Derivativo (PD) como política de controle. Primeiro é apresentada uma simulação totalmente analógica, isto é, a planta e o controle descritos por funções de transferência analógicas. Após a parte analógica, apresentam-se as simulações com controle PD discreto no tempo por equivalência Tustin mediante quatro situações distintas: a) controle PD discreto no tempo e planta analógica; b) controle PD discreto no tempo e planta analógica com pré-filtro “anti-aliasing”; c) controle PD discreto no tempo e equivalente “zero-order hold” da planta analógica.

Já no Capítulo 6 podemos encontrar uma coletânea de técnicas sugeridas e comentadas para a estabilização da planta flexível do modelo que foi utilizado para o CBERS-1, tais como: a) mudança do período de amostragem; b) mudança nos valores dos ganhos de controle; c) emprego do filtro “anti-

aliasing”; d) aumento do amortecimento estrutural; e) estabilização por mudança do mapeamento s-z. Neste capítulo é apresentada a principal contribuição deste trabalho que consiste numa proposta de mapeamento s-z identificada como “nova-regra”. Neste capítulo é apresentada uma crítica à regra clássica de mapeamento proposta por Schneider (1991).

No Capítulo 7 pode-se encontrar as conclusões, sugestões e recomendações a respeito de projetos de controles digitais atuando sobre estruturas flexíveis que foram possíveis de se fornecer mediante as informações obtidas neste trabalho.

Os Apêndices foram escritos visando cobrir o tema Controle Digital de Estruturas Flexíveis de uma forma detalhada proporcionando um texto didático e abrangente para futuras consultas.

O Apêndice A trata do filtro de Butterworth de uma forma resumida mostrando as principais características do mesmo e mostrando o porquê da impossibilidade de se ter um filtro ideal.

No Apêndice B pode-se ter uma noção de como se constrói uma equação de estados em tempo discreto e como é a forma das matrizes A e B discretizadas.

No Apêndice C podemos ver o cálculo da energia cinética para o CBERS-1 considerando o deslocamento do centro de massa devido às perturbações elásticas do apêndice flexível feito mediante o cálculo de vetrizes Hughes (1986) estando tais resultados de acordo com Fonseca (1986).

No Apêndice D podemos ver um estudo semelhante ao que foi realizado no Capítulo 4, para um oscilador harmônico simples, usando um oscilador harmônico duplo e, assim, podendo-se verificar os efeitos das dinâmicas não modeladas.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 - INTRODUÇÃO À MODELAGEM DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

Serão apresentados quatro métodos de modelagem de estruturas flexíveis: abordagem lagrangiana, princípios estendido e generalizado de Hamilton, problema diferencial do autovalor e método dos modos assumidos. Não serão apresentados outros métodos de modelagem (tal como o dos elementos finitos) por não estarem relacionados com as simulações executadas neste trabalho.

Modelar uma estrutura dotada de apêndices flexíveis envolve técnicas de redução de ordem de modelos bem como as técnicas de transformação de uma equação diferencial de estado com coordenadas físicas para uma equação diferencial de estado em coordenadas modais. Referências relevantes para esta etapa são: Arduini (1995); Banerjee (1990); Benning et al. (1997); Blanchini (1994); Craig (1981); Erickson (1987); Fonseca (1986); Ginter (1978); Greenwood (1965); Juang e Sparks (1992); Junkins et al. (1985, 1990, 1991, 1993); Junkins e Kim (1993); Kane et al. (1983, 1987); Landau e Lifchitz (1960); Likins et al. (1970, 1972, 1985, 1987); Maciejowski (1991); Meirovitch et al. (1970a, 1970b, 1971, 1972, 1973, 1974a, 1974b, 1974c, 1975a, 1975b, 1976, 1977, 1980); Modi (1990); Passino et al. (1994); Shabana (1989); Silva (1997); Souza (1992, 1997); Suleman et al. (1995); Wilkinson (1965);

Souza (1997) realizou estudos de modelamento de uma forma bastante detalhada a respeito de uma estrutura espacial qualquer dotada de um número arbitrário de apêndices flexíveis utilizando a formulação Lagrangiana. Tal abordagem é usada para derivar as equações de movimento para o primeiro módulo de montagem da Estação Espacial Internacional (Modi, 1990; Souza, 1997 e 1992) então em desenvolvimento.



Junkins e Kim (1993) é um dos melhores textos básicos para o estudo de controle analógico de estruturas flexíveis, fornecendo ao leitor elementos teóricos e experimentais a respeito do tema. Em Junkins e Longman (1993) pode-se contemplar os resultados de experiências de duas décadas, iniciando em 1958, a respeito de controle ativo de satélites artificiais, mostrando alguns satélites que tiveram atitude instável no espaço e as possíveis explicações. Junkins et al. (1985 e 1991) trata de um experimento de controle de estruturas flexíveis que está incluído em Junkins e Kim (1993) mas em maiores detalhes.

Juang e Sparks (1992) apresentou uma grande quantidade de experimentos de controle analógico ativo de estruturas flexíveis que foram desenvolvidos nos EUA. Silva (1997) apresentou uma simulação com um modelo de satélite assimétrico na qual estudou a resposta estrutural elástica aos disparos de gás associados a um sistema de controle liga-desliga durante uma transferência de órbita. Benning et al. (1997) apresentou alguns resultados experimentais de controle ativo digital de vibrações mecânicas utilizando os mais recentes avanços em processamento digital de sinais.

Craig (1981) representa outra excelente fonte de consulta para estudos de modelagem de estruturas. Craig (1981) parte desde princípios muito simples de modelagem, como a modelagem de osciladores harmônicos simples e múltiplos, até os mais sofisticados tais como os métodos dos modos assumidos e elementos finitos. Craig (1981) também apresenta estudos a respeito do comportamento de estruturas na presença de terremotos. Meirovitch (1970b) representa outra importante referência para o estudo de técnicas de modelagem de estruturas. Meirovitch (1970a) também é muito interessante nos estudos da teoria geométrica das equações diferenciais associadas ao comportamento dinâmico dos sistemas e da teoria que trata de giroscópios.

## 2.2 - CONTROLE DIGITAL

Um primeiro problema de um controle digital é a amostragem no tempo, especialmente quando se trata de estruturas flexíveis. As estruturas oscilam com infinitos *modos de vibração* (máxima componente espectral de frequência  $\omega_{\text{máx}} \rightarrow \infty$ ), mas o conversor A/D amostra o sinal com uma frequência finita chamada frequência de amostragem  $\omega_S$ , pequena quando comparada com as maiores frequências de vibração da estrutura (Ginter, 1978; Tredinnick, 1997). Isto provoca então uma perda drástica de informação, pelo mascaramento (distorção ou mutilação) destas frequências e pelas oscilações escondidas. O fenômeno do mascaramento ocorrerá pois a conhecida frequência de Nyquist  $\omega_N = \omega_S / 2$  será menor que a máxima componente espectral de frequência  $\omega_{\text{máx}}$ , logo, o sinal amostrado sofrerá distorções por sobreposições de inúmeras frequências.

Isto pode ser melhor visualizado mediante uma análise espectral: quando  $\omega_N$  for menor que  $\omega_{\text{máx}}$  parte das bandas de frequência do sinal amostrado se sobrepõem causando assim o mascaramento. O fenômeno das oscilações escondidas até poderá ocorrer porque  $\omega_N$  será menor que  $\omega_{\text{máx}}$ , mostrando que toda frequência da planta que for múltipla de  $\omega_N$  poderá não ser vista pelos sensores (mais precisamente: os conversores A/D).

Estas distorções podem ser praticamente eliminadas impondo-se que a máxima componente espectral  $\omega_{\text{máx}}$  de  $f(t)$  seja bem menor que a frequência de Nyquist  $\omega_N = \pi/T$  (isto é,  $\omega_{\text{máx}} \ll \omega_N$ ) que é a metade da frequência de amostragem  $\omega_S = 2\pi/T$ . Isso pode ser conseguido colocando-se filtros passa-baixas nas saídas dos sensores de um sistema de controle em malha-fechada, por exemplo.

Entretanto, quando se tratar de controlar uma estrutura flexível, que tem infinitas frequências de vibração (modos de vibração), isto é, quando  $\omega_{\text{máx}} \rightarrow \infty$ , teremos que fazer uso de um filtro que vai apenas considerar um certo número

de modos de vibração da estrutura flexível, o que pode comprometer o controle. Mas, mesmo assim, considerando-se que as frequências mais elevadas possuam pequenas amplitudes e razoáveis amortecimentos, elas podem não ser tão críticas ao sistema podendo assim ser negligenciadas. Atualmente formas econômicas de se resolver o problema estão em fase de estudo por todo o mundo.

Um segundo problema de um controle digital se refere aos atrasos no tempo. As conversões A/D e D/A demoram até vários milissegundos, o que pode ser desastroso para aplicações que tenham sinais que variem com frequências superiores a 1 kHz, por exemplo. Somado a estes atrasos característicos dos conversores está o atraso de processamento causado pela execução do programa de computador da simulação. O problema é que todas as operações de entrada, processamento, e saída de dados em um controlador digital têm duração finita e não nula, causando atrasos no tempo e portanto, defasagens crescentes com as frequências nos vários modos, que pioram o desempenho do controle destes modos até levá-los à instabilidade. Isto pode ser limitado pelo amortecimento passivo da estrutura. Este tipo de problema não será abordado neste trabalho.

Um terceiro problema de um controle digital é a quantização em amplitude, cujos erros podem ser minimizados se aumentarmos o número de níveis de quantização. Mas isto é um problema sério, pois aumentar o número de níveis de quantização implica aumentar o número de bits processados para cada amostra de sinal o que resultaria em um tempo maior de processamento, ou a necessidade de microprocessadores mais velozes, encarecendo em muito a missão espacial. Mesmo assim, um controle digital com um pequeno ruído de quantização (uma grande quantidade de níveis de quantização utilizados) poderia ser ainda melhor que um controle analógico sujeito a ruídos imprevisíveis que distorceriam muito mais os sinais do sistema, o que poderia provocar ações de controle incorretas. Este tipo de problema também não será estudado neste trabalho.

Neste trabalho será estudada com rigor a teoria da amostragem segundo Ayres (1959); Barradas e Ribeiro (1980); Butkov (1988); Franklin e Powell (1981); Katz (1981); Houppis e Lamont (1985); Isermann (1989); Lathi (1983); Morari e Zafiriou (1985 e 1986); Ogata (1987); Tredinnick (1997) e Ziemer e Tranter (1976), mostrando matematicamente seus problemas que são verificados na prática. Dentro do possível, uma abordagem de Engenharia Eletrônica com teor prático será utilizada nestes estudos do controle digital segundo Barbosa (1997); Franklin e Powell (1981); Katz (1981); Barradas (1980); Ginter (1978); Ohkami et al. (1979); Tocci (1994); Tredinnick (1997) e Schneider et al. (1994).

Ginter (1978) representa uma outra ótima referência para uma introdução ao tema controle digital de estruturas flexíveis. Neste trabalho de mestrado poderemos encontrar uma introdução ao estudo de modelamento newtoniano de estruturas flexíveis e uma introdução ao controle digital. Ginter (1978) apenas constatou o fenômeno da instabilidade em alguns modos e nos sinais de saída devido à inserção de um controlador digital, sem propor nenhuma maneira de solução do problema, usando um modelo de viga de Euler-Bernoulli como estrutura flexível. Em seu trabalho podemos encontrar os efeitos da instabilidade em alguns modos e nos sinais de saída de um sistema controlado digitalmente comparado a um sistema controlado analogicamente.

Barradas (1980) é uma excepcional referência para inúmeros elementos teóricos e práticos para a teoria da comunicação e telecomunicações analógicas e digitais. Nesta referência pode-se citar alguns elementos da teoria da informação úteis para o aprofundamento no conhecimento da teoria de controle digital: velocidade de sinal, BAUD, geração da informação (informação própria e entropia), canais de comunicação com e sem ruído. Também pode-se destacar estudos sobre a teoria das comunicações: teoria da amostragem, amostragem ideal, amostragem real, amostragem de sinais super-rápidos, aproveitamento do tempo de transmissão, modulação em portadora trem-de-pulsos – modulação digital, codificação / decodificação.

Butkov (1988) foi útil a este trabalho pelos capítulos que tratam de séries de Fourier e transformadas de Fourier. Compreende-se esta referência como ótima fornecedora de ferramentas matemáticas para o auxílio teórico na execução de trabalhos de Engenharia, Física, Matemática ou em outras áreas afins. Sokolnikoff e Redheffer (1966) é outra referência muito interessante e útil para auxiliar aos estudos a respeito das ferramentas matemáticas usadas em engenharia.

Podemos considerar Franklin e Powell (1981) como a melhor introdução ao controle digital que se pode encontrar dentre as referências citadas, sob o meu ponto de vista. Esta referência trata desde a introdução teórica até alguns elementos da fronteira atual do conhecimento sobre o tema, podendo-se considerá-la como um texto básico ao mesmo tempo que avançado sobre controle digital. Podemos encontrar nela os elementos teóricos fundamentais da transformada-Z, teoria da amostragem, fenômenos do mascaramento e das oscilações ocultas, projetos de filtros digitais por integradores numéricos, técnicas de projeto de filtros por mapeamento pólo-zero, equivalência “Hold”, filtros Butterworth e ITAE, “root-locus” discreto, projetos de controladores digitais utilizando métodos tais como transformada-W e de Ragazzini, controlabilidade e observabilidade de sistemas digitais, estimadores digitais, Filtro de Kalman, fórmula de Ackermann, quantização, controle digital multivariável, dentre muitos outros itens. Alguns detalhes de pesquisas atuais sobre a teoria de seleção da taxa de amostragem tais como: conceito de rugosidade e a seleção da taxa de amostragem considerando incerteza nos parâmetros também são mostrados. Tais pesquisas se apresentam em sua fase embrionária podendo-se rotular tal teoria da seleção da taxa de amostragem como “em aberto”, isto é, ainda necessitando de uma enorme quantidade de resultados teóricos e práticos para seu pleno estabelecimento.

Katz (1981) é uma outra excelente referência sobre o tema. Sua introdução teórica não é tão detalhada e profunda quanto a encontrada em Franklin e Powell (1981) ou em Ogata (1987) mas são os resultados de pesquisas

experimentais descritos nesta referência que realmente despertam a atenção. Alguns capítulos interessantes são: a) mecanização de algoritmos de controle em microcontroladores, b) análise e implementação de algoritmos numéricos: são apresentados os resultados do trabalho pioneiro de Shenberg (1977 e 1978) na implementação de um controlador digital num microprocessador; fala-se sobre o efeito da propagação do ruído de quantização através do sistema; c) seleção da taxa de amostragem: basicamente, corresponde ao mesmo que é exposto em Franklin e Powell (1981) exceto pela inclusão dos seguintes itens: pré-filtros “anti-aliasing”, seleção prática da taxa de amostragem, e o conceito de fidelidade da resposta proposto por Peled (1978). Na minha opinião, o conceito de função rugosidade é melhor explorado aqui nesta referência do que em Franklin e Powell (1981).

Lathi (1983), Ziemer e Tranter (1976) fornecem ao leitor um arcabouço teórico profundo a respeito de teoria das comunicações; mas, o que é relevante a este trabalho compreende apenas as seguintes seções : a) Lathi (1983): representação de uma função periódica pela série de Fourier em todo o intervalo, existência da transformada de Fourier; o teorema da amostragem, medida de informação, capacidade de canal – lei de Hartley-Shannon (teorema central da teoria da informação); b) Ziemer e Tranter (1976): séries de Fourier, a transformada de Fourier, teoria da amostragem e o capítulo sobre teoria da informação e codificação.

Em Morari e Zafiriou (1985) são feitas várias análises de desempenho de algoritmos de controle em tempo discreto para sistemas “SISO” mediante suas características transitórias de resposta tais como: tempo de subida, sobressinal e tempo de acomodação. Mediante tais análises um algoritmo é proposto buscando combinar as vantagens dos demais algoritmos e tornar-se livre de seus inconvenientes. Em Morari e Zafiriou (1986) a estabilidade de um sistema de controle digital e sua performance em termos de saídas analógicas é estudada desconsiderando erros no modelamento, numa primeira etapa, e os considerando, numa segunda etapa. Ainda em Morari e Zafiriou (1986) os

efeitos do período de amostragem sobre o desempenho de controles em tempo discreto e as propriedades de robustez de um sistema apresentado são examinados e os resultados são utilizados como critério de seleção da taxa de amostragem.

Ogata (1987) representa uma excelente referência básica para o tema controle discreto, apresentando em riqueza de detalhes todos os princípios básicos a respeito do tema. É nessa referência que se pode encontrar um tratamento detalhado a respeito do critério de estabilidade de Jury.

Isermann (1989) representa outra referência importante a respeito do tema Controle Digital; especialmente as seções que tratam da análise de estabilidade mediante o posicionamento dos pólos no plano-z, e do critério de estabilidade de Schur-Cohn-Jury.

No trabalho de Ohkami et al. (1979) pode-se encontrar resultados de simulações com “hardware” de controle digital de satélites com apêndices flexíveis. Tal trabalho, entretanto, executa as simulações para apenas um modo de vibração além do modo rígido e considerando apenas um eixo de atitude. Como política de controle digital utilizou-se um PD com e sem um estimador de estados. A comparação de desempenho foi executada em termos da estabilidade e da quantidade de memória exigida e do tempo de processamento. Foram apresentados apenas os resultados estáveis para tais simulações.

### **2.3 - ESTABILIDADE**

Podemos definir estabilidade como uma propriedade descritiva do movimento perturbado de aproximação ou de afastamento em relação a um particular estado ou movimento nominal. De uma forma simples pode-se dizer que um dado sistema de controle é assintoticamente estável se a saída volta ao seu estado de equilíbrio após o sistema ser sujeito a uma perturbação; e é marginalmente estável ou instável se uma oscilação perniciosamente de saída

continua indefinidamente ou se o sinal de saída diverge sem limite de seu estado de equilíbrio. Este tema consiste um universo muito vasto de teorias e experiências sendo quase impossível tentar esgotar o assunto. Assim sendo, selecionou-se para esta revisão bibliográfica algumas das referências que foram julgadas importantes para este trabalho, tais como: Franklin e Powell (1981), Ogata (1987, 1993), Hagiwara e Araki (1988), Juang e Sparks (1992), Junkins e Kim (1993), Junkins e Longman (1993), Katz e Powell (1975); Katz (1981), Kuo (1966), Kwakernaak e Sivan (1972), Lourenção (1982) e Passino et al. (1994).

Aqui vale a pena destacar Franklin e Powell (1981), Ogata (1987, 1993), Junkins e Kim (1993) e Kwakernaak e Sivan (1972) como textos básicos para o assunto de estabilidade. Passino et al. (1994) apresenta um estudo da estabilidade no sentido de Liapunov para sistemas em tempo discreto. Lourenção (1982) chama a atenção para os efeitos da flexibilidade em apêndices na atitude de satélites apresentando duas maneiras de analisar o problema: 1) utilização do método direto de Liapunov para determinar as condições de estabilidade nas vizinhanças da posição de equilíbrio nominal; 2) integração numérica das equações do movimento. A primeira maneira fornece resultados essencialmente qualitativos ao passo que a segunda maneira fornece resultados quantitativos os quais destacam a importância de projetos que consideram a flexibilidade de apêndices em seus modelamentos.

Estas referências servem para despertar a atenção de como pode ser danoso em termos de estabilidade o uso de controladores em tempo discreto atuando sobre plantas flexíveis. Tais referências são úteis também para não se desprezar os efeitos danosos da flexibilidade de algumas plantas num sistema controlado, seja analógica ou digitalmente.



## **CAPÍTULO 3**

### **MODELAGEM DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS**

#### **3.1 - INTRODUÇÃO**

A modelagem de sistemas considerando a flexibilidade como elemento relevante tem aumentado consideravelmente nas últimas duas décadas devido principalmente ao aumento das exigências da demanda de serviços de sistemas flexíveis e aos problemas associados à interação estrutura & controle “Control Structure Interaction” - (CSI). O modelamento de sistemas flexíveis pode ser considerado relevante, por exemplo, em projetos de: a) segmento aeroespacial: satélites artificiais com grandes painéis solares, estações espaciais, veículos lançadores de satélites, ônibus espaciais, aviões, etc.; b) segmento industrial: usinagens de alta precisão, manipuladores robóticos flexíveis, etc.

#### **3.2 - ELEMENTOS DE MODELAGEM DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS**

Nas Seções 3.2.1, 3.2.2, que seguem abaixo, os princípios estendido e generalizado de Hamilton e a abordagem Lagrangiana são mostrados em detalhes para fornecer instrumentos teóricos importantes para a obtenção de um sentimento mais sólido a respeito da modelagem de estruturas flexíveis que pode ser bastante útil a quem inicia seus estudos na área. As Seções 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 e 3.2.4 fornecem uma base sólida a respeito da teoria de modelagem de estruturas existente na literatura. As Seções 3.3, 3.4, 3.5, e 3.6 visam dar a orientação necessária para o entendimento do modelo estrutural do CBERS-1 utilizado neste trabalho.

##### **3.2.1 - PRINCÍPIOS ESTENDIDO E GENERALIZADO DE HAMILTON**

O princípio de Hamilton é o mais famoso princípio variacional da Mecânica, é conceitualmente simples de ser aplicado, possui uma álgebra e cálculo que, na

maioria dos casos, torna-se muito tediosa devido a uma grande quantidade de integrações por partes que surgem nos cálculos. As equações de Lagrange que saíram do princípio de Hamilton resolveram esta dificuldade analítica.

O princípio generalizado de Hamilton é definido da seguinte forma (Junkins, 1993; e Meirovitch, 1970):

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(K - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (3.1)$$

onde,  $K$  é a energia cinética total,  $V$  é a energia potencial,  $\delta W_{nc}$  é o trabalho virtual causado por forças não conservativas tais como o amortecimento, onde o “ $\delta$ ” que aparece na Equação (3.1) indica uma variação das funções.

Para deduzir o princípio generalizado de Hamilton precisamos dos princípios do trabalho virtual e de D’Alembert.

a) Princípio do trabalho virtual:

Seja o movimento de uma partícula sobre uma superfície de vínculo  $f$  tal como mostrado na Figura 3.1 onde  $\frac{dr}{dt}$  é a velocidade da partícula sobre a superfície de vínculo (tangencial à esta superfície) e  $\nabla f$  é o gradiente da superfície de vínculo, normal à mesma.

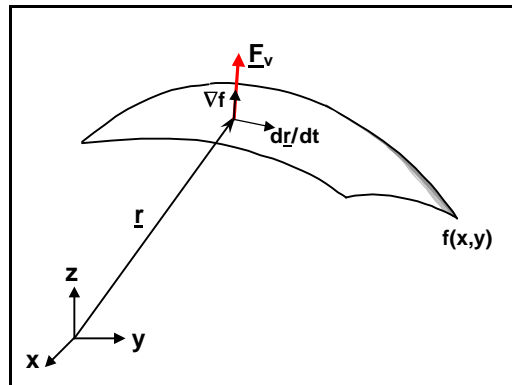


Fig. 3.1 - Movimento de uma partícula sobre uma superfície de vínculo.

Pela Figura 3.1 pode-se escrever:

$$\nabla f \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla f \cdot d\underline{r} = 0 \quad (3.3)$$

Imagine que esta partícula interaja com a superfície de vínculo de forma que uma força normal  $\underline{F}_v$  (força devida ao vínculo) surja, logo,

$$\underline{F}_v // \nabla f \quad (3.4)$$

$$\nabla f = k \cdot \underline{F}_v \quad (3.5)$$

substituindo a Equação (3.5) na Equação (3.3) temos:

$$k \cdot \underline{F}_v \cdot d\underline{r} = 0 \quad (3.6)$$

$$\underline{F}_v \cdot d\underline{r} = 0 \quad (3.7)$$

Como trabalho define-se como força x distância, vem da Equação (3.7),

$$dW = \underline{F}_v \cdot d\underline{r} = 0 \quad (3.8)$$

Pode haver o caso em que a superfície de vínculo se modifica com o tempo. O procedimento analítico para superar esta dificuldade vem pela introdução do princípio dos deslocamentos virtuais onde desconsidera-se a perturbação temporal, daí temos a expressão do princípio do trabalho virtual como segue na Equação (3.9):

$$\boxed{dW = \underline{F}_v \cdot d\underline{r} = 0} \quad (3.9)$$

O princípio do trabalho virtual pode ser enunciado da seguinte forma: o trabalho feito pelas forças de vínculo relativas a deslocamentos virtuais é zero.

b) Princípio de D'Alembert:

Da segunda lei de Newton (lei da inércia):

$$\underline{F} = \underline{\dot{p}} \quad (3.10)$$

onde  $\underline{F}$  é a força resultante de todas as forças presentes no sistema. Suponha que

$$\underline{F} = \sum_i \underline{F}_i + \sum_j \underline{F}_{v,j} \quad (3.11)$$

onde  $\underline{F}_i$  são todas as forças aplicadas e  $\underline{F}_{v,j}$  são as forças de vínculo. Substituindo a Equação (3.11) na Equação (3.10) teremos o princípio de D'Alembert:

$$\boxed{\sum_i \underline{F}_i + \sum_j \underline{F}_{v,j} - \underline{\dot{p}} = 0} \quad (3.12)$$

Para chegar ao princípio generalizado de D'Alembert temos que proceder como segue: multiplique a Equação (3.12) por um deslocamento virtual reversível  $d\underline{r}$  (um  $d\underline{r}_{ij}$  para cada componente):

$$\sum_i \underline{F}_i \cdot d\underline{r}_i + \sum_j \underline{F}_{v,j} \cdot d\underline{r}_j - \underline{\dot{p}} \cdot d\underline{r}_i = 0 \quad (3.13)$$

Sendo,

$$\underline{F}_v = \sum_i \underline{F}_{v,i} \quad (3.14)$$

temos que,

$$\sum_i \underline{F}_i \cdot d\underline{r}_i + \underline{F}_v \cdot d\underline{r}_j - \underline{\dot{p}} \cdot d\underline{r}_i = 0 \quad (3.15)$$

Pela Equação (3.9) podemos simplificar a Equação (3.15) da seguinte forma:

$$\sum_i \underline{F}_i \cdot d\underline{r}_i - \dot{\underline{p}} \cdot d\underline{r}_i = 0 \quad (3.16)$$

Como para cada  $\underline{F}_i$  aplicada há um  $\dot{\underline{p}}_i$  equivalente, onde  $\underline{F}_i - \dot{\underline{p}}_i$  é conhecida como “força efetiva”, teremos o princípio generalizado de D’Alembert (Meirovitch, 1970):

$$\boxed{\sum_i \left( \underline{F}_i - \dot{\underline{p}}_i \right) d\underline{r}_i = 0} \quad (3.17)$$

É interessante notar que a lei da conservação da energia pode ser obtida a partir da Equação (3.17):

$$\sum_i \underline{F}_i \cdot d\underline{r}_i - \sum_i \frac{d}{dt} \left( m \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) \cdot \frac{d\underline{r}_i}{dt} \cdot dt = 0 \quad (3.18)$$

Do cálculo diferencial elementar sabe-se que  $\frac{d}{dt} \left( \dot{\underline{r}} \right) \cdot \underline{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left( \dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} \right)$ , logo:

$$\sum_i \underline{F}_i \cdot d\underline{r}_i - \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{1}{2} m \cdot \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) dt = 0 \quad (3.19)$$

Sendo o sistema conservativo temos que:

$$W = -dV = \sum_i \underline{F}_i \cdot d\underline{r}_i \quad (3.20)$$

e fazendo:

$$dK = d \left( \sum_i \frac{1}{2} m \cdot \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) \quad (3.21)$$

Teremos, substituindo as Equações (3.20) e (3.21) na Equação (3.19):

$$-dV - dK = 0 \quad (3.22)$$

$$d(V + K) = 0 \quad (3.23)$$

Integrando a Equação (3.23) temos:

$$E = K + V \quad (3.24)$$

Logo, podemos concluir que a energia mecânica ou total E (Equação (3.24)) é uma constante igual à soma das energias cinética e potencial, válida para sistemas em que a energia potencial e os vínculos independem do tempo.

c) Princípio de Hamilton:

Do princípio generalizado de D'Alembert, Equação (3.17), temos:

$$\sum_i \left( \underline{F}_i - m_i \ddot{\underline{r}}_i \right) d\underline{r}_i = 0 \quad (3.25)$$

$$\sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot d\underline{r}_i - \sum_i \underline{F}_i \cdot d\underline{r}_i = 0 \quad (3.26)$$

Sendo

$$d\bar{W} = \sum_i \underline{F}_i \cdot d\underline{r}_i \quad (3.27)$$

o trabalho virtual realizado por todas as forças presentes no sistema (conservativas e não conservativas), e lembrando-se que

$$\ddot{\underline{r}}_i \cdot d\underline{r}_i = \frac{d}{dt} \left( \dot{\underline{r}}_i \cdot d\underline{r}_i \right) - d \left( \frac{1}{2} \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) \quad (3.28)$$

vem, aplicando as Equações (3.27) e (3.28) na Equação (3.26) teremos,

$$\sum_i m_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{d} \underline{r}_i \right) - \sum_i m_i \cdot \underline{d} \left( \frac{1}{2} \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) - \underline{d} \bar{W} = 0 \quad (3.29)$$

$$\sum_i m_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{d} \underline{r}_i \right) - \underline{d} K - \underline{d} \bar{W} = 0 \quad (3.30)$$

$$\underline{d} K + \underline{d} \bar{W} = \sum_i m_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{d} \underline{r}_i \right) \quad (3.31)$$

Integrando no tempo a Equação (3.31) vem

$$\int_{t_1}^{t_2} (\underline{d} K + \underline{d} \bar{W}) dt = \sum_i m_i \cdot \int_{t_1}^{t_2} \underline{d} \left( \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{d} \underline{r}_i \right) \quad (3.32)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\underline{d} K + \underline{d} \bar{W}) dt = \sum_i m_i \cdot \left[ \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{d} \underline{r}_i \right]_{t_1}^{t_2} \quad (3.33)$$

O segundo membro da Equação (3.33) dará zero como pode-se ver pela Figura 3.2: em  $t_1$  e  $t_2$  a variação  $\underline{d} \underline{r}_i$  torna-se nula em relação ao caminho real (newtoniano ou dinâmico).

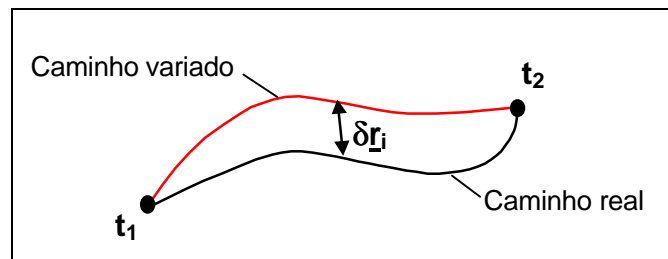


Fig. 3.2 - Interpretação gráfica de um deslocamento virtual.

Logo, a Equação (3.33) simplifica-se na seguinte equação:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\underline{d} K + \underline{d} \bar{W}) dt = 0 \quad (3.34)$$

Como  $d\bar{W}$  representa o trabalho virtual de forças conservativas e não conservativas vem que

$$d\bar{W} = d\bar{W}_C + d\bar{W}_{NC} \quad (3.35)$$

onde  $d\bar{W}_C = -dV$  é o trabalho realizado por forças conservativas e  $d\bar{W}_{NC}$  é o trabalho realizado por forças não conservativas, daí teremos:

$$d\bar{W} = -dV + d\bar{W}_{NC} \quad (3.36)$$

Aplicando a Equação (3.36) na Equação (3.34) vem:

$$\int_{t_1}^{t_2} (dK - dV) dt + \int_{t_1}^{t_2} d\bar{W}_{NC} dt = 0 \quad (3.37)$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} d(K - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} d\bar{W}_{NC} dt = 0} \quad (3.38)$$

A Equação (3.38) é conhecida como princípio generalizado de Hamilton. Se não há forças não conservativas no sistema então a Equação (3.38) simplifica-se para

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} d(K - V) dt = 0} \quad (3.39)$$

que é conhecida como o princípio estendido de Hamilton.

### 3.2.2 - ABORDAGEM LAGRANGIANA

Podemos compactar o integrando da Equação (3.39) inserindo a noção de Lagrangiana do sistema, segundo Meirovitch (1980 e 1970b), Leite (1978) e Greenwood (1965):

$$L = K - V \quad (3.40)$$



logo, a Equação (3.39) fica da seguinte forma:

$$dS = \int_{t_1}^{t_2} dL dt = 0 \quad (3.41)$$

Onde o S da Equação (3.41), conhecido como “ação”, é expresso por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (3.42)$$

O objetivo agora é encontrar o valor estacionário da “ação”. Para tanto, rescrevamos a Equação (3.42) considerando a Lagrangiana L como função do tempo  $t$ , da posição  $\underline{r}$  e da velocidade  $\dot{\underline{r}}$ :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, \underline{r}, \dot{\underline{r}}\right) dt \quad (3.43)$$

A Equação (3.43) é um “funcional”.

Se inserirmos uma perturbação na Equação (3.43),

$$\underline{R} = \underline{r}(t) + \epsilon \underline{h}(t) \quad (3.44)$$

que é o valor perturbado da posição  $\underline{r}$ , estaremos fazendo o funcional S função de  $\epsilon$ , onde  $\underline{h}(t_1) = \underline{h}(t_2) = 0$  (Figura 3.3), logo,

$$S(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(t, \underline{R}, \dot{\underline{R}}\right) dt \quad (3.45)$$

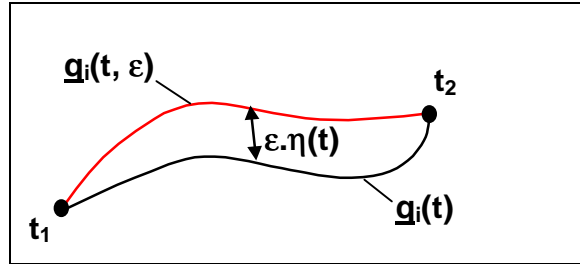


Fig. 3.3 - Trajetórias real e perturbada.

Numa forma geral, usam-se coordenadas generalizadas:

$$S(\mathbf{e}) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_N) dt \quad (3.46)$$

Inserindo perturbações às coordenadas generalizadas teremos de uma forma geral:

$$\bar{q}_i = q_i + \mathbf{e} \mathbf{h}(t) \quad (3.47)$$

que é o valor perturbado da coordenada  $q_i$ . Podemos trabalhar apenas com essa coordenada generalizada perturbada no prosseguimento dos cálculos, entretanto, para  $N$  coordenadas generalizadas devemos ter  $N$  soluções.

Derivando a Equação (3.46) em relação a  $\mathbf{e}$  vem:

$$\frac{dS}{d\mathbf{e}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dL}{d\mathbf{e}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \left( \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_i} \cdot \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{q}}_i}{\partial \mathbf{e}} \right) dt \quad (3.48)$$

mas como,

$$\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} (q_i(t) + \mathbf{e} \mathbf{h}(t)) = \mathbf{h}(t) \quad (3.49)$$

e

$$\frac{\partial \dot{\bar{q}}_i}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \left( \dot{\bar{q}}_i(t) + \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{h}}(t) \right) = \dot{\mathbf{h}}(t) \quad (3.50)$$

daí, teremos

$$\frac{dS}{d\mathbf{e}} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathbf{h}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\mathbf{h}}(t) \right) dt \quad (3.51)$$

$$\frac{dS}{d\mathbf{e}} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathbf{h}(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\mathbf{h}(t) \quad (3.52)$$

Integrando por partes a segunda parcela do segundo membro da Equação (3.52) vem que

$$\frac{dS}{d\mathbf{e}} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathbf{h}(t) dt + \sum_i^N \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathbf{h}(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \mathbf{h}(t) \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt \quad (3.53)$$

$$\frac{dS}{d\mathbf{e}} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \mathbf{h}(t) dt \quad (3.54)$$

Quando fizermos  $\varepsilon = 0$ , teremos  $dS/d\mathbf{e} = 0$ ;  $\bar{q}_i = q_i$  e  $\dot{\bar{q}}_i = \dot{q}_i$ , e daí:

$$\left. \frac{dS}{d\mathbf{e}} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i^N \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \mathbf{h}(t) dt = 0 \quad (3.55)$$

No intervalo  $(t_1, t_2)$  o  $\eta(t)$  não é nulo o que permite concluir que a solução é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (3.56)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0} \quad (3.57)$$

que é a equação diferencial de Euler-Lagrange, calculada em  $q_i$  e  $\dot{q}_i$ . Segundo Junkins (1993), D'azzo (1981) e Meirovitch (1970), a Equação (3.57) pode ser escrita numa forma mais geral tal como segue:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i} \quad (3.58)$$

onde  $Q_i$  representa as forças generalizadas (podendo ser forças ou torques) e  $\mathfrak{S}$  é a função de dissipação de Rayleigh representando forças de amortecimento viscoso:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j \quad (3.59)$$

sendo os coeficientes  $c_{ij}$  simétricos em  $i$  e  $j$ . A Equação (3.59) pode ser encontrada em Junkins (1993).

### 3.2.3 - VIGAS DE EULER-BERNOULLI E TIMOSHENKO

Nesta seção serão abordados dois tipos de modelos de vigas (segundo Junkins, 1993; e Craig, 1981).

- a) Viga de Euler-Bernoulli: a elasticidade (“stiffness”)  $EI$  (onde “E” é o módulo de Young e “I” é o momento de inércia) e a área transversal  $A$  dependem somente da posição  $x$  (Figura 3.4).

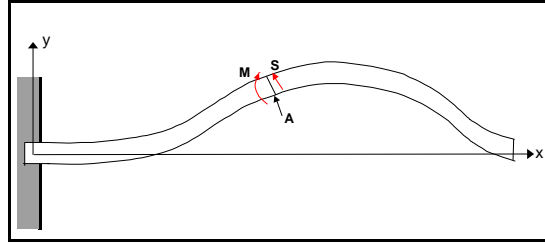


Fig. 3.4 - Viga de Euler-Bernoulli.

O momento fletor está relacionado com a curvatura da viga da seguinte forma:

$$M = EI.(curvatura) \quad (3.60)$$

Para uma viga de Euler-Bernoulli temos para o momento fletor:

$$M = EI. \frac{1}{\mathbf{m}} \quad (3.61)$$

e a tensão cisalhante é dada por:

$$S = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.62)$$

Em muitos casos em que a flexão da viga é pequena, o momento fletor da viga pode ser aproximado por:

$$M \sim EI. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3.63)$$

onde  $y(x,t)$  representa o movimento transversal de um ponto sobre a linha-neutra da viga (região a qual não sofre deformações quando a viga é sujeita a deformações).

O cálculo da tensão de cisalhamento é dado por substituição da Equação (3.63) na Equação (3.62):

$$S = EI \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \quad (3.64)$$

As energias cinética e potencial são dadas a seguir, respectivamente, pelas equações:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \rho \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \cdot dx \quad (3.65)$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L EI \cdot \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \cdot dx \quad (3.66)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa da viga e  $L$  é o comprimento da viga.

b) Viga de Timoshenko:  $EI$  e  $A$  dependem das rotações da estrutura provocadas por forças de cisalhamento (Figura 3.5).

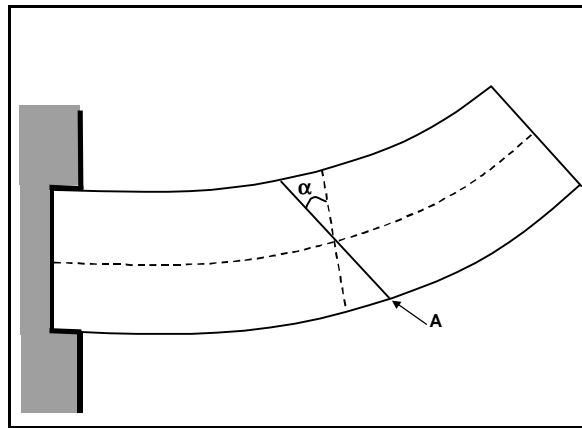


Fig. 3.5 - Viga de Timoshenko.

Aqui  $\alpha$  é a rotação da seção transversal dada por:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.67)$$

onde  $\beta$  é o chamado ângulo de cisalhamento.

O Momento fletor para a viga de Timoshenko é dado por:

$$M = EI \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \quad (3.68)$$

e a tensão de cisalhamento:

$$S = EI \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial^2 x} \quad (3.69)$$

e as energias cinética e potencial:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \mathbf{r} \cdot A(\dot{y})^2 \cdot dx + \int_0^2 \mathbf{r} \cdot I(\dot{\mathbf{a}})^2 \cdot dx \quad (3.70)$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L EI \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \right)^2 \cdot dx \quad (3.71)$$

### 3.2.4 - O PROBLEMA DIFERENCIAL DO AUTOVALOR

Considere a equação diferencial linear do movimento transversal de uma viga engastada-livre (“clamped-free beam”) de Euler-Bernoulli quando não há termos forçantes (Jenkins, 1993):

$$EI \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mathbf{r} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.72)$$

Empregando o método de separação de variáveis

$$y(x, t) = Y(x) \cdot F(t) \quad (3.73)$$

e aplicando (3.73) em (3.72):

$$EI \cdot \frac{\partial^4 (Y(x) \cdot F(t))}{\partial x^4} + \mathbf{r} \cdot \frac{\partial^2 (Y(x) \cdot F(t))}{\partial t^2} = 0 \quad (3.74)$$

$$\frac{EI}{r.Y(x)} \cdot \frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} + \frac{1}{F(t)} \cdot \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.75)$$

O fato mostrado na Equação (3.75) de que os termos dependentes de  $x$  cancelam-se com os termos dependentes de  $t$  implica que são iguais a um termo constante e possuem sinais opostos:

$$\frac{EI}{r.Y(x)} \cdot \frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} = - \frac{1}{F(t)} \cdot \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = I \quad (3.76)$$

Notemos que  $\lambda$  pode ser um valor estritamente positivo ou negativo. Para o caso estritamente negativo assumamos que  $\lambda = -\omega^2$  onde  $\omega$  é uma constante qualquer não nula. Analisemos o que ocorre partindo da Equação (3.76):

$$\frac{EI}{r.Y(x)} \cdot \frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} = I \quad (3.77)$$

$$- \frac{1}{F(t)} \cdot \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = I \quad (3.78)$$

Partindo agora da Equação (3.78), sendo  $\lambda = -\omega^2$ ,

$$- \frac{1}{F(t)} \cdot \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} - \omega^2 \cdot F(t) = 0 \quad (3.80)$$

cuja solução é:

$$F(t) = \bar{C}_1 \cdot e^{-\omega t} + \bar{C}_2 \cdot e^{+\omega t} \quad (3.81)$$

que é claramente divergente, não possuindo interesse físico prático. Por este motivo  $\lambda$  tem que ser estritamente positivo.



Assim sendo, fazamos  $\lambda = +\omega^2$  para ter a partir da Equação (3.78):

$$-\frac{1}{F(t)} \cdot \frac{\partial^2 F(t)}{\partial t^2} = \mathbf{w}^2 \quad (3.82)$$

teremos a seguinte solução:

$$F(t) = \overline{C}_1 \cdot e^{-j \cdot \mathbf{w} \cdot t} + \overline{C}_2 \cdot e^{+j \cdot \mathbf{w} \cdot t} \quad (3.83)$$

$$F(t) = C \cdot \cos(\mathbf{w} \cdot t - \mathbf{f}) \quad (3.84)$$

Podemos agora utilizar  $\lambda = +\omega^2$  para obter uma solução para a Equação (3.77):

$$\frac{EI}{r \cdot Y(x)} \cdot \frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} = \mathbf{w}^2 \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} - \frac{\mathbf{w}^2 \cdot r}{EI} \cdot Y(x) = 0 \quad (3.86)$$

fazendo  $\mathbf{b}^4 = \frac{\mathbf{w}^2 \cdot r}{EI}$ , vem:

$$\frac{\partial^4 Y(x)}{\partial x^4} - \mathbf{b}^4 \cdot Y(x) = 0 \quad (3.87)$$

A Equação (3.87) possui as seguintes raízes:  $\beta$ ,  $-\beta$ ,  $j \cdot \beta$ ,  $-j \cdot \beta$ . Portanto,  $Y(x)$  será da forma:

$$Y(x) = k_1 \cdot e^{-\mathbf{b} \cdot x} + k_2 \cdot e^{\mathbf{b} \cdot x} + k_3 \cdot e^{-j \cdot \mathbf{b} \cdot x} + k_4 \cdot e^{j \cdot \mathbf{b} \cdot x} \quad (3.88)$$

Para obter uma forma trigonométrica da Equação (3.88) temos que proceder da seguinte forma:

$$Y(x) = k_1 \cdot e^{-\mathbf{b} \cdot x} + k_2 \cdot e^{\mathbf{b} \cdot x} - k_1 \cdot e^{\mathbf{b} \cdot x} + k_2 \cdot e^{-\mathbf{b} \cdot x} + k_1 \cdot e^{\mathbf{b} \cdot x} - k_2 \cdot e^{-\mathbf{b} \cdot x} + k_3 \cdot e^{-j \cdot \mathbf{b} \cdot x} + k_4 \cdot e^{j \cdot \mathbf{b} \cdot x} \quad (3.89)$$

$$Y(x) = k_1[e^{-b.x} - e^{b.x}] + k_2[e^{b.x} + e^{-b.x}] + k_1.e^{b.x} - k_2.e^{-b.x} + C_2.\cos(\mathbf{b}.x) + C_1.\sin(\mathbf{b}.x) \quad (3.90)$$

onde  $C_1 = j.(-k_3 + k_4)$  e  $C_2 = k_3 + k_4$ . Continuando o desenvolvimento a partir

da Equação (3.90) fazendo  $k_1 = -C_3'/2$  e  $k_2 = C_4/2$ :

$$Y(x) = -C_3' \left[ \frac{e^{-b.x} - e^{b.x}}{2} \right] + C_4 \left[ \frac{e^{-b.x} + e^{b.x}}{2} \right] - k_2.e^{-b.x} + k_1.e^{b.x} + C_2.\cos(\mathbf{b}.x) + C_1.\sin(\mathbf{b}.x) \quad (3.91)$$

$$Y(x) = C_1.\sin(\mathbf{b}.x) + C_2.\cos(\mathbf{b}.x) - C_3' \left[ \frac{e^{-b.x} - e^{b.x}}{2} \right] + C_4 \left[ \frac{e^{-b.x} + e^{b.x}}{2} \right] - k_1 \left[ \frac{k_2}{k_1} e^{-b.x} - e^{b.x} \right] \quad (3.92)$$

Da Equação (3.92) obtém-se facilmente a seguinte equação:

$$Y(x) = C_1.\sin(\mathbf{b}.x) + C_2.\cos(\mathbf{b}.x) + C_3.\sinh(\mathbf{b}.x) + C_4.\cosh(\mathbf{b}.x) \quad (3.93)$$

onde  $C_3 = -C_3' - k$ .

Das condições geométricas de contorno temos:

$$Y(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \quad (3.94)$$

$$\frac{dY(0)}{dx} = 0 \Rightarrow \mathbf{b}.C_1 + \mathbf{b}.C_3 = 0 \quad (3.95)$$

$$\frac{d^2Y(L)}{dx^2} = 0 \Rightarrow -\mathbf{b}^2.\sin(\mathbf{b}.L).C_1 - \mathbf{b}^2.\cos(\mathbf{b}.L).C_2 + \mathbf{b}^2.\sinh(\mathbf{b}.L).C_3 + \mathbf{b}^2.\cosh(\mathbf{b}.L).C_4 = 0 \quad (3.96)$$

$$\frac{d^3Y(L)}{dx^3} = 0 \Rightarrow -\mathbf{b}^3.\sin(\mathbf{b}.L).C_1 - \mathbf{b}^3.\cos(\mathbf{b}.L).C_2 + \mathbf{b}^3.\sinh(\mathbf{b}.L).C_3 + \mathbf{b}^3.\cosh(\mathbf{b}.L).C_4 = 0 \quad (3.97)$$

Colocando as Equações (3.94) a (3.97) na forma matricial vem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{b} & 0 & \mathbf{b} & 0 \\ -\mathbf{b}^2.\sin(\mathbf{b}.L) & -\mathbf{b}^2.\cos(\mathbf{b}.L) & \mathbf{b}^2.\sinh(\mathbf{b}.L) & \mathbf{b}^2.\cosh(\mathbf{b}.L) \\ -\mathbf{b}^3.\cos(\mathbf{b}.L) & -\mathbf{b}^3.\sin(\mathbf{b}.L) & \mathbf{b}^3.\cosh(\mathbf{b}.L) & \mathbf{b}^3.\sinh(\mathbf{b}.L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

Para a Equação (3.98) fornecer uma solução não-trivial para  $C_1, C_2, C_3, C_4$  é preciso que o determinante da matriz de coeficientes de  $C_1, C_2, C_3, C_4$  seja igual à zero:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{b} & 0 & \mathbf{b} & 0 \\ -\mathbf{b}^2 \cdot \sin(\mathbf{b} \cdot L) & -\mathbf{b}^2 \cdot \cos(\mathbf{b} \cdot L) & \mathbf{b}^2 \cdot \sinh(\mathbf{b} \cdot L) & \mathbf{b}^2 \cdot \cosh(\mathbf{b} \cdot L) \\ -\mathbf{b}^3 \cdot \cos(\mathbf{b} \cdot L) & -\mathbf{b}^3 \cdot \sin(\mathbf{b} \cdot L) & \mathbf{b}^3 \cdot \cosh(\mathbf{b} \cdot L) & \mathbf{b}^3 \cdot \sinh(\mathbf{b} \cdot L) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.99)$$

Da Equação (3.99) teremos, finalmente:

$$\cos(\mathbf{b} \cdot L) \cdot \cosh(\mathbf{b} \cdot L) = -1 \quad (3.100)$$

que é conhecida como a equação característica, e inclui uma função transcendental. Recorrendo a métodos numéricos obtemos infinitas raízes “ $\mathbf{b}_i \cdot L$ ” como soluções da Equação (3.100). Algumas dessas soluções estão apresentadas em Junkins (1993).

As freqüências de vibração da estrutura, ou modos de vibração, podem ser dadas pela seguinte expressão (em Hertz):

$$f_i = \frac{(\mathbf{b}_i \cdot L)^2}{2 \cdot \mathbf{p}} \sqrt{\frac{EI}{\mathbf{r} \cdot L^4}} \quad , i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.101)$$

onde “ $\mathbf{b}_i \cdot L$ ” são as soluções da Equação (3.100). A freqüência dos modos de vibração vão aumentando à medida que o índice  $i$  aumenta. Não foi considerado nesses cálculos, mas se considerássemos o amortecimento estrutural  $\zeta$ , perceberíamos que ele aumentaria à medida que a freqüência aumenta, conforme verificado experimentalmente em outros trabalhos.

### 3.3 - MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS

Para gerar um modelo de uma planta flexível que tenha equação diferencial de aproximadamente  $N$  graus de liberdade “Degrees Of Freedom” - (D.O.F.), o

deslocamento elástico transversal pode ser expandido como uma combinação linear entre N funções de forma (“mode-shapes”)  $f_i(x)$ . Portanto a “deformação”  $y(x,t)$  pode ser descrita por:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^N f_i(x).q_i(t) \quad (3.102)$$

Os  $f_i(x)$  são as funções de forma (“mode-shapes”) assumidas e  $q_i(t)$  são as coordenadas generalizadas, N denota o número de termos retidos na aproximação.

Usa-se as expressões das energias cinética K e potencial V para se obter a equação de movimento, por meio da equação de Euler-Lagrange. Se o  $f_i(x)$  for uma “função de comparação”, isto é, uma função que satisfaz condições de contorno físicas e geométricas, ela pode ser expressa por (Junkins, 1993):

$$f_i(x) = 1 - \cos\left(\frac{i\pi \cdot x}{L}\right) + \frac{1}{2} \cdot (-1)^{i+1} \left(\frac{i\pi \cdot x}{L}\right)^2 \quad (3.103)$$

para uma viga engastada-livre.

Por exemplo, encontremos a equação matricial do movimento para uma viga de Euler-Bernoulli com deformação transversal.

Substituindo a Equação (3.102) nas Equações (3.65) teremos:

$$K(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \mathbf{r} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^N f_i(x).q_i(t) \right) \right]^2 dx \quad (3.104)$$

$$K(t) = \frac{\mathbf{r}}{2} \cdot \int_0^L \left( \sum_{i=1}^N f_i(x) \cdot \dot{q}_i(t) \right)^2 dx \quad (3.105)$$

$$K(t) = \frac{\mathbf{r}}{2} \cdot \int_0^L \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i(x) \cdot \dot{q}_i(t) \right) \left( \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_j(x) \cdot \dot{q}_j(t) \right) dx \quad (3.106)$$

$$K(t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_i^N \sum_j^N \dot{q}_i(t) \cdot \dot{q}_j(t) \cdot \left( \int_0^L \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_i(x) \cdot \mathbf{f}_j(x) \cdot dx \right) \quad (3.107)$$

Na Equação (3.107), o termo entre parêntesis é um elemento  $M_{ij}$  da matriz de massa  $M_a$  do apêndice flexível:

$$M_{ij} = \int_0^L \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_i(x) \cdot \mathbf{f}_j(x) \cdot dx \quad (3.108)$$

$$M_{ij} = \mathbf{r} \cdot L \cdot \left[ 1 + (-1)^{i+j} \left( \left( \frac{i}{j} \right)^2 + \left( \frac{j}{i} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{d}_{ij} + (-1)^{i+1} \cdot \left( \frac{i^2 \cdot \mathbf{p}^2}{6} \right) + (-1)^{j+1} \cdot \left( \frac{j^2 \cdot \mathbf{p}^2}{6} \right) + (-1)^{i+j} \cdot \left( \frac{i^2 \cdot j^2 \cdot \mathbf{p}^2}{20} \right) \right] \quad (3.109)$$

onde  $\mathbf{d}_{ij}$  é o delta de Kronecker.

A energia cinética pode ser expressa na forma matricial:

$$K(t) = \frac{1}{2} \cdot \dot{\underline{q}} \cdot \underline{M}_a \cdot \dot{\underline{q}} \quad (3.110)$$

onde  $M_a$  é a matriz de massa relativa ao apêndice flexível.

Analogamente, de acordo com a Equação (3.66), a energia potencial pode ser escrita como segue:

$$V(t) = \frac{1}{2} \cdot \underline{q} \cdot \underline{K} \cdot \underline{q} \quad (3.111)$$

onde

$$K_{ij} = EI \cdot \left[ (-1)^{i+j} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{d}_{ij} \right] \cdot \left( \frac{i^2 \cdot j^2 \cdot \mathbf{p}^4}{L^3} \right) \quad (3.112)$$

Fazendo-se uso da equação de Euler-Lagrange pode-se chegar à seguinte equação de movimento:

$$M_a \cdot \ddot{q} + K \cdot q = Q \quad (3.113)$$

onde  $Q$  são as forças generalizadas de controle (forças ou torques).

### 3.4 - REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA EM VARIÁVEIS DE ESTADO MODAIS

Conforme está muito bem estabelecido na literatura (Joshi, 1989 e Silva, 1997), emprega-se a matriz dos autovalores à direita  $\Phi = [\underline{f}_1 : \underline{f}_2 : \underline{f}_3 : \dots : \underline{f}_n]$  como matriz de transformação de um espaço modal de estados para um espaço real (físico), tal como está mostrado abaixo:

$$\underline{X}(t) = \Phi \underline{h}(t) \quad (3.114)$$

Assim sendo, podemos montar a seguinte expressão:

$$I \ddot{\underline{h}} + \text{diag}(0, 0, 0, \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{n-1}^2) \underline{h} = \Phi^T \cdot b_c \cdot \underline{u} \quad (3.115)$$

Onde  $b_c$  é a matriz influência no controle e  $\underline{u}$  é o vetor de controle.

Se forças dissipativas forem introduzidas na estrutura (Joshi, 1989) teremos:

$$I \ddot{\underline{h}} + 2\zeta \cdot \text{diag}(0, 0, 0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}) \dot{\underline{h}} + \text{diag}(0, 0, 0, \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{n-1}^2) \underline{h} = \Phi^T \cdot b_c \cdot \underline{u} \quad (3.116)$$

onde  $\zeta$  é a razão de amortecimento.

Finalmente, a equação diferencial linear de estados é dada por:

$$\dot{\underline{X}}(t) = A \cdot \underline{X}(t) + B \cdot \underline{u} \quad (3.117)$$

onde o vetor de estados é dado por:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{h} \\ \dot{\underline{h}} \\ \underline{h} \\ - \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

onde  $\underline{h}$  representa as rotações e os deslocamentos elásticos; e as matrizes A e B são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -diag(0,0,0,w_1^2,w_2^2,\dots,w_{n-1}^2) & -2z.diag(0,0,0,w_1,w_2,\dots,w_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T . b_c \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

Estas informações constituem parte da base teórica na qual está fundamentado o modelo de simulação elaborado por Silva (1997).

Sendo a equação das saídas dada por:

$$\underline{Y} = C.\underline{X} \quad (3.121)$$

$$\underline{Y} = C.\Phi\underline{h} \quad (3.122)$$

### 3.5 - UM MODELO ANALÓGICO DA ESTRUTURA DO SATÉLITE CBERS-1

O modelo analógico da estrutura do satélite CBERS-1 usando o método dos modos assumidos foi elaborado por Silva (1997), em sua dissertação de mestrado, e é capaz de executar as simulações para até 5 modos de vibração, considerando as equações dinâmicas acopladas deste sistema MIMO.

A simulação usando um modelo do CBERS-1 (um satélite assimétrico) utilizou os seguintes dados estruturais:

- massa total: 1400 kg;
- massa do apêndice flexível: 49 kg;

- comprimento do apêndice flexível: 6,135 m;
- tensor de inércia do corpo rígido:

$$I_0 = \begin{bmatrix} 1983 & -12,8 & 21,5 \\ -12,8 & 1002 & 9,8 \\ 21,5 & 9,8 & 1831 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

- tensor de inércia do apêndice flexível:

$$I_a = \begin{bmatrix} 720 & 0 & 0 \\ 0 & 22,744 & 0 \\ 0 & 0 & 698,06 \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Pela Equação (3.124) pode-se notar que apesar dos cálculos terem sido feitos para o modelo de uma viga de Euler-Bernoulli delgada, foi considerada inércia ao redor do eixo y (eixo de “pitch”  $I_{a22} = 22,744$ ) visando forçar a simulação a trabalhar como se tivesse uma placa, o que é interessante tendo em vista a complexidade dos cálculos de modelamento de placas.

A Figura 3.6 mostra a relação entre os eixos X,Y e Z com os eixos de “roll”, “pitch” e “yaw” que serão úteis na interpretação dos resultados apresentados nos Capítulos 5 e 6 deste trabalho.



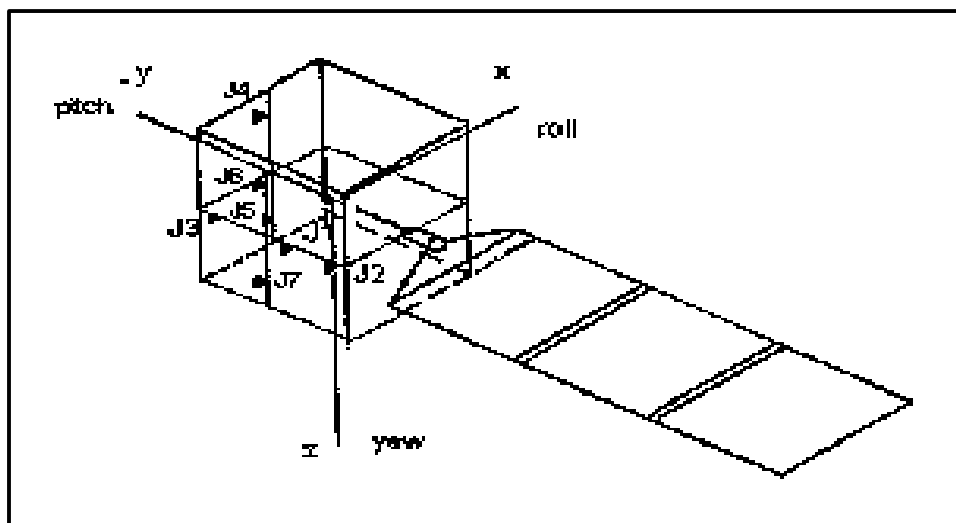


Fig. 3.6 - Eixos de atitude para a simulação com um modelo do satélite CBERS-1.

FONTE: Silva (1997, p. 10).

Conforme Silva (1997), foram consideradas nas equações dinâmicas as perturbações devido ao arrasto atmosférico, à pressão de radiação solar e a resíduos magnéticos. Tais perturbações afastam os eixos de atitude de suas condições iniciais consideradas nulas (0 radianos). Para tentar corrigir o efeito provocado pelas perturbações o controle de atitude começa a agir. Tal controle é dado por torques e nas simulações deste trabalho não foram considerados limites para os mesmos. Entretanto, convém afirmar que uma simulação mais próxima da realidade poderia considerar limites para os sinais de controle, como apresentado por Silva (1997) que usou um torque de controle de  $\pm 0,9$  N.m. Entretanto, o principal objetivo deste trabalho centra-se na análise da estabilidade do sistema de controle em tempo discreto, não importando, portanto, tais limites.

### 3.6 - EQUIVALENTE DISCRETO NO TEMPO DE UM MODELO ESTRUTURAL DO SATÉLITE CBERS-1

As matrizes A,B,C e D obtidas na simulação analógica conforme mostrado por Silva (1997), em sua dissertação de mestrado, podem ser descritas no domínio

do tempo discreto por uma equivalência discreta segundo a que está mostrada no Apêndice B.

## CAPÍTULO 4

### CONTROLE EM TEMPO DISCRETO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA ANALÓGICAS

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

Um sistema com controle digital de uma planta qualquer pode ser apresentado como mostra a Figura 4.1.

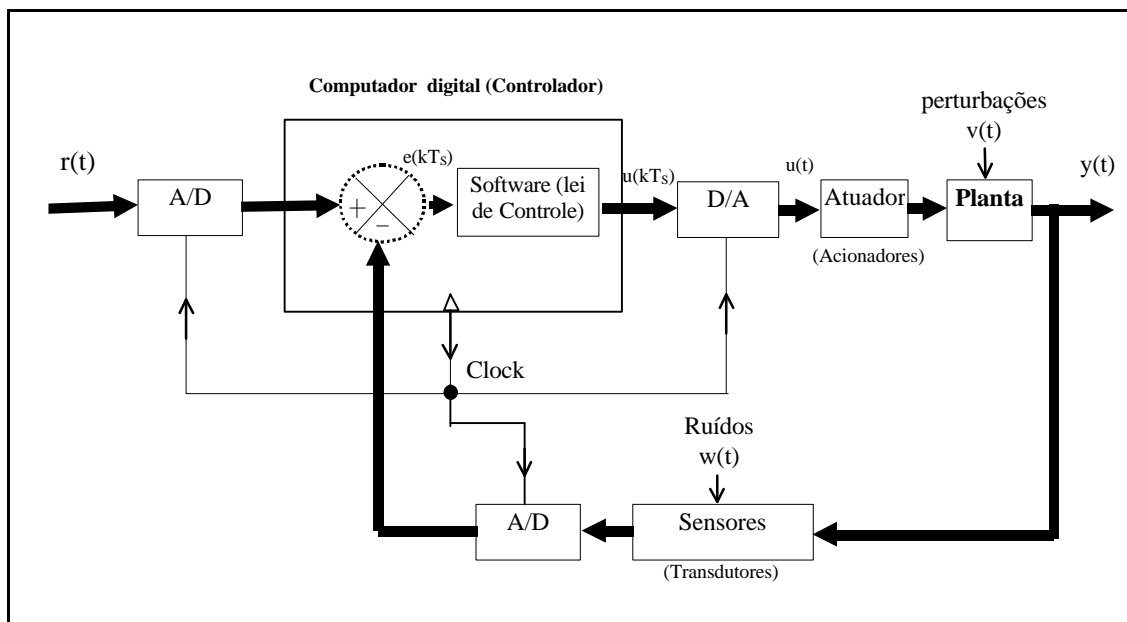


Fig. 4.1 - Diagrama de blocos de um sistema com controle digital.

Até antes de 1947 eram usados computadores analógicos que faziam uso de algoritmos lógicos iterativos que necessitavam de grandes e pesados equipamentos dotados de grandes circuitos elétricos com válvulas para executá-los, o que implicava um enorme consumo de energia elétrica. Isso era definitivamente inviável para a aplicação da computação em sistemas aeroespaciais, onde qualquer aumento de massa ou de consumo de energia era extremamente significativo. Por esse motivo foi só após o desenvolvimento do transistor, em dezembro de 1947, e, principalmente, dos

microprocessadores, em julho de 1958, que o emprego da computação digital na tecnologia aeroespacial tornou-se tão comum e importante.

Mesmo assim, resolvidos os problemas de minimizar o custo nos lançamentos de satélites artificiais, ou ônibus espaciais, etc., reduzindo a massa desses objetos com a utilização da computação digital, nos deparamos com outra série de problemas técnicos a resolver. Tais problemas são características iminentes à tecnologia digital, conforme veremos mais adiante neste trabalho.

Um sistema digital é caracterizado por: amostragem no tempo, atrasos em entradas/saídas e processamento, e a quantização em amplitude. Da amostragem no tempo surgem os seguintes problemas: mascaramento (“aliasing”) e oscilações escondidas (“hidden oscillations”). Entendamos o problema da seguinte maneira: dizer que um dado sistema é discreto no tempo significa dizer que todas as variáveis utilizadas nesse sistema são atualizadas em instantes periódicos de tempo bem definidos cujo intervalo de tempo é denominado “período de amostragem”  $T_S$ . Analogamente, a frequência ou taxa de amostragem  $\omega_S$  é dada por  $2\pi/T_S$ . Uma entidade fictícia porém extremamente importante no mundo digital é a frequência de Nyquist  $\omega_N = \omega_S / 2$ . Seja um sistema com uma largura de faixa finita  $\omega_{máx}$ . Haverá o mascaramento (mutilação ou distorção) na reconstrução (ou recuperação) do sinal a partir de suas amostras se  $\omega_N < \omega_{máx}$  (ou  $\omega_S < 2\omega_{máx}$ ). Isso ocorrerá pois no domínio da frequência não haverá espaço suficiente para dispor comodamente as repetições da largura de faixa finita provocadas pela amostragem. Para que isso não ocorra é necessário que  $\omega_N > \omega_{máx}$  (ou  $\omega_S > 2\omega_{máx}$ ) que é o conhecido teorema de Nyquist (1928) como podemos ver na Figura 4.4. As oscilações escondidas também ocorrem se  $\omega_N < \omega_{máx}$  (ou  $\omega_S < 2\omega_{máx}$ ) pois haverão frequências do espectro do sinal de entrada que não serão vistas pelo amostrador.

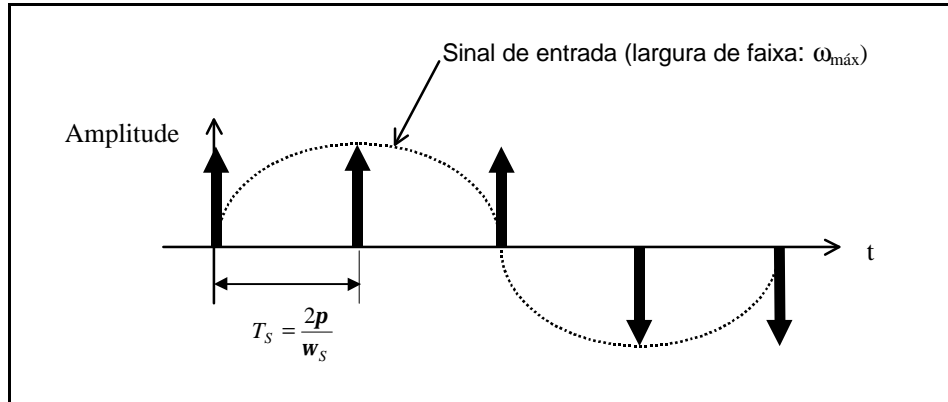


Fig. 4.2 - Amostragem de um sinal.

Conforme pode-se notar na Figura 4.2, nos nodos tem-se valor nulo de amostragem, nos picos tem-se valor máximo e nos vales, valor mínimo, mostrando os principais elementos relativos à informação de entrada (picos, vales e nodos), por meio dos quais é possível reconstruir o sinal tendo apenas suas amostras.

O mais interessante desses fenômenos do mascaramento e das oscilações ocultas é que eles podem ser umas das causas de instabilidade em sistemas digitais, como mostra este trabalho. Neste trabalho também é sugerido um método de análise que tem apresentado bons resultados para a compreensão do problema e de sua solução.

No domínio da frequência teríamos, pela transformada de Fourier  $F(\omega)$  do sinal de entrada  $f(t)$  seu espectro de frequência tal como podemos conferir na Figura 4.3.

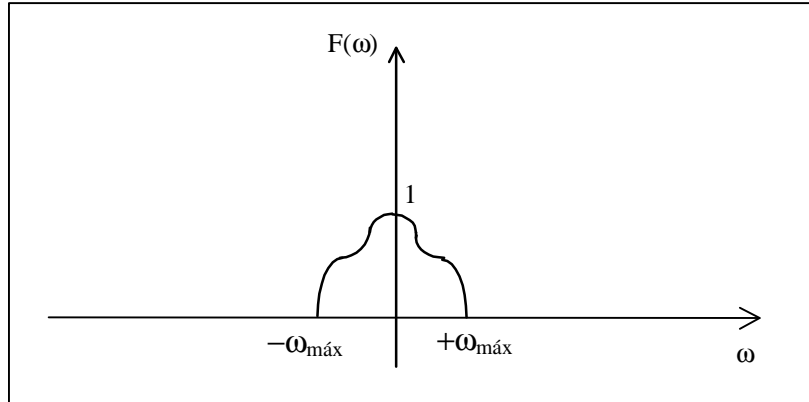


Fig. 4.3 - Espectro normalizado de Fourier de um sinal de entrada com largura de banda finita.

Quando temos uma amostragem do sinal, sua transformada de Fourier tomará a forma da Figura 4.4 (se o sinal de amostragem puder ser modelado num trem de pulsos). Como se vê na Figura 4.4,  $\omega_S$  deve ser no mínimo igual a  $2\omega_{máx}$  para não haver mutilação do sinal (ou  $\omega_S \geq 2\omega_{máx}$ ).

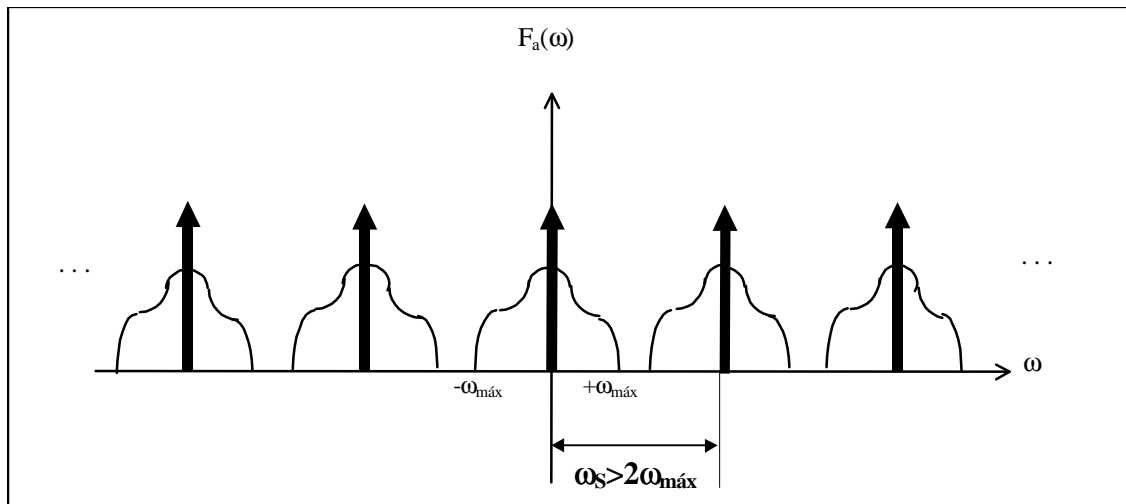


Fig. 4.4 - Sinal amostrado no domínio da frequência.

Os atrasos em entradas/saídas são gerados nos conversores A/D e D/A, respectivamente, e os atrasos de processamento são causados pelo tempo de processamento que é pertinente a um programa de computador responsável pela política de controle. Em suma, pode-se dizer que os atrasos em

entradas/saídas e processamento geram defasagens negativas e a instabilidade pode ocorrer para modos de frequências elevadas. Conforme pode-se verificar no Apêndice A deste trabalho, um filtro Butterworth usado como filtro “anti-aliasing” gera atrasos de resposta que devem se somar aos demais atrasos mencionados. Também há o problema do controle digital com incerteza nos parâmetros da planta como elemento estabilizador, o qual está documentado em Katz (1975). Tais nuances da teoria de controle digital não serão abordadas neste trabalho o qual teve por objetivo investigar os problemas inerentes à discretização no tempo o mais profundamente quanto o tempo disponível para a conclusão desse trabalho permitiu.

A quantização em amplitude de constantes e variáveis em  $2^n$  níveis de quantização de palavras digitais (“digital words”) com  $n$  bits gera o chamado erro de quantização que se interpreta como o incremento (ou decremento) das amplitudes das amostras devido aos ajustes de suas amplitudes aos níveis de quantização.

Isto é reduzido pelo crescimento do  $n$ , o que eleva o tempo de processamento, demandando microprocessadores, conversores A/D e D/A mais rápidos e caros.

O processo de discretização pode ser muito facilmente analisado por meio de diagrama de blocos como podemos ver a seguir:

a) Seja o sistema analógico da Figura 4.5:

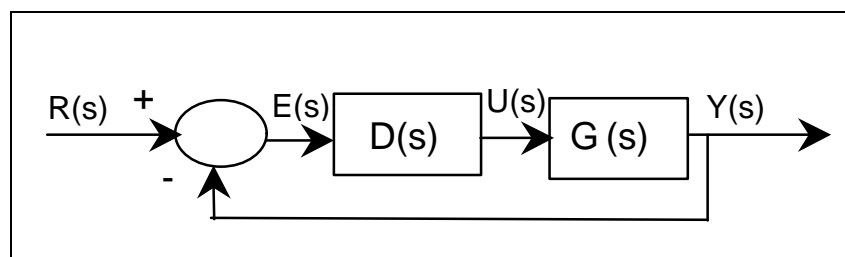


Fig. 4.5 - Representação analógica em malha-fechada.

b) A representação equivalente a da Figura 4.5 no domínio digital será a da Figura 4.6:

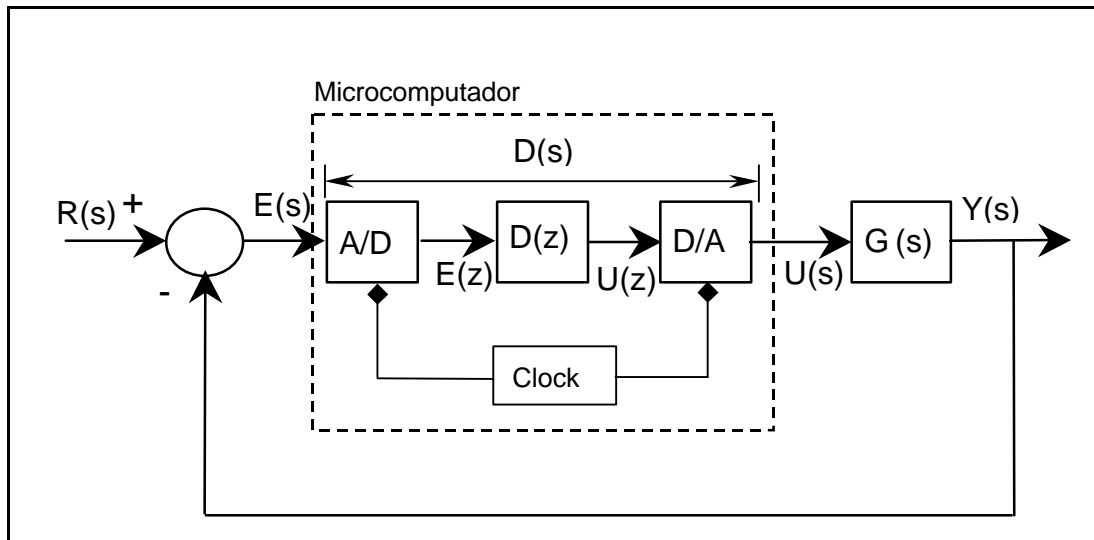


Fig. 4.6 - Equivalência digital da Figura 4.5.

As próximas Figuras serão simplificadas, para facilitar.

c) Uma simples manipulação dos blocos é necessária para se obter o equivalente discreto  $G_{hn}(z)$  da planta analógica  $G(s)$  mostrado na Figura 4.7:

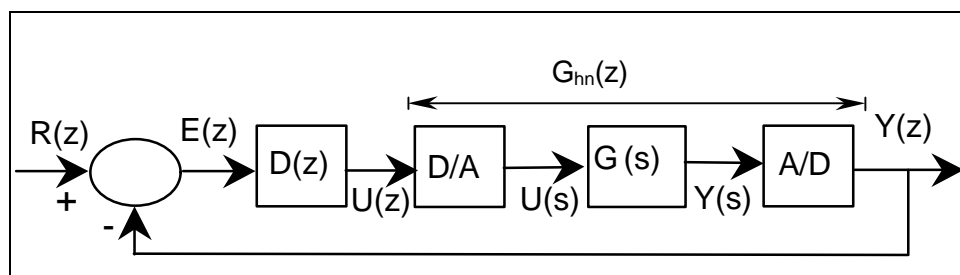


Fig. 4.7 - Sistema digital manipulado.

Notemos que  $G_{hn}(z)$  é o equivalente discreto por segurador ("Hold") de ordem enésima da planta analógica.



O conversor A/D pode ser representado por uma configuração generalizada mostrada na Figura 4.8.

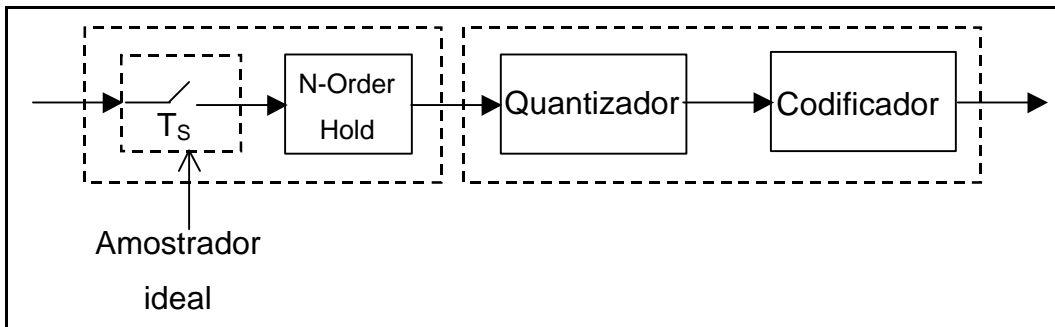


Fig. 4.8 - A/D generalizado.

O princípio de funcionamento é deveras simples: um sinal analógico (contínuo no tempo e na amplitude) é amostrado de  $T_s$  em  $T_s$  segundos (periodicamente). Podemos dizer que a partir daí o sinal é de tempo discreto. Os valores destas amostras são “segurados” por um segurador (“Hold”); que teoricamente pode ter qualquer ordem, durante  $T_s$  segundos. Após isso, o sinal passa por um quantizador que se responsabiliza por ajustar tais sinais de amplitude analógica a certos níveis de amplitude muito bem definidas. Estes sinais ajustados em amplitude ou quantizados serão finalmente convertidos em códigos binários pelo codificador que serão interpretados por um algoritmo digital ou programa de computador o qual gerará saídas digitais.

O conversor D/A possui um funcionamento complementar ao do A/D como podemos verificar na Figura 4.9.

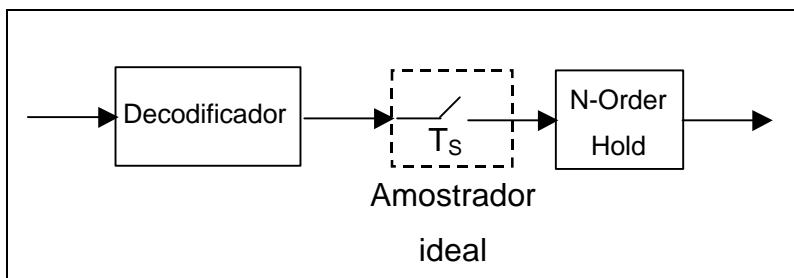


Fig. 4.9 - D/A generalizado.

O decodificador interpreta códigos binários em amplitudes quantizadas. Tais sinais da saída do D/A serão os sinais de controle, neste trabalho.

- d) Uma simplificação do sistema apresentado na Figura 4.7 com segurador de ordem zero (“Zero-Order Hold”) está na Figura 4.10.

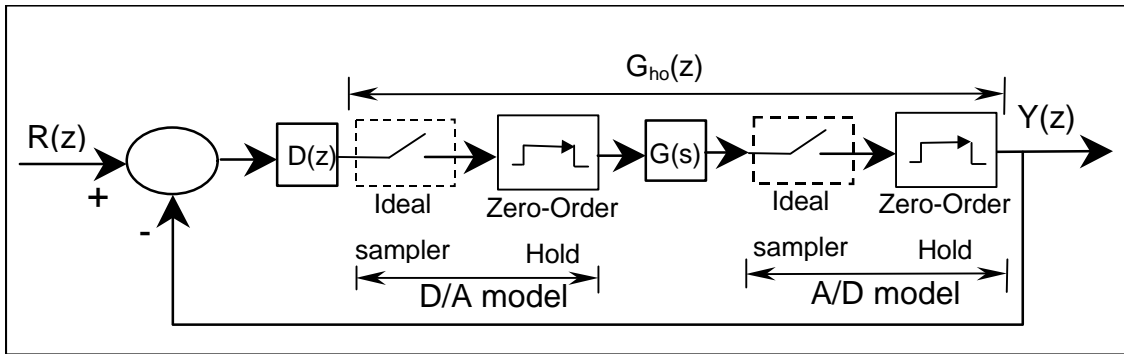


Fig. 4.10 - Simplificação do modelo digital generalizado.

Aqui fazem-se duas simplificações. Numa delas retira-se a quantização e a codificação/decodificação do sistema. Isso é feito com o objetivo de analisar unicamente os efeitos dos sinais discretos no tempo. Na outra simplificação o segurador de ordem-N (“N-Order Hold”) é transformado num "Zero-Order Hold", isto é, um “segurador” de ordem zero. Esta é a equivalência “Hold” de forma mais simples e foi escolhida para descrever o modelo do segurador neste trabalho.

Partindo da Figura 4.10 construímos finalmente a Figura 4.11.

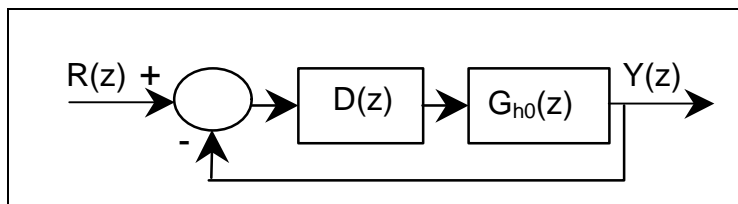


Fig. 4.11 - Equivalente discreto do sistema analógico.

Na Figura 4.11 temos a política de controle  $D(z)$  que corresponde ao algoritmo de controle do sistema e o equivalente discreto "Zero-Order Hold" da planta  $G_{ho}(z)$ .

#### 4.2 - A TRANSFORMADA-Z E EQUIVALÊNCIAS DISCRETAS: FILTROS DISCRETOS

Seja  $\{\dots, -x_k, \dots, x_0, x_1, \dots, x_k, \dots\}$  uma seqüência obtida pela amostragem periódica  $x_k = x(k.T_s)$  de um dado sinal  $x(t)$  nos instantes  $t_k = k.T_s$ ,  $\forall k \in \mathcal{Z}$ , onde  $\mathcal{Z}$  é o conjunto dos números inteiros. Define-se a transformada-Z de dois lados deste sinal por

$$X(z) = Z\{x_k\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \cdot z^{-k} \quad , r_0 \leq |z| \leq R_0 \quad (4.1)$$

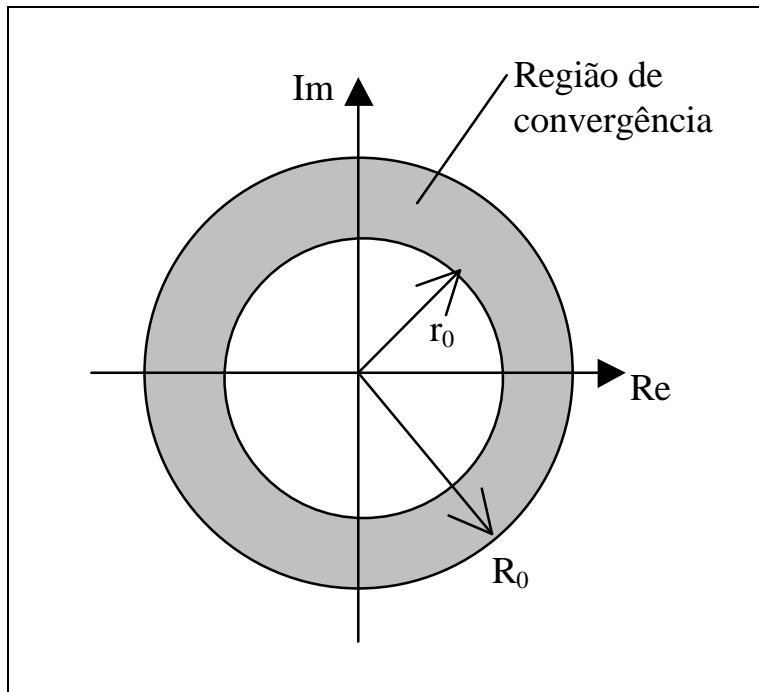


Fig. 4.12 - Região de convergência para a Equação (4.1).

que é conhecida como a transformada de dois lados, e a desigualdade mostrada descreve a região de convergência da transformação mostrada na Figura 4.12. Podemos definir também a transformada de um lado só,

$$X(z) \stackrel{\Delta}{=} Z\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\Delta+\infty} x_k \cdot z^{-k} \quad , r_0 \leq |z| \leq \infty \quad (4.2)$$

mudando apenas a região de convergência conforme mostrado na Figura 4.13.

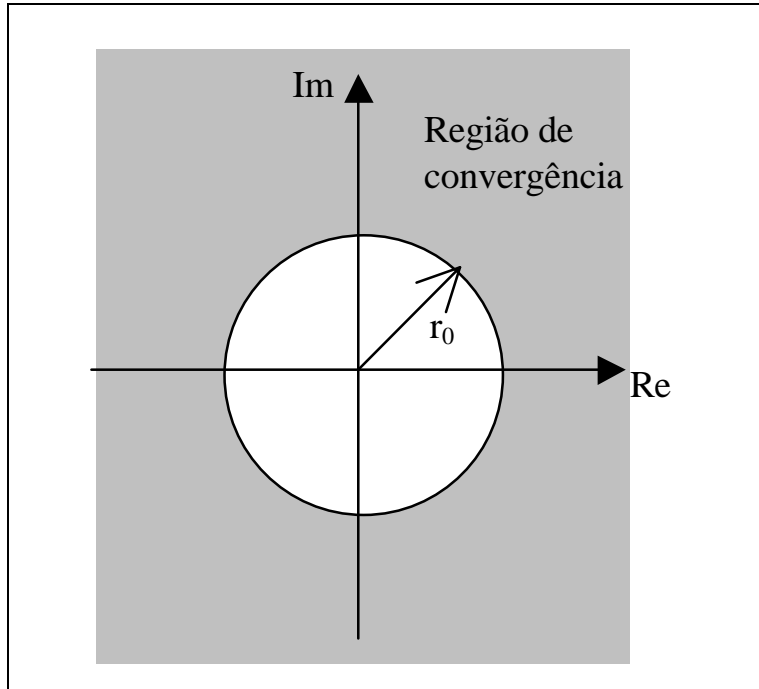


Fig. 4.13 - Região de convergência da Equação (4.2).

Agora vamos provar que

$$Z\{x_{k-1}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-1} \cdot z^{-k} = z^{-1} \cdot X(z) \quad (4.3)$$

o que nos será útil para entender futuros desenvolvimentos. Fazendo  $j=k-1$  na Equação (4.3):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-1} \cdot z^{-(k-1+1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-1} \cdot z^{-(k-1)} \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \cdot z^{-j} = z^{-1} \cdot X(z) \quad (\text{Q.E.D.}) \quad (4.4)$$

#### 4.2.1 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA: MAPEAMENTO DE EQUAÇÕES A DIFERENÇAS

Analisemos a seguir, detalhadamente, os seguintes métodos de integração numérica: “backward”, “forward”, Tustin e Schneider:

- a) “Backward”: dado um sinal de entrada  $e_k$  (que no consecutivo instante passado, foi  $e_{k-1}$ ) determine a saída (sua integral)  $u_k$ . Este método é também conhecido como método de Euler. Matematicamente isso é expresso pela seguinte equação a diferenças finitas (equivalente discreto de uma equação diferencial) conforme mostra a Figura 4.14:

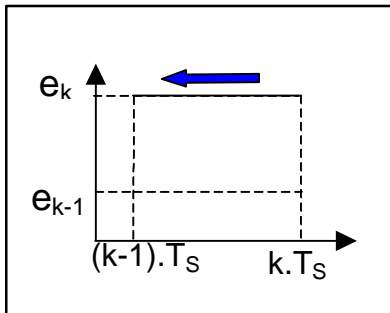


Fig. 4.14 - Integrador “Backward” no domínio do tempo.

$$e_k = \frac{\nabla u_k}{T_s} \quad (4.5)$$

sendo,

$$\nabla u_k = u_k - u_{k-1} \quad (4.6)$$

Agora faremos uso do que aprendemos a respeito da transformada-Z de  $x_{k-1}$  pela Equação (4.3) calculando a transformada-Z da Equação (4.5):

$$T_s \cdot E(z) = U(z) - z^{-1} \cdot U(z) \quad (4.7)$$

$$\frac{E(z)}{U(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{T_s} = \frac{z - 1}{T_s \cdot z} \quad (4.8)$$

Portanto, a equivalência "backward" entre o plano-s e o plano-z (Figura 4.15) é dada por:

$$\frac{E(s)}{U(s)} = s \sim \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{T_s \cdot z} \quad (4.9)$$

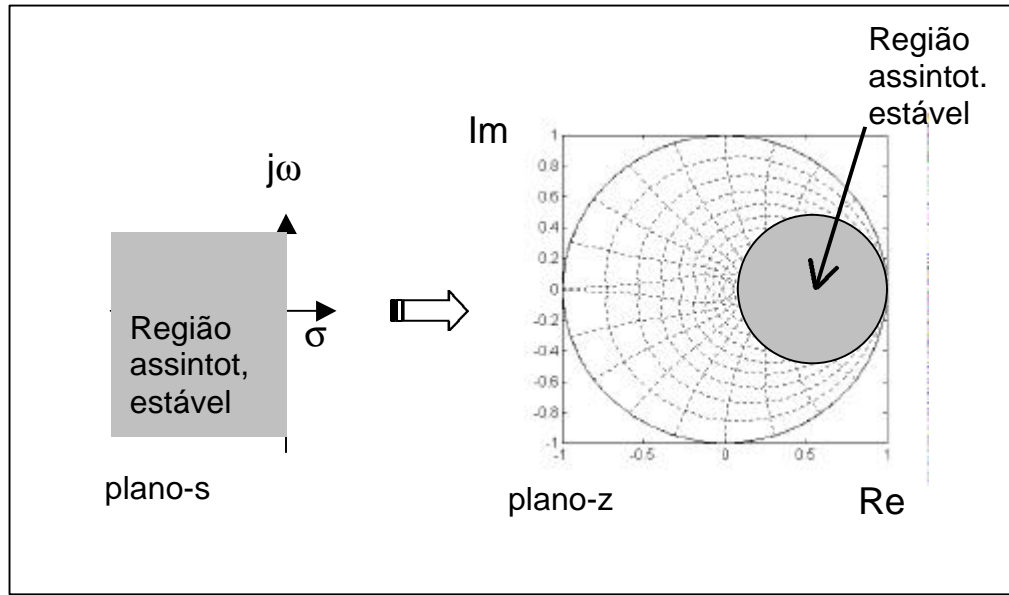


Fig. 4.15 - Mapeamento do plano s para o plano z pela a equivalência "backward".

Exemplo 4.1: mapeamento "backward" atuando como integrador, conforme mostrado na Figura 4.16.

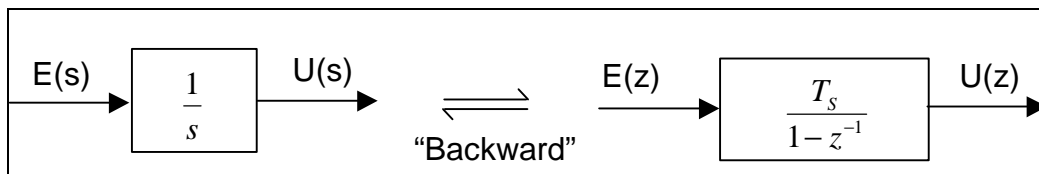


Fig. 4.16 - Mapeamento "backward" atuando como integrador em z.

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T_s}{1 - z^{-1}} \quad (4.10)$$

$$U(z) - z^{-1} \cdot U(z) = T_s \cdot E(z) \quad (4.11)$$

Aplicando a transformação inversa teremos:

$$u_k - u_{k-1} = T_s \cdot e_k \quad (4.12)$$

$$u_k = u_{k-1} + T_s \cdot e_k \quad (4.13)$$

A representação gráfica da Equação (4.13) está na Figura 4.17.

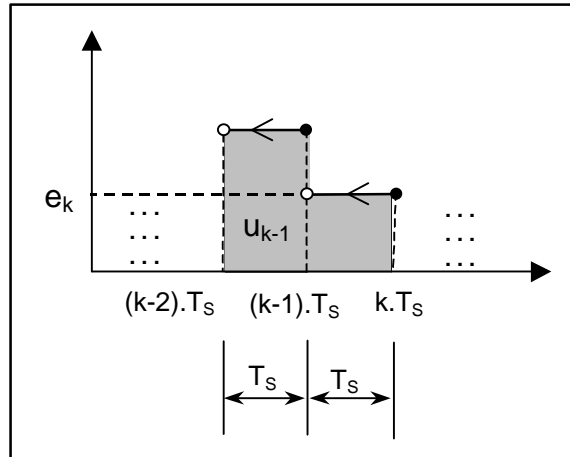


Fig. 4.17 - Equivalência “backward” atuando como integrador em  $k.T_s$ .

- b) “Forward”: é uma representação não-causal ao construir uma saída presente com uma informação de entrada futura tal como mostram as Equações (4.14) e (4.15). É importante salientar que filtros projetados com este mapeamento geram instabilidades (Katz, 1981).

$$e_{k-1} = \frac{1}{T_s} \cdot \nabla u_k = \frac{u_k - u_{k-1}}{T_s} \quad (4.14)$$

Após a aplicação da transformada – Z na Equação (4.14) teremos (Figuras 4.18 e 4.19):

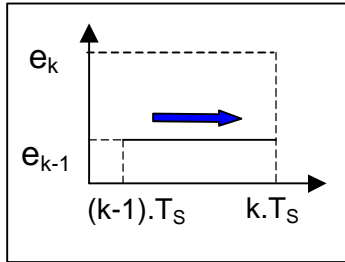


Fig. 4.18 - Integrador “forward” no domínio do tempo.

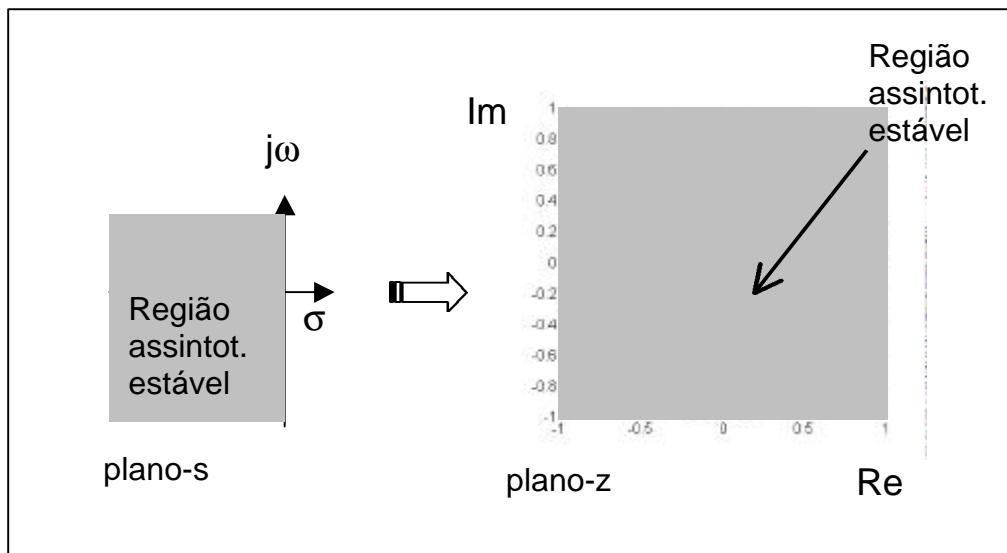


Fig. 4.19 - Mapeamento do plano s para o plano z pela a aproximação “forward”.

$$\frac{E(s)}{U(s)} = s \sim \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{1-z^{-1}}{T_s \cdot z^{-1}} = \frac{z-1}{T_s} \quad (4.15)$$

Pela Equação (4.15) pode-se perceber a não-causalidade da aproximação “forward” notando-se que o número de zeros é maior que o número de pólos (a rigor um zero e nenhum pólo) e isso não pode ser real, destacando assim a não-causalidade da expressão. Entretanto, essa não causalidade do filtro “forward” pode enganar o projetista que fizer uso desta aproximação numa simulação em tempo virtual (tempo não real ou tempo mais que real) produzindo até alguns resultados satisfatórios. Entretanto, se este filtro for



utilizado como derivador numa simulação em tempo real, com sensores na malha, por exemplo, ele provavelmente não funcionará porque necessita de uma entrada futura para produzir uma saída presente, ferindo assim o Princípio da Causalidade: para que um efeito presente seja gerado por um sistema causal qualquer é necessário que tenha havido uma causa passada que obrigou o sistema a produzir tal efeito.

Exemplo 4.2: aproximação “forward” atuando como integrador conforme mostra a Figura 4.20.

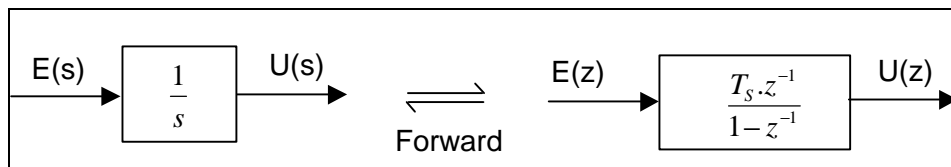


Fig. 4.20 - Aproximação “forward” atuando como integrador.

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T_s \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (4.16)$$

$$U(z) - z^{-1} \cdot U(z) = T_s \cdot z^{-1} \cdot E(z) \quad (4.17)$$

Aplicando a transformação inversa vem (Figura 4.21):

$$u_k - u_{k-1} = T_s \cdot e_{k-1} \quad (4.18)$$

$$u_k = u_{k-1} + T_s \cdot e_{k-1} \quad (4.19)$$

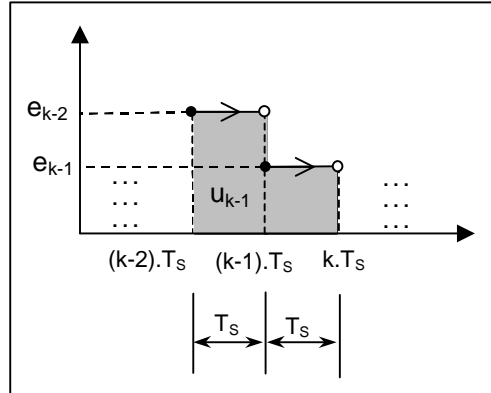


Fig. 4.21 - Aproximação "forward" atuando como integrador.

Provavelmente, a perda de informação da entrada presente seja responsável pela fragilidade de segurança nos projetos com esta aproximação discreta. Notemos, entretanto, que a não-causalidade do "forward" somente é justificada na operação de diferenciação (Equação (4.15)) visto que a operação de integração não viola o princípio da causalidade.

- c) Aproximação Tustin, bilinear ou trapezoidal: de todas as técnicas de integração numérica apresentadas até aqui, esta é a melhor por descrever um mapeamento fiel, isto é, mapear toda a região assintoticamente estável do plano  $s$  (semiplano esquerdo) para o interior do círculo unitário do plano  $z$ . Este método de integração utiliza a entrada e a saída passadas e a entrada presente para construir a saída presente, tal como podemos verificar na Equação (4.21).

A regra de Tustin pode ser retirada de uma equação a diferenças finitas de Adams-Moulton de segunda ordem (Schneider, 1991) e pode ser escrita como segue:

$$e_k = \frac{2}{T_s} \cdot \nabla u_k - e_{k-1} = \frac{2}{T_s} \cdot (u_k - u_{k-1}) - e_{k-1} \quad (4.20)$$

$$e_k = \frac{2}{T_s} \cdot u_k - \frac{2}{T_s} \cdot u_{k-1} - e_{k-1} \quad (4.21)$$

Aplicando a transformada-Z vem (Figuras 4.22 e 4.23):

$$E(z) + z^{-1} \cdot E(z) = \frac{2}{T_s} \cdot (U(z) - z^{-1} \cdot U(z)) \quad (4.22)$$

$$\frac{E(s)}{U(s)} =_s \sim \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad (4.23)$$

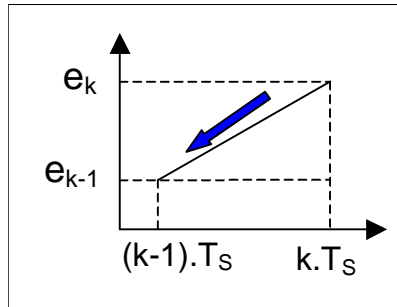


Fig. 4.22 - Integrador Tustin no domínio do tempo.

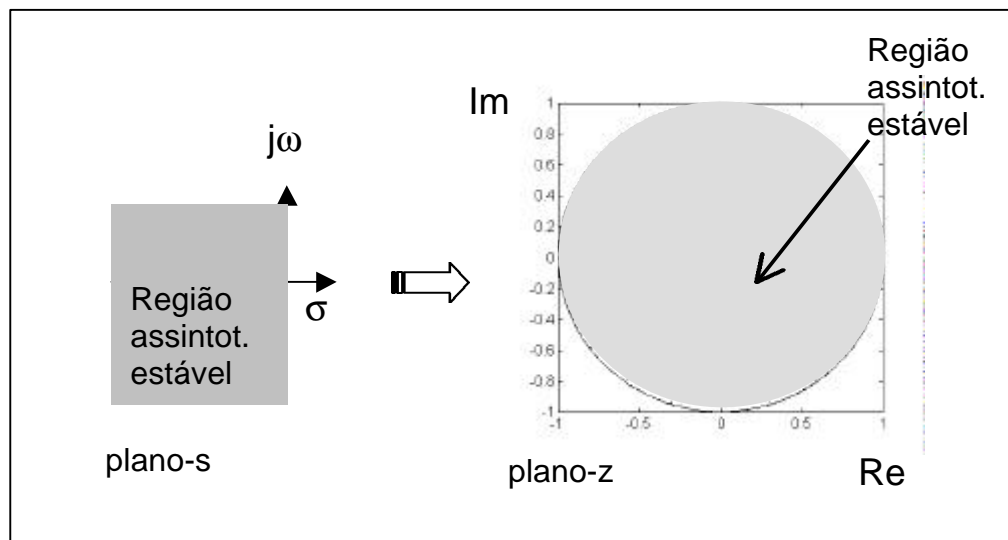


Fig. 4.23 - Mapeamento entre os planos s e z pelo integrador Tustin.

Exemplo 4.3: equivalência Tustin atuando como integrador (Figura 4.24).

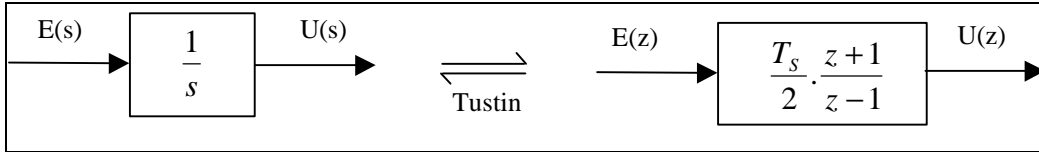


Fig. 4.24 - Diagrama em blocos básico do integrador por Tustin.

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} = \frac{T_s}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (4.24)$$

$$U(z) - z^{-1} \cdot U(z) = \frac{T_s}{2} \cdot (E(z) + z^{-1} \cdot E(z)) \quad (4.25)$$

Aplicando uma transformação inversa vem:

$$u_k - u_{k-1} = \frac{T_s}{2} \cdot (e_k + e_{k-1}) \quad (4.26)$$

$$u_k = u_{k-1} + \frac{T_s}{2} \cdot (e_k + e_{k-1}) \quad (4.27)$$

Notemos que  $T_s \cdot \frac{(e_k + e_{k-1})}{2}$  é a área de um trapézio de altura  $T_s$  e bases  $e_k$  e  $e_{k-1}$  (Figura 4.25).

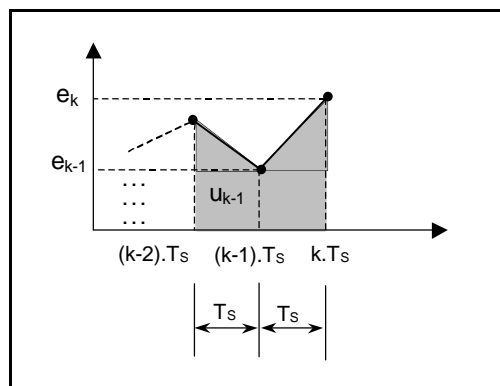


Fig. 4.25 - Tustin como integrador.

d) A equivalência de Schneider:

A regra de Schneider pode ser obtida a partir de uma equação a diferenças finitas de Adams-Moulton de terceira ordem (Schneider, 1991):

$$u_k = u_{k-1} + \frac{T_s}{12} \cdot (5 \cdot e_k + 8 \cdot e_{k-1} - e_{k-2}) \quad (4.28)$$

a qual pode ser escrita na forma:

$$e_k = \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{12}{T_s} \cdot \nabla u_k - 8 \cdot e_{k-1} + e_{k-2} \right) \quad (4.29)$$

que, após a aplicação da transformada-Z vem:

$$E(z) = \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{12}{T_s} \cdot (1 - z^{-1}) \cdot U(z) - 8 \cdot z^{-1} \cdot E(z) + z^{-2} \cdot E(z) \right) \quad (4.30)$$

$$\frac{E(s)}{U(s)} = s \sim \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{12}{T_s} \cdot \frac{z^2 - z}{5z^2 + 8z - 1} \quad (4.31)$$

suas propriedades relevantes para nós serão discutidas adiante.

### 4.3 - A DISCRETIZAÇÃO NO TEMPO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

#### 4.3.1 - CONTROLE PROPORCIONAL + DERIVATIVO

Agora será apresentada a mesma política de controle PD, dada analogicamente por

$$D(s) = k_p + k_d \cdot s \quad (4.32)$$

na ótica de diferentes métodos de integração numérica tais como: “forward”, “backward”, Tustin e Schneider. Na expressão (4.32)  $k_p$  e  $k_d$  são os ganhos de controle proporcional e derivativo, respectivamente.

a) PD por aproximação “forward”:

$$s \sim \frac{z-1}{T_S} \quad (4.33)$$

Substituindo a Equação (4.33) na Equação (4.32) vem,

$$D(z) = k_p + k_d \cdot \frac{z-1}{T_S} \quad (4.34)$$

que dará,

$$D(z) = \frac{k_d}{T_S} \cdot \left[ z + \left( \frac{k_p}{k_d} \cdot T_S - 1 \right) \right] \quad (4.35)$$

b) PD por aproximação “backward”:

$$s \sim \frac{z-1}{T_S \cdot z} \quad (4.36)$$

substituindo a Equação (4.36) na Equação (4.32) vem,

$$D(z) = k_p + k_d \cdot \frac{z-1}{T_S \cdot z} \quad (4.37)$$

que dará,

$$D(z) = \left( k_p + \frac{k_d}{T_S} \right) \cdot \frac{z - \frac{k_d}{k_p \cdot T_S + k_d}}{z} \quad (4.38)$$

c) PD por aproximação Tustin:

$$s \sim \frac{2}{T_S} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad (4.39)$$

Substituindo a Equação (3.39) na Equação (3.32) vem,

$$D(z) = k_p + k_d \cdot \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad (4.40)$$

que dará,

$$D(z) = \left( k_p + \frac{2 \cdot k_d}{T_s} \right) \frac{z + \left( \frac{k_p \cdot T_s - 2 \cdot k_d}{k_p \cdot T_s + 2 \cdot k_d} \right)}{z + 1} \quad (4.41)$$

d) PD por equivalência “Schneider”:

$$D(z) = \frac{\left( 5 \cdot k_p + 12 \cdot \frac{k_d}{T_s} \right) z^2 + \left( 8 \cdot k_p - 12 \cdot \frac{k_d}{T_s} \right) z - k_p}{5 \cdot z^2 + 8 \cdot z - 1} \quad (4.42)$$

#### 4.3.2 - OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES, FORÇADO E NÃO AMORTECIDO

A dinâmica de um oscilador harmônico simples não amortecido e com termo forçante  $u(t)$  é descrita pela seguinte equação diferencial:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = u(t) \quad (4.43)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot x(t) = \frac{1}{m} \cdot u(t) \quad (4.44)$$

e possui a seguinte função de transferência analógica entre a saída  $x(t)$  e o sinal de controle  $u(t)$ , após aplicar a transformada de Laplace à Equação (4.44):

$$G(s) = \frac{\Delta X(s)}{U(s)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \quad (4.45)$$

chamando  $\omega_n^2 = k/m$ .

Conforme Franklin e Powell (1981) o equivalente “zero-order hold” da Equação (4.45) é calculado como segue,

$$G_{H0}(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left\{ \left. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right|_{t=k.T_s} \right\} \quad (4.46)$$

Aplicando a Equação (4.45) na Equação (4.46) teremos, normalizando k=1:

$$G_{H0}(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left\{ \left. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathbf{w}_n^2}{s.(s^2 + \mathbf{w}_n^2)} \right\} \right|_{t=k.T_s} \right\} \quad (4.47)$$

$$G_{H0}(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left\{ \left. \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \mathbf{w}_n^2} \right\} \right|_{t=k.T_s} \right\} \quad (4.48)$$

teremos finalmente:

$$G_{H0}(z) = [1 - \cos(\mathbf{w}_n.T_s)] \cdot \frac{z+1}{z^2 - (2 \cdot \cos(\mathbf{w}_n.T_s))z + 1} \quad (4.49)$$

### 4.3.3 - OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES, FORÇADO E AMORTECIDO

Se o oscilador harmônico simples possuir amortecimento,

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = u(t) \quad (4.50)$$

sua função de transferência analógica será dada por:

$$G(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\mathbf{w}_n^2}{s^2 + 2\zeta \cdot \mathbf{w}_n \cdot s + \mathbf{w}_n^2} \quad (4.51)$$

analogamente ao caso anterior, o equivalente “zero-order hold” da Equação (4.51) será dado por, normalizando k=1:

$$G_{H0}(z) = \frac{z \left[ 1 - 2e^{-\zeta T_s} \cdot \cos(\mathbf{w}_d T_s) - e^{-2\zeta T_s} \left( \frac{\zeta}{\mathbf{w}_d} \cdot \sin(\mathbf{w}_d T_s) - \cos(\mathbf{w}_d T_s) \right) \right] + e^{-2\zeta T_s} + e^{-\zeta T_s} \left( \frac{\zeta}{\mathbf{w}_d} \cdot \sin(\mathbf{w}_d T_s) - \cos(\mathbf{w}_d T_s) \right)}{z^2 - [2e^{-\zeta T_s} \cdot \cos(\mathbf{w}_d T_s)]z + e^{-2\zeta T_s}} \quad (4.52)$$



onde  $T_s$  é o período de amostragem,  $s = z \cdot w_n$ ,  $w_d = w_n \cdot \sqrt{1 - z^2}$  é a frequência natural amortecida,  $z$  é a razão de amortecimento deste modo natural de vibração, e  $w_n$  é a frequência natural não amortecida deste modo. A expressão (4.52) pode ser reduzida à expressão (4.49) quando  $z = 0$ .

#### **4.4 - PD ANALÓGICO + OSCILADOR HARMÔNICO ANALÓGICO**

O controle de um oscilador harmônico é interpretado como um tipo de controle ativo vibracional. A idéia de estudar inicialmente um controle ativo vibracional de um oscilador harmônico para depois aplicá-lo no controle de atitude de um satélite com um apêndice flexível, por exemplo CBERS-1, como foi feito neste trabalho, consiste intuitivamente de que uma situação assintoticamente estável para o controle ativo vibracional poderia ser descrita de forma semelhante com o controle de atitude do satélite, considerando as vibrações do apêndice flexível como principal elemento perturbador da atitude do satélite.

Este trabalho dedicou-se às análises e simulações usando um controle PD para buscar se ajustar ao caso que supõe-se ser real para sistema de controle do CBERS-1. Conforme ensinado por Ogata (1993), como a Equação (4.32) possui um zero e nenhum pólo, não é possível realizá-la eletricamente apenas com elementos RLC passivos. Entretanto, usando-se amplificadores operacionais juntamente com resistores e capacitores a Equação (4.32) torna-se possível praticamente apenas padecendo do problema de ruídos. Ogata (1993) também ensina que não há nenhum problema se o controlador PD for aproximado pelo uso de elementos hidráulicos ou pneumáticos, e que o controle PD melhora a resposta transitória (por ex.: fornecendo pequeno overshoot) pois pode ser considerado o paradigma do compensador em avanço de fase.

Para os estudos do controle ativo vibracional considerou-se um sistema de controle em malha fechada tal como o apresentado na Figura 4.26 e usou-se um controle PD analógico segundo a Equação (4.32) como o  $D(s)$ . Os

osciladores harmônicos livre, segundo a Equação (4.45), e amortecido, segundo a Equação (4.51), foram os dois casos de  $G(s)$  usados. Na Seção 4.5 tem-se os resultados dos estudos, simulações e análises feitos quando o sistema da Figura 4.26 é discretizado no tempo.

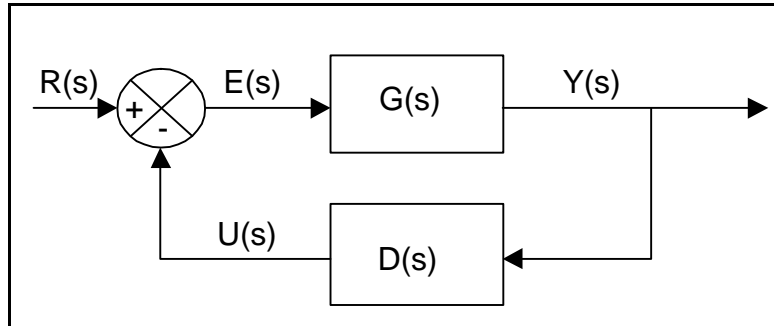


Fig. 4.26 - Diagrama de blocos do sistema analógico em malha fechada.

Para o caso totalmente analógico desejou-se obter respostas transitórias que obedecessem às seguintes especificações:  $t_p \cong 0,6$  segundos;  $t_s \cong 5$  segundos;  $M_P \cong 0,15$  Nm. Sendo que  $t_p$  é o tempo de pico;  $t_s$  é o tempo de acomodação ("setling-time") e  $M_P$  é o sobre-sinal máximo ("overshoot").

## 4.5 - CONTROLE DISCRETO DE UM OSCILADOR HARMÔNICO E SUA ESTABILIDADE

### 4.5.1 - PD + OSCILADOR HARMÔNICO LIVRE

O esquema apresentado nesta seção para um sistema de controle PD discreto por aproximação Tustin ( $D(z)$  da Equação (4.41)) de um oscilador harmônico simples livre de amortecimento ( $G_{ho}(z)$  da Equação (4.49)) possui a seguinte função de transferência de malha fechada (Figura 4.27):

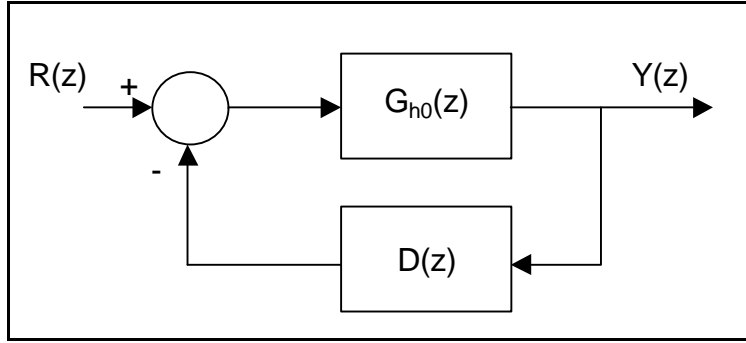


Fig. 4.27 - Diagrama de blocos do oscilador harmônico controlado por PD discreto no tempo.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\frac{[1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)](z+1)}{z^2 - 2 \cdot \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S) \cdot z + 1}}{1 + \frac{[1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)](z+1)}{z^2 - 2 \cdot \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S) \cdot z + 1} \cdot \frac{\left(k_p + \frac{2k_d}{T_S}\right)(z + \left(\frac{k_p \cdot T_S - 2k_d}{k_p \cdot T_S + 2k_d}\right))}{(z+1)}} \quad (4.53)$$

Sem cancelar pólo do D(z) com zero do  $G_{h0}(z)$ , para efeito de comparação com a expressão do H(z) com amortecimento (Equação (4.60)), teremos:

$$H(z) = [1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] \frac{z^2 + 2z + 1}{z^3 + \left[1 - 2 \cdot \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S) + \left(k_p + \frac{2k_d}{T_S}\right)[1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)]\right] \cdot z^2 + \dots}$$

$$\dots \frac{\left[1 - 2 \cdot \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S) + \left(k_p + \frac{2k_d}{T_S}\right)[1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)]\right] \left(\frac{k_p \cdot T_S - 2k_d}{k_p \cdot T_S + 2k_d} + 1\right)}{z + 1 + \dots}$$

$$\dots \frac{\left(k_p + \frac{2k_d}{T_S}\right)[1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] \left(\frac{k_p \cdot T_S - 2k_d}{k_p \cdot T_S + 2k_d}\right)}{\dots} \quad (4.54)$$

Se cancelar pólo do D(z) com zero do  $G_{h0}(z)$  no denominador da Equação (4.53) teremos:

$$H(z) = [1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] \frac{z+1}{z^2 + \left[ \left( k_p + \frac{2k_d}{T_S} \right) [1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] - 2 \cdot \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S) \right] \cdot z + 1 + \left( k_p + \frac{2k_d}{T_S} \right)} \dots$$

$$\dots \frac{[1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] \left( \frac{k_p \cdot T_S - 2k_d}{k_p \cdot T_S + 2k_d} \right)}{z^2 + \left[ \left( k_p + \frac{2k_d}{T_S} \right) [1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] - 2 \cdot \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S) \right] \cdot z + 1 + \left( k_p + \frac{2k_d}{T_S} \right)}$$
(4.55)

$$H(z) = [1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] \frac{z+1}{z^2 + \left[ \left( k_p + \frac{2k_d}{T_S} \right) [1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] - 2 \cdot \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S) \right] \cdot z + 1 + \left( k_p + \frac{2k_d}{T_S} \right)}$$

$$\dots \frac{[1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] \left( \frac{k_p \cdot T_S - 2k_d}{k_p \cdot T_S + 2k_d} \right)}{z^2 + \left[ \left( k_p + \frac{2k_d}{T_S} \right) [1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] - 2 \cdot \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S) \right] \cdot z + 1 + \left( k_p + \frac{2k_d}{T_S} \right)}$$
(4.56)

com a seguinte equação característica:

$$1 + \left( k_p + \frac{2k_d}{T_S} \right) [1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] \frac{z + \left( \frac{k_p \cdot T_S - 2k_d}{k_p \cdot T_S + 2k_d} \right)}{z^2 - [2 \cdot \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] \cdot z + 1} = 0$$
(4.57)

ou,

$$z^2 + \left[ \left( k_p + \frac{2k_d}{T_S} \right) [1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] - 2 \cdot \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S) \right] \cdot z + 1 + \left( k_p + \frac{2k_d}{T_S} \right) [1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] = 0$$
(4.58)

$$z^2 + \left[ \left( \frac{k_p \cdot T_S + 2k_d}{T_S} \right) [1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] - 2 \cdot \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S) \right] \cdot z + 1 + \left( \frac{k_p \cdot T_S - 2k_d}{T_S} \right) [1 - \cos(\mathbf{w}_n \cdot T_S)] = 0$$
(4.59)

#### 4.5.2 - PD + OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

O esquema apresentado nesta seção para um sistema de controle PD discreto por aproximação Tustin (D(z) da Equação (4.41)) de um oscilador harmônico

simples amortecido ( $G_{ho}(z)$  da Equação (4.52)) possui a seguinte função de transferência de malha fechada:

$$\begin{aligned}
 H(z) = & \frac{z^2 \left[ 1 - 2e^{-sT_s} \cdot \cos(\omega_d T_s) - e^{-2sT_s} \left( \frac{s}{\omega_d} \sin(\omega_d T_s) - \cos(\omega_d T_s) \right) \right] + z \left[ 1 - 2e^{-sT_s} \cdot \cos(\omega_d T_s) + e^{-2sT_s} \right] + \dots}{z^3 + z^2 \left[ 1 - 2e^{-sT_s} \cdot \cos(\omega_d T_s) + \left( k_p + \frac{2k_d}{T_s} \right) \left( 1 - 2e^{-sT_s} \cdot \cos(\omega_d T_s) - e^{-sT_s} \left( \frac{s}{\omega_d} \sin(\omega_d T_s) - \cos(\omega_d T_s) \right) \right) \right] + \dots} \\
 & + \frac{e^{-2sT_s} + e^{-sT_s} \left( \frac{s}{\omega_d} \sin(\omega_d T_s) - \cos(\omega_d T_s) \right)}{\dots} \\
 & + z \left[ e^{-2sT_s} + \left( k_p + \frac{2k_d}{T_s} \right) \left( 1 - 2e^{-sT_s} \cdot \cos(\omega_d T_s) - e^{-sT_s} \left( \frac{s}{\omega_d} \sin(\omega_d T_s) - \cos(\omega_d T_s) \right) \right) \right] \left( \frac{k_p T_s - 2k_d}{k_p T_s + 2k_d} \right) + \dots \\
 & - 2e^{-sT_s} \cdot \cos(\omega_d T_s) + \left( e^{-2sT_s} + e^{-sT_s} \left( \frac{s}{\omega_d} \sin(\omega_d T_s) - \cos(\omega_d T_s) \right) \right) \left( k_p + \frac{2k_d}{T_s} \right) + e^{-2sT_s} + \left( k_p + \frac{2k_d}{T_s} \right) \dots \\
 & \dots \left[ e^{-2sT_s} + e^{-sT_s} \left( \frac{s}{\omega_d} \sin(\omega_d T_s) - \cos(\omega_d T_s) \right) \right] \left( \frac{k_p T_s - 2k_d}{k_p T_s + 2k_d} \right)
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

onde  $T_s$  é o período de amostragem,  $s = z \cdot \omega_n$ ,  $\omega_d$  é a frequência natural amortecida, sendo  $z$  o fator de amortecimento deste modo de vibração com frequência natural não amortecida  $\omega_n$ . Pode-se verificar facilmente que se  $z = 0$ , caso sem amortecimento, a Equação (4.60) se reduz à Equação (4.54).

### 4.5.3 - ANÁLISE POR “ROOT-LOCUS” E RESPOSTA TRANSITÓRIA DOS SISTEMAS DESCRITOS

- a) Oscilador harmônico simples e forçado: a Figura 4.28 mostra o "root locus" no plano-s para um oscilador harmônico analógico sendo controlado analogicamente por um PD (Figura 4.26), com  $k_p = 3,2$  e  $k_d = 4,8$ .

A planta  $G(s)$  e o controle  $D(s)$  são dados pelas Equações (4.45) e (4.32), respectivamente. O “Root-locus” que gerou a Figura 4.28 utiliza a Equação (4.61) que é a equação característica do sistema em malha-fechada:

$$1 + D(s).G(s) = 0$$

(4.61)

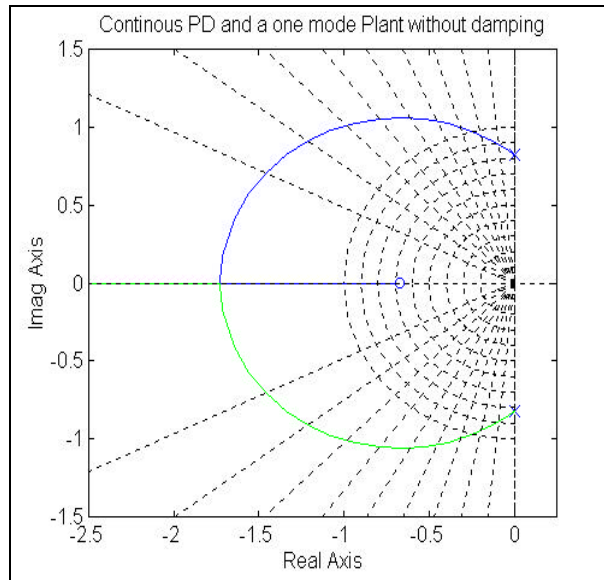


Fig. 4.28 - Root-locus no plano-s para o sistema totalmente analógico da Figura 4.26.

A Figura 4.29 mostra a respectiva resposta a um impulso unitário.

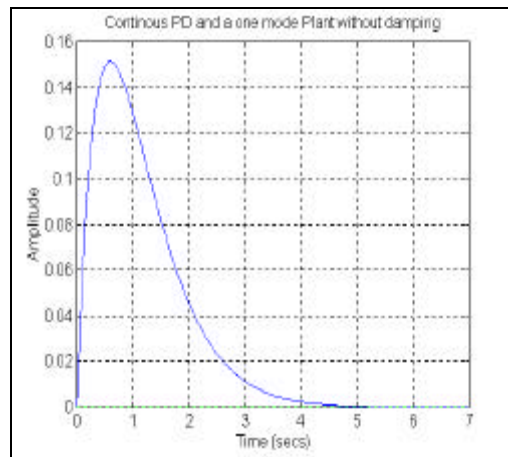


Fig. 4.29 - Resposta ao impulso unitário para o sistema totalmente analógico.

- b) Oscilador harmônico simples sem amortecimento com controle PD projetado por aproximação Tustin:

Vejamos nas Figuras 4.30 e 4.31 o que acontece quando um controle PD projetado por aproximação Tustin é inserido com um período de amostragem de 0,1 segundos, e nas Figuras 4.32 e 4.33 para  $T_s = 1,6$  segundos. Tal sistema discretizado no tempo está mostrado na Figura 4.27, e as equações de  $D(z)$  e  $G_{ho}(z)$  são as Equações (4.41).e (4.49), respectivamente.

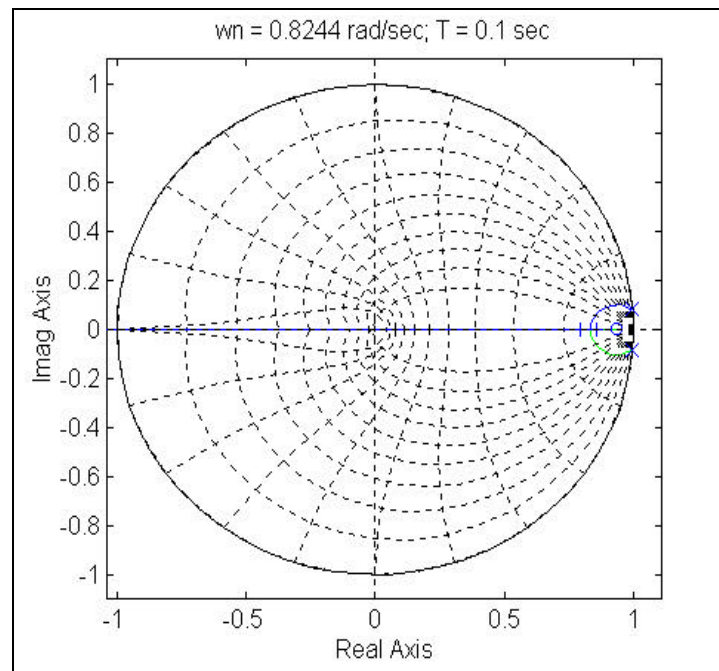


Fig. 4.30 - Root-locus no plano-z para  $T_s = 0,1$  segundos.

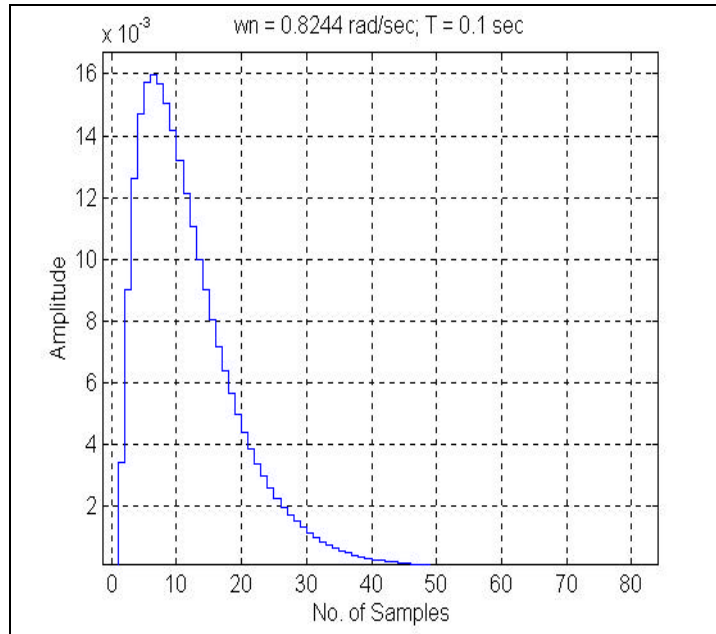


Fig. 4.31 - Resposta ao impulso unitário para  $T_s = 0,1$  segundos: claramente temos a estabilidade para este caso.

Conforme pode-se notar mediante a Figura 4.31, apesar de ter havido uma degradação do transitório o sistema manteve-se assintoticamente estável, como pode-se ver também pelo “root-locus” mostrado na Figura 4.30, com todos os pólos alocados no interior do círculo unitário.

Agora vejamos nas Figuras (4.32) e (4.33) o que acontece quando um controle PD discreto por equivalência Tustin é submetido a um período de amostragem de 1,6 segundos. O “root-locus” de tal sistema e a resposta ao pulso unitário estão mostrados nas Figuras 4.32 e 4.33, respectivamente.



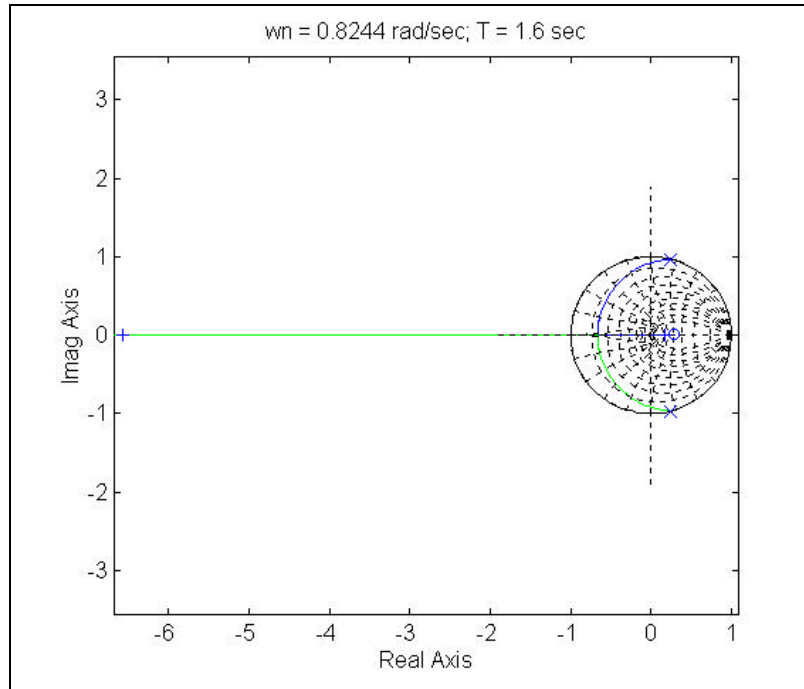


Fig. 4.32 - Root-locus no plano-z para o controle PD discreto por Tustin, com  $T_S = 1,6$  segundos: observar o pólo fora do círculo unitário, representando um fator instabilizante.

Na Figura 4.32 pode-se perceber uma cruz indicando a posição do pólo fora do círculo unitário, descrevendo assim uma situação instável. De acordo com The Mathworks Inc. (1995) a função “rlocus” da ferramenta MatLab 4.2c.1 esboça o “root-locus” segundo a seguinte expressão:

$$q = 1 + k \cdot \frac{num}{den} \tag{4.62}$$

onde  $\frac{num}{den}$  é a função de transferência resultante entre as expressões (4.41) e (4.49), por exemplo, e  $\kappa$  é o vetor de ganhos que é automaticamente determinado, resultando no traçado dos “ramos” do “root-locus”. Se  $\kappa = 1$  temos a posição dos pólos de malha fechada do sistema para o ganho inerente à

expressão  $\frac{num}{den}$  e então podemos saber apenas observando o “Root-locus” se haverá estabilidade ou instabilidade.

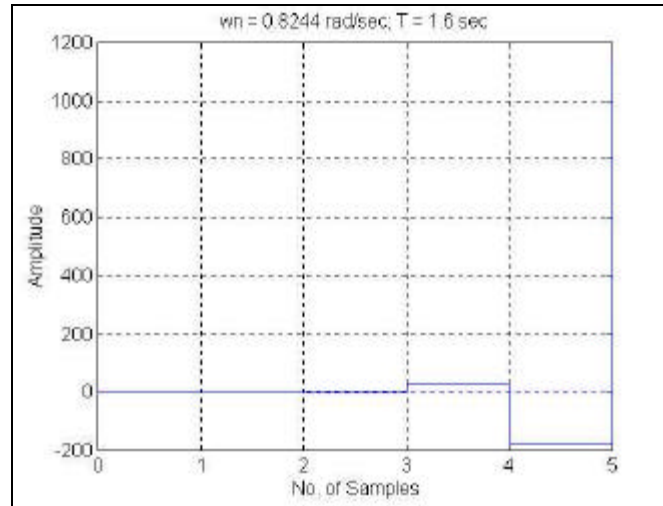


Fig. 4.33 - Resposta instável ao pulso unitário para  $T_S = 1,6$  segundos.

Pode-se notar claramente pela Figura 4.33 que o sistema tornou-se instável quando  $T_S$  aumentou de 0,1 para 1,6 segundos.

Podemos analisar o limiar da estabilidade pelo que segue por meio das Figuras 4.34 a 4.38.

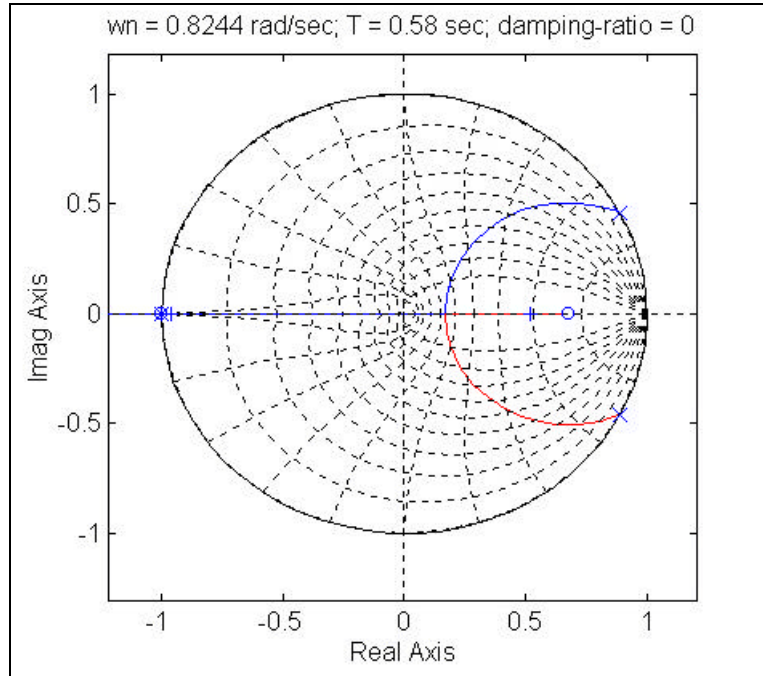


Fig. 4.34 - Root-locus do oscilador-harmônico para  $T_s = 0,58$  segundos.

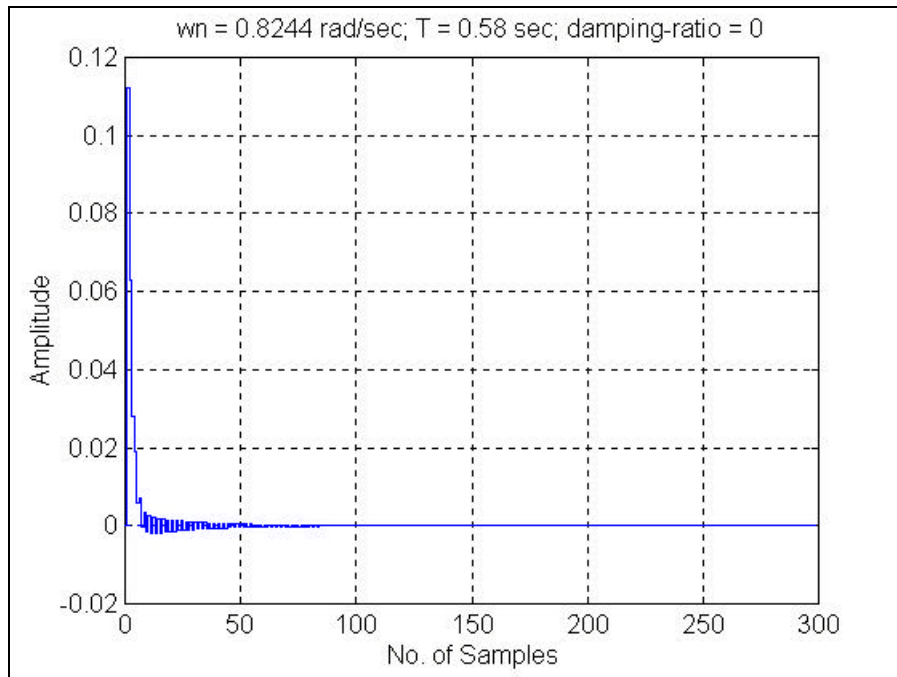


Fig. 4.35 - Resposta ao pulso unitário para a configuração de pólos do “root-locus” da Figura 4.34.

Portanto, até  $T_S = 0,58$  segundos tal sistema do oscilador-harmônico controlado por um PD projetado pela regra de Tustin é garantidamente estável. A partir desse valor o sistema torna-se instável, tal como pode-se perceber mediante as Figuras 4.36 a 4.38, onde foi usado um  $T_S = 0,59$  segundos.

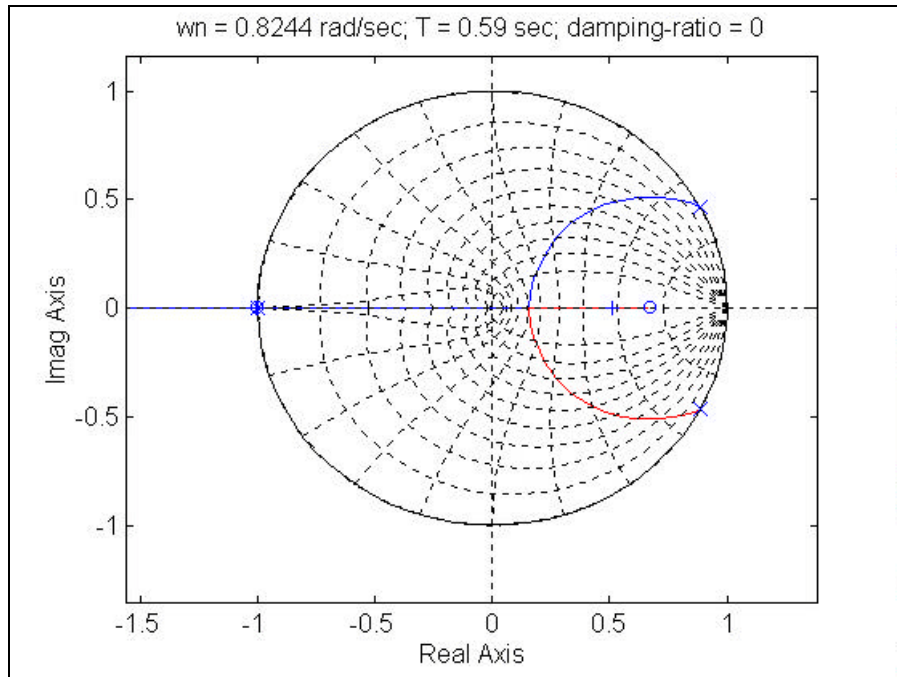


Fig. 4.36 - Root-locus do oscilador-harmônico para  $T_S = 0,59$  segundos.

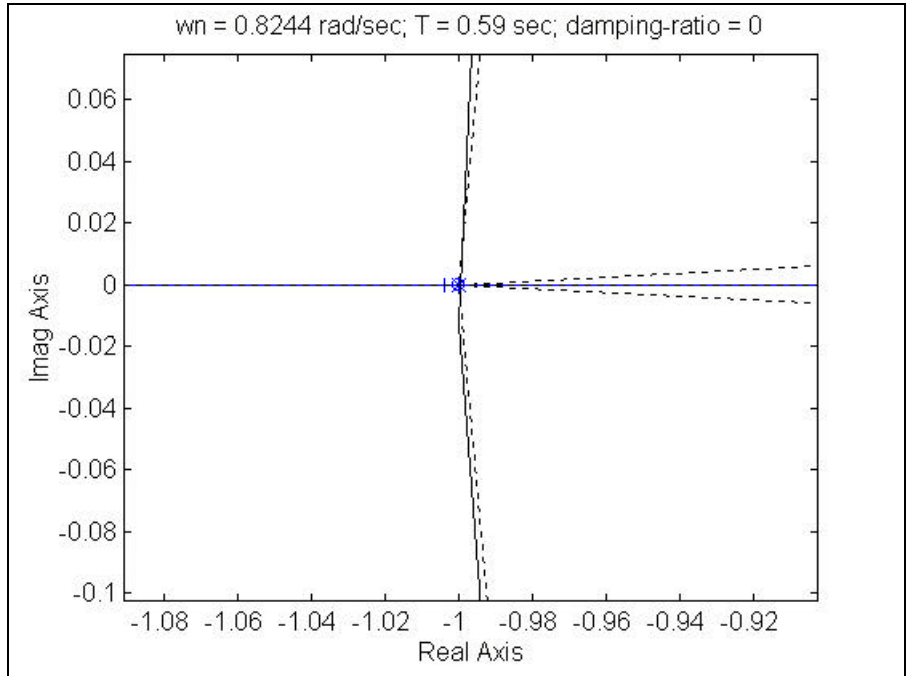


Fig. 4.37 - Detalhe instabilizador da Figura 4.36.

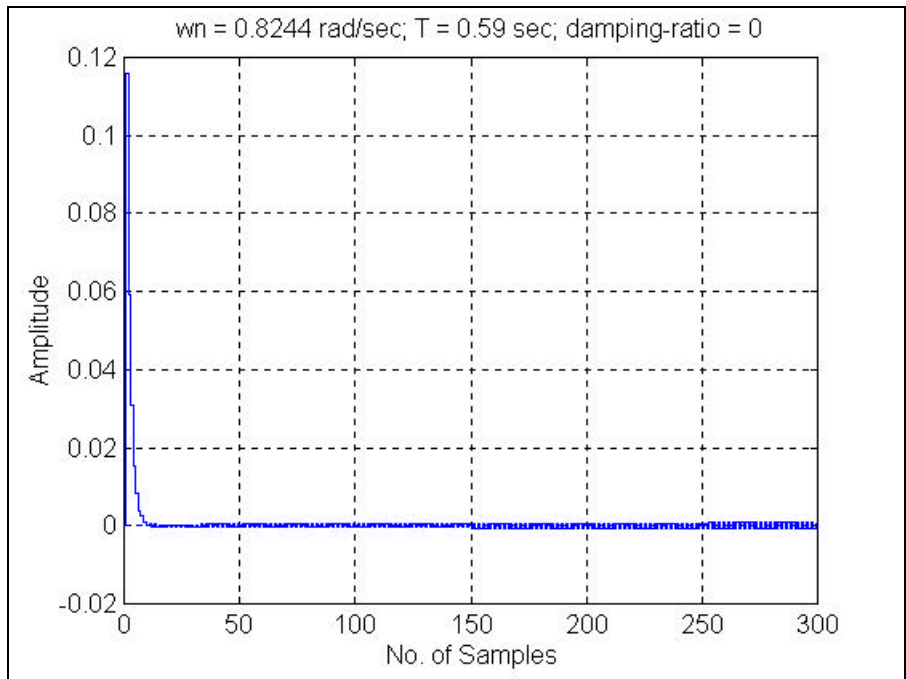


Fig. 4.38 - Resposta instável ao pulso unitário relativa aos dois últimos root-loci: Figuras 4.36 e 4.37.



- c) Oscilador harmônico simples com amortecimento  $\zeta = 0,1$  com controle PD discreto por aproximação Tustin, conforme pode-se ver nas Figuras 4.39 a 4.46.

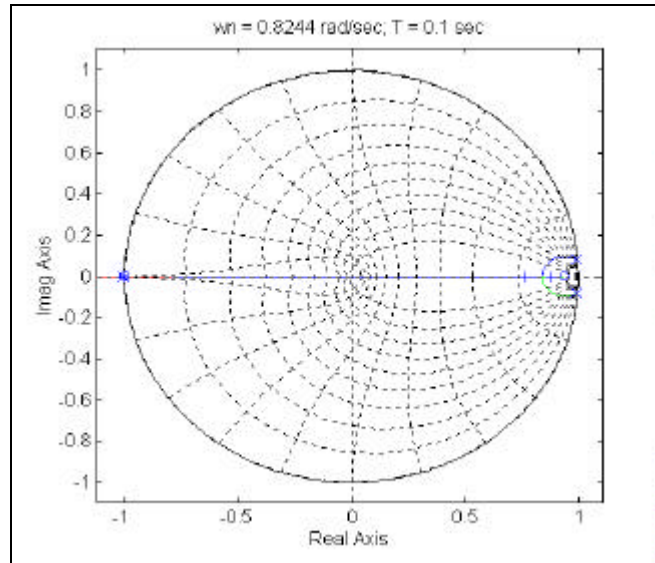


Fig. 4.39 - Root-locus no plano-z para  $T_s = 0,1$  segundos.

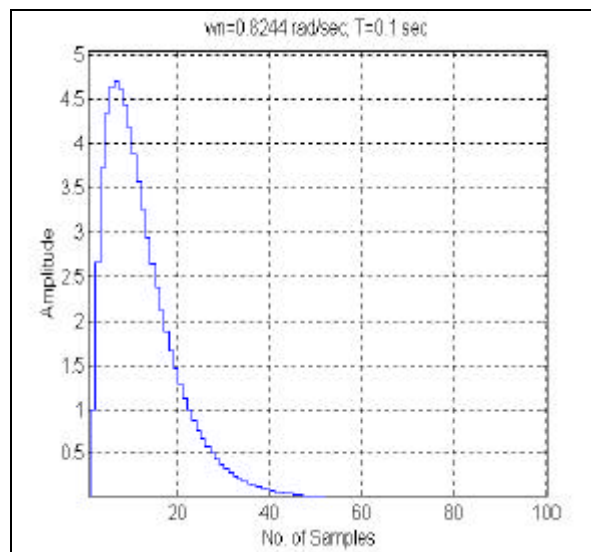


Fig. 4.40 - Resposta ao impulso unitário para  $T_s = 0,1$  segundos.

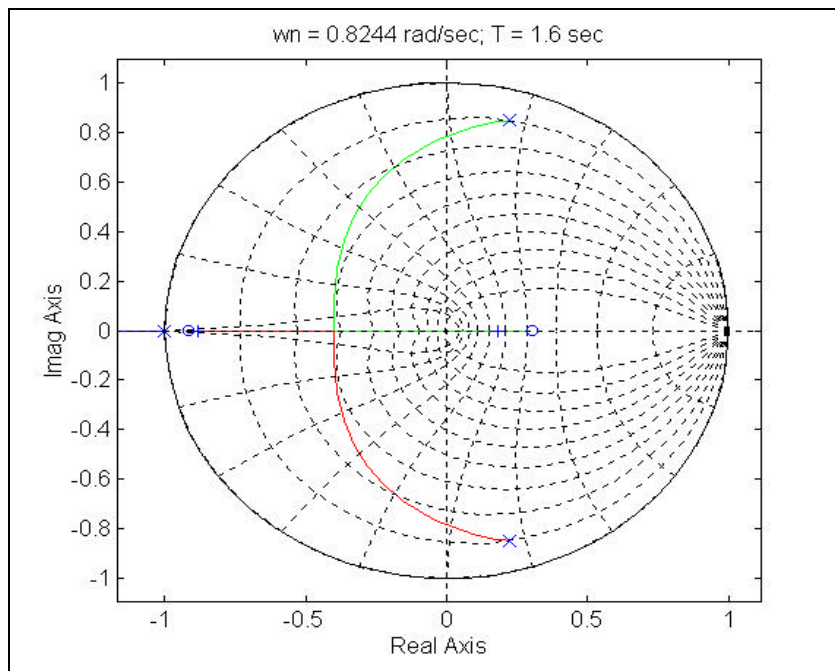


Fig. 4.41 - Root-locus no plano-z para  $T_S = 1,6$  segundos.

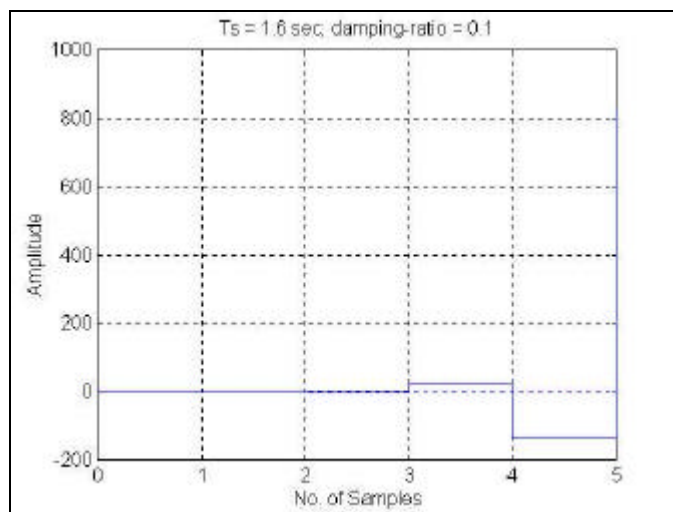


Fig. 4.42 - Resposta instável ao pulso unitário para  $T_S = 1,6$  segundos.

Para o caso do limiar de estabilidade, tal como foi feito nas Figuras 4.36 a 4.38, agora para o caso amortecido com  $\zeta=0,1$ ; tem-se as Figuras 4.43 e 4.44. O objetivo aqui foi buscar estabilizar o sistema de controle discreto que

instabilizou nas Figuras 4.36 a 4.38, fazendo-se uso do aumento da razão de amortecimento.

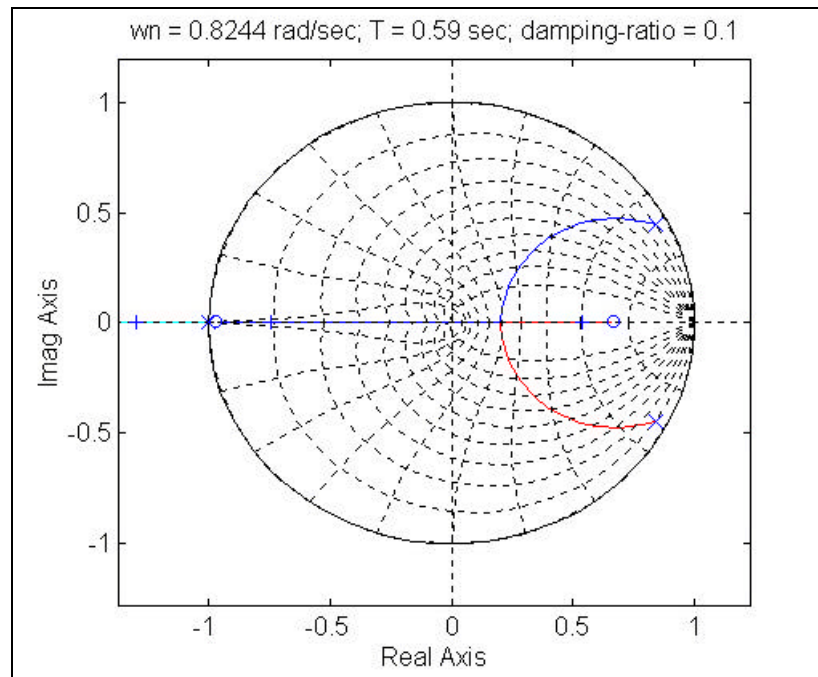


Fig. 4.43 - Root-locus para o caso instável do limiar de estabilidade.

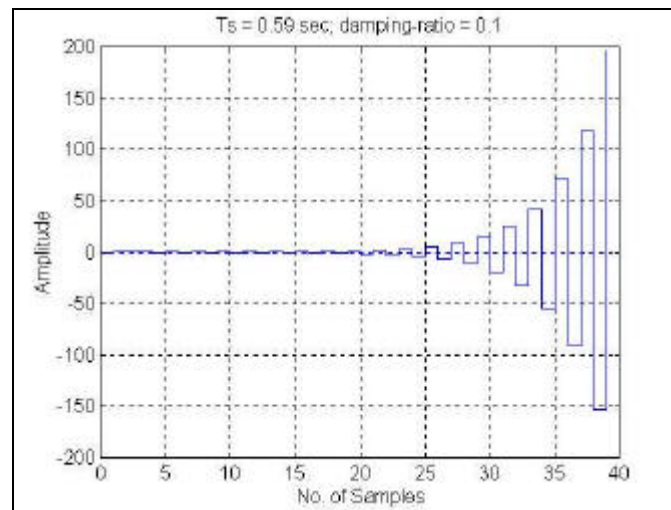


Fig. 4.44 - Resposta ao pulso unitário para o root-locus da Figura 4.43.

A instabilidade ocorre mesmo com um amortecimento elevado de  $\zeta = 0,85$  conforme mostrado nas Figuras 4.45 e 4.46.



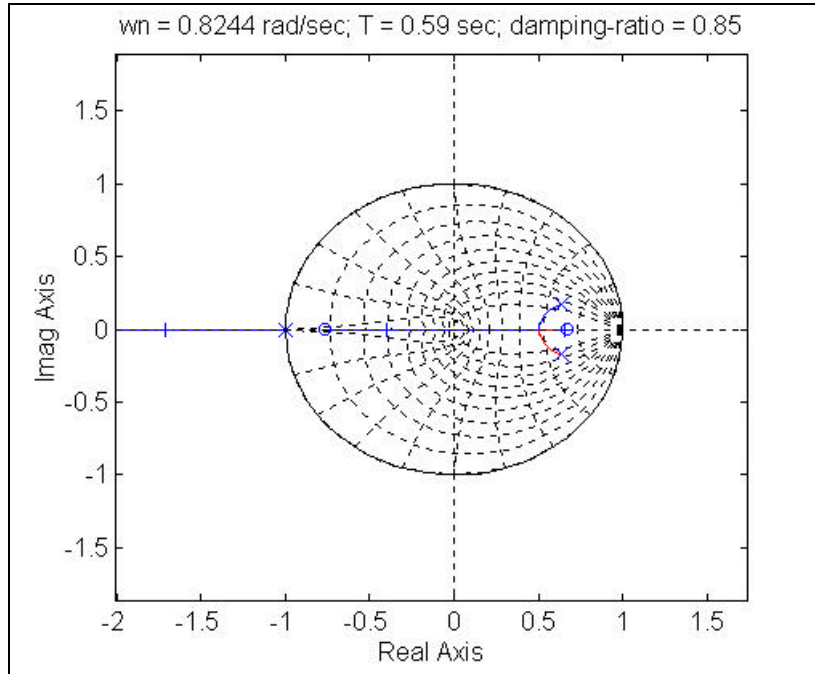


Fig. 4.45 - Root-locus do oscilador harmônico amortecido.

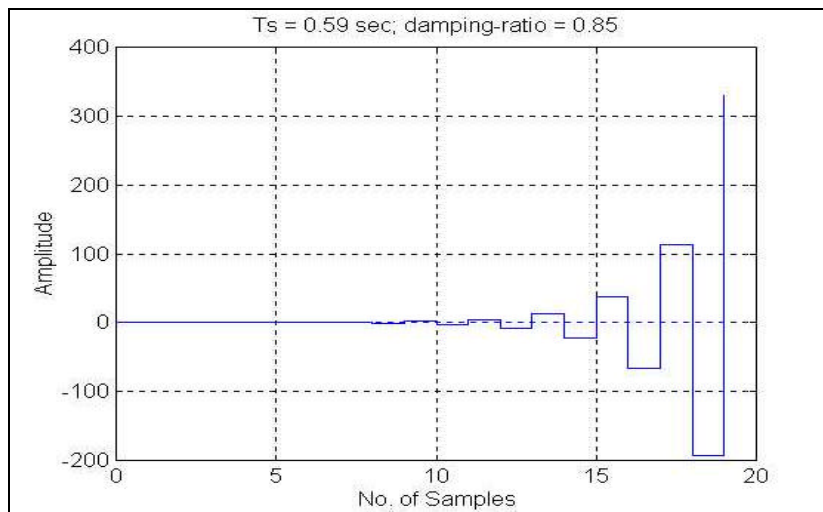


Fig. 4.46 - Resposta ao pulso unitário para o root-locus da Figura 4.45.

- d) Simulações visando buscar a estabilização mediante uma compensação de fase: poderemos contemplar três comparações entre as simulações com o “zero-order-hold” do oscilador harmônico sobre-amortecido (com razão de amortecimento  $\zeta = 6$ ) controlado por um PD

projetado pela regra de Tustin e as simulações com a mesma planta controlada por um PD projetado pela nova-regra. O objetivo aqui é tentar proporcionar uma compensação de fase no controlador PD tendo em vista o atraso de fase provocado pelo “zero-order hold”.

O atraso provocado pelo “zero-order hold” pode ser calculado pela seguinte maneira (sintonizando para o primeiro modo do modelo do CBERS-1, usado neste trabalho, no eixo x;  $\omega_n = 2 \cdot p \cdot 0,1312 = 0,8244$  rad/seg; e  $T_s = 1,6$  segundos):

$$\Psi = \frac{180}{p} \left( 2 \cdot p \cdot 0,1312 \cdot \frac{T_s}{2} \right) = 37^\circ,78 \quad (4.63)$$

que é o atraso de fase provocado pelo “hold” dentro do sistema.

O avanço de fase proporcionado pelo controle PD pode ser calculado como segue:

$$D(s) = k_p + k_d \cdot s \rightarrow D(j\omega) = k_p + j \cdot k_d \cdot \omega \quad (4.64)$$

Daí, a avanço de fase do PD será dado por:

$$f = \arctg \left( \frac{k_d \cdot \omega}{k_p} \right) \quad (4.65)$$

Vamos agora nos deter em diversos casos simulados:

- d.1)  $f = 87^\circ,7777$ , o que pode ser conseguido com  $k_d = 100$ ;  $k_p = 3,2$ ;  
 $\omega_n = 2 \cdot p \cdot 0,1312 = 0,8244$  rad/seg;  $T_s = 1,6$  segundos.

A Figura 4.47 descreve uma indesejável situação instável para tal controle de vibração.

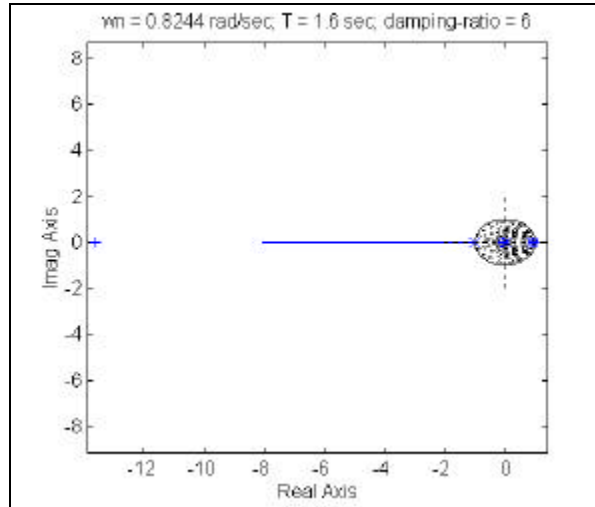


Fig. 4.47 - Root-locus com o Z.O.H. do oscilador harmônico sobre-amortecido controlado por PD projetado com a regra de Tustin.

Apesar do avanço de fase mostrado o sistema não conseguiu alcançar a estabilidade. Isso se deve ao fato de que a fase depende estritamente da razão entre os ganhos, e, em contrapartida, o ganho de malha aberta depende estritamente dos valores dos módulos dos ganhos individualmente tal como pode ser verificado mediante a Equação (4.60).

d.2)  $f = 57,0983^\circ$ , o que pode ser conseguido com  $k_d = 6$ ;  $k_p = 3,2$ ;  
 $\omega_n = 2 \cdot p \cdot 0,1312 = 0,8244 \text{ rad/seg}$ ;  $T_s = 1,6 \text{ segundos}$ .

A Figura 4.48 também descreve uma indesejável situação instável para tal controle de vibração.

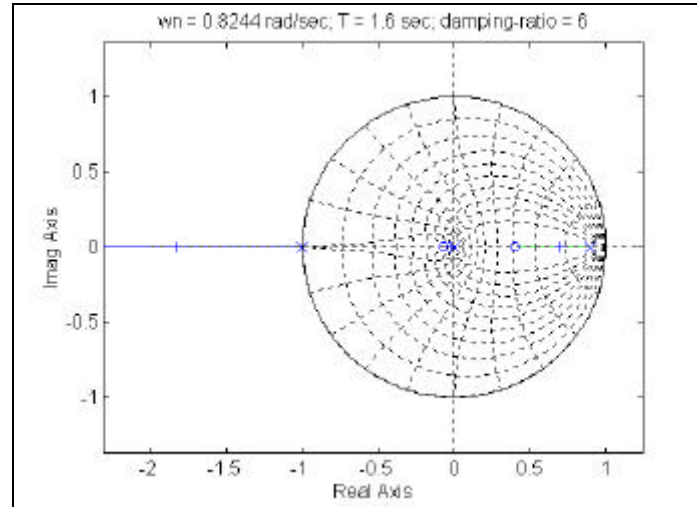


Fig. 4.48 - Root-locus para o Z.O.H. do oscilador harmônico sobre-amortecido controlado por PD projetado com a regra de Tustin.

- d.3)  $f = 51^\circ,0370$ , o que pode ser conseguido com  $k_d = 4,8$ ;  $k_p = 3,2$ ;  
 $w_n = 2 \cdot p \cdot 0,1312 = 0,8244$  rad/seg ;  $T_s = 1,6$  segundos.

A Figura 4.49 também descreve uma indesejável situação instável para tal controle de vibração.

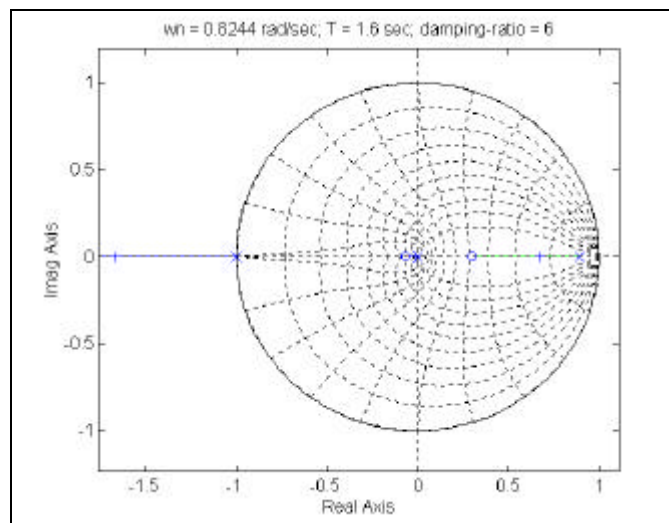


Fig. 4.49 - Root-locus para o Z.O.H. do oscilador harmônico sobre-amortecido controlado por PD projetado com a regra de Tustin.



Uma explicação razoável de porquê o aumento de fase compensada piora o desempenho do sistema de controle em malha fechada é que a razão entre os ganhos  $k_p$  e  $k_d$  do controle influencia explicitamente no ganho de malha aberta do sistema, tal como pode ser verificado examinando as Equações (4.41) e (6.7) deste trabalho e lembrando que a equação característica é dada por  $1+D(z).G_{h0}(z) = 0$ .

e) Simulação com PD projetado com a regra de Schneider

$$s \sim \frac{12}{T_s} \cdot \frac{z^2 - z}{5z^2 + 8z - 1} \text{ com planta } G_{h0}(z) \text{ de um oscilador harmônico}$$

simples amortecido (Figuras 4.50 a 4.55), para alguns valores de  $\zeta$ .

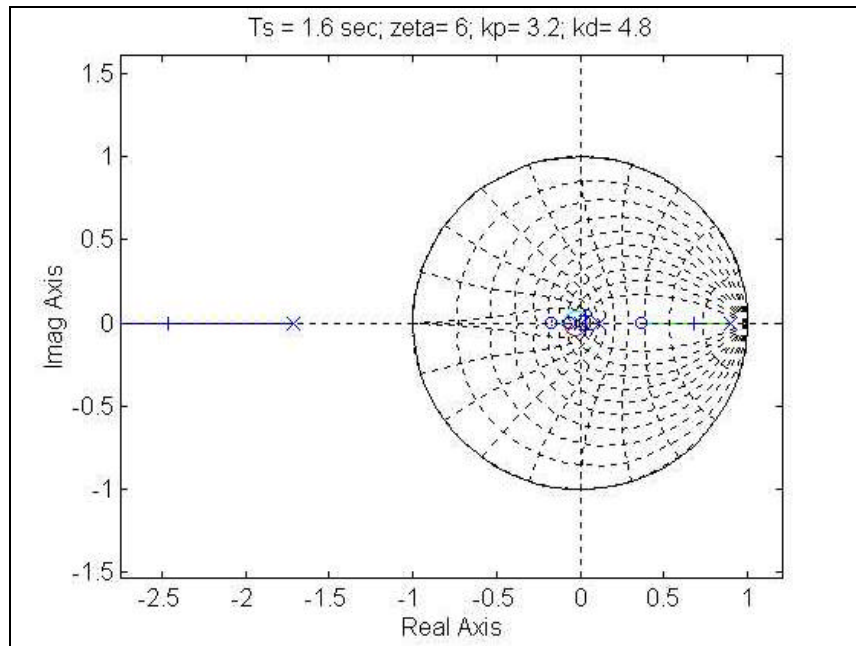


Fig. 4.50 - Root-locus do oscilador harmônico amortecido com PD projetado por Schneider.

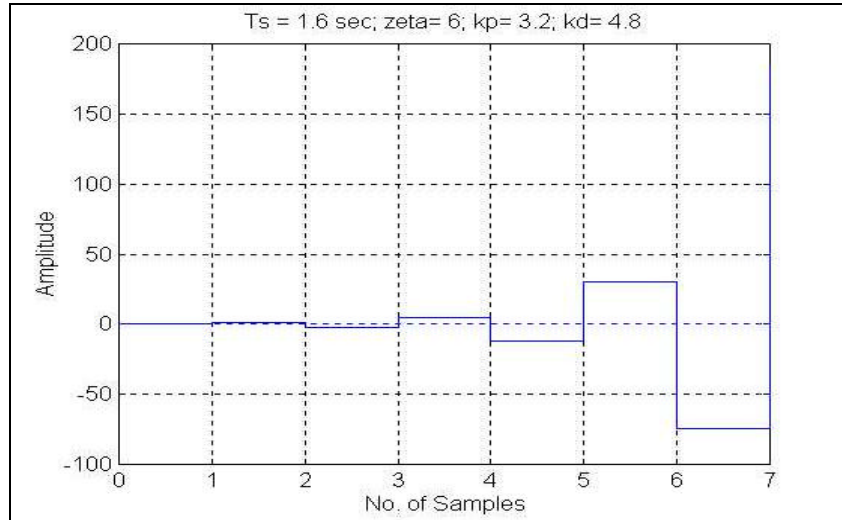


Fig. 4.51 - Resposta ao pulso unitário.

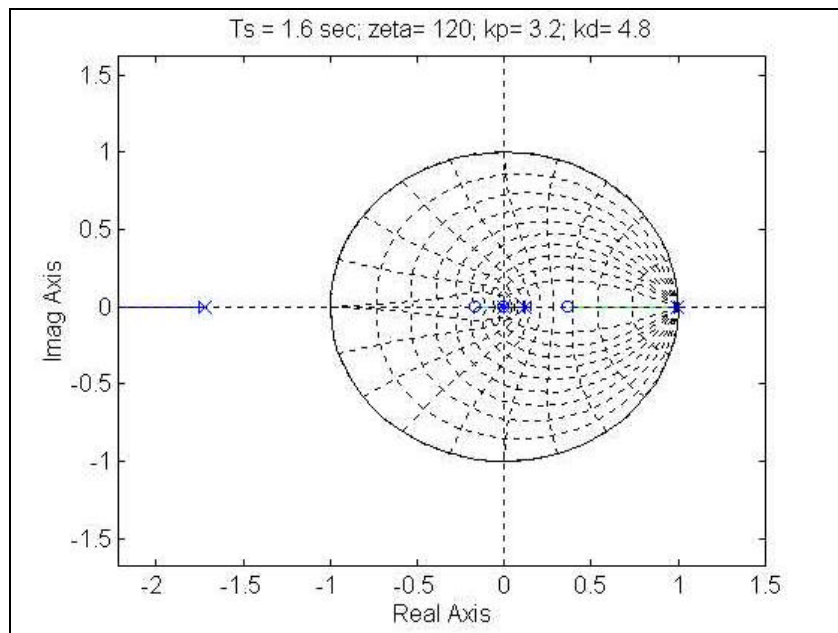


Fig. 4.52 - Root-locus do oscilador harmônico amortecido com PD por Schneider.

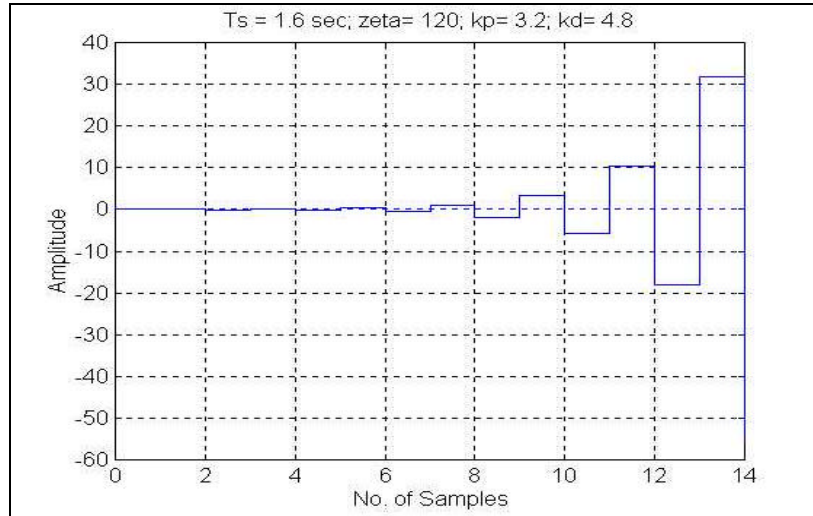


Fig. 4.53 - Resposta ao pulso unitário.

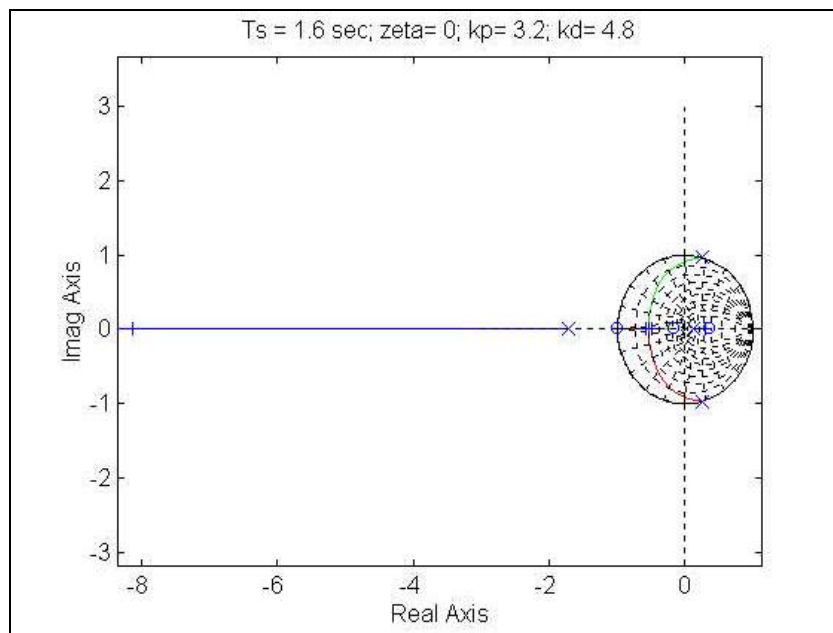


Fig. 4.54 - Root-locus do oscilador harmônico não-amortecido com PD por Schneider.

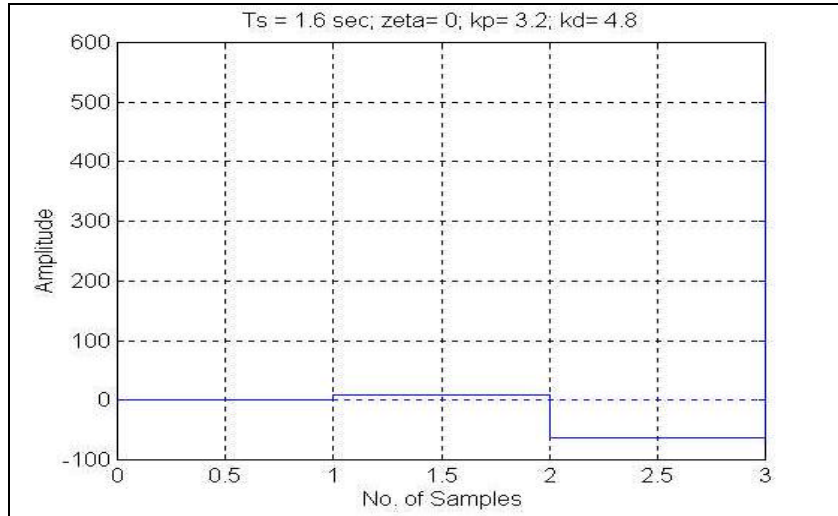


Fig. 4.55 - Resposta ao pulso unitário.

Conforme se verificou mediante as Figuras 4.50 a 4.55, em caso algum o sistema com controle PD projetado pela regra de Schneider apresentou uma situação assintoticamente estável, o que será explicado na Seção 6.6.

#### 4.5.4 - APLICAÇÃO DO CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE JURY AO OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES COM CONTROLE PD PROJETADO POR TUSTIN

Segundo Isermann (1989) o critério de estabilidade em tempo discreto equivalente ao critério de estabilidade de Routh-Hurwitz para sistemas analógicos é conhecido como critério de Schur-Cohn-Jury. Entretanto, Jury verificou que quando o critério de Schur-Cohn-Jury era aplicado a sistemas de ordem elevada uma enorme quantidade de cálculos era necessária, o que o levou a propor um “método de redução” que é conhecido como “critério de estabilidade de Jury”. De acordo com Isermann (1989) e Ogata (1987), aplicando o critério de estabilidade de Jury para uma dada equação característica em malha fechada  $P(z) = 0$ , nós podemos construir uma tabela cujos elementos estão baseados nos coeficientes de  $P(z)$ . Assim poderemos buscar um método de análise que permita selecionar o período de amostragem  $T_s$  de forma a garantir a estabilidade assintótica em sistemas de controle em



tempo discreto. Se o polinômio característico em malha fechada assume a forma:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (4.66)$$

Onde  $a_0 > 0$ ; então a tabela do critério de estabilidade de Jury pode ser montada conforme a Tabela 4.1:

**TABELA 4.1 - TABELA DE JURY GENERALIZADA.**

$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	...	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	...	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$b_{n-4}$	...	$b_1$	$b_0$	
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$c_{n-5}$	...	$c_0$		
$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	$c_{n-2}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$				
$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$				
$q_2$	$q_1$	$q_0$					

Onde,

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \quad ; k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.67)$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \quad ; k = 0, 1, 2, \dots, n-2 \quad (4.68)$$

$\vdots$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \quad ; k = 0, 1, 2 \quad (4.69)$$

Finalmente, o sistema será assintoticamente estável se as seguintes condições forem todas satisfeitas:

$$1. |a_n| < |a_0| \quad (4.70)$$

$$2. P(z)|_{z=1} > 0 \quad (4.71)$$

$$3. P(z)|_{z=-1} \begin{cases} > 0 & \text{para } n \text{ par} \\ < 0 & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (4.72)$$

$$4. \begin{array}{l} |b_{n-1}| > |b_0| \\ |c_{n-2}| > |c_0| \\ \vdots \\ |q_2| > |q_0| \end{array} \quad (4.73)$$

Quando usamos um equivalente "Zero-Order Hold" do oscilador harmônico como planta flexível e um PD projetado pela aproximação Tustin (Figura 4.27) como controle discreto nós teremos um sistema de segunda ordem cuja equação característica em malha fechada  $P(z)=0$  é, da Equação (4.59):

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \quad (4.74)$$

$$P(z) = z^2 + z \left[ \left( \frac{k_p T_s + 2k_d}{T_s} \right) (1 - \cos(\omega_n T_s)) - 2 \cos(\omega_n T_s) \right] + \left( \frac{k_p T_s - 2k_d}{T_s} \right) (1 - \cos(\omega_n T_s)) + 1 = 0 \quad (4.75)$$

Neste simples porém importante caso o critério de estabilidade de Jury torna-se:

$$1. |a_2| < |a_0|; \quad 2. P(1) > 0; \quad 3. P(-1) > 0; \quad n = 2 = \text{par} \quad (4.76)$$

Da primeira desigualdade da Equação (4.76), obtém-se:

$$i) -2 < \left( \frac{k_p \cdot T_s - 2k_d}{T_s} \right) (1 - \cos(\omega_n \cdot T_s)) < 0 \quad (4.77)$$

Da segunda desigualdade da Equação (4.76) obtém-se:

$$ii) k_p > -1 \quad (4.78)$$

$$iii) \cos(\omega_n \cdot T_s) < 1 \quad (4.79)$$

que é um limitante superior.

Da terceira desigualdade da Equação (4.76) obtém-se:

$$iii) \cos(\omega_n \cdot T_s) > \frac{2k_d - T_s}{2k_d + T_s} \quad (4.80)$$

que é um limitante inferior.

Como podemos conferir com base na Seção 4.5.3 para os casos sem amortecimento, todas situações instáveis apresentadas para o oscilador harmônico simples não amortecido violam o critério de estabilidade de Jury da seguinte forma:

a) instabilidade:

$$1) |a_2| < |a_0| \Rightarrow \left| \left( \frac{k_p T_s - 2k_d}{T_s} \right) (1 - \cos(\omega_n \cdot T_s)) + 1 \right| < 1 \quad (4.81)$$

Em números teremos para os ganhos do controle PD projetado pela aproximação Tustin  $k_p = 3,2$  e  $k_d = 4,8$ ; a frequência natural não amortecida  $\omega_n = 2\pi \cdot 0,1312 = 0,8244$  (rad/seg) (equivalente ao 1º modo de vibração no eixo x calculado para o modelo do CBERS-1 elaborado por Silva (1997)) e um período de amostragem elevado:  $T_s = 1,6$  segundos:

$$1,1025 > 1 \quad (4.82)$$

correspondendo claramente a uma violação do critério de estabilidade, daí o porquê da instabilidade.

$$2) P(1) > 0 \quad (4.83)$$

Em números,

$$6,3075 > 0 \quad (4.84)$$

$$3) P(-1) > 0 \quad (4.85)$$

Em números,

$$-6,5125 > 0 \quad (4.86)$$

que corresponde a mais uma violação do critério de estabilidade de Jury.

b) estabilidade:

$$1) |a_2| < |a_0| \Rightarrow \left| \left( \frac{k_p T_s - 2k_d}{T_s} \right) (1 - \cos(\omega_n T_s)) + 1 \right| < 1 \quad (4.87)$$

Em números para os mesmos  $k_p$ ,  $k_d$  e  $\omega_n$  que o caso anterior mas com um período de amostragem menor de  $T_s = 0,1$  segundos não teremos nenhuma violação das condições impostas nas Equações (4.76), como podemos verificar mediante as expressões (4.88) até (4.92):

$$0,6848 < 1 \quad (4.88)$$

$$2) P(1) > 0 \quad (4.89)$$

Em números:

$$0,0285 > 0 \quad (4.90)$$

$$3) P(-1) > 0 \quad (4.91)$$

Em números,

$$3,3411 > 0 \quad (4.92)$$

Vejamos agora ensaios das regiões de estabilidade do sistema de controle de atitude (eixo de "Roll") para as seguintes funções  $f_1(T_s)$ ,  $f_2(T_s)$ ,  $f_3(T_s)$  relativas às três condições de estabilidade impostas pelo critério de Jury, respectivamente, para um oscilador harmônico livre controlado por PD discretizado por aproximação Tustin com ganhos  $k_p=3,2$  e  $k_d=4,8$ . Da primeira das condições de estabilidade de Jury podemos extrair:

$$f_1(T_s) = \left( \frac{k_p \cdot T_s - 2 \cdot k_d}{T_s} \right) (1 - \cos(\omega_n \cdot T_s)) + 1 \quad (4.93)$$

cuja condição de estabilidade é:

$$-1 < f_1(T_s) < 1 \quad (4.94)$$

Da segunda das condições de estabilidade de Jury temos:

$$f_2(T_s) = P(1) = 2 \cdot (1 + k_p) (1 - \cos(\omega_n \cdot T_s)) \quad (4.95)$$

cuja condição de estabilidade é:

$$f_2(T_s) > 0 \quad (4.96)$$

Da terceira das condições de estabilidade de Jury temos:

$$f_3(T_s) = P(-1) = 2 \cdot \left( \left( 1 - \frac{2 \cdot k_d}{T_s} \right) + \cos(\omega_n \cdot T_s) \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot k_d}{T_s} \right) \right) \quad (4.97)$$

cuja condição de estabilidade é:

$$f_3(T_s) > 0 \quad (4.98)$$

As Figuras 4.56 a 4.61 mostram alguns ensaios realizados para as expressões (4.93), (4.95) e (4.97) em função do período de amostragem  $T_s$ , representando uma forma gráfica que é útil no processo de análise das regiões de estabilidade assintótica.

Observando a Figura 4.56 podemos perceber duas marcas verticais que indicam os casos em que  $T_s = 0,1$  segundos e  $T_s = 1,6$  segundos. Pela Figura 4.56 também pode-se notar que para  $T_s = 0,1$  segundos estamos obedecendo a condição de estabilidade assintótica imposta pela Equação (4.94), o que não ocorre para  $T_s = 1,6$  segundos.

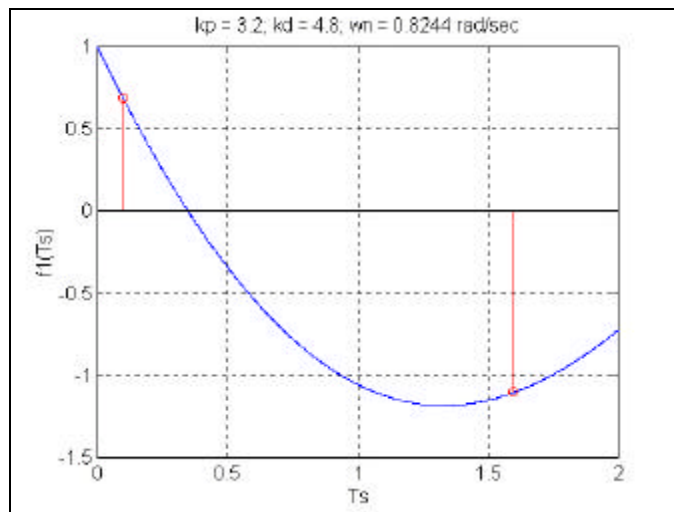


Fig. 4.56 - Gráfico de  $f_1(T_s)$ .

Na Figura 4.57 nota-se que tanto  $T_s = 0,1$  segundos quanto  $T_s = 1,6$  segundos obedecem à condição de estabilidade assintótica imposta pela Equação (4.96).

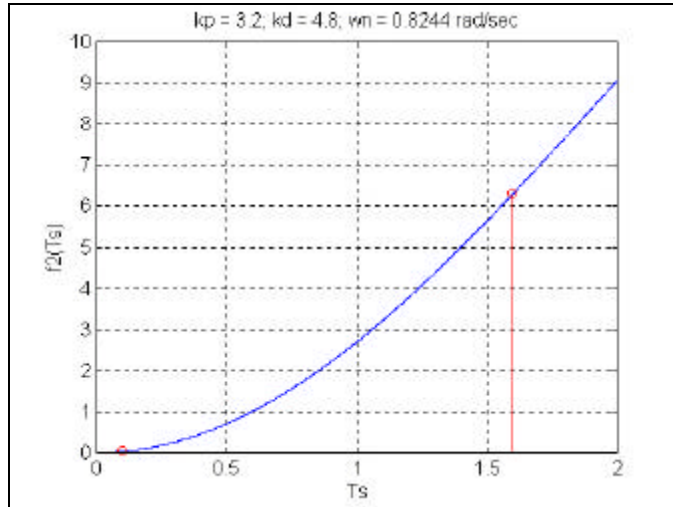


Fig. 4.57 - Gráfico de  $f_2(T_s)$ .

A Figura 4.58 indica que para  $T_s = 0,1$  segundos a estabilidade assintótica estará garantida, visto que a condição (4.98) foi obedecida, o que não ocorreu quando  $T_s = 1,6$  segundos.

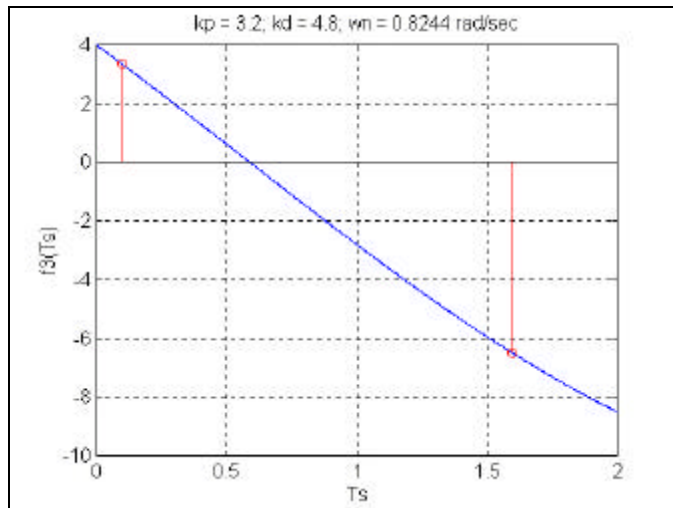


Fig. 4.58 - Gráfico de  $f_3(T_s)$ .

As figuras acima sugerem que o controlador digital em questão trabalhará em segurança se o período de amostragem pertencer, por exemplo, à faixa mostrada na relação (4.99).

$$0 < T_s < 0,5 \quad [\text{segundos}] \quad (4.99)$$

Nas Figuras 4.59 a 4.61 estão apresentados gráficos considerando casos em que  $T_s$  possui valores muito grandes, sendo muito claro o porquê da instabilidade para esses casos, pois há violações na 1ª e 3ª condições de estabilidade (bastaria uma só violação).

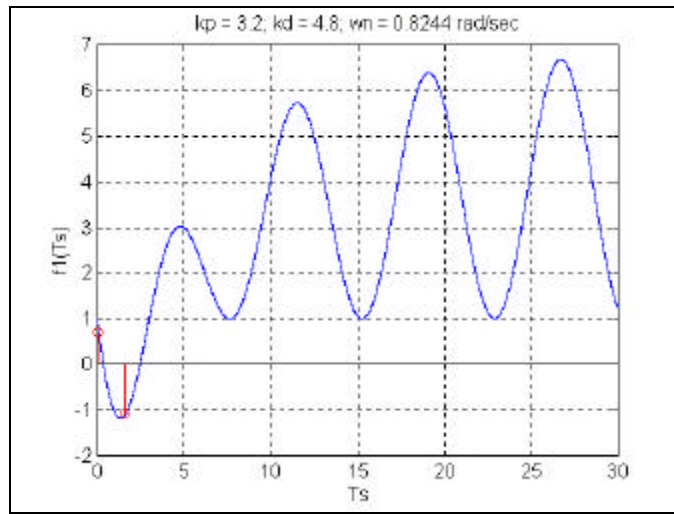


Fig. 4.59 - Gráfico de  $f_1(T_s)$ .

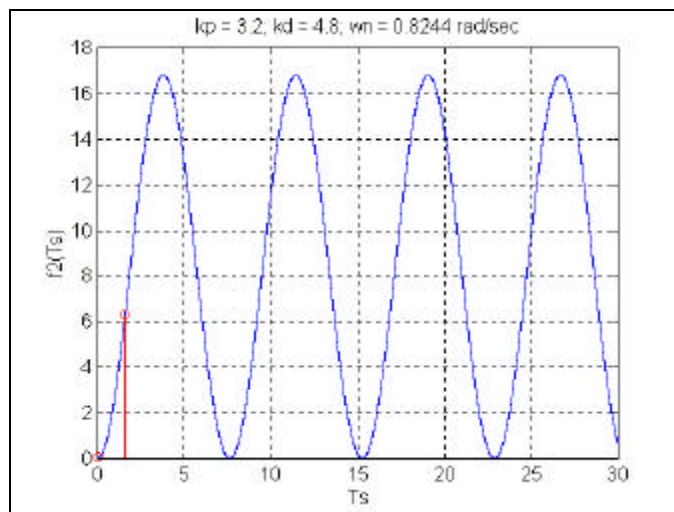


Fig. 4.60 - Gráfico de  $f_2(T_s)$ .



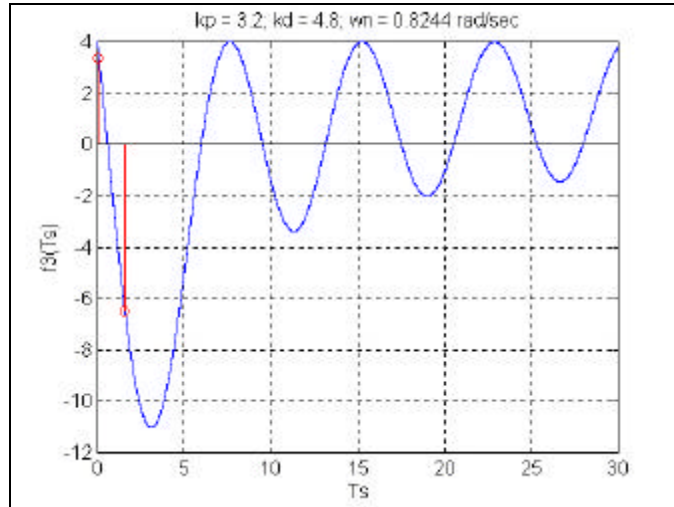


Fig. 4.61 - Gráfico de  $f_3(T_S)$ .

Pode-se prever o comportamento das três funções  $f_1(T_S)$ ,  $f_2(T_S)$  e  $f_3(T_S)$  quando  $T_S$  tende a valores muito elevados aplicando-se nas Equações (4.93), (4.95) e (4.97) o limite quando  $T_S$  tende para infinito. Como resultados temos: a)  $f_1(T_S)$  oscilará entre 1 e  $(1+2 \cdot k_p)$ ; b)  $f_2(T_S)$  oscilará entre 0 e  $4 \cdot (1+k_p)$ ; c)  $f_3(T_S)$  oscilará entre 0 e 4.

## CAPÍTULO 5

### SIMULAÇÃO COM CONTROLE EM TEMPO DISCRETO DE UM MODELO ANALÓGICO DO CBERS-1 E SUA ESTABILIDADE

#### 5.1 - INTRODUÇÃO

Aqui serão apresentadas várias simulações do controle de atitude para um modelo discreto do satélite CBERS-1, do Capítulo 3, simulado com 5 modos de vibração para o apêndice flexível com razão de amortecimento igual a 0,02 para todos os modos. Essa convenção não está em consonância com a realidade visto que a razão de amortecimento cresce, segundo alguma lei, à medida que as frequências dos modos crescem. Mas, compreende-se que se trata de uma simplificação aceitável em termos de simulação, apresentando, pois, situações mais arriscadas que o caso real, isto é, testando a política de controle para os cinco primeiros modos de vibração com a razão de amortecimento do primeiro modo (a mais tênue). Em todas as simulações, em ambiente MatLab 4.2c.1 / Simulink 3.1c, foi usado um integrador Runge-Kutta 4-5 com passo fixo de 0,01 segundos (100 Hz) e os seguintes ganhos de controle PD: a) caso 1: roll:  $k_p=0,0316$ ;  $k_d=0,0482$ ; pitch:  $k_p=0,107$  ; $k_d=0,163$ ; yaw:  $k_p=0,300$ ;  $k_d=0,460$ ; b) caso 2: roll:  $k_p=3,16$ ;  $k_d=4,82$ ; pitch:  $k_p=10,7$  ; $k_d=16,3$ ; yaw:  $k_p=30,0$ ;  $k_d=46,0$ . Todas as simulações foram feitas com o intuito de efetuar futuras comparações entre as mesmas.

A razão de utilizar passo de integração fixo de 0,01 segundos é simples: para que o computador consiga simular o modo de frequência mais elevada é preciso que possua uma frequência de integração no mínimo igual ao dobro da frequência deste modo. Assim, podemos evitar os fenômenos do mascaramento (“aliasing”) e das oscilações escondidas (“hidden oscillations”) durante o processo de simulação. Como pode-se verificar na Tabela 5.1 abaixo, a maior frequência de modo é cerca de 25,7241 Hz implicando que estaremos livres das “aliasing” e das “hidden oscillations” se no mínimo uma

freqüência de 51.4482 Hz for utilizada como freqüência do integrador da simulação, com freqüência de Nyquist de 25,7241 Hz. Como utilizei 100 Hz de freqüência do integrador (freqüência de Nyquist: 50 Hz) me asseguro de que todos os cinco modos, nos três eixos, serão simulados no computador sem problemas. Os inconvenientes são: o tempo para o término de cada simulação se estende em demasia; e o volume de dados armazenados torna-se grande. Na Tabela 5.1 os eixos x, y, z correspondem aos eixos de “roll”, “pitch” e “yaw”, respectivamente, conforme estabelecido na Seção 3.5 deste trabalho.

**TABELA 5.1 - MODOS DE VIBRAÇÃO PARA O MODELO ASSIMÉTRICO DO CBERS-1  
UTILIZADO NESTE TRABALHO**

Modo	Eixo	Freqüência (Hz)	Razão de amortecimento
Rígido	x	0	0
	y	0	0
	z	0	0
1	x	0.1312	0,02
	y	0.1331	0,02
	z	0.4526	0,02
2	x	0.6874	0,02
	y	0.6883	0,02
	z	1.8999	0,02
3	x	1.9005	0,02
	y	2.8361	0,02
	z	3.7141	0,02
4	x	3.7146	0,02
	y	6.1346	0,02
	z	6.1350	0,02
5	x	7.9411	0,02
	y	15.5614	0,02
	z	25.7241	0,02

O sistema de simulação com controle discreto no tempo (Figura 5.1) possui os blocos mostrados nas Figuras 5.2 até 5.9.

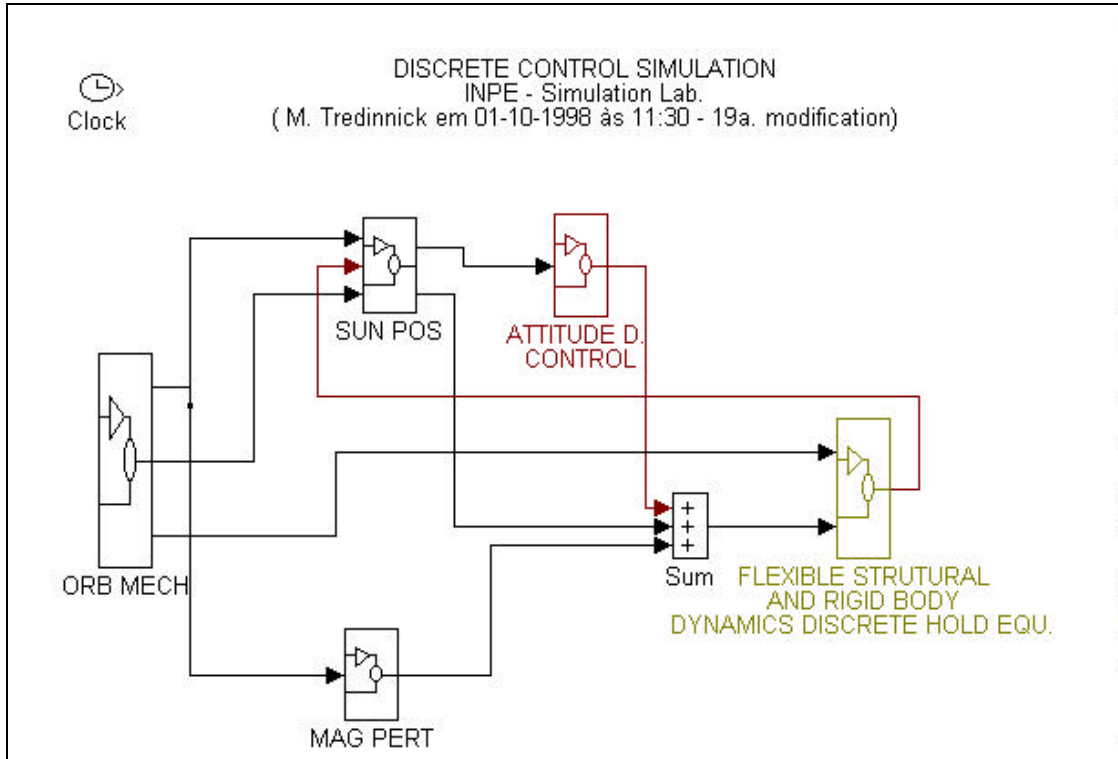


Fig. 5.1 - Sistema originalmente desenvolvido por Silva (1997) para o caso totalmente analógico, agora com controle discreto no tempo para atender às simulações de atitude.

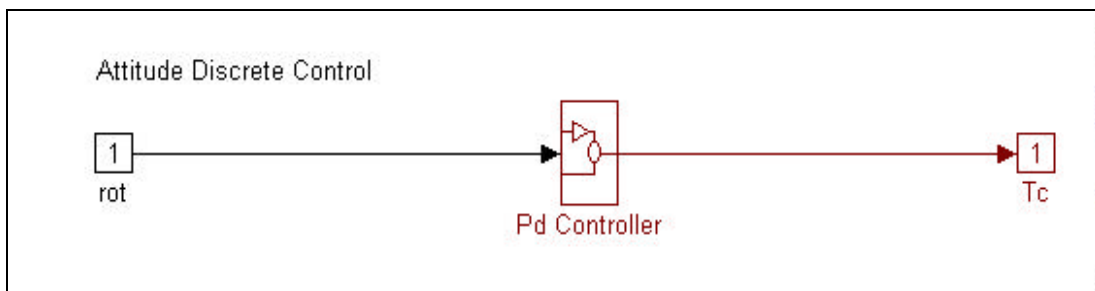


Fig. 5.2 - Bloco de controle nos três eixos.

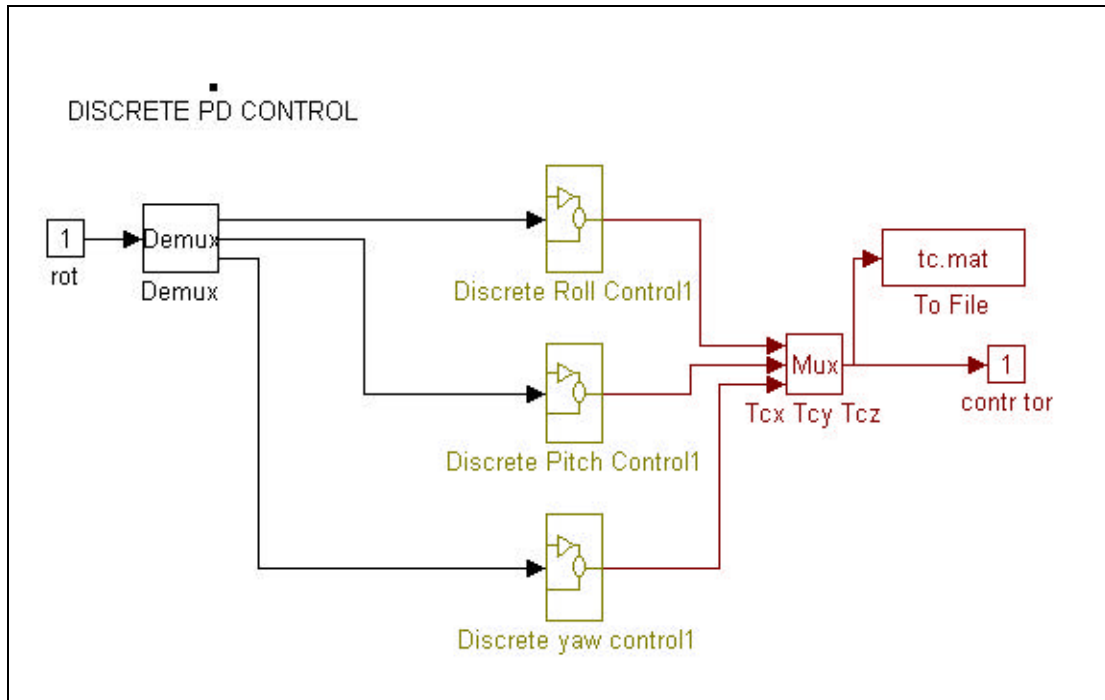


Fig. 5.3 - Estrutura interna do bloco de controle da Figura 5.2.

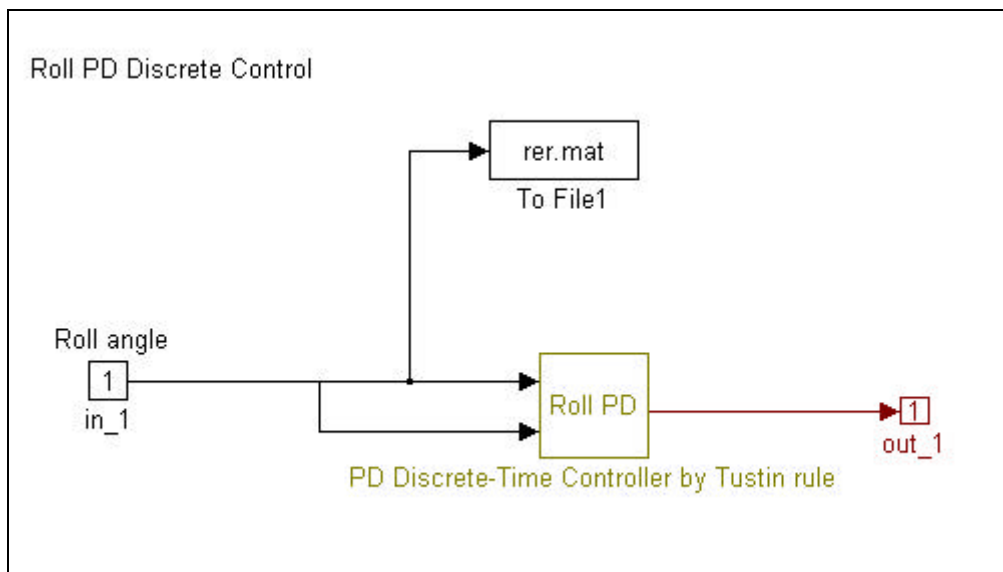


Fig. 5.4 - Detalhe para o controle de "roll".

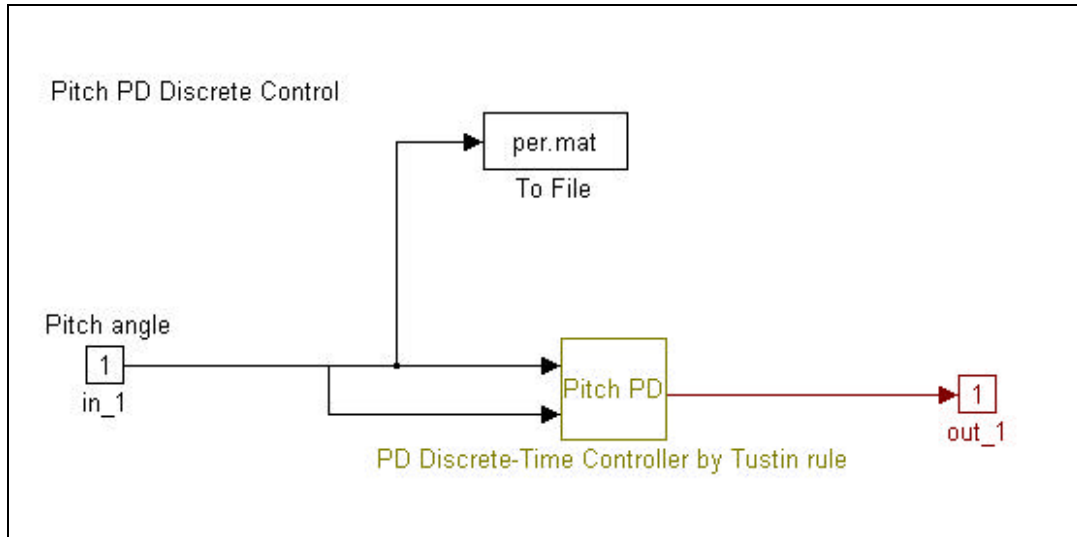


Fig. 5.5 - Detalhe do controle de “pitch”.

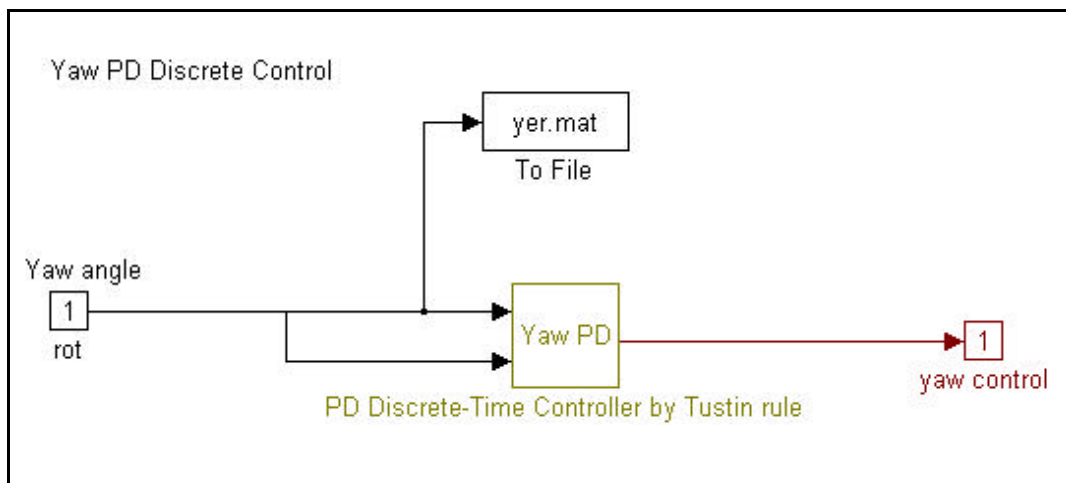


Fig. 5.6 - Detalhe do controle de “yaw”.

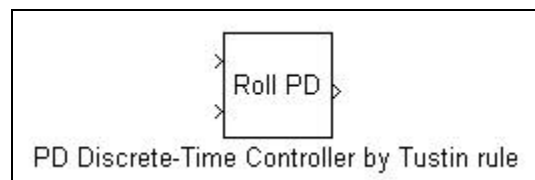


Fig. 5.7 - Detalhe de construção de uma “s-function” gráfica.

Definições da máscara do agrupamento de “s-function” (por exemplo, “roll PD”) da Figura 5.7;

- “New block type”: “PD discrete time controller”;
- “Dialog strings” separadas por | : “PD discrete time controller by Tustin equivalence | Proportional Gain kp | Derivative Gain kd | Sample Time T (sec)”;
- “Initialization commands”: kp=@1;kd=@2;T=@3;
- “Drawing commands”: Roll PD
- “Help String”: “This block make the PD discrete equivalence by Tustin rule about a analogic PD controller. By M. Tredinnick”.

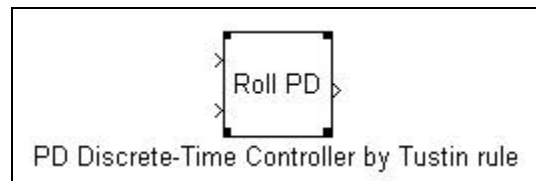


Fig. 5.8 - “S-function” gráfica de teste.

Tal bloco da Figura 5.8 desagrupado fica conforme mostrado na Figura 5.9.

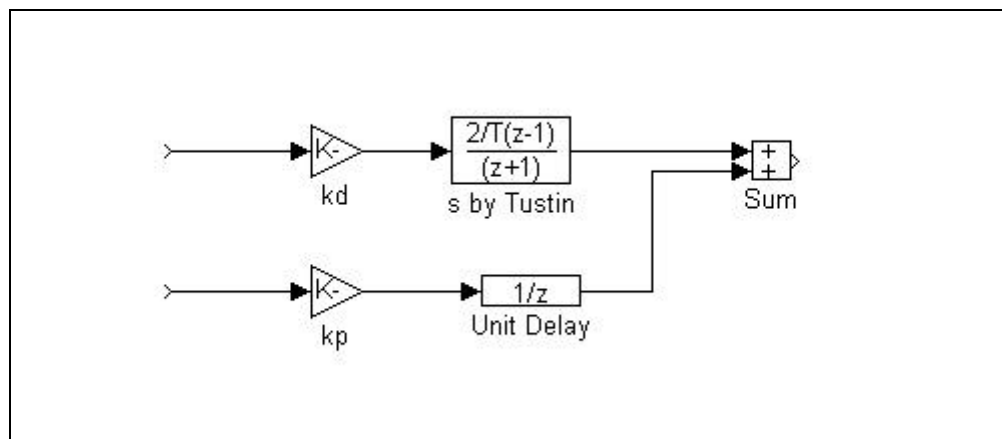


Fig. 5.9 - “S-funtion” desagrupada.

## 5.2 - PLANTA ANALÓGICA E CONTROLE PD ANALÓGICO

Nas simulações executadas para o caso totalmente analógico (Figuras 5.10 a 5.16) o desempenho do controle PD foi testado para os ganhos elevados do Caso 2.

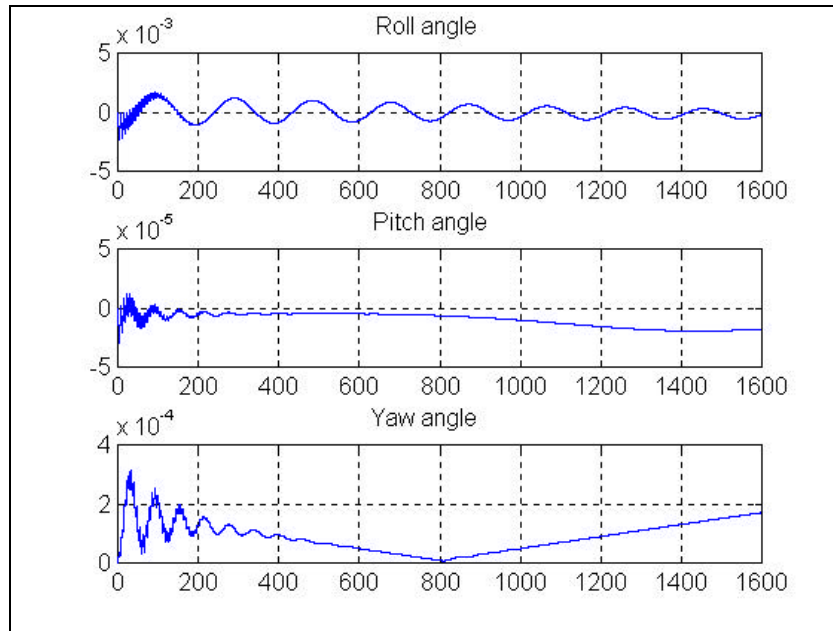


Fig. 5.10 - Ângulos de atitude para o controle PD analógico da planta analógica (CBERS-1).



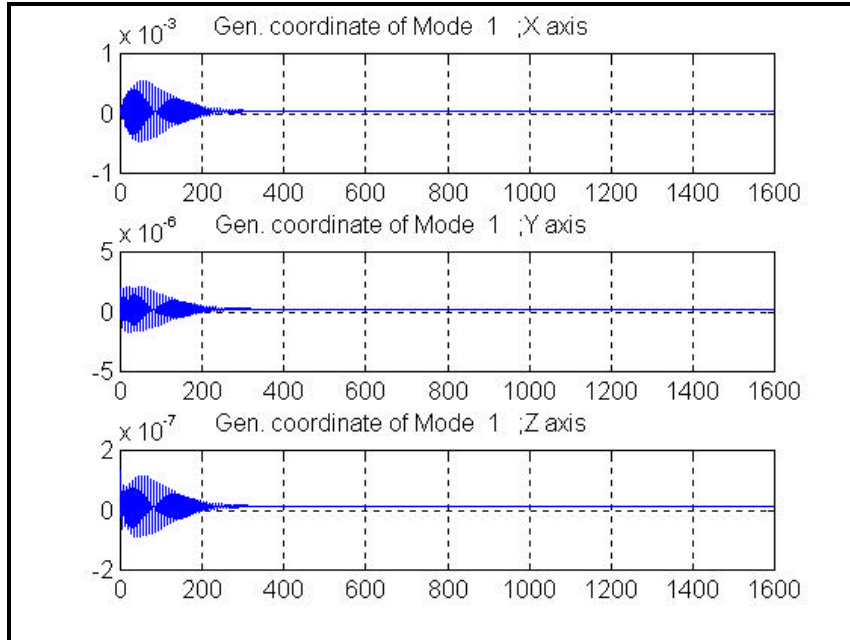


Fig. 5.11 - Coordenadas generalizadas relativas ao primeiro modo.

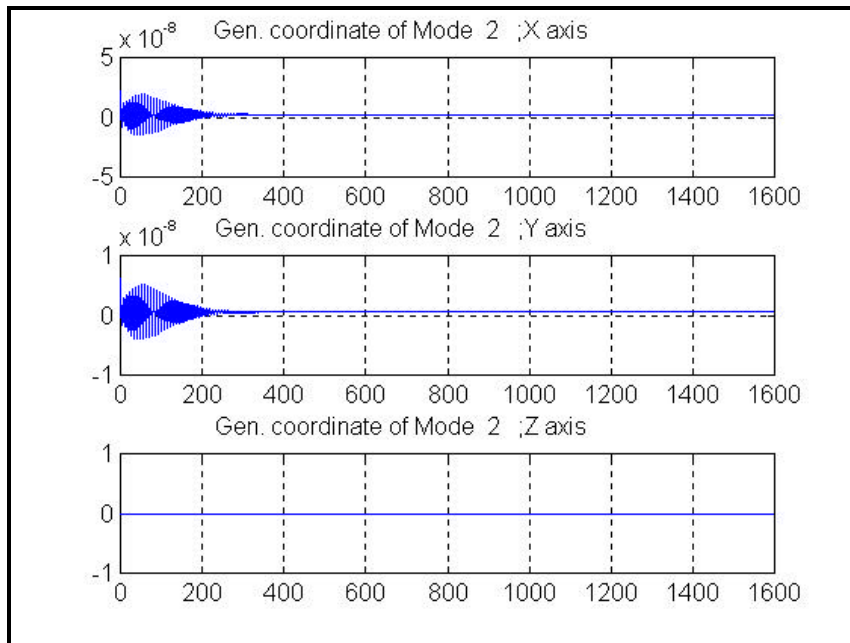


Fig. 5.12 - Coordenadas generalizadas relativas ao segundo modo.

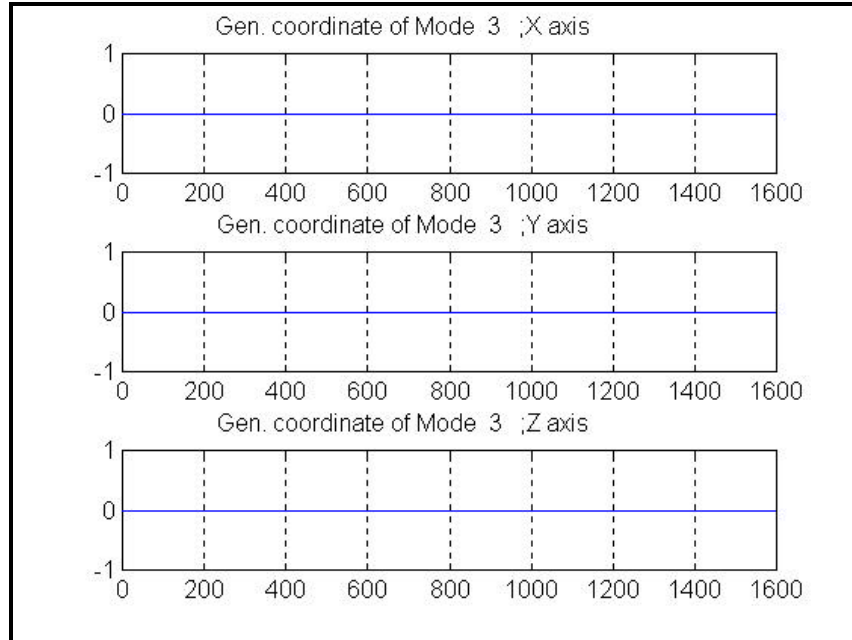


Fig. 5.13 - Coordenadas generalizadas relativas ao terceiro modo.

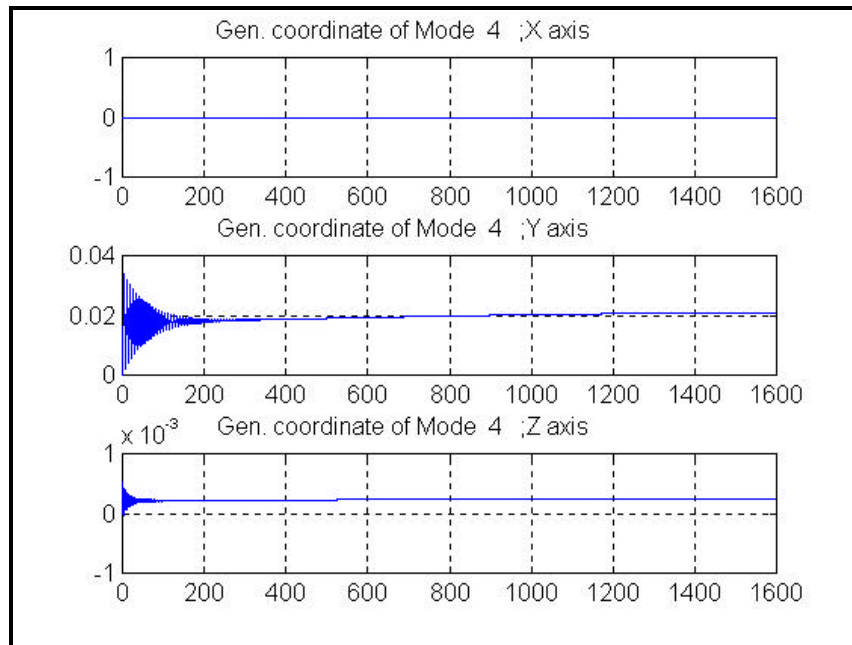


Fig. 5.14 - Coordenadas generalizadas relativas ao quarto modo.

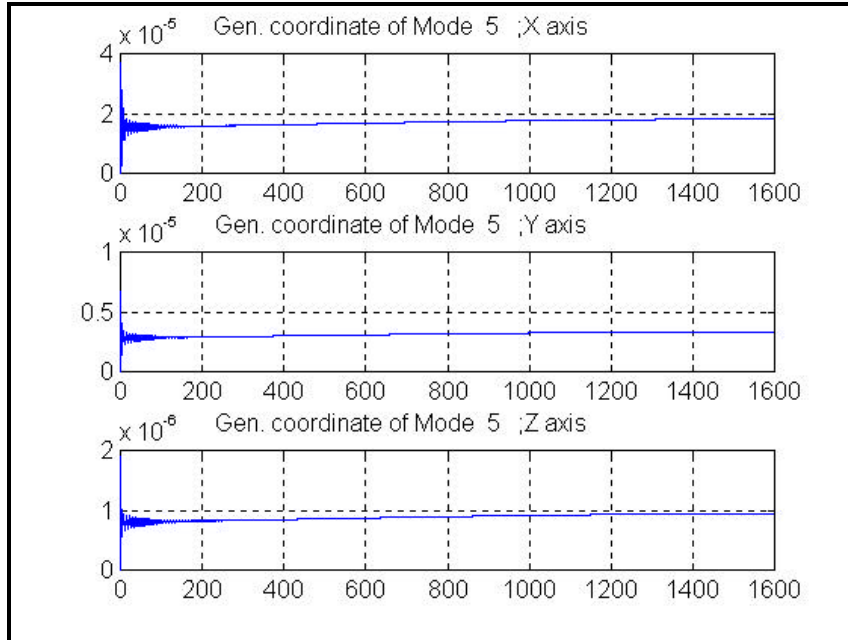


Fig. 5.15 - Coordenadas generalizadas relativas ao quinto modo.

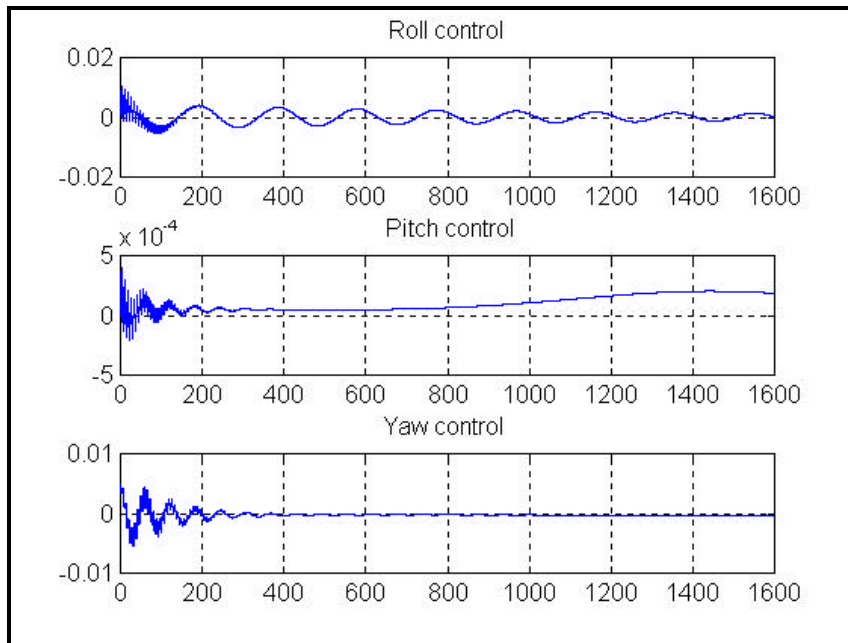


Fig. 5.16 - Sinais de controle de atitude.

Podemos notar na Figura 5.12 (eixo-z), Figura 5.13 (eixos-x, y, z) e Figura 5.14 (eixo-x) apresentam o inconveniente de estarem nulos. Isso pode ser uma

conseqüência da aproximação do modelo de um “plate” pelo modelo da viga de Euler-Bernoulli, o que corresponde exatamente ao que foi feito (Equação (3.124)). Uma explicação para isso é que é gerado um grau de liberdade “Degree Of Freedom” - (D.O.F.) onde o simulador tenta compensar este D.O.F. gerando um resultado nulo.

### 5.3 - PLANTA ANALÓGICA E CONTROLE PD DISCRETO POR TUSTIN

Podemos conferir a seguir os resultados das simulações feitas com o modelo analógico do satélite CBERS-1 com a atitude controlada por um PD em tempo discreto projetado pela usual e clássica regra de Tustin.

As simulações foram feitas usando  $T_s = 0,1$  segundos e  $T_s = 1,6$  segundos para os dois casos citados na Seção 5.1. Das Figuras 5.17 a 5.23 temos a simulação para  $T_s = 0,1$  segundos com ganhos de controle do caso 2. Das Figuras 5.24 a 5.30 temos a simulação para  $T_s = 1,6$  segundos para os ganhos de controle do caso 1, e da Figura 5.31 a 5.37 temos a simulação para  $T_s = 1,6$  segundos e ganhos de controle do caso 2.

a) Caso 2,  $T_s = 0,1$  segundos:

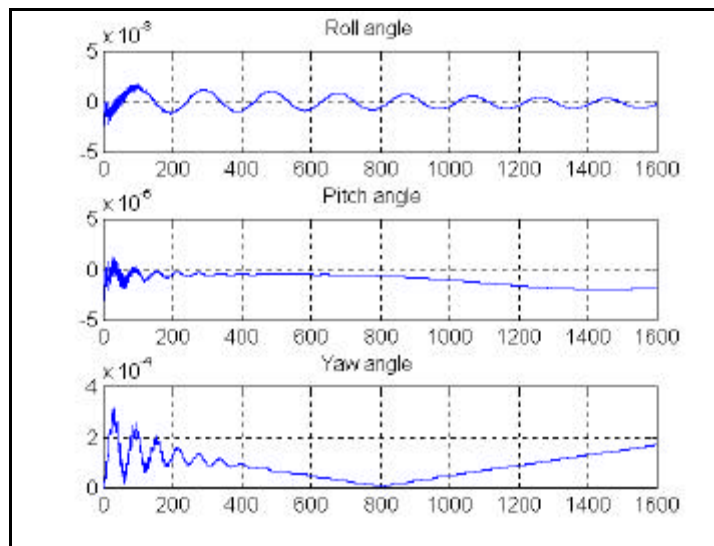


Fig. 5.17 - Ângulos de atitude.

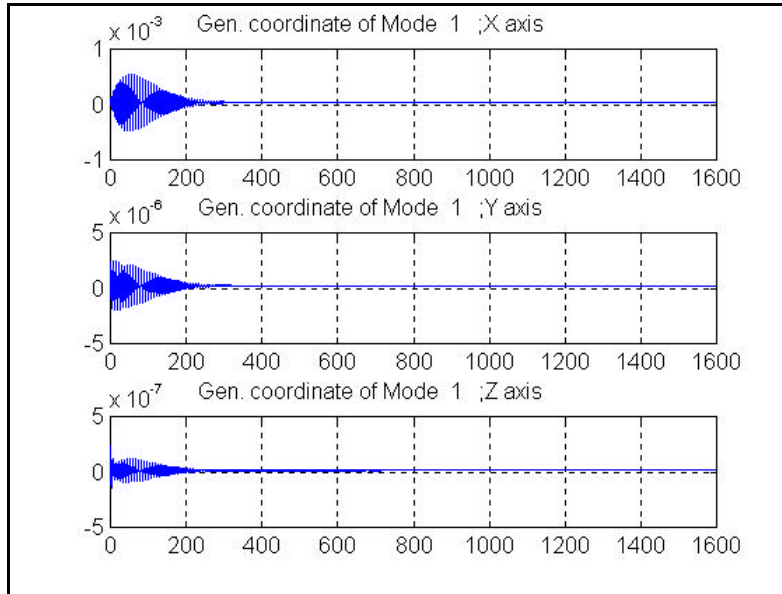


Fig. 5.18 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

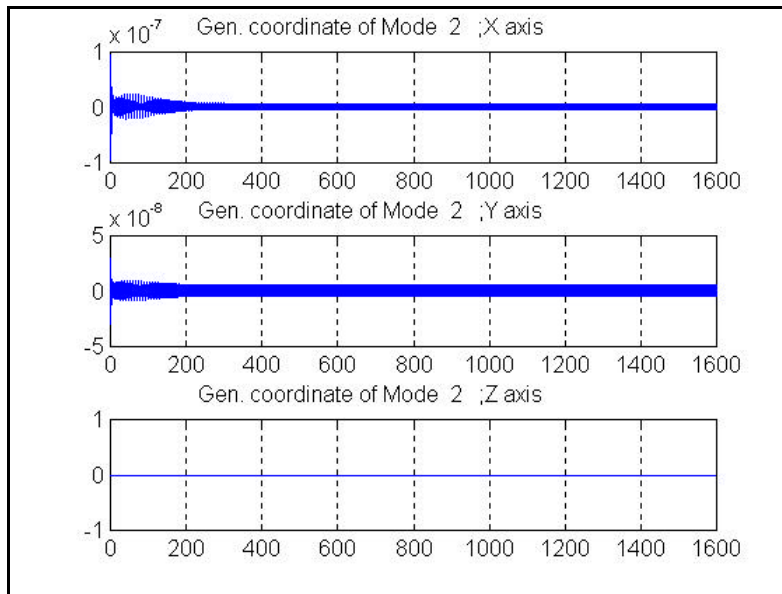


Fig. 5.19 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

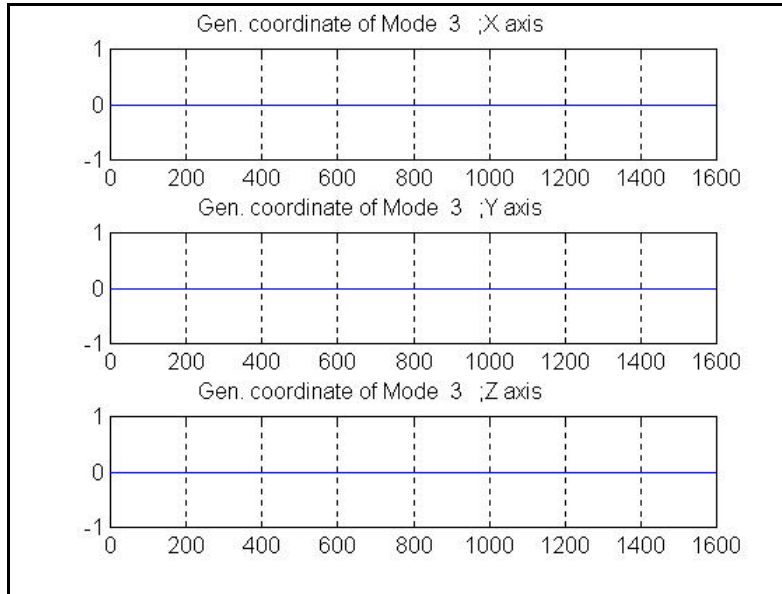


Fig. 5.20 - Coordenadas generalizadas para o terceiro modo.

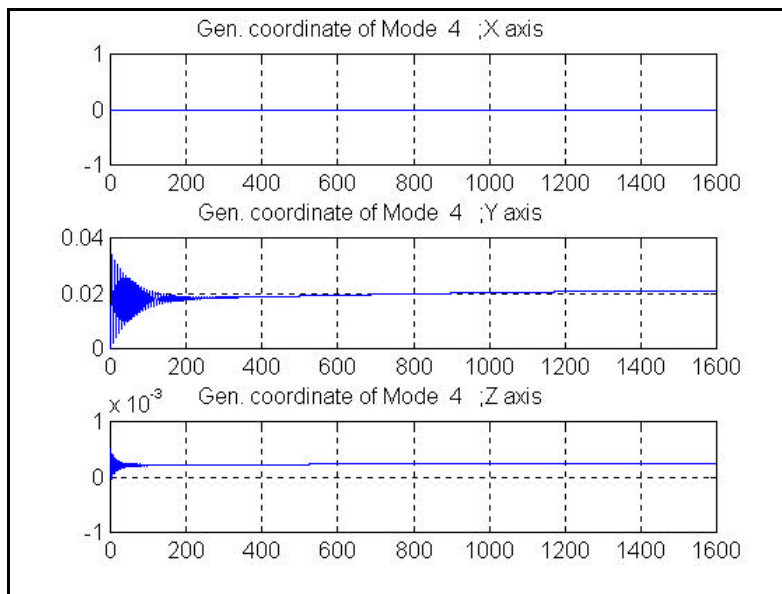


Fig. 5.21 - Coordenadas generalizadas para o quarto modo.

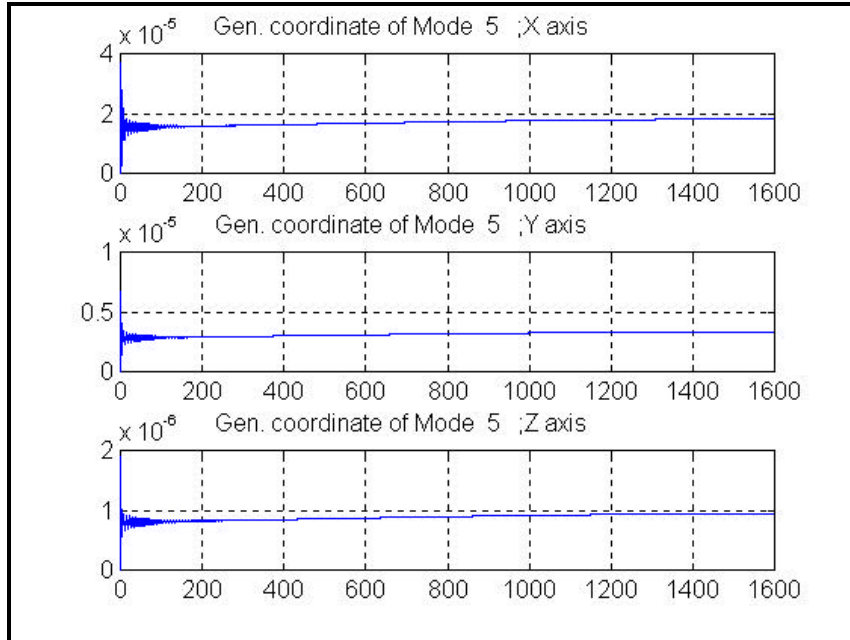


Fig. 5.22 - Coordenadas generalizadas para o quinto modo.

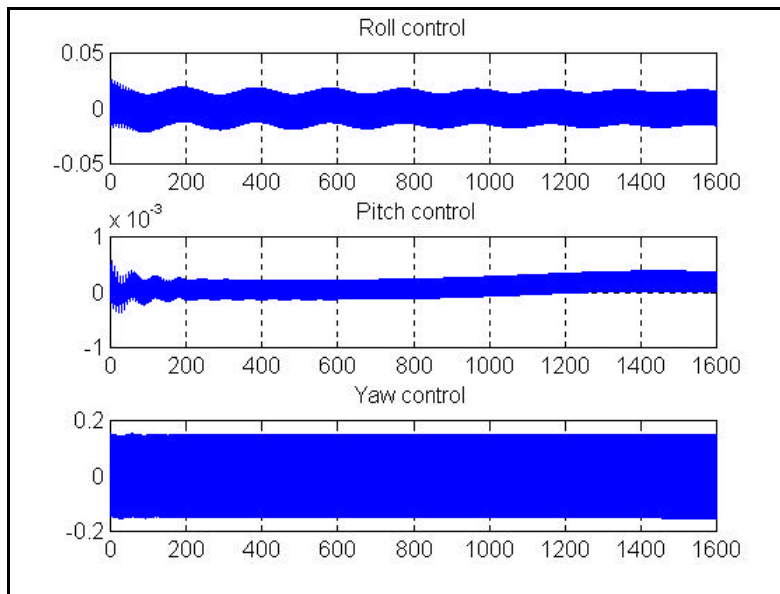


Fig. 5.23 - Sinais de controle de atitude.

Note na Figura 5.23 os fortes sinais de controle para produzir uma estabilização dos ângulos de atitude. Isso ocorre devido ao chaveamento do amostrador na frequência da taxa de amostragem  $\omega_s$ , provavelmente devido à

presença de pólos complexos conjugados com parte real negativa no plano-z. A explicação analítica desse efeito está muito bem documentada em Isermann (1989). Entretanto, em Franklin e Powell (1981), também pode-se encontrar alguma informação a respeito desse efeito, mas sem tantos detalhes quanto em Isermann (1989).

b) Caso 1,  $T_s = 1,6$  segundos:

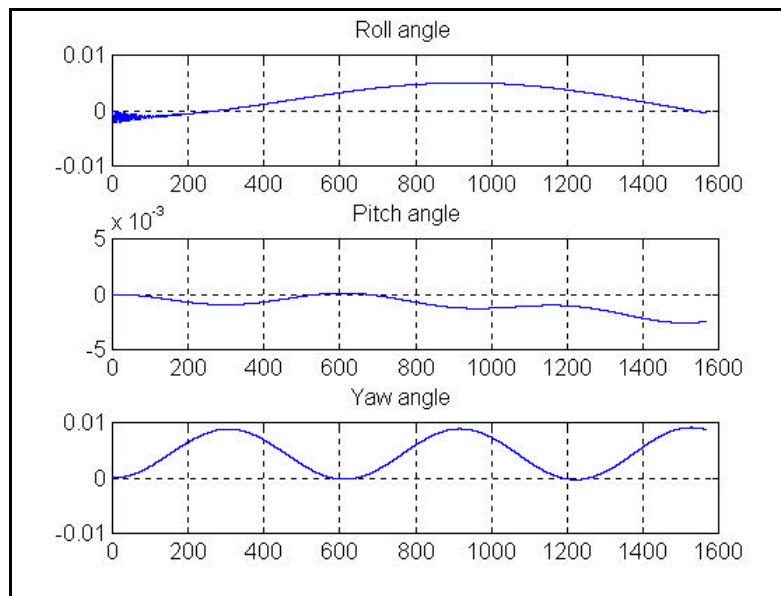


Fig. 5.24 - Ângulos de atitude.



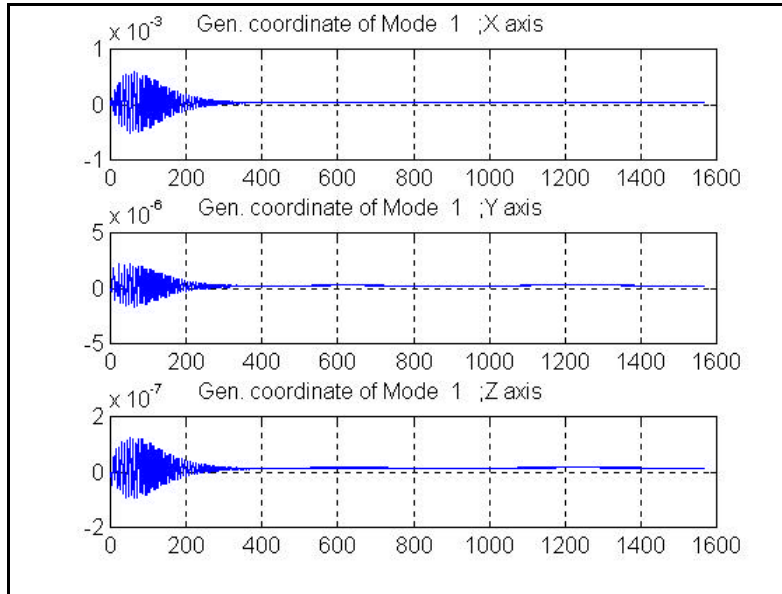


Fig. 5.25 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

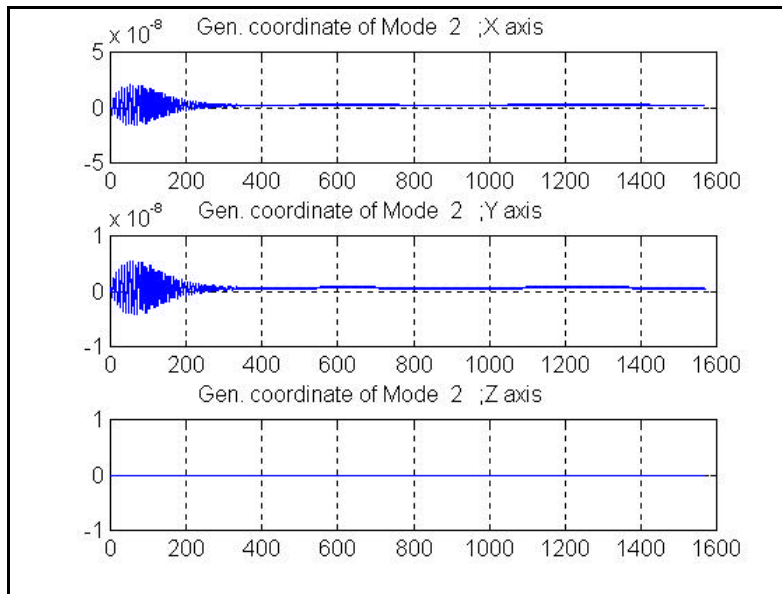


Fig. 5.26 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

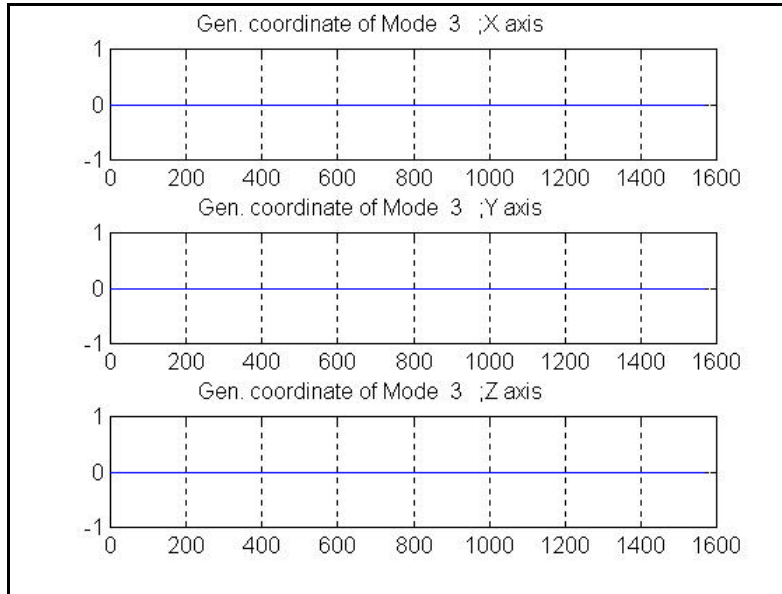


Fig. 5.27 - Coordenadas generalizadas para o terceiro modo.

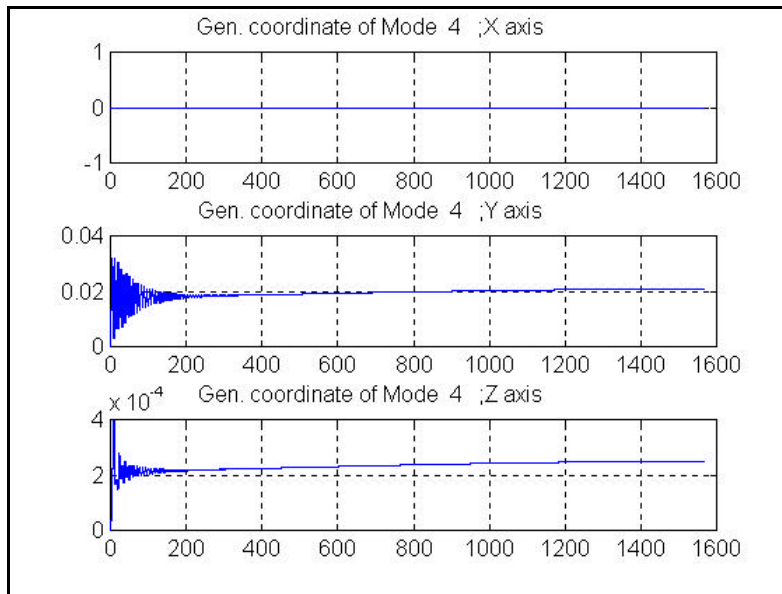


Fig. 5.28 - Coordenadas generalizadas para o quarto modo.

<

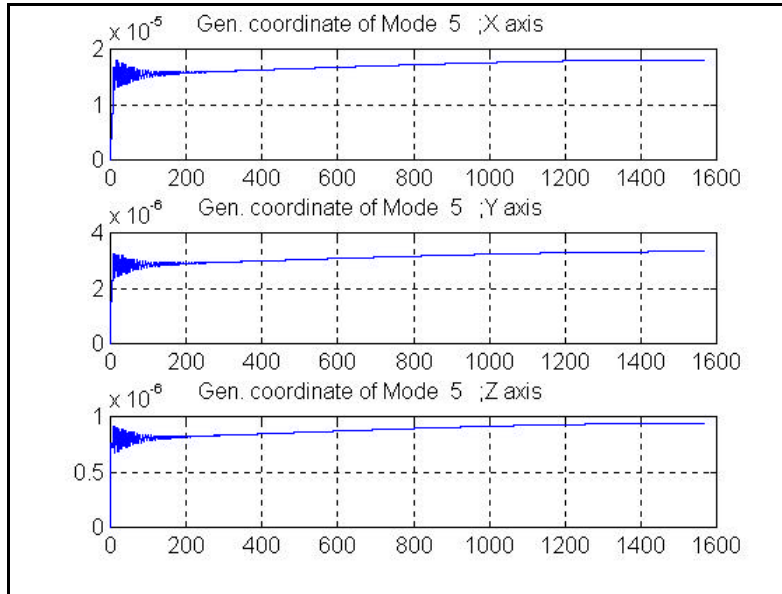


Fig. 5.29 - Coordenadas generalizadas para o quinto modo.

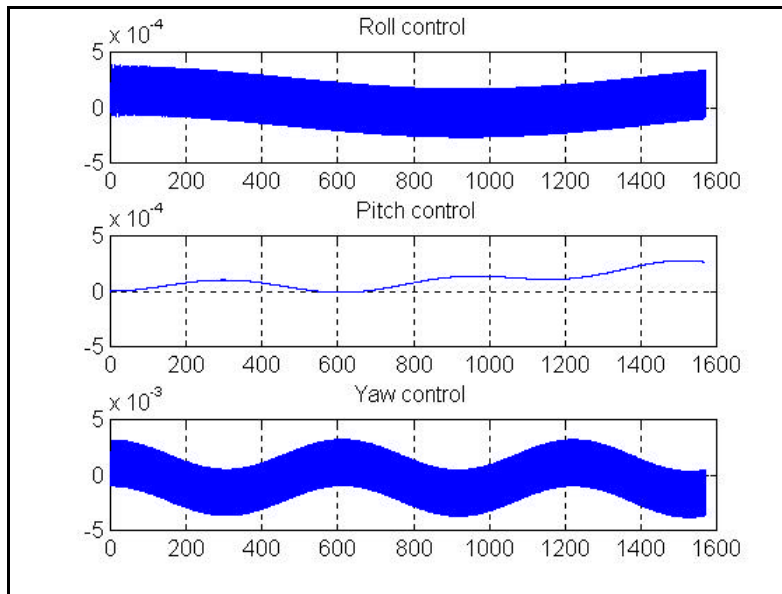


Fig. 5.30 - Sinais de controle de atitude.

c) Caso 2,  $T_s = 1,6$  segundos:

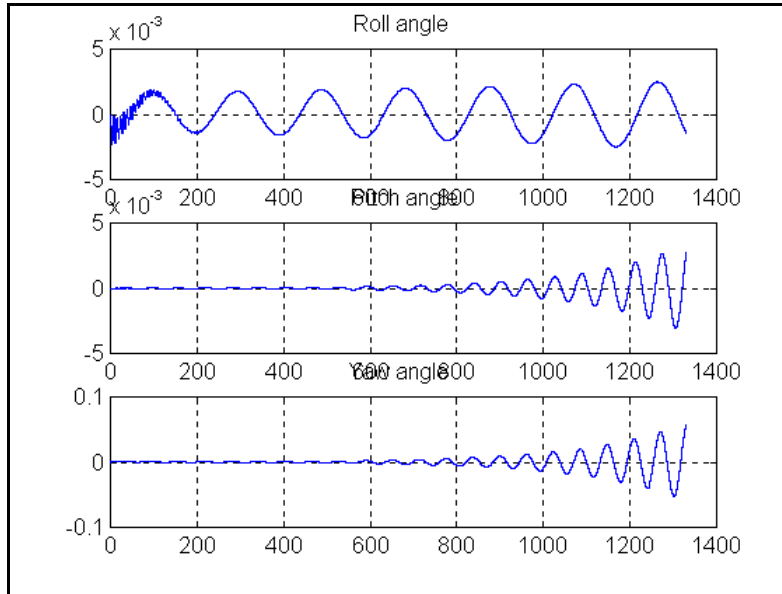


Fig. 5.31 - Ângulos de atitude.

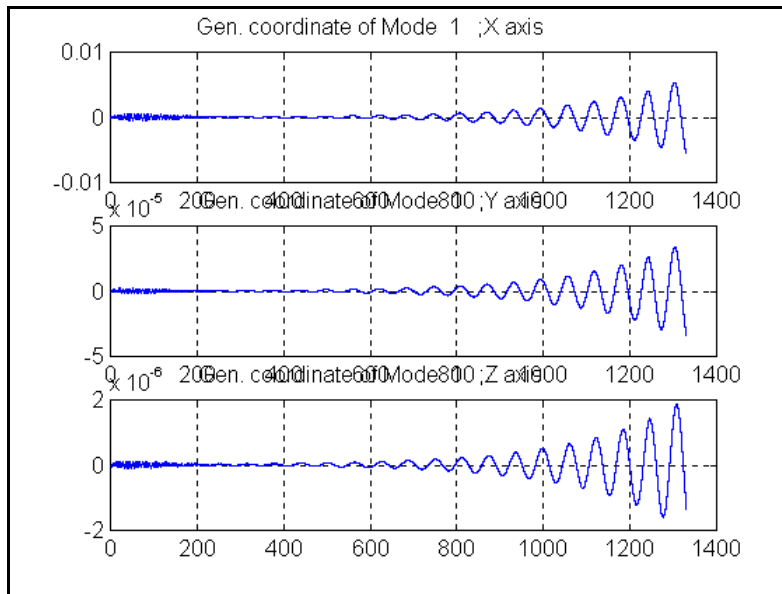


Fig. 5.32 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

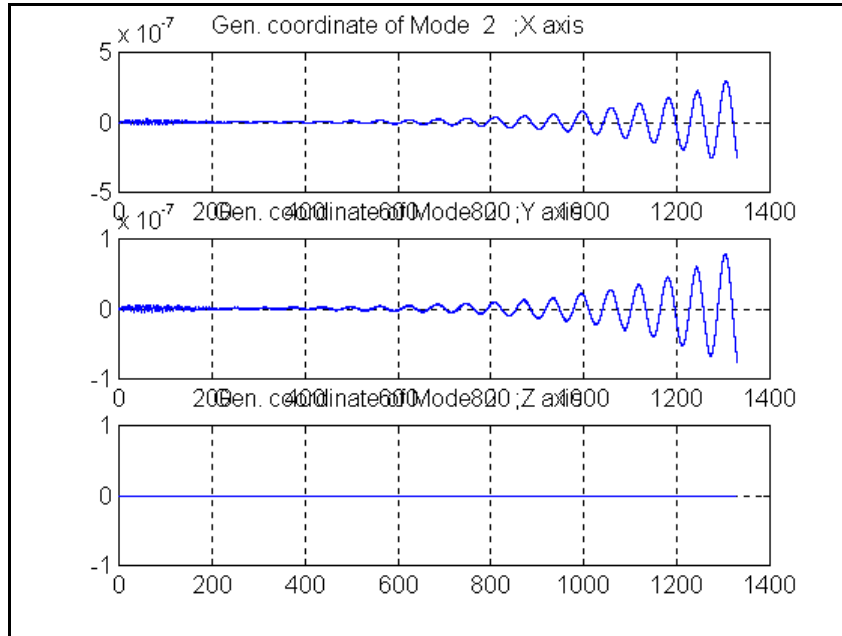


Fig. 5.33 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

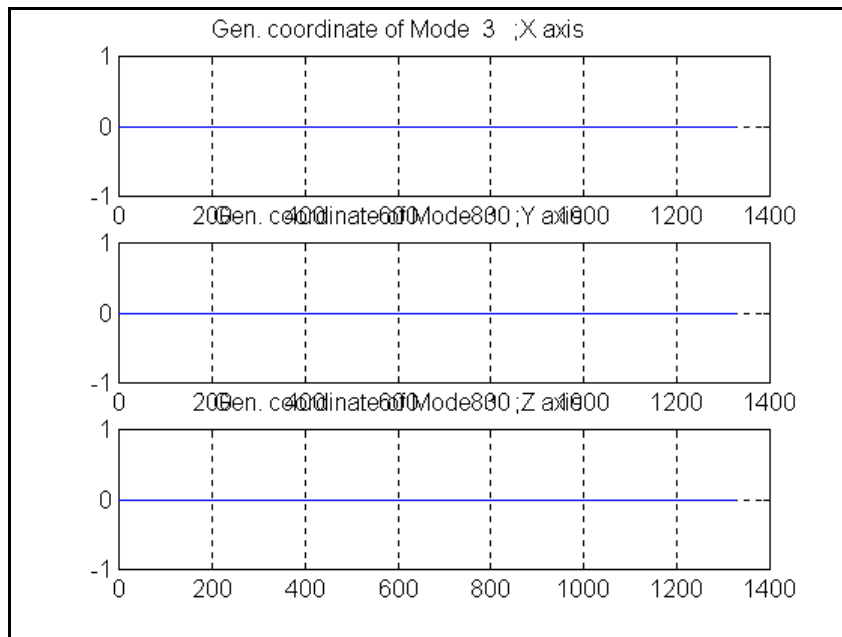


Fig. 5.34 - Coordenadas generalizadas para o terceiro modo.

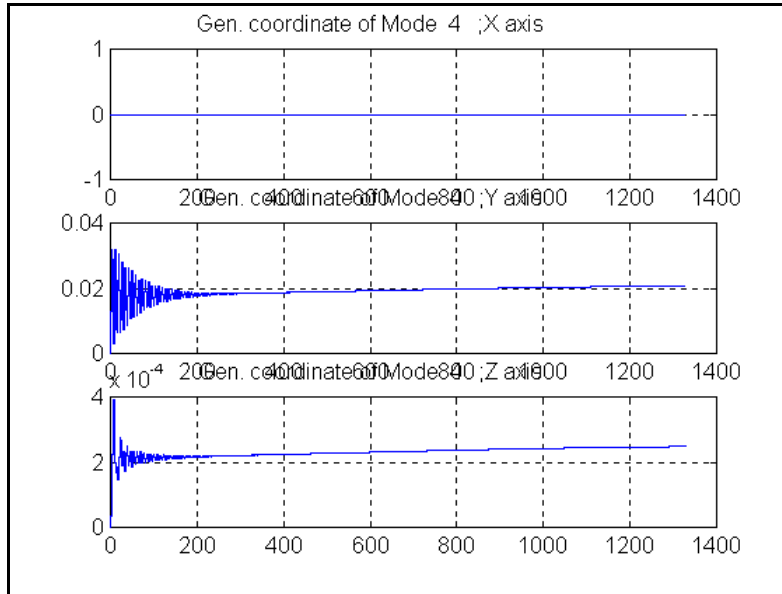


Fig. 5.35 - Coordenadas generalizadas para o quarto modo.

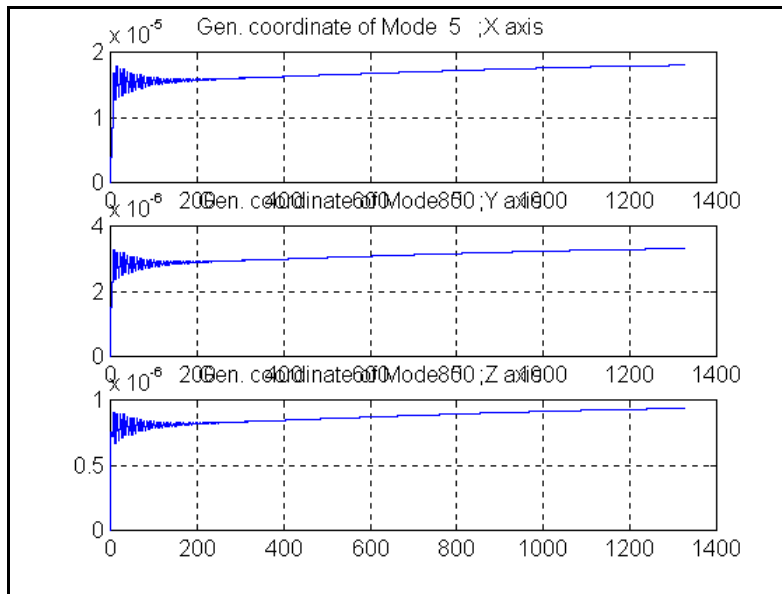


Fig. 5.36 - Coordenadas generalizadas para o quinto modo.

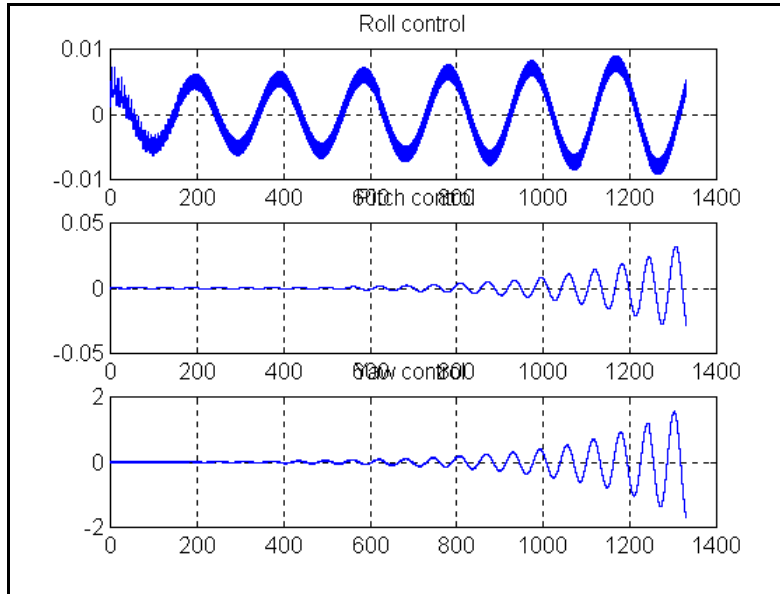


Fig. 5.37 - Sinais de controle de atitude.

#### 5.4 - PLANTA ANALÓGICA E CONTROLE PD DISCRETO POR TUSTIN, COM PRÉ-FILTRO “ANTI-ALIASING”

Tentando corrigir o problema da instabilização que foi apresentado na Seção 5.3 quando os ganhos de controle e o período de amostragem  $T_s$  são elevados, que pode também ser observado na Seção 5.5, foram inseridos filtros “anti-aliasing” nas saídas dos sensores. O filtro “anti-aliasing” é, basicamente, um filtro passa-baixas que tem por função atenuar fortemente a realimentação dos sinais dos modos de vibração que sejam superiores à frequência de Nyquist buscando evitar/minimizar os efeitos deletérios do fenômeno do mascaramento (“aliasing”).

Como pré-filtro “anti-aliasing” foram utilizados nas saídas dos sensores filtros Butterworth de quarta ordem (Apêndice A). As simulações realizadas com esse tipo de tecnologia estão mostradas nas Figuras 5.38 a 5.51.

a) caso 1,  $T_s = 1,6$  segundos:

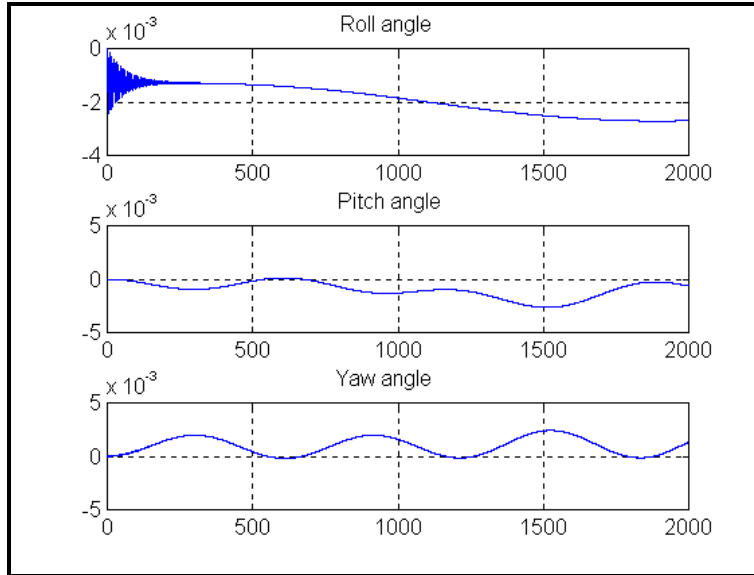


Fig. 5.38 - Ângulos de atitude.

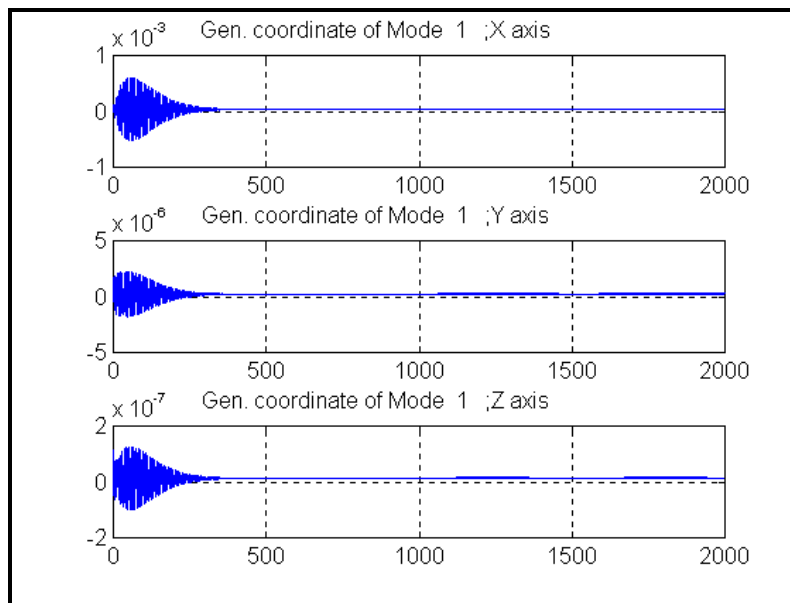


Fig. 5.39 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.



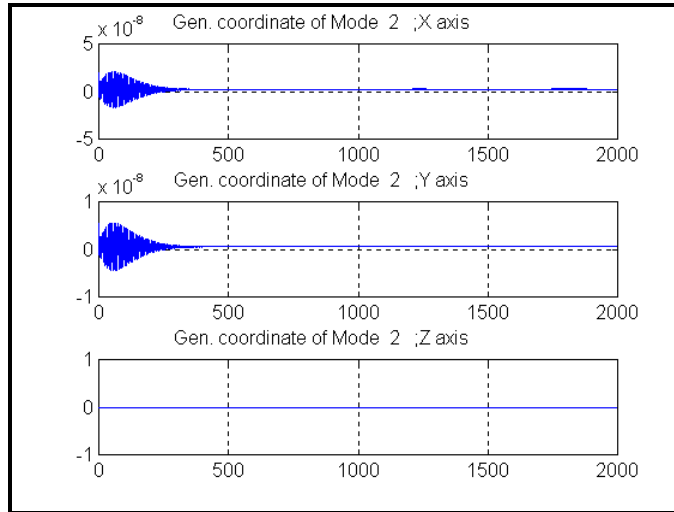


Fig. 5.40 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

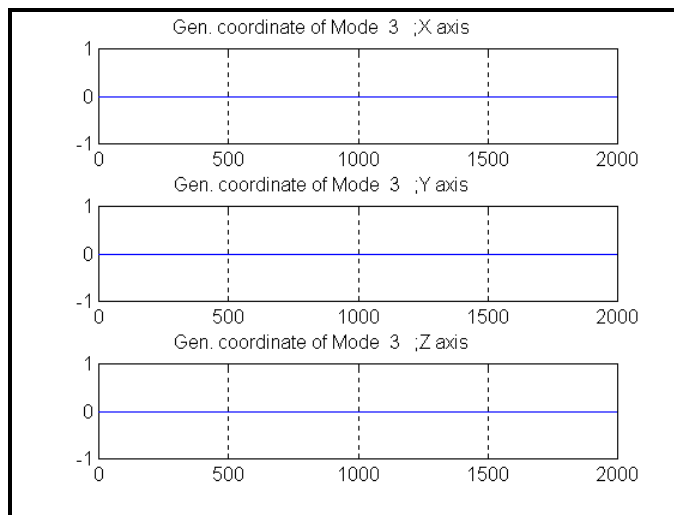


Fig. 5.41 - Coordenadas generalizadas para o terceiro modo.

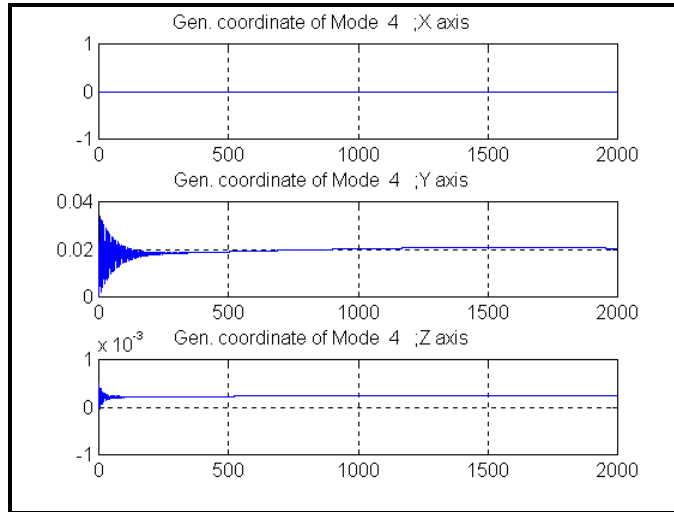


Fig. 5.42 - Coordenadas generalizadas para o quarto modo.

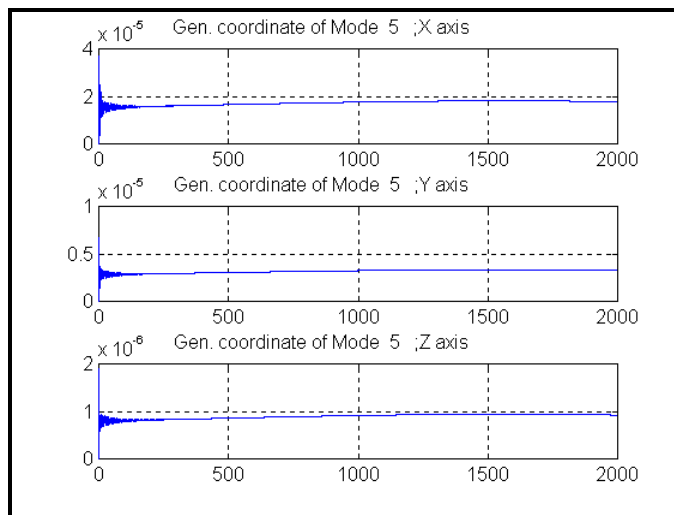


Fig. 5.43 - Coordenadas generalizadas para o quinto modo.

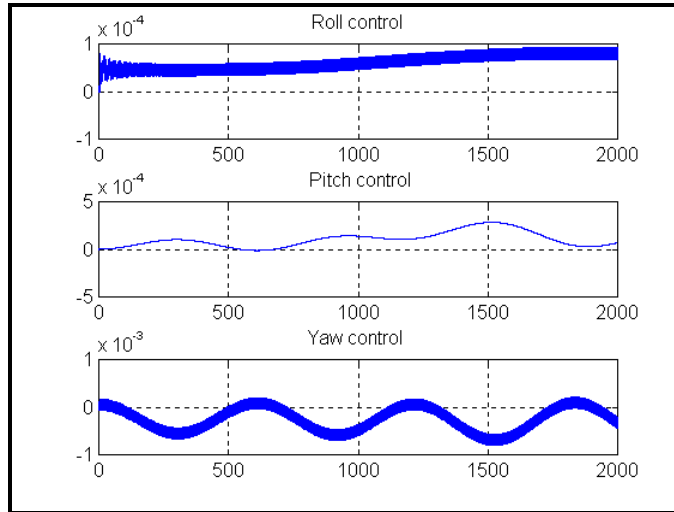


Fig. 5.44 - Sinais de controle de atitude.

A Figura 5.44 ao ser comparada com a Figura 5.30 permite destacar uma vantagem da inserção do pré-filtro “anti-aliasing”: economia da energia de controle, visto que a Figura 5.44 apresenta sinais de controle menos fortes que os sinais de controle apresentados na Figura 5.30.

b) Caso 2,  $T_S = 1.6$  segundos:

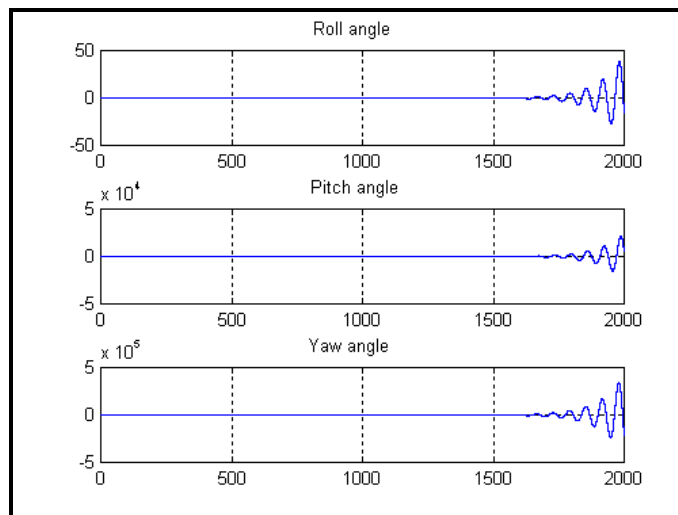


Fig. 5.45 - Ângulos de atitude.

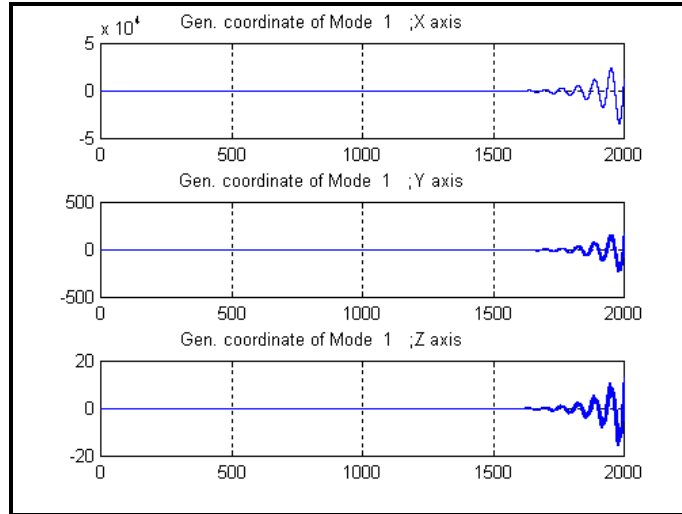


Fig. 5.46 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

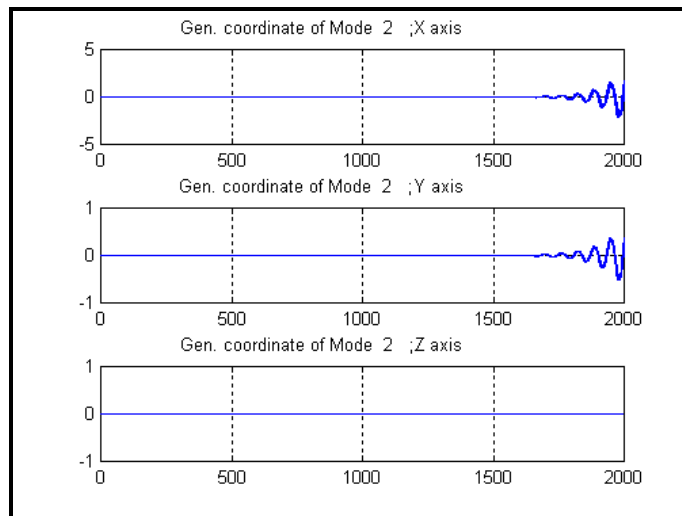


Fig. 5.47 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

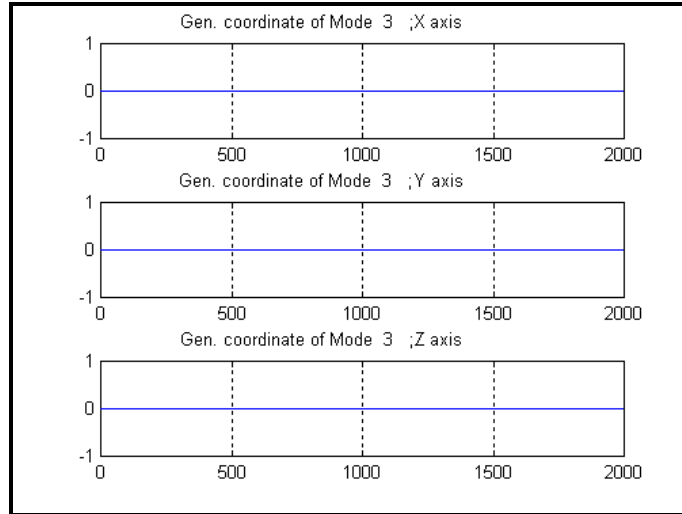


Fig. 5.48 - Coordenadas generalizadas para o terceiro modo.

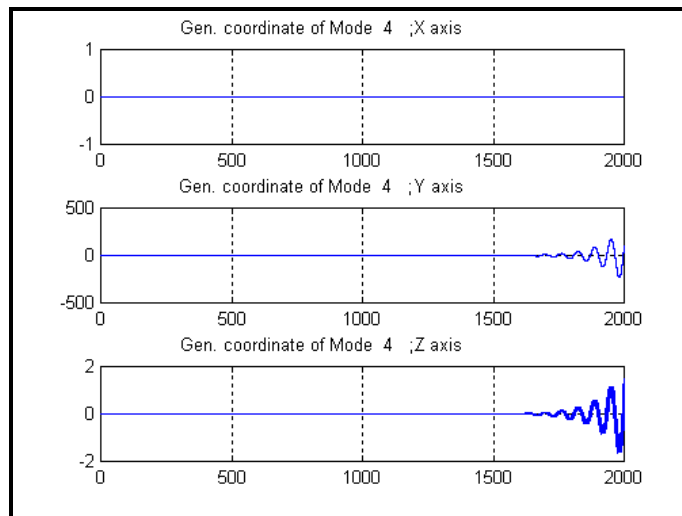


Fig. 5.49 - Coordenadas generalizadas para o quarto modo.

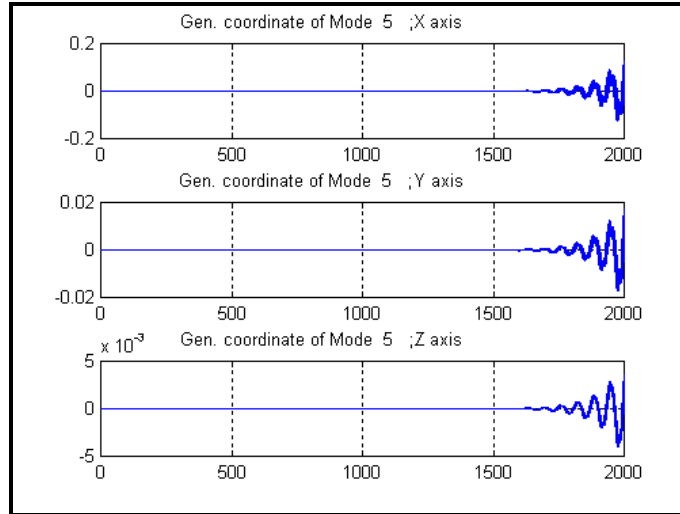


Fig. 5.50 - Coordenadas generalizadas para o quinto modo.

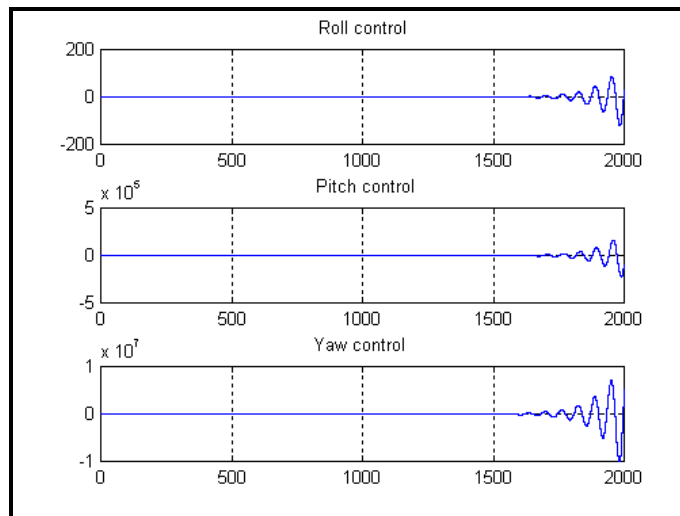


Fig. 5.51 - Sinais de controle de atitude.

Como podemos notar mediante as Figuras 5.45 a 5.51 a inclusão de um pré-filtro “anti-aliasing” não se mostrou satisfatória na tentativa de corrigir o problema da instabilidade constatado na Seção 5.3, nas Figuras 5.31 a 5.37.

## 5.5 - EQUIVALENTE “ZERO-ORDER HOLD” DA PLANTA ANALÓGICA E CONTROLE PD DISCRETO POR TUSTIN

- a) Caso 1,  $T_s = 0.05$  segundos. Serão inicialmente mostrados os resultados para até quatro segundos de simulação para que se torne visível a discretização no tempo, conforme mostrado nas Figuras 5.52 a 5.58.

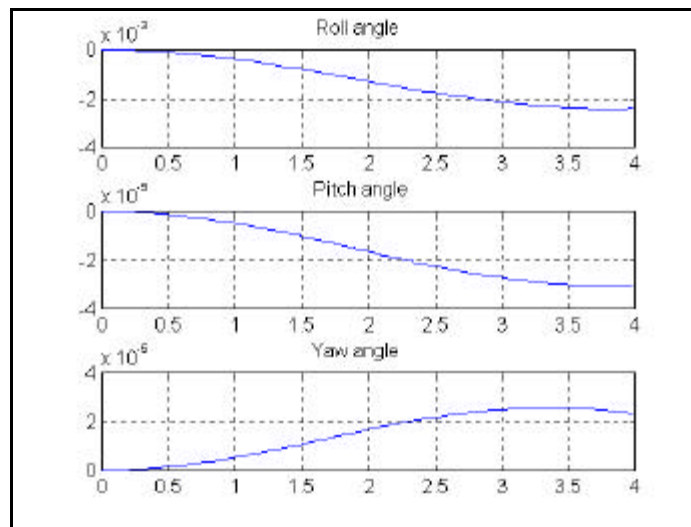


Fig. 5.52 - Ângulos de atitude.

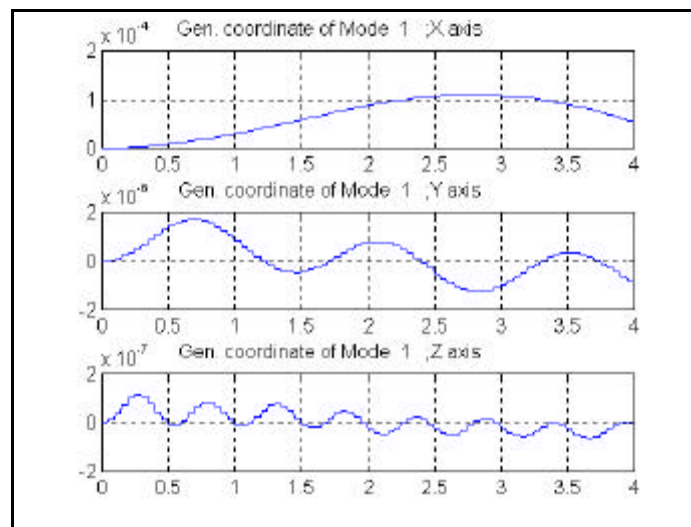


Fig. 5.53 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

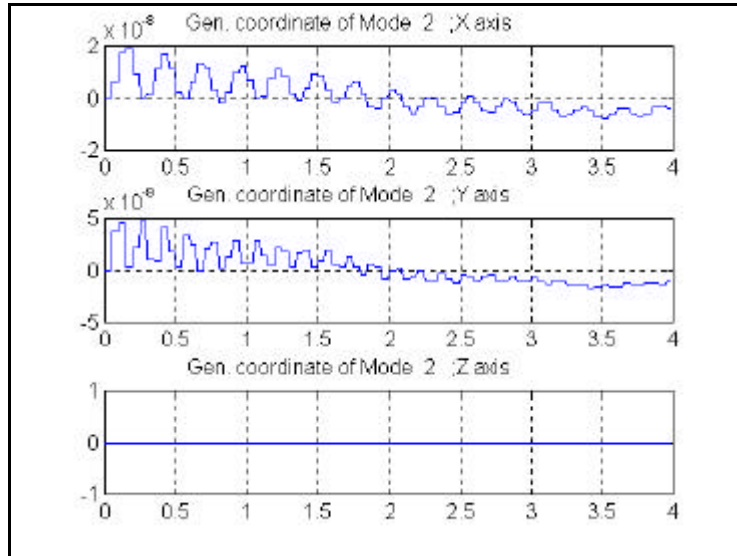


Fig. 5.54 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

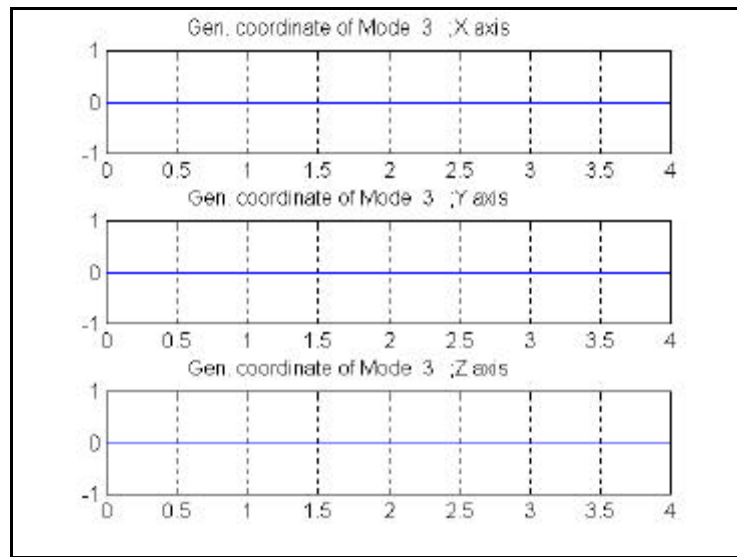


Fig. 5.55 - Coordenadas generalizadas para o terceiro modo.



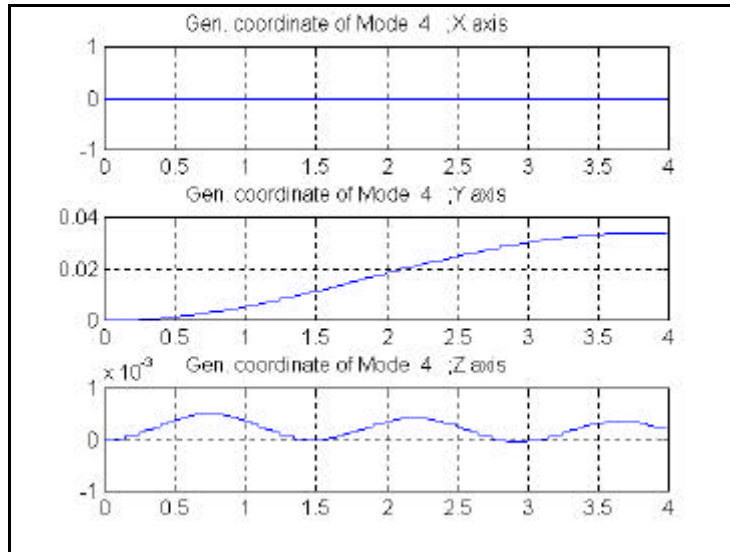


Fig. 5.56 - Coordenadas generalizadas para o quarto modo.

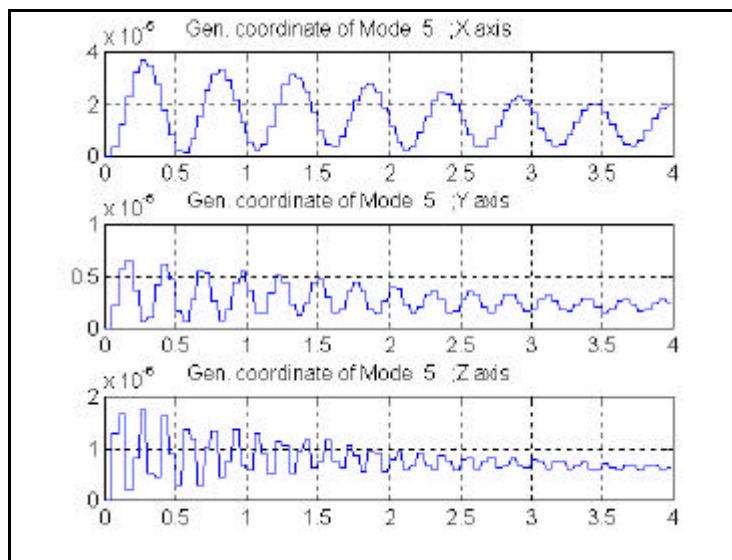


Fig. 5.57 - Coordenadas generalizadas para o quinto modo.

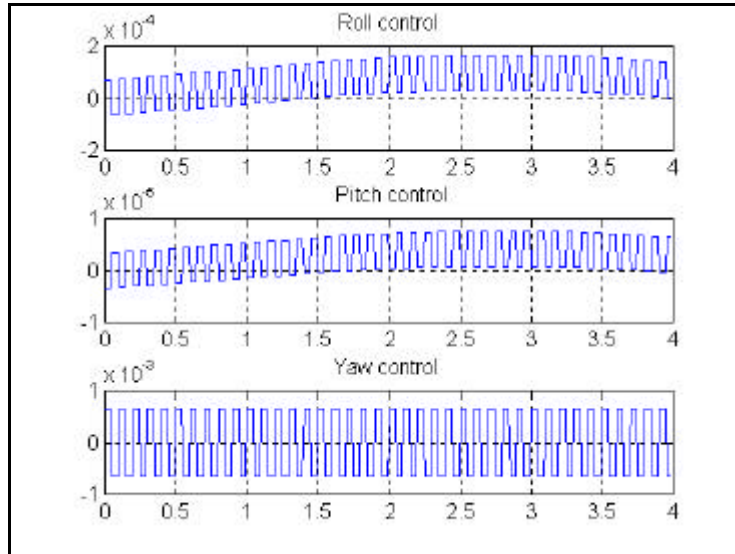


Fig. 5.58 - Sinais de controle de atitude.

Agora serão mostrados os resultados da mesma simulação executada com uma duração maior (350 segundos) nas Figuras 5.59 a 5.65:

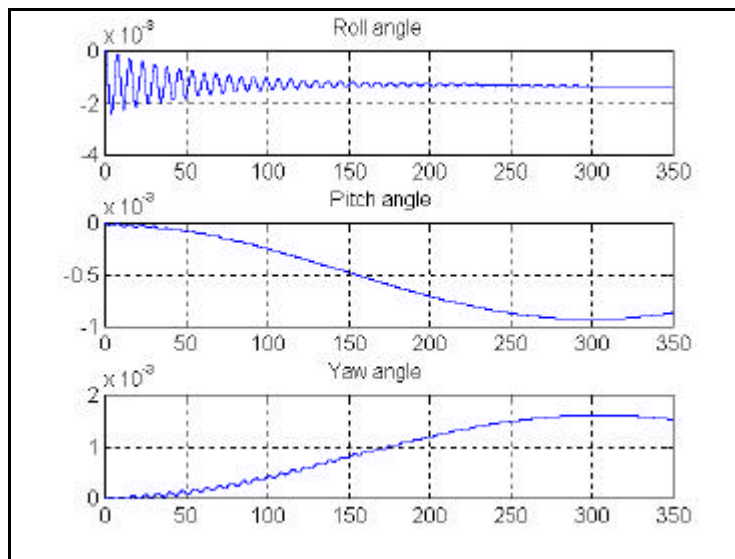


Fig. 5.59 - Ângulos de atitude.

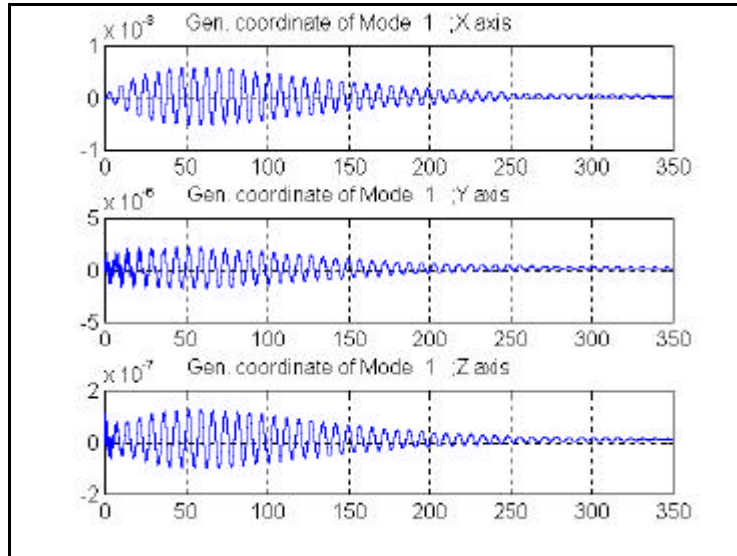


Fig. 5.60 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

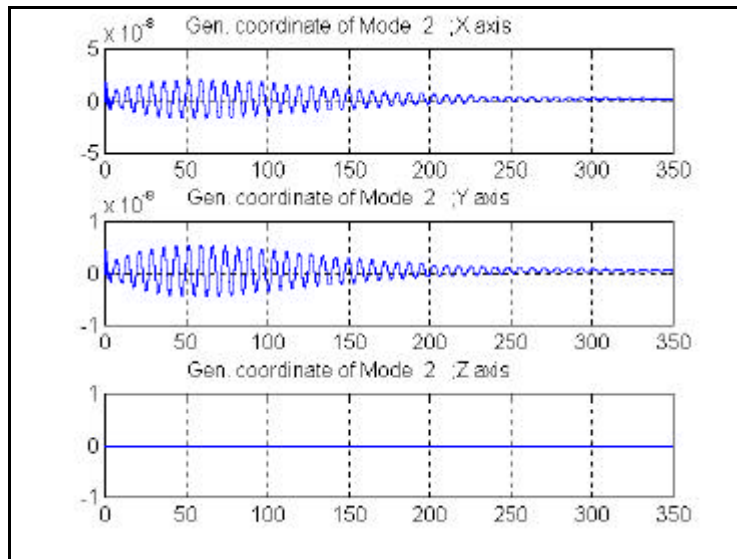


Fig. 5.61 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

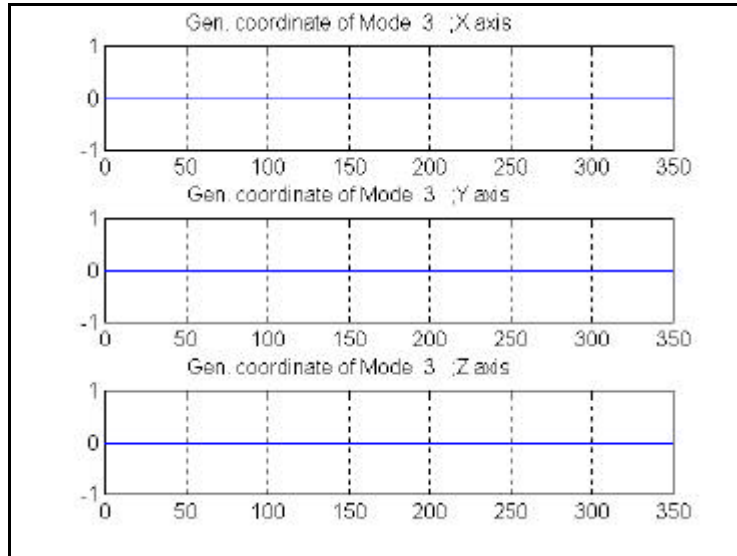


Fig. 5.62 - Coordenadas generalizadas para o terceiro modo.

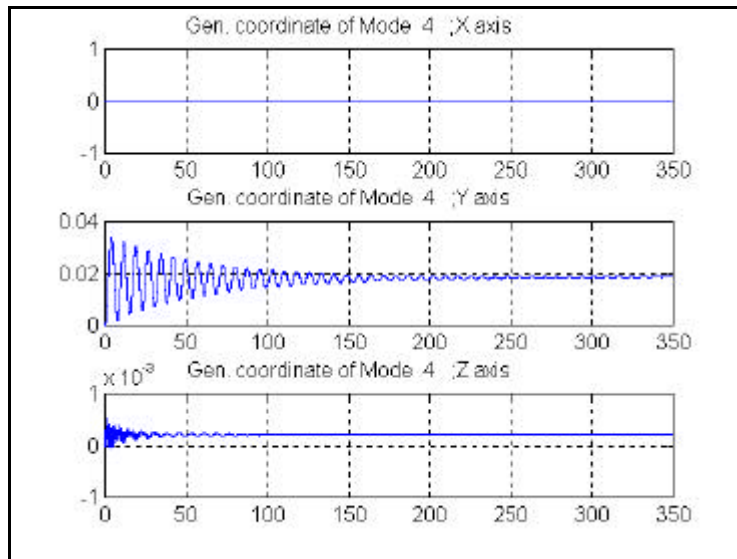


Fig. 5.63 - Coordenadas generalizadas para o quarto modo.

<

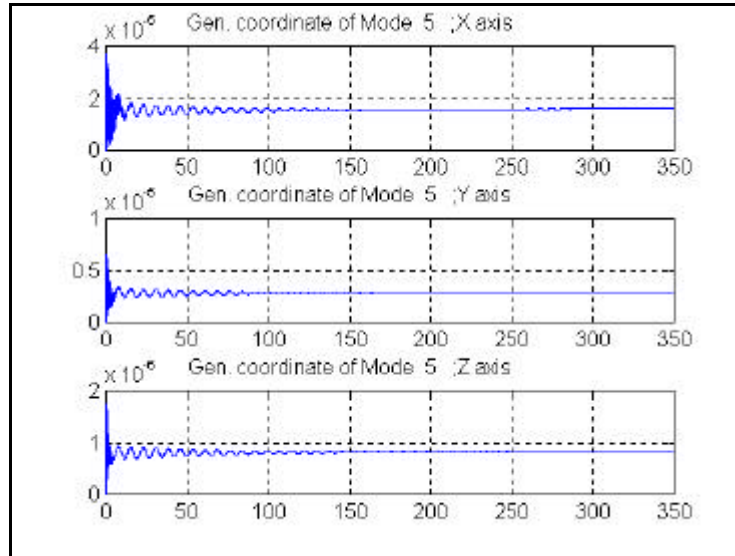


Fig. 5.64 - Coordenadas generalizadas para o quinto modo.

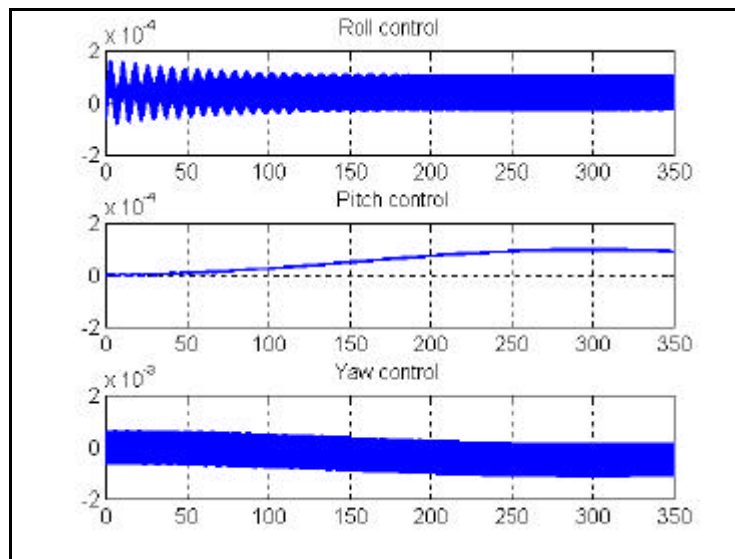


Fig. 5.65 - Sinais de controle da atitude.

b) Caso 1,  $T_s = 1,6$  segundos (Figuras 5.66 a 5.72).

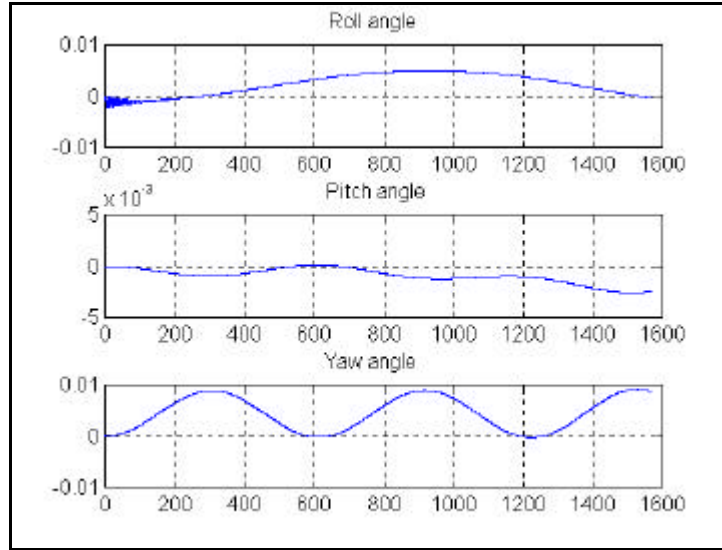


Fig. 5.66 - Ângulos de atitude.

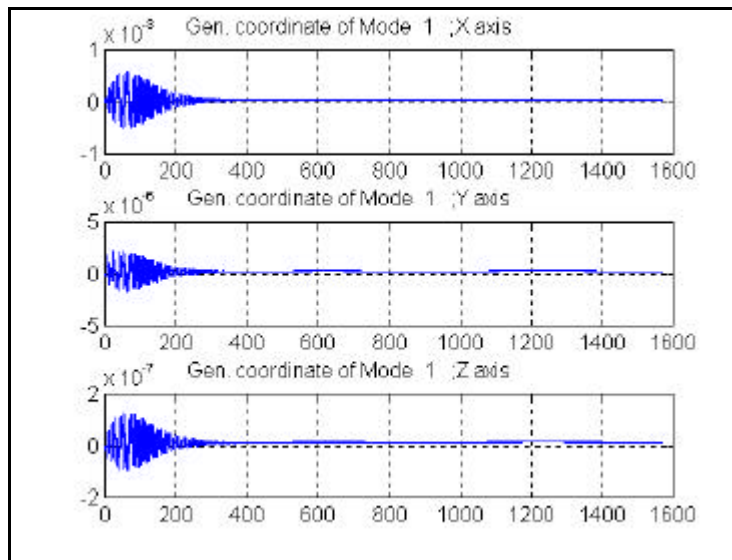


Fig. 5.67 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

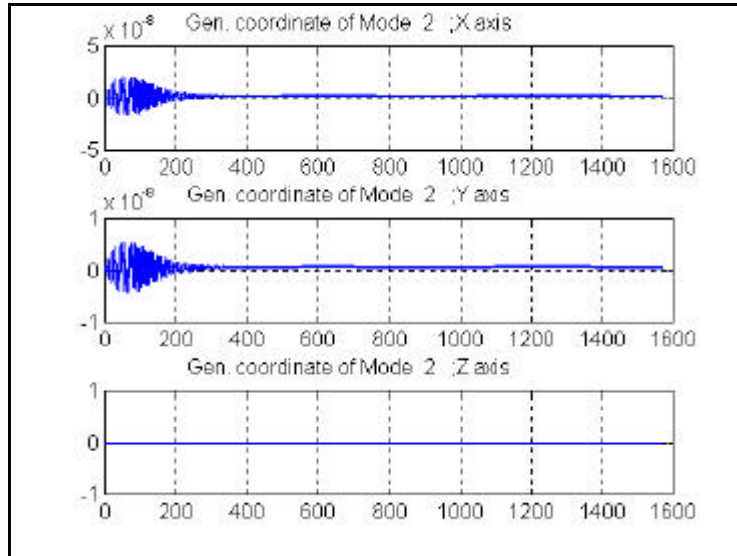


Fig. 5.68 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

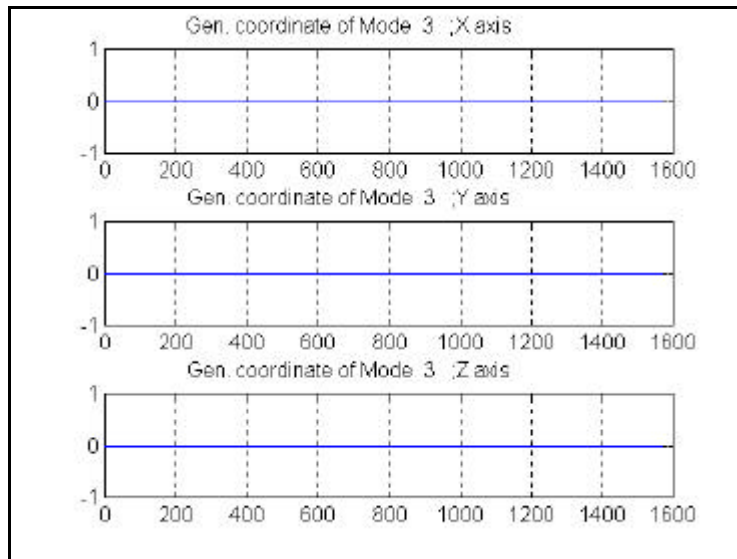


Fig. 5.69 - Coordenadas generalizadas para o terceiro modo.

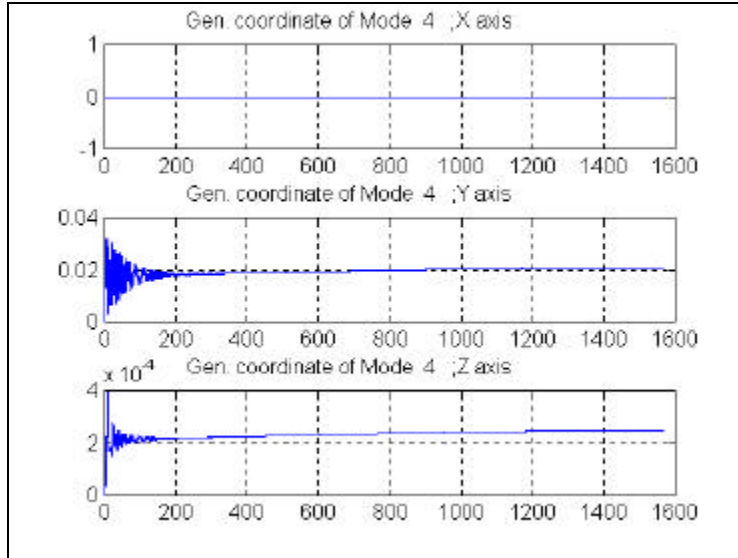


Fig. 5.70 - Coordenadas generalizadas para o quarto modo.

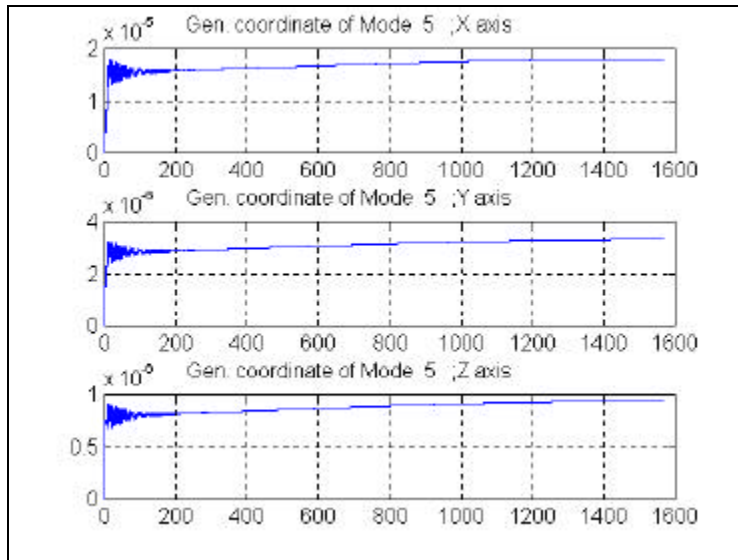


Fig. 5.71 - Coordenadas generalizadas para o quinto modo.



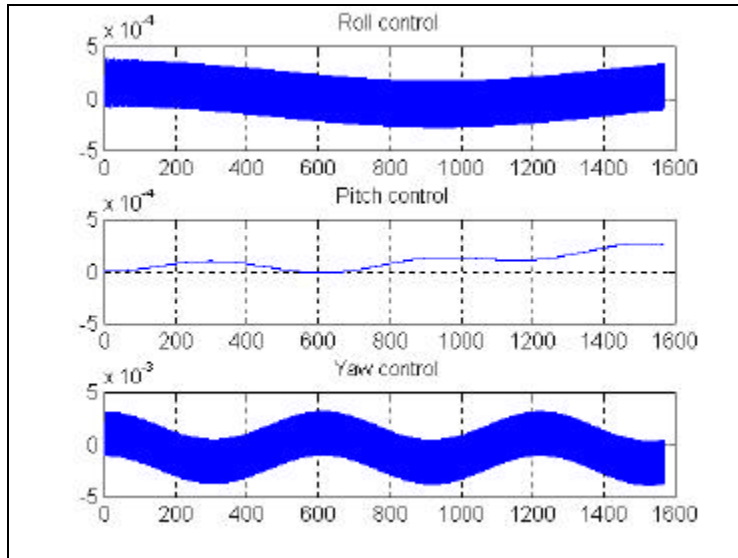


Fig. 5.72 - Sinais de controle de atitude.

c) Caso 2,  $T_s = 0,1$  segundos (Figuras 5.73 a 5.79).

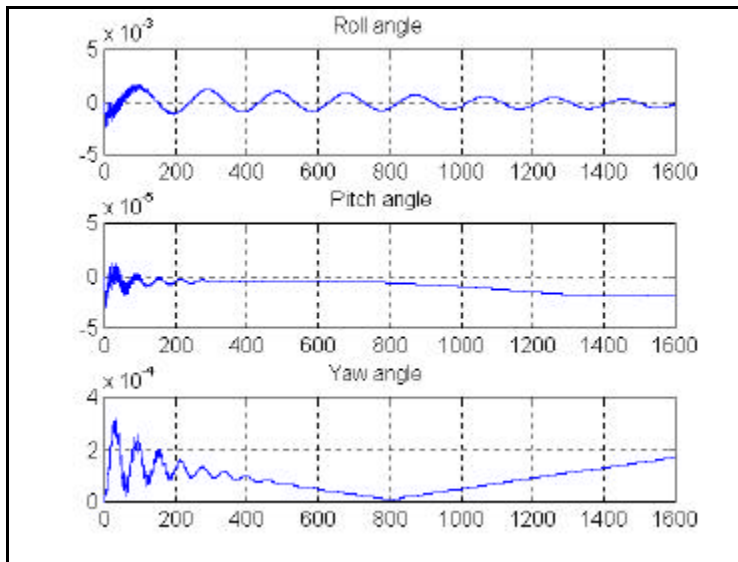


Fig. 5.73 - Ângulos de atitude.

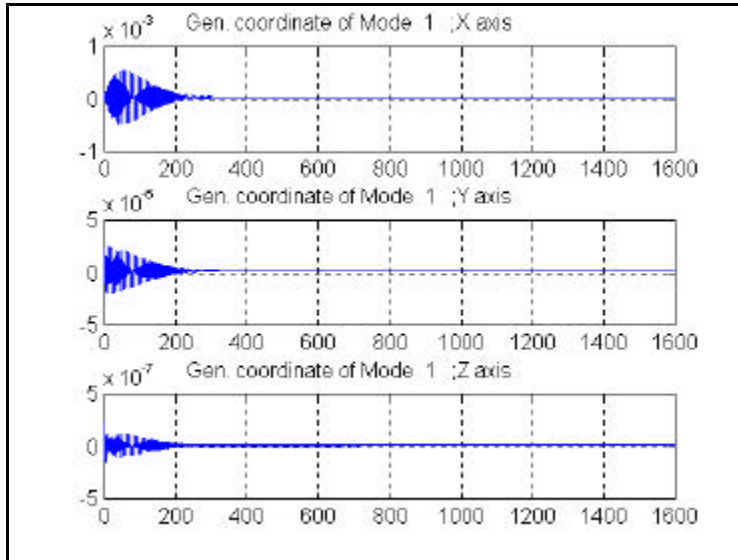


Fig. 5.74 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

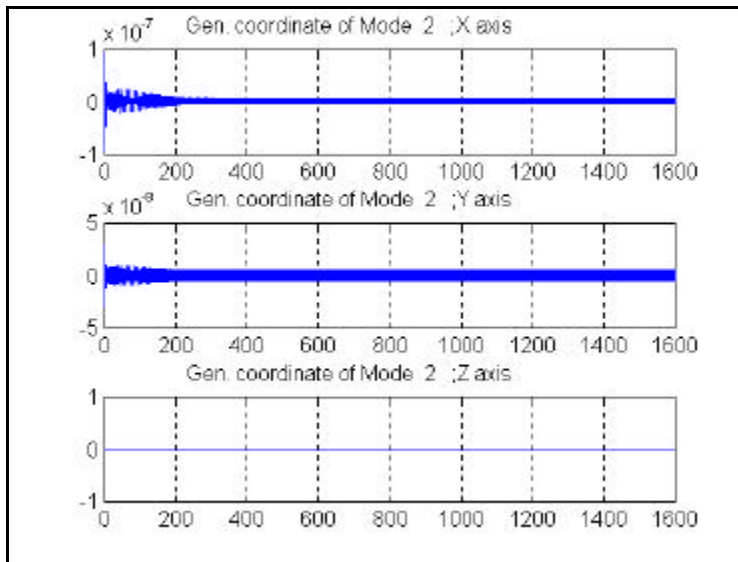


Fig. 5.75 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

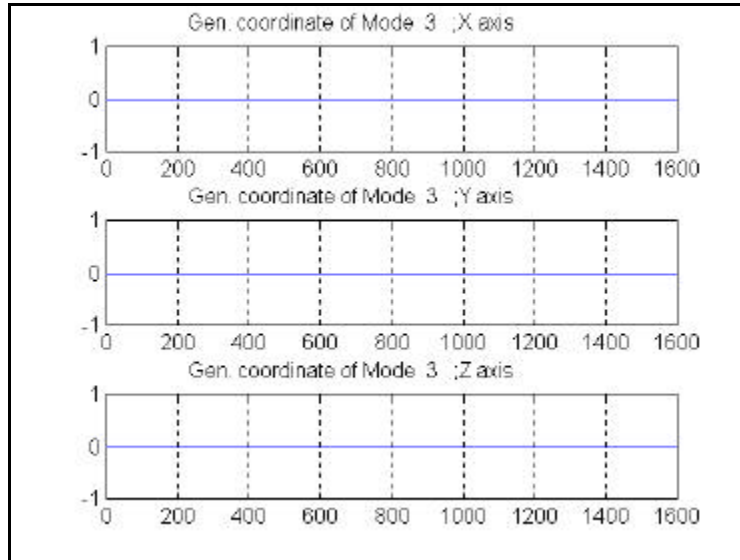


Fig. 5.76 - Coordenadas generalizadas para o terceiro modo.

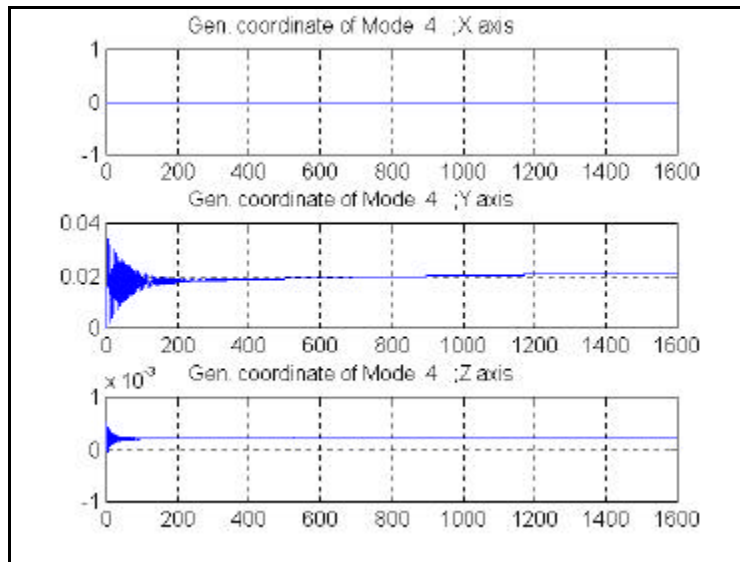


Fig. 5.77 - Coordenadas generalizadas para o quarto modo.

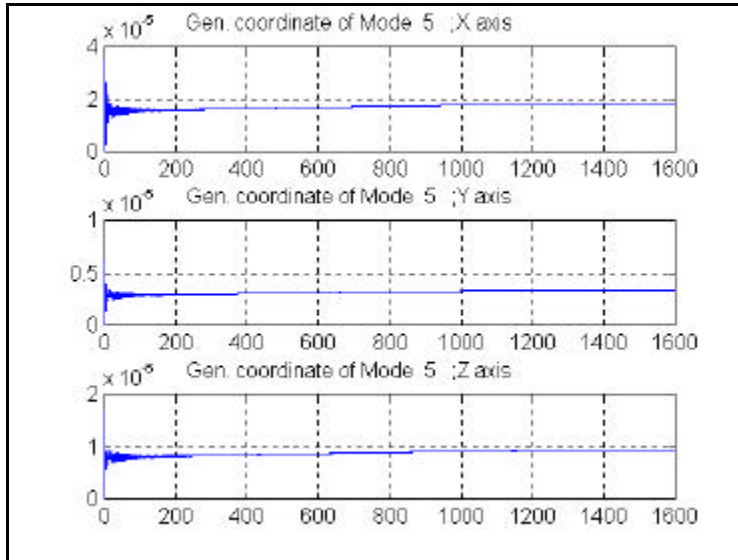


Fig. 5.78 - Coordenadas generalizadas para o quinto modo.

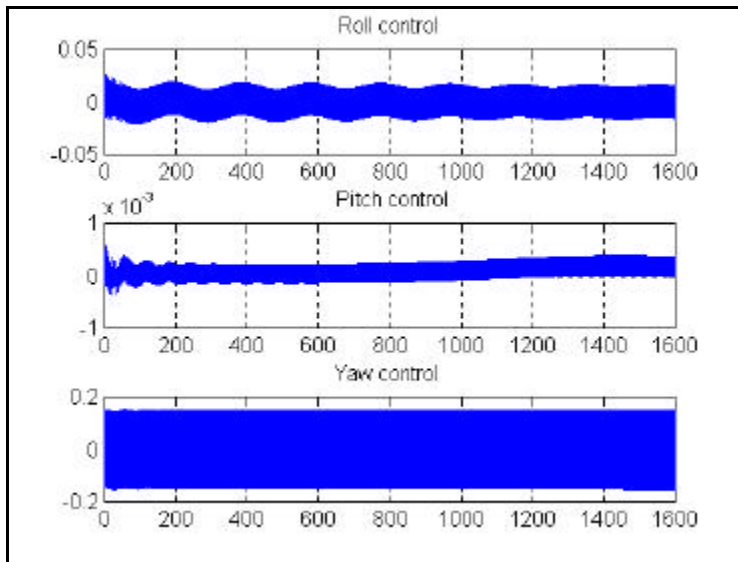


Fig. 5.79 - Sinais de controle de atitude.

d) Caso 2,  $T_s = 1,6$  segundos (Figuras 5.80 a 5.86).

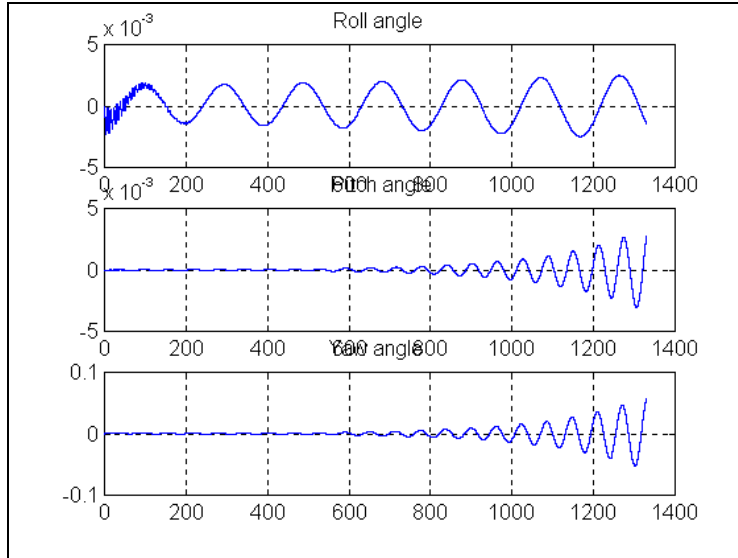


Fig. 5.80 - Ângulos de atitude.

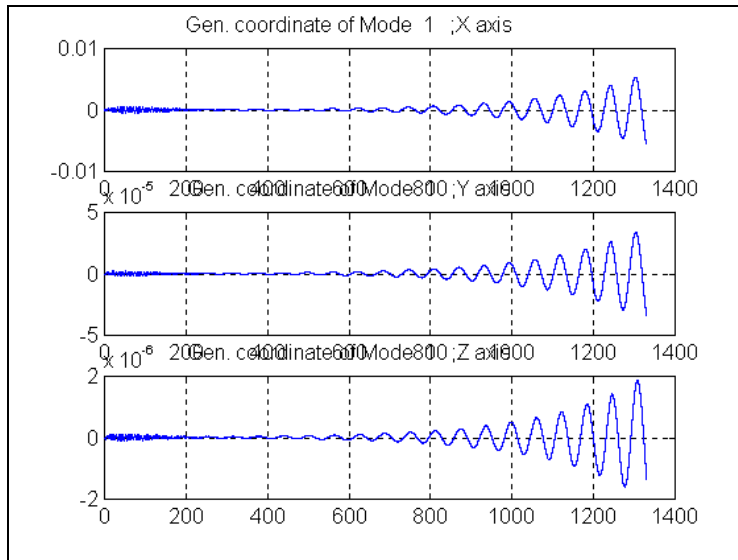


Fig. 5.81 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

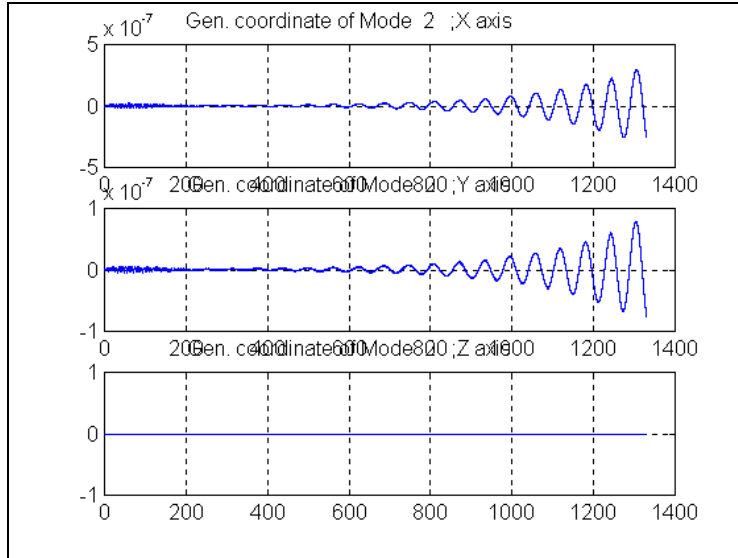


Fig. 5.82 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

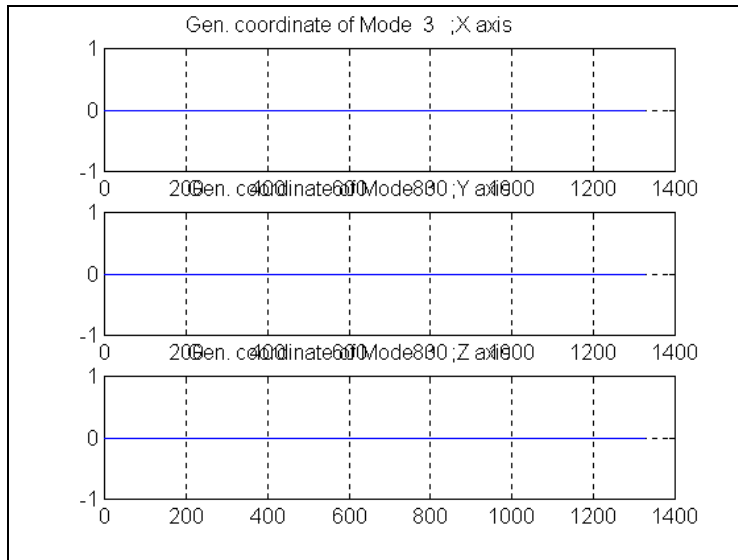


Fig. 5.83 - Coordenadas generalizadas para o terceiro modo.

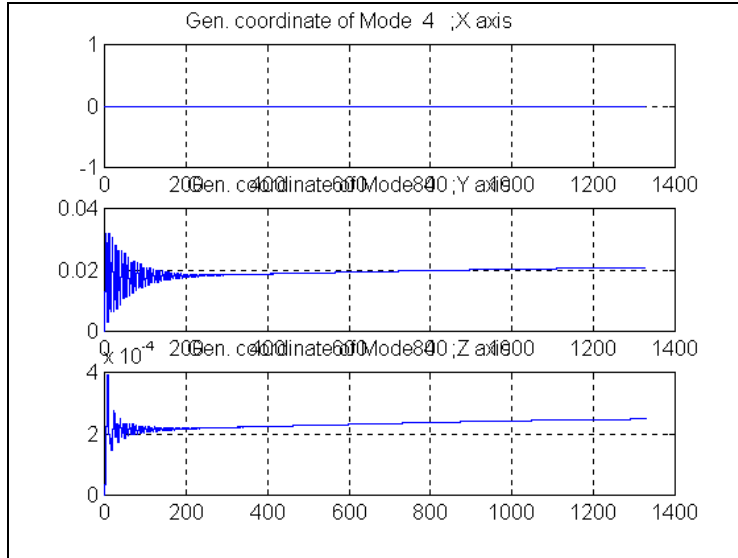


Fig. 5.84 - Coordenadas generalizadas para o quarto modo.

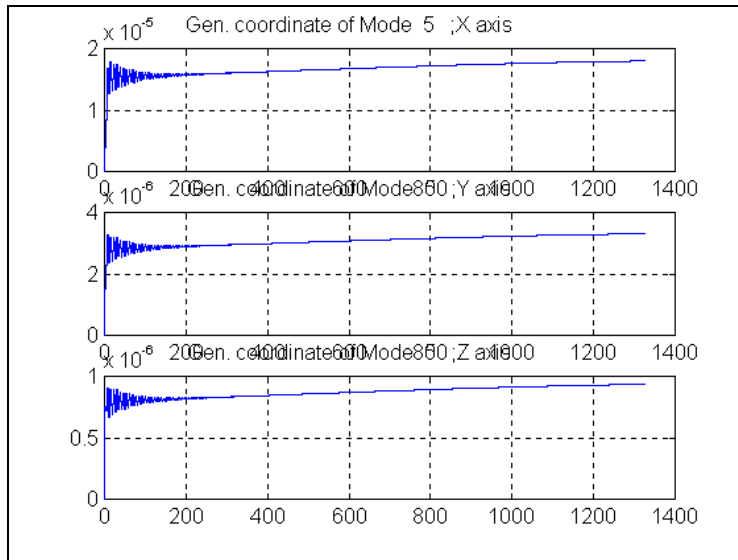


Fig. 5.85 - Coordenadas generalizadas para o quinto modo.

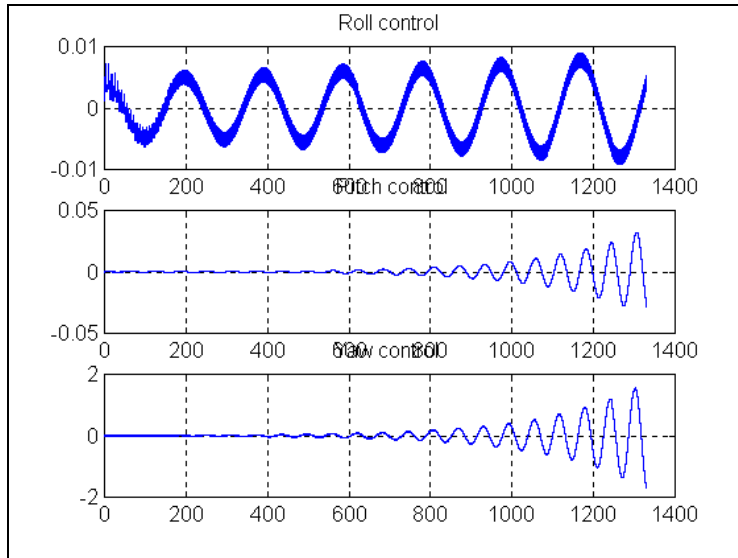


Fig. 5.86 - Sinais de controle de atitude.

### 5.6 - PLANTA ANALÓGICA, CONTROLE PD DISCRETO POR TUSTIN, COM RAZÃO DE AMORTECIMENTO MUITO ELEVADA

Como a inclusão do pré-filtro “anti-aliasing” não se mostrou eficaz na restauração da estabilidade, conforme verificado na Seção 5.4, pensou-se em um outro método de estabilização: aumentar o amortecimento estrutural. Sabe-se que o aumento do amortecimento tem o poder de atrair os pólos para o interior do círculo unitário no plano-z que é a região assintoticamente estável o que, teoricamente, parecia ser um poderoso remédio para resolver o problema em questão. Entretanto, infelizmente, tal método também não se mostrou eficiente diante do caso em que se tinham ganhos de controle e período de amostragem  $T_s$  elevados, conforme pode-se observar pelas Figuras 5.87 a 5.93, para o caso subamortecido, e pelas Figuras 5.94 a 5.100, para o caso sobreamortecido.

- a) Caso 2. Razão de amortecimento = 0,6.  $T_s = 1,6$  segundos. Caso subamortecido.



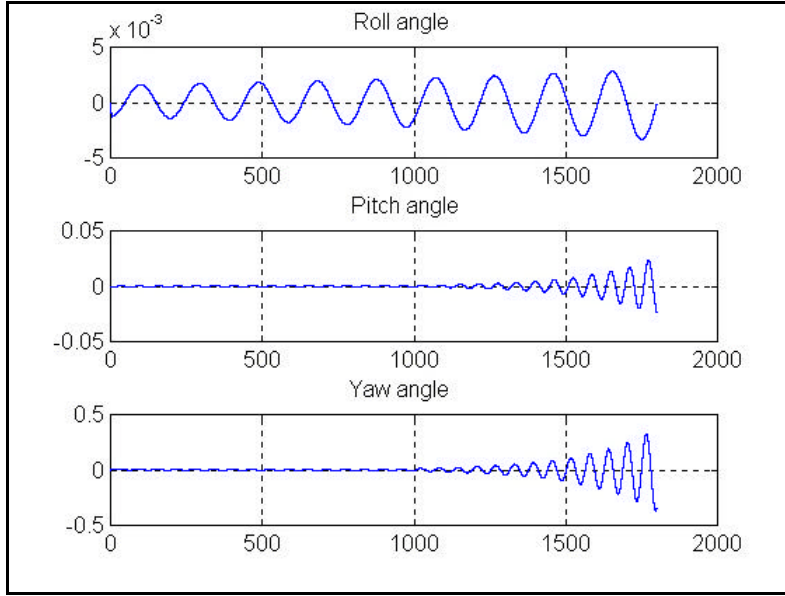


Fig. 5.87 - Ângulos de atitude.

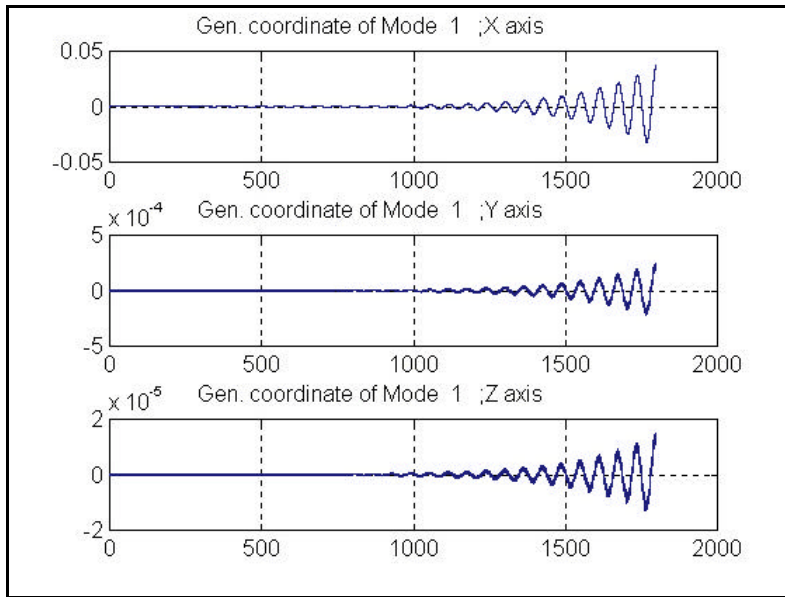


Fig. 5.88 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

<

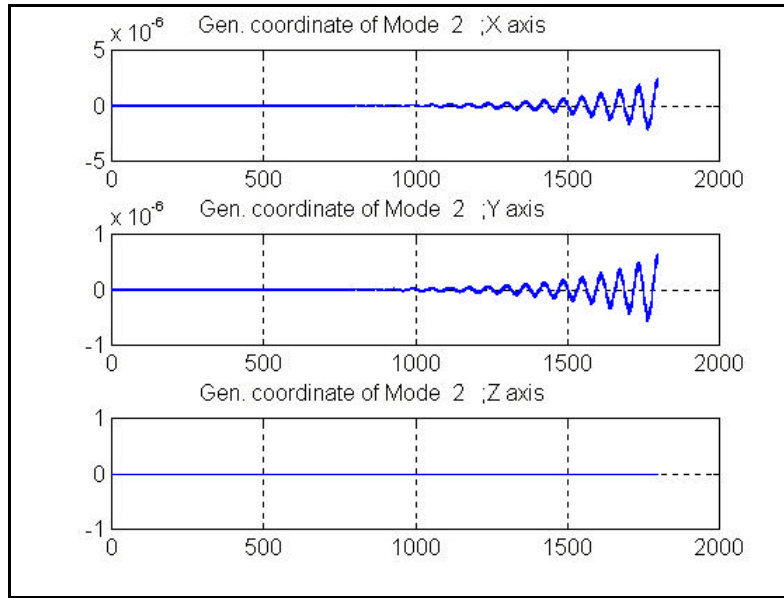


Fig. 5.89 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

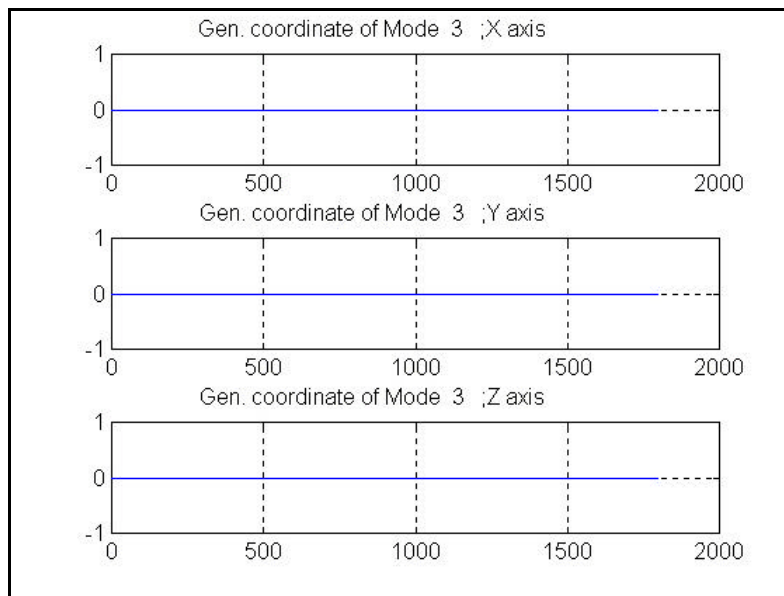


Fig. 5.90 - Coordenadas generalizadas para o terceiro modo.

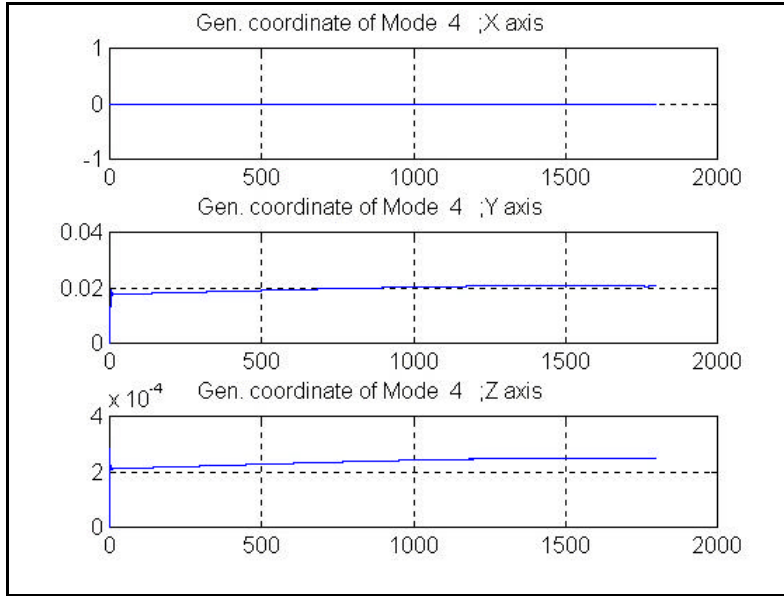


Fig. 5.91 - Coordenadas generalizadas para o quarto modo.

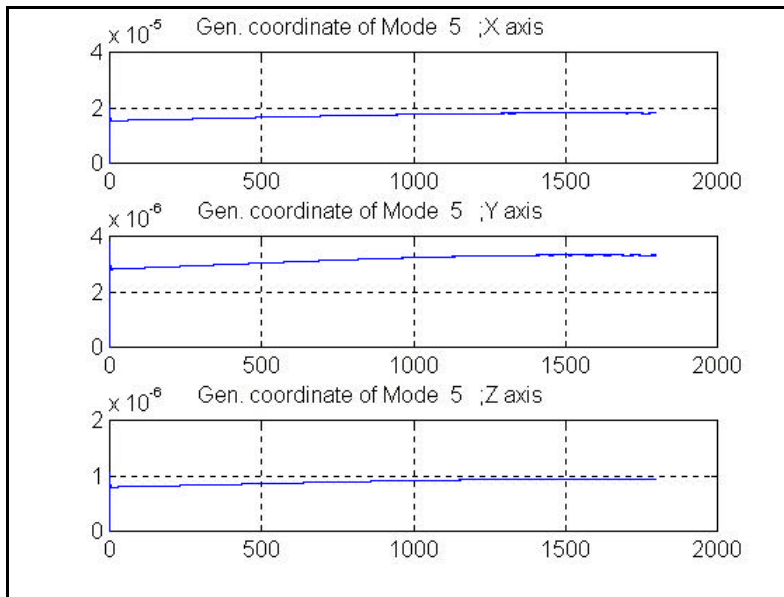


Fig. 5.92 - Coordenadas generalizadas para o quinto modo.

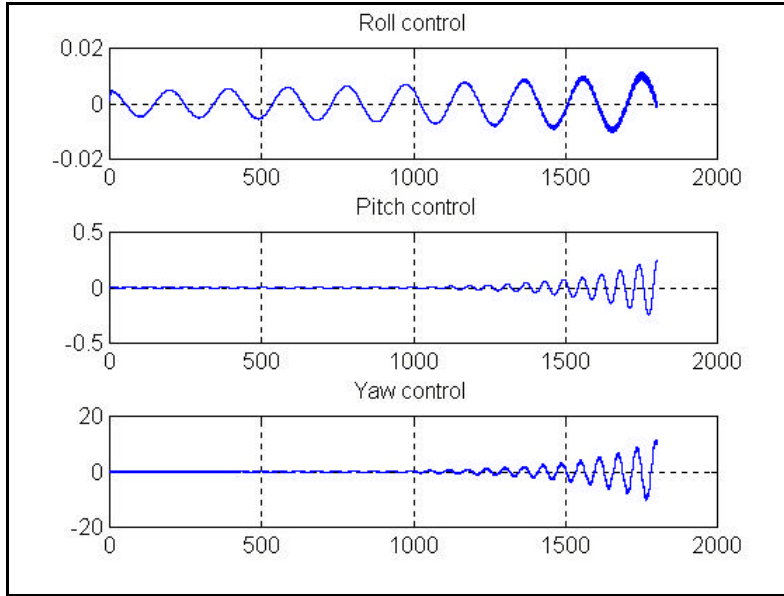


Fig. 5.93 - Sinais de controle de atitude.

- b) Caso 2.  $T_s = 1,6$  segundos. Razão de amortecimento = 2. Caso sobreamortecido.

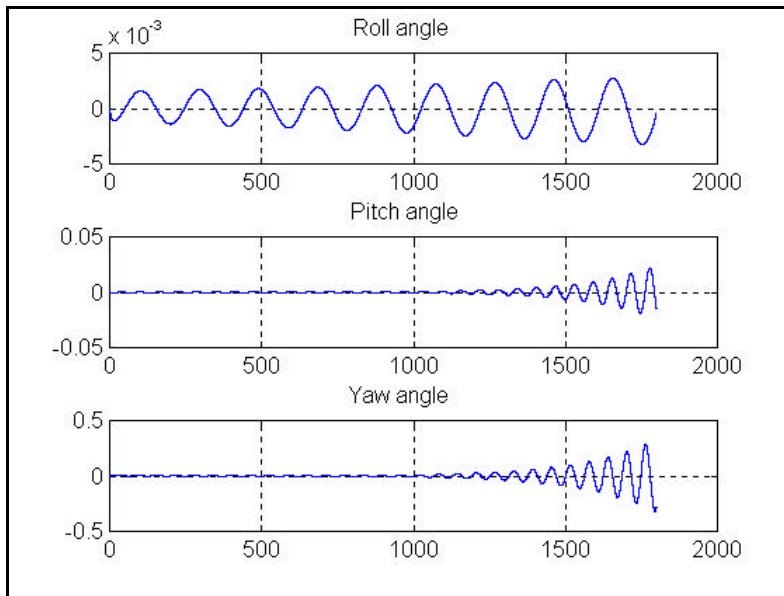


Fig. 5.94 - Ângulos de atitude.

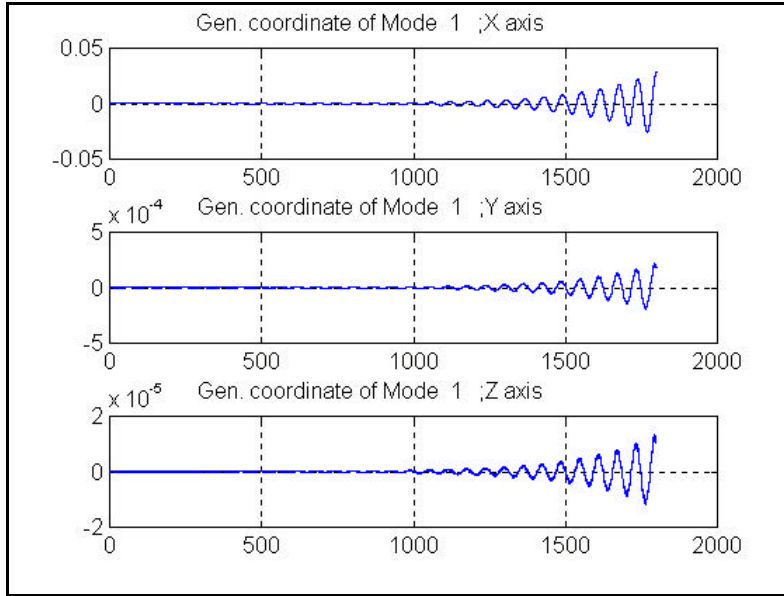


Fig. 5.95 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

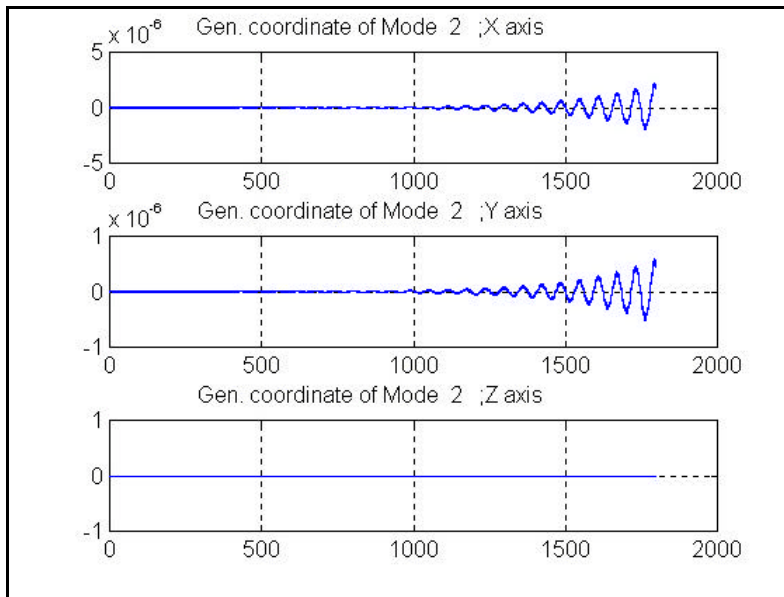


Fig. 5.96 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

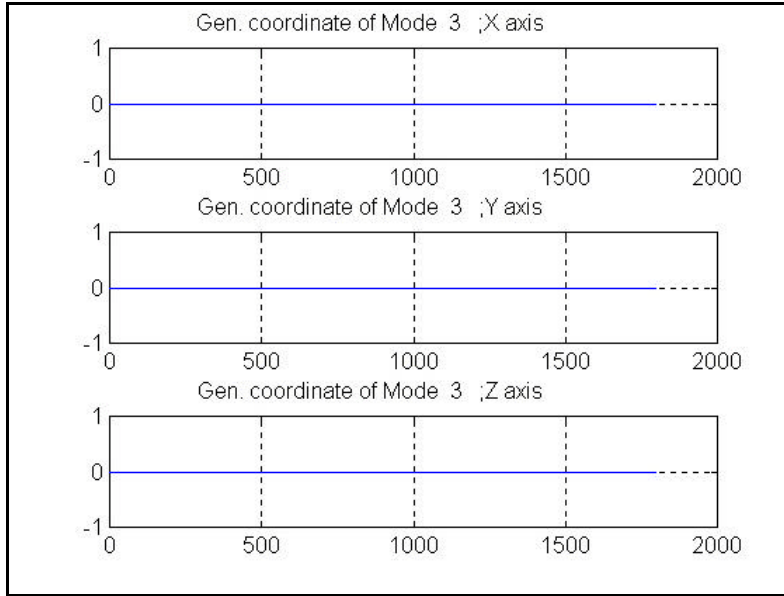


Fig. 5.97 - Coordenadas generalizadas para o terceiro modo.

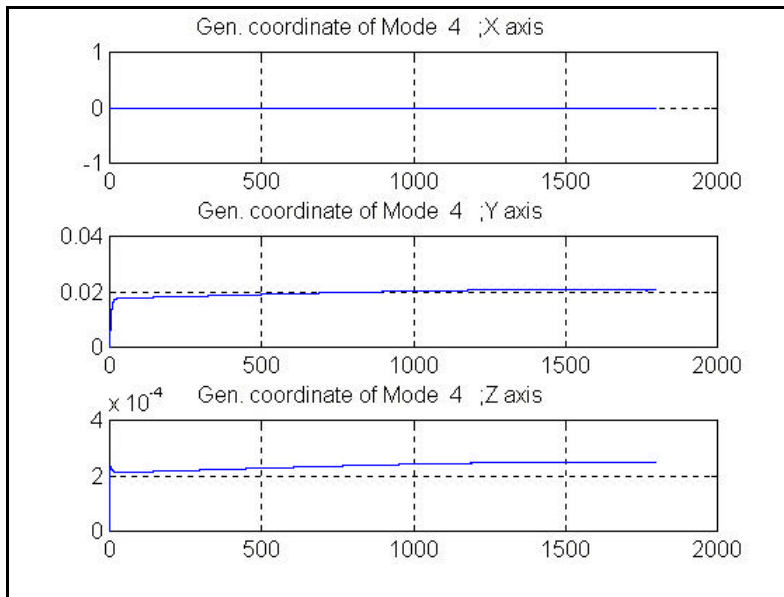


Fig. 5.98 - Coordenadas generalizadas para o quarto modo.

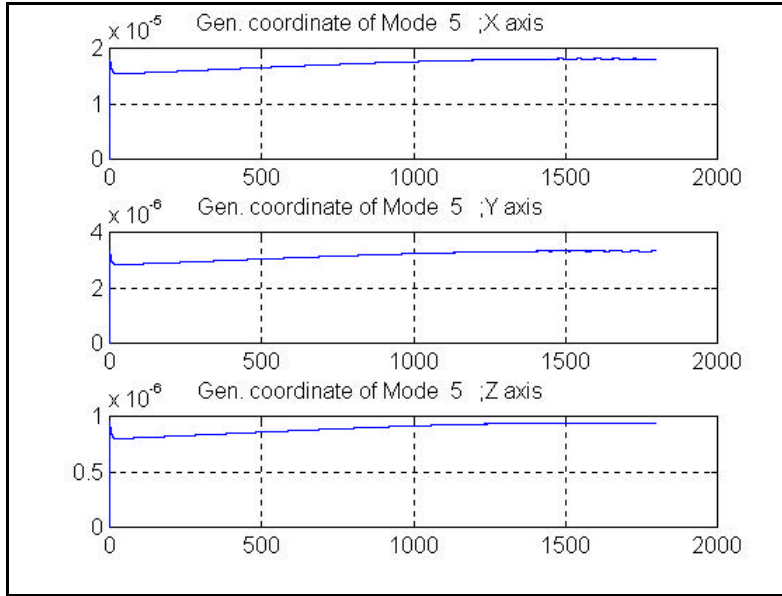


Fig. 5.99 - Coordenadas generalizadas para o quinto modo.

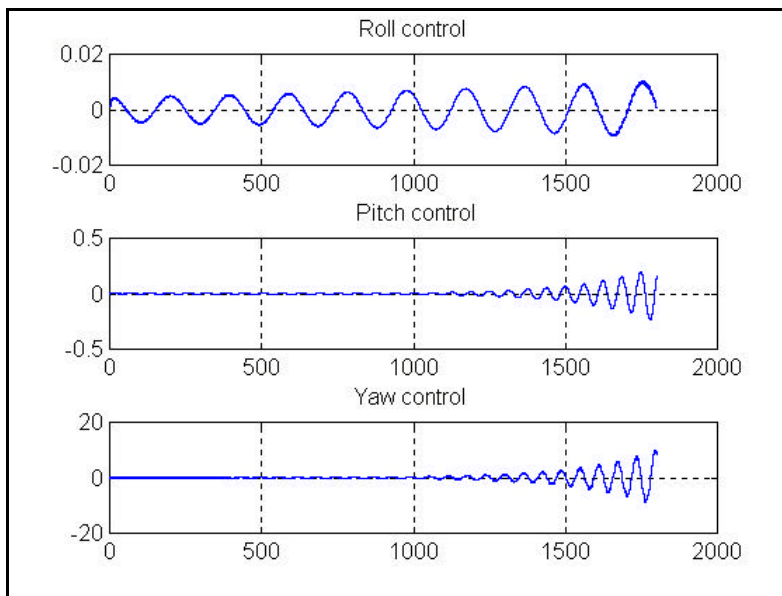


Fig. 5.100 - Sinais de controle de atitude.

- c) Modelo analógico do CBERS-1 simulado para um único modo. Serão baixados os valores dos ganhos de controle para uma situação intermediária em relação aos Casos 1 e 2, de ganhos de controle muito baixos e elevados, respectivamente. A razão de amortecimento será

elevado para  $\zeta = 6$  (caso sobreamortecido);  $T_S = 1,6$  segundos; ganhos de controle: roll:  $k_p = 0.316$ ;  $k_d = 0.482$ ; pitch:  $k_p = 1.07$ ;  $k_d = 1.63$ ; yaw:  $k_p = 3.0$ ;  $k_d = 4.6$ .

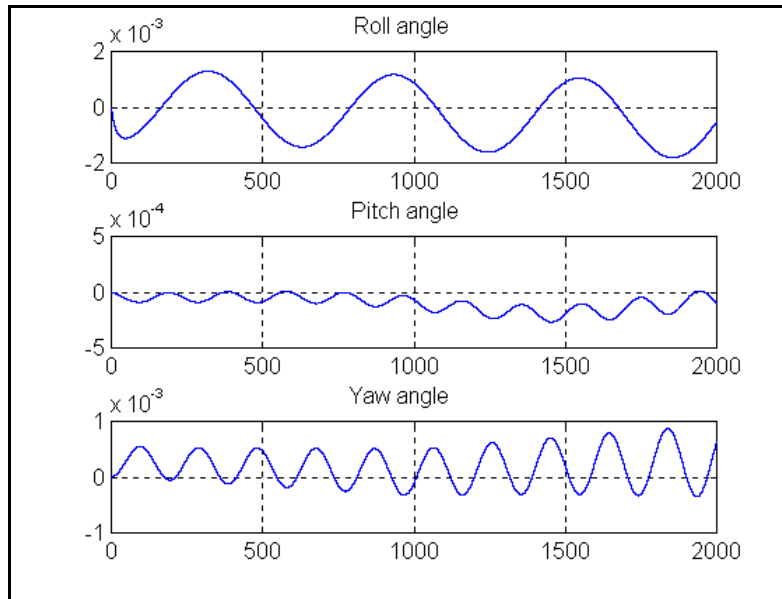


Fig. 5.101 - Ângulos de atitude.

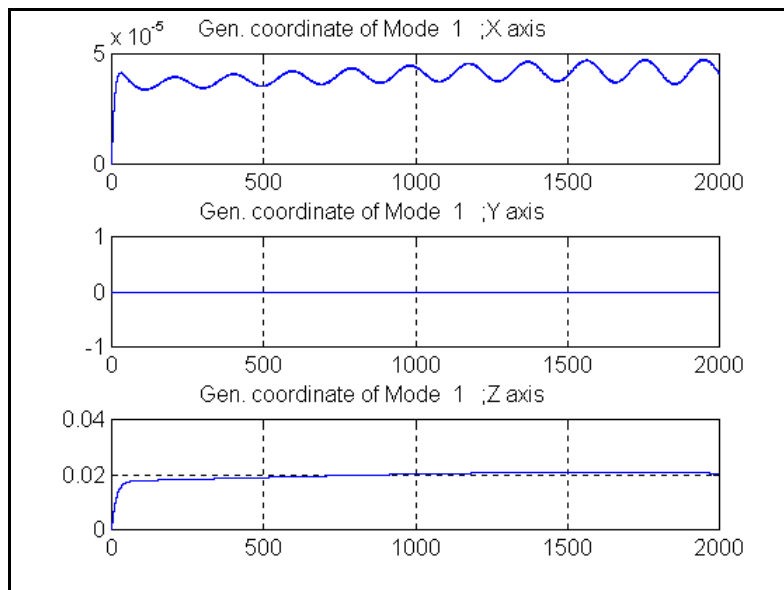


Fig. 5.102 - Coordenadas generalizadas para o único modo simulado.



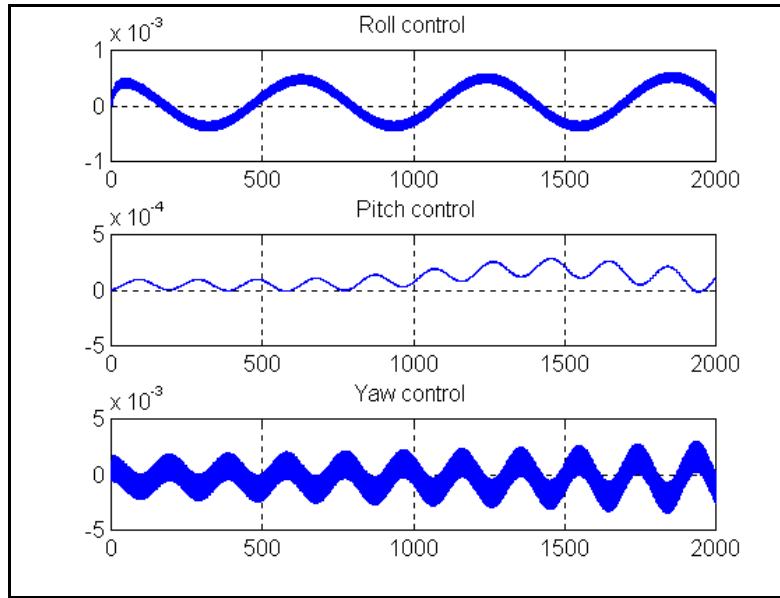


Fig. 5.103 - Sinais de controle de atitude.

Mediante as Figuras 5.101 e 5.103 podemos perceber nitidamente a presença da instabilidade nos eixos de pitch e yaw.

- d) Modelo analógico do CBERS-1 simulado para dois modos. Razão de amortecimento  $\zeta = 6$  (caso sobreamortecido).  $T_S = 1,6$  segundos. Caso intermediário: ganhos de controle: roll:  $k_p = 0.316$ ;  $k_d = 0.482$ ; pitch:  $k_p = 1.07$ ;  $k_d = 1.63$ ; yaw:  $k_p = 3.0$ ;  $k_d = 4.6$ .

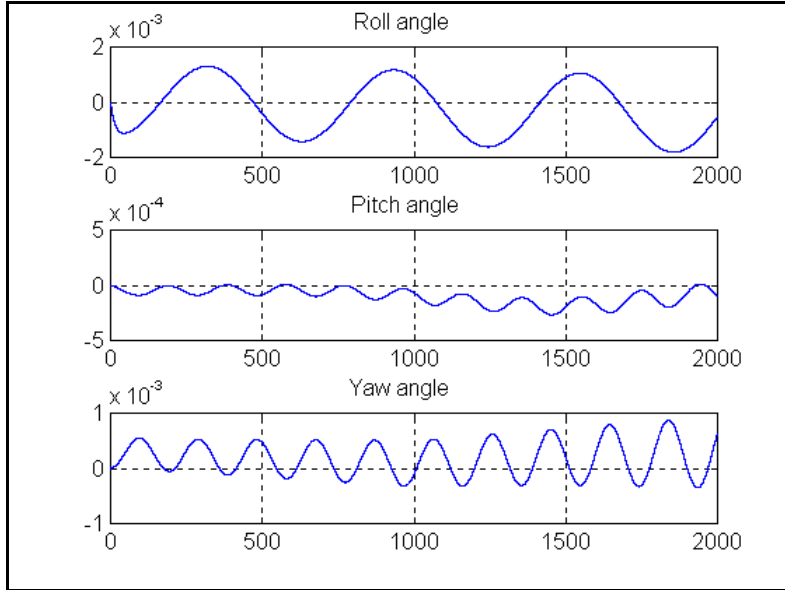


Fig. 5.104 - Ângulos de atitude.

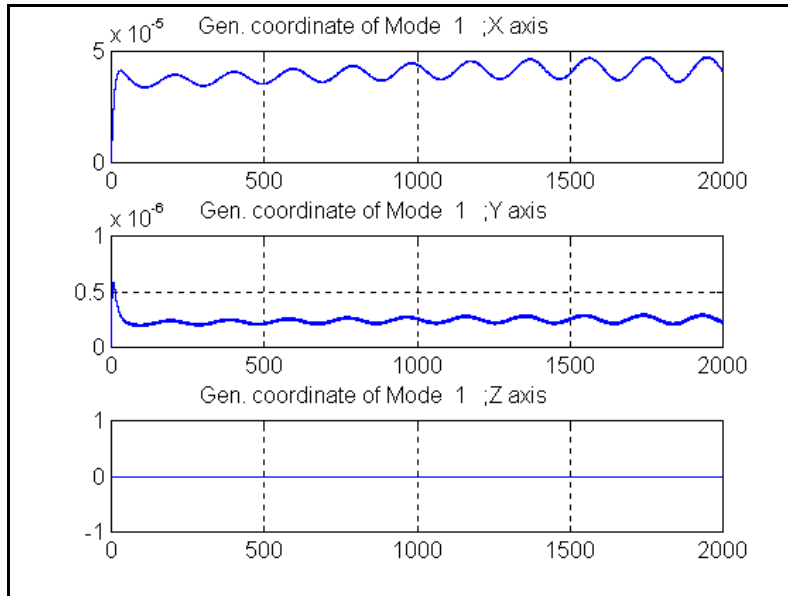


Fig. 5.105 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

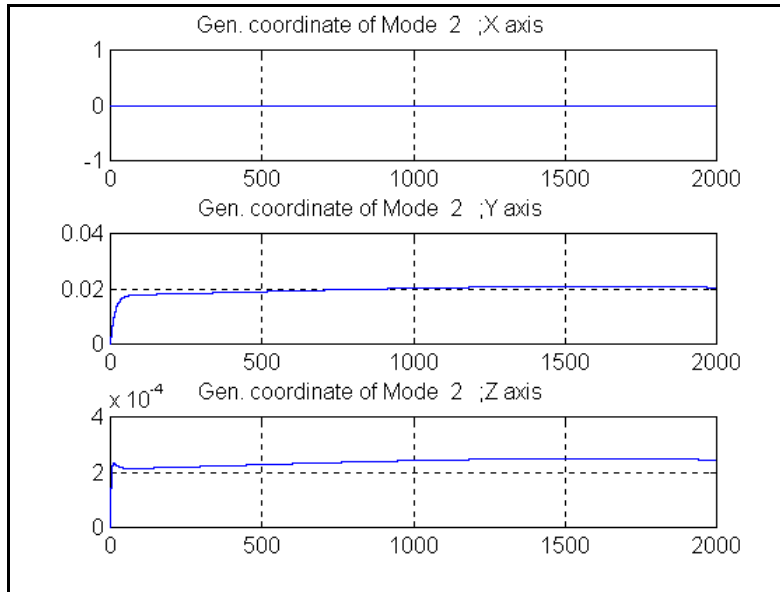


Fig. 5.106 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

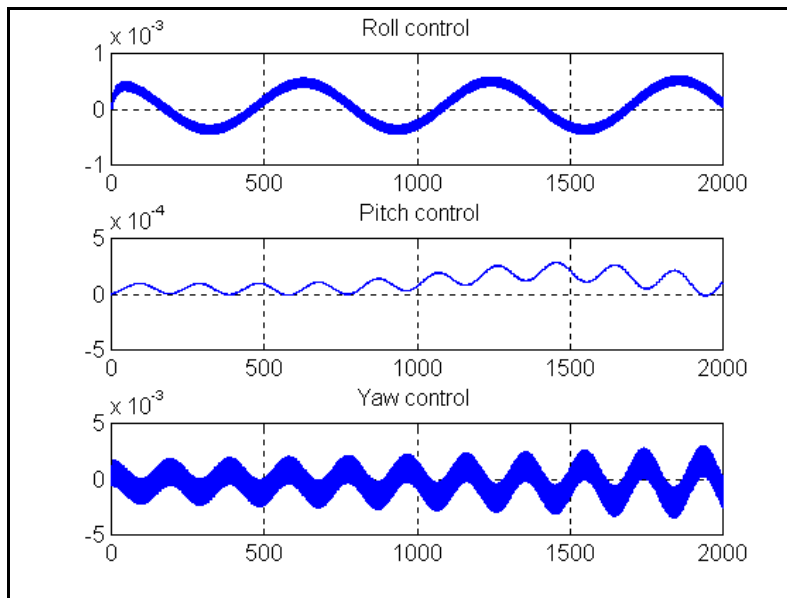


Fig. 5.107 - Sinais de controle de atitude.

Nota-se a indesejável presença da instabilidade nos eixos de pitch e yaw pelas Figuras 5.104 e 5.107.

Explicar-se-á agora porque um sistema em malha fechada com controle discreto no tempo atuando sobre uma planta sobreamortecida apresentou as

oscilações mostradas: tal fenômeno ocorre em cada eixo devido à superposição das contribuições de: a) um par de pólos complexos conjugados em malha fechada originados do par de pólos em malha aberta  $s = 0$  ou  $z = 1$  do modo rígido; b) um par de pólos (reais ou complexos conjugados  $s = \sigma \pm j.\omega$ ) em malha fechada originados do par de pólos (reais ou complexos conjugados  $s = \sigma \pm j.\omega$ ) em malha aberta de cada modo flexível; c) e de um pólo real negativo  $z \cong -1$  originado do pólo em  $z = -1$  da regra de Tustin; o que é retratado no transitório como um chaveamento na freqüência da taxa de amostragem, descrevendo um sinal forte, e superposto à freqüência do modo, como pode-se notar com base em Isermann (1989), Seção 3.5.1, e Franklin e Powell (1981), Seção 2.4.

### **5.7 - PLANTA ANALÓGICA PARA DOIS MODOS FLEXÍVEIS, RAZÃO DE AMORTECIMENTO MUITO ELEVADA, E CONTROLE PD DISCRETO NO TEMPO POR SCHNEIDER**

Visto que os métodos do emprego do filtro “anti-aliasing” e do aumento do amortecimento estrutural não se mostraram eficazes na manutenção da estabilidade no sistema de controle em tempo discreto projetado pela regra de Tustin para o caso em que os ganhos eram maiores que os do Caso 1, apresentado no início deste Capítulo, pensou-se numa outra alternativa: mudança de mapeamento s-z (mapeamento analógico digital). Intuitivamente, ocorreu a necessidade de buscar uma outra forma clássica de mapeamento diferente da regra de Tustin visto que esta não apresentou bons resultados quando os ganhos de controle e o período de amostragem eram elevados.

Foram então estudados os trabalhos de Schneider (1991 e 1994) onde apresentou-se uma regra de mapeamento baseada em métodos de integração numérica de ordem elevada. Em Schneider (1991) é apresentado o método de integração de Adams-Moulton de terceira ordem da Equação (5.1), que pode ser rescrito como uma equação a diferenças finitas tal como mostra a Equação (5.2). Após a aplicação da transformada-Z dada pela Equação (4.1) sobre a

Equação (5.2) obtém-se, finalmente, a regra de mapeamento de Schneider conforme mostrado na Equação (5.3).

$$u_k = u_{k-1} + \frac{T_s}{12} \cdot (5 \cdot e_k + 8 \cdot e_{k-1} - e_{k-2}) \quad (5.1)$$

$$e_k = \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{12}{T_s} \cdot \nabla u_k - 8 \cdot e_{k-1} + e_{k-2} \right) \quad (5.2)$$

$$\frac{E(s)}{U(s)} = s \sim \frac{E(z)}{U(z)} = \frac{12}{T_s} \cdot \frac{z \cdot (z-1)}{5z^2 + 8z - 1} \quad (5.3)$$

Tal novo mecanismo de ordem elevada para mapeamentos analógico-digitais chamou a atenção por ter se apresentado melhor que a regra de Tustin e que alguns outros métodos de mapeamento tal como mostrado em Schneider (1994) para o caso em que o mapeamento foi executado somente para ações integrais de controle. Os estudos de Schneider (1991 e 1994) motivaram a simulação que se segue, apresentada nas Figuras 5.108 a 5.111.

Vejamos a seguir os resultados de uma simulação que utilizou a regra de Schneider (Equação (5.3)) no projeto do controle PD em tempo discreto.  $T_s = 1,6$  segundos. Fator de amortecimento utilizado:  $\zeta = 6$ . Ganhos do controle discreto no tempo: roll:  $k_p = 0.316$ ;  $k_d = 0.482$ ; pitch:  $k_p = 1.07$ ;  $k_d = 1.63$ ; yaw:  $k_p = 3.0$ ;  $k_d = 4.6$ .

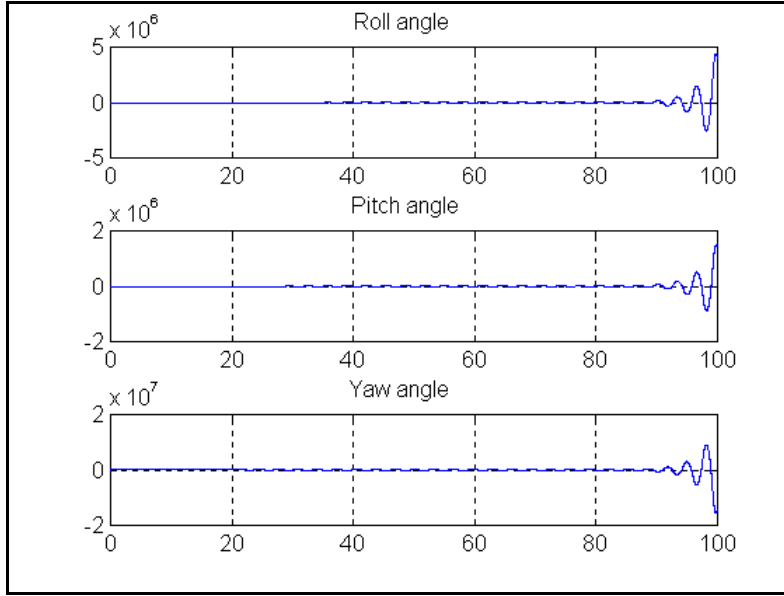


Fig. 5.108 - Ângulos de atitude.

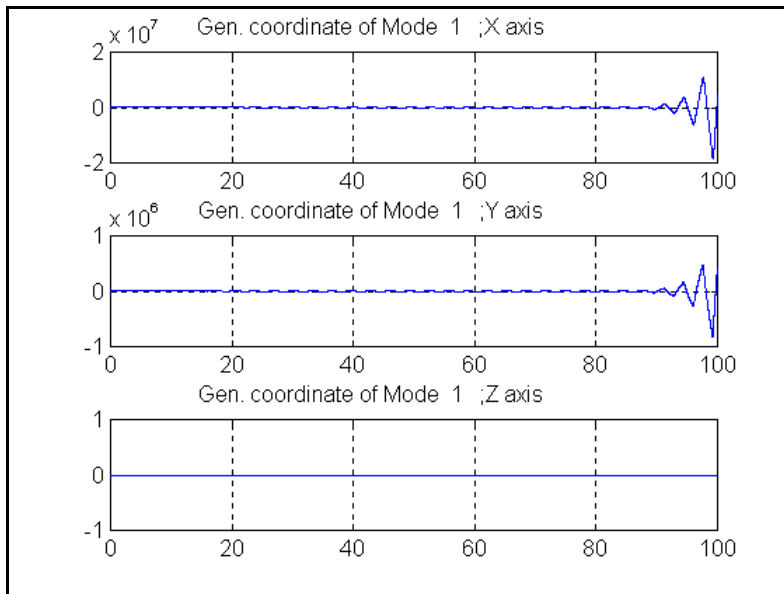


Fig. 5.109 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

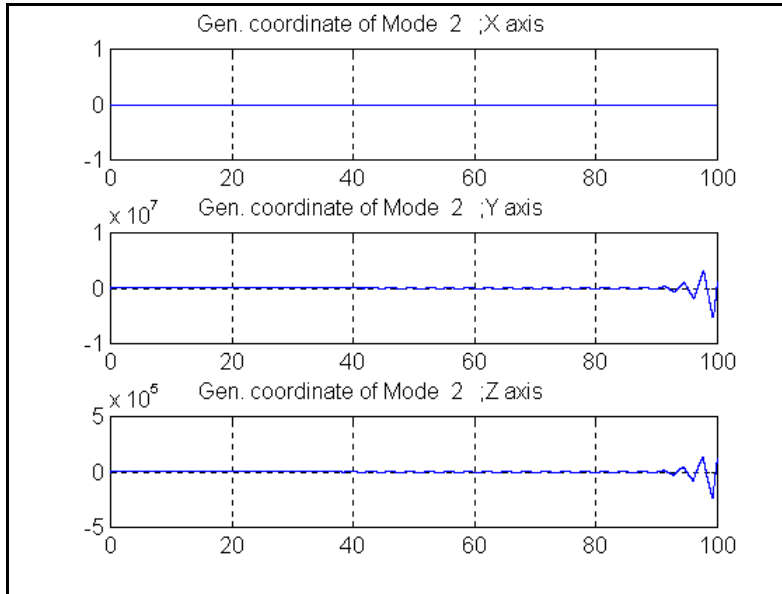


Fig. 5.110 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

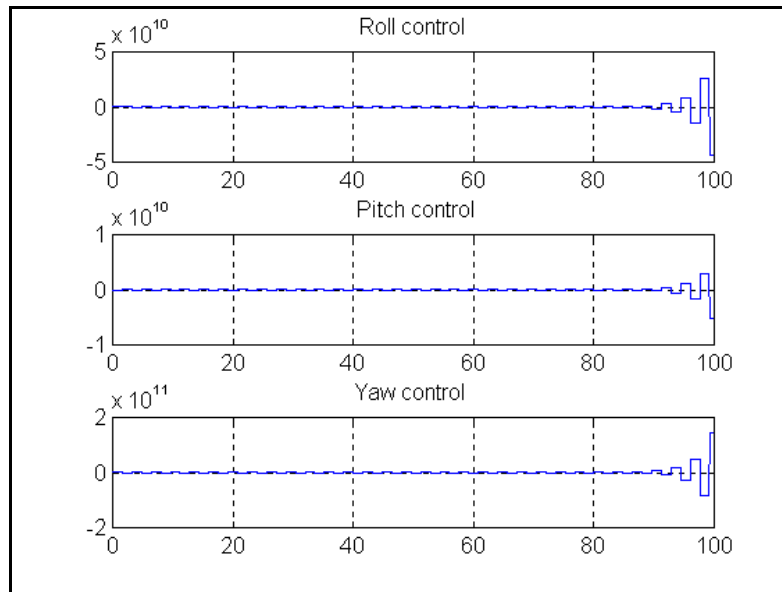


Fig. 5.111 - Sinais de controle de atitude.

Como pode-se ver mediante as Figuras 5.108 a 5.111 a regra de mapeamento s-z proposta por Schneider também não se mostrou eficiente pois a instabilidade tornou-se evidente.

A explicação do porquê a regra de Schneider mostrou-se ineficiente no projeto do controle PD pode ser contemplada na Seção 6.6.

### **5.8 - COMPARAÇÕES**

Os casos simulados estão dispostos na Tabela 5.2 na qual pode-se comparar as diversas situações em que o projeto do controle PD projetado pela usual regra de Tustin funciona e naquelas em que ele falha.



**TABELA 5.2 - RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES PARA O MODELO DO CBERS-1  
UTILIZADO NESTE TRABALHO COM CONTROLE PD PROJETADO POR APROXIMAÇÃO  
TUSTIN**

$T_s$		Baixo						Elevado					
		$0 < \zeta < 1$			$1 < \zeta$			$0 < \zeta < 1$			$1 < \zeta$		
Razão de amortecimento													
Ganhos de controle		B	M	A	B	M	A	B	M	A	B	M	A
S A R U G I F	5.17-5.23			E									
	5.24-5.30							E					
	5.31-5.37									I			
	5.38-5.44							E <sup>+</sup>					
	5.45-5.51									I <sup>+</sup>			
	5.52-5.65	E											
	5.66-5.72							E					
	5.73-5.79									I			
	5.80-5.86			E									
	5.87-5.93									I			
	5.94-5.100												I
	5.101-5.103											I	
5.104-5.107											I		

Nesta Tabela 5.2 E = caso estável, I = caso instável, B = baixos ganhos, M = ganhos intermediários, A = ganhos altos.

Para o símbolo B (ganhos baixos) entenda-se que se trata do caso em que temos os seguintes ganhos de controle PD: “roll”:  $k_p=0,0316$ ;  $k_d=0,0482$ ; “pitch”:  $k_p=0,107$ ;  $k_d=0,163$ ; “yaw”:  $k_p=0,300$ ;  $k_d=0,460$ .

Para o símbolo M (ganhos intermediários) entenda-se que se trata do caso em que temos os seguintes ganhos de controle PD: “roll”:  $k_p=0.316$ ;  $k_d=0.482$ ; “pitch”:  $k_p=1.07$ ;  $k_d=1.63$ ; “yaw”:  $k_p=3.0$ ;  $k_d=4.6$ .

Para o símbolo A (altos ganhos) entenda-se que se trata do caso em que temos os seguintes ganhos de controle PD: “roll”:  $k_p=3,16$ ;  $k_d=4,82$ ; “pitch”:  $k_p=10,7$ ;  $k_d=16,3$ ; “yaw”:  $k_p=30,0$ ;  $k_d=46,0$ .

Pode-se perceber nas Figuras 5.23, 5.30, 5.44, 5.58, 5.64, 5.72, 5.86 e 5.103 um forte sinal de controle explicado pelo chaveamento do amostrador na frequência de amostragem (em especial, a Figura 5.58 mostra bem mais claramente o fenômeno que as demais).

Na Tabela 5.2 as simulações feitas com pré-filtro “anti-aliasing” são as que tiverem os indicadores de estabilidade/instabilidade com um asterisco: E\* e I\*.

## **CAPÍTULO 6**

### **ESTABILIZAÇÃO DO CONTROLE EM TEMPO DISCRETO DE SATÉLITES COM APÊNDICES FLEXÍVEIS**

#### **6.1 - ESTABILIZAÇÃO POR REDUÇÃO DO PERÍODO DE AMOSTRAGEM**

É o método mais simples e fácil de ser empregado, sendo o seu emprego recomendável sob este aspecto. Entretanto, a disponibilidade e o custo dos processadores, e conversores A/D e D/A, sobretudo de qualidade espacial, podem inviabilizar tal método. Podemos verificar os resultados deste tipo de método mediante as Figuras 5.17 a 5.23, 5.52 a 5.65, 5.73 a 5.79, e em alguns casos simulados no Capítulo 4. Na Seção 4.5.4 vimos como o critério de estabilidade de Jury pode ser útil para fornecer as regiões ou intervalos onde o período de amostragem do controlador em tempo discreto garantirá a estabilidade no controle de um oscilador harmônico livre. O mesmo que foi feito na Seção 4.5.4 pode ser realizado para sistemas mais complexos, demandando assim métodos de obtenção de resultados tecnologicamente mais sofisticados. Podemos verificar por meio das Figuras 4.56 a 4.61 as regiões de estabilidade e instabilidade que são fornecidas mediante a aplicação do critério de estabilidade de Jury para um oscilador harmônico livre controlado por um controle Proporcional+Derivativo projetado por aproximação Tustin.

#### **6.2 - ESTABILIZAÇÃO POR EMPREGO DE FILTRO “ANTI-ALIASING”**

Embora amplamente usado, o filtro “anti-aliasing” nem sempre é suficiente para estabilizar a planta como pode ser observado mediante as Figuras 5.45-5.51.

#### **6.3 - ESTABILIZAÇÃO POR REDUÇÃO DOS GANHOS**

A estabilização por redução dos ganhos do controle deve ser tentada mas possui o inconveniente de mudar as especificações do sistema em malha fechada (tempos de acomodação e subida, sobressinal, etc.). Como exemplos

podemos verificar os resultados apresentados nas Figuras 5.24 a 5.30, 5.38 a 5.44, 5.52 a 5.72, 5.101 a 5.107.

#### **6.4 - ESTABILIZAÇÃO POR AUMENTO DO AMORTECIMENTO ESTRUTURAL**

O aumento do amortecimento estrutural tem o poder de atrair os pólos de malha aberta para o interior do círculo unitário no plano-z, e nem sempre resolve o problema da instabilidade tal como podemos perceber pelas Figuras 5.87 a 5.93, 5.94 a 5.100, 5.101 a 5.103 e 5.104 a 5.107. Também há o inconveniente de que o projeto estrutural do satélite seria alterado.

#### **6.5 - ESTABILIZAÇÃO POR MUDANÇA DO MAPEAMENTO S-Z**

Foi notado mediante os Capítulos 4 e 5 que o mapeamento do plano-s para o plano-z proposto pela aproximação Tustin é razoável, falhando para os casos com ganhos de controle intermediários e elevados (estabelecidos no Capítulo 5) e períodos de amostragem  $T_s$  elevados, e que o de Schneider é péssimo para o caso de controladores digitais com algum tipo de ação derivativa. Assim sendo, abre-se espaço para sugestões e testes com novos tipos de mapeamentos. Foi desenvolvida uma nova proposta de regra de mapeamento analógico-digital a qual está apresentada na Seção 6.7. Na Seção 6.8 temos os resultados das simulações feitas com o controle PD projetado por esta nova regra de mapeamento.

#### **6.6 - CRÍTICAS À REGRA DE SCHNEIDER**

A regra de Schneider não pode ser utilizada no projeto de um controle PD discreto no tempo pois apresenta um pólo fora do círculo unitário, conforme foi verificado posteriormente às simulações com a mesma regra, e nada se poderá fazer para corrigir tal problema.

O “root-locus” de um controlador digital apenas com ação derivativa ( $k_p = 0$ ) projetada pela regra de Schneider, dada pela Equação (5.3), e fazendo  $G_{h0}(z) = 1$ , está apresentado na Figura 6.1 de onde pode-se constatar: a) um pólo

dentro do círculo unitário:  $z_1 = 0,116$ ; e b) um pólo fora do círculo unitário:  $z_2 = -1,716$ . O pólo  $z_2 = -1,716$  é o pólo instabilizador de tal regra pois está fora do círculo unitário. É por este motivo que projetos de controles discretos com ações derivativas projetados pela regra de Schneider falham, como ocorreu na Seção 5.7.

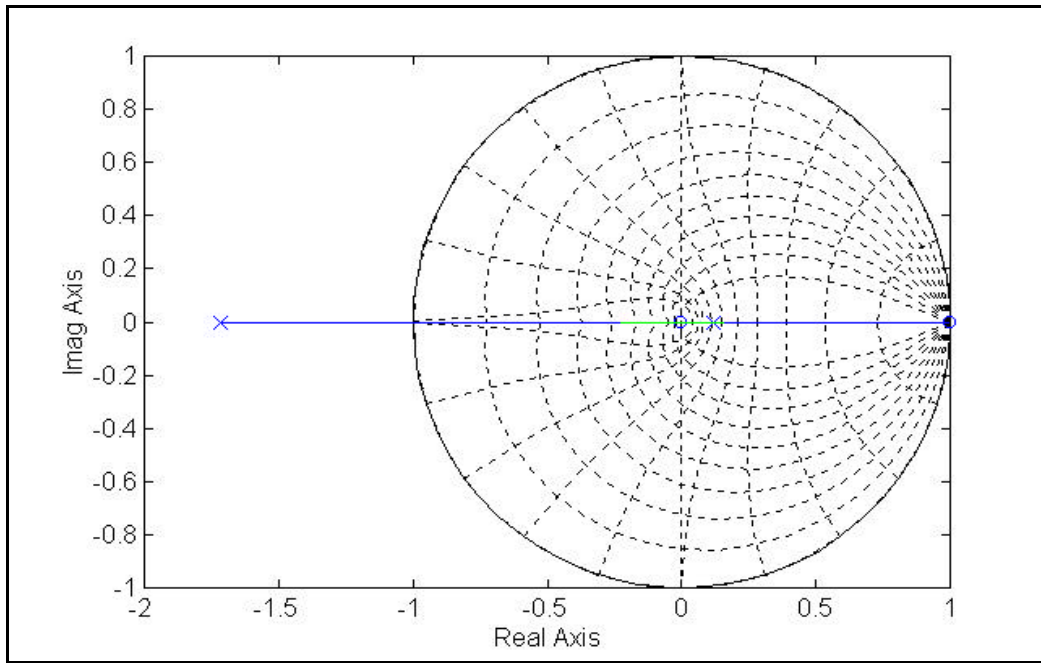


Fig. 6.1 - Pólo instabilizador da regra de Schneider.

Uma solução para contornar tal problema seria utilizar uma rede “lead” (avanço de fase) para buscar encontrar regiões de estabilidade para o caso Schneider, o que não é necessário com as regras de Tustin e a nova regra.

Uma rede “lead” analógica e a representação equivalente por Schneider estão apresentadas abaixo pelas Equações (6.1) e (6.2), respectivamente:

$$D(s) = \frac{s + a}{s + b} \tag{6.1}$$

$$D(z)_{Schneider} = \frac{\left(1 + \frac{5.a.T_s}{12}\right)z^2 + \left(\frac{2.a.T_s}{3} - 1\right)z - \frac{a.T_s}{12}}{\left(1 + \frac{5.b.T_s}{12}\right)z^2 + \left(\frac{2.b.T_s}{3} - 1\right)z - \frac{b.T_s}{12}} \quad (6.2)$$

Como o que nos interessa de fato são os pólos, vamos analisar o denominador da Equação (6.2) que possui suas raízes em função de  $a = b.T_s$ :

$$Z_1 = \frac{-\left(\frac{2.a}{3} - 1\right)}{\left(2 + \frac{5.a}{6}\right)} + \frac{1}{\left(2 + \frac{5.a}{6}\right)} \sqrt{\left(\frac{2.a}{3} - 1\right)^2 + \frac{a}{3} \left(1 + \frac{5.a}{12}\right)} \quad (6.3)$$

$$Z_2 = \frac{-\left(\frac{2.a}{3} - 1\right)}{\left(2 + \frac{5.a}{6}\right)} - \frac{1}{\left(2 + \frac{5.a}{6}\right)} \sqrt{\left(\frac{2.a}{3} - 1\right)^2 + \frac{a}{3} \left(1 + \frac{5.a}{12}\right)} \quad (6.4)$$

As Figuras (6.2) e (6.3) representam graficamente que  $Z_1$  não torna instável o  $D(z)$  mas  $Z_2$  pode instabilizá-lo sim para valores de  $a > 6$  segundos, situação em que o pólo  $Z_2$  sai do círculo unitário.

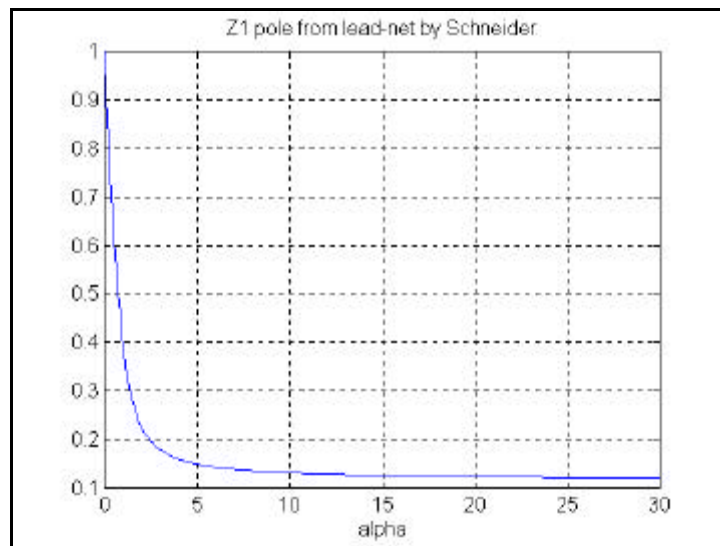


Fig. 6.2 - Gráfico de  $Z_1$ .

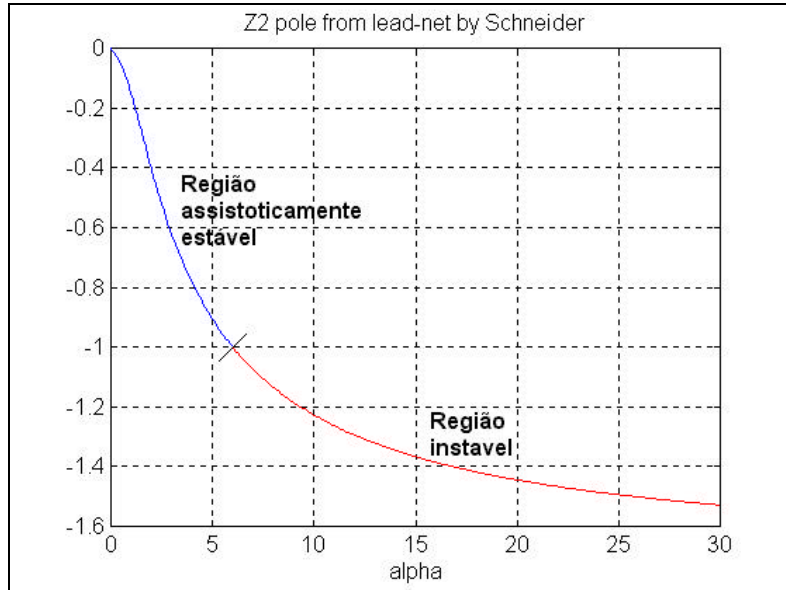


Fig. 6.3 - Gráfico de Z<sub>2</sub>.

Entretanto, convém lembrar que o mapeamento proposto por Schneider representa um excelente integrador (Schneider, 1994 e 1991). O inconveniente é que um controle digital que necessite de uma ação derivativa, tal como um controle PD, não poderá utilizar tal equivalência por ser ela instável nesta situação.

## 6.7 - ESTABILIZAÇÃO POR MUDANÇA DO MAPEAMENTO S-Z: CONTROLE PD PROJETADO POR UMA NOVA REGRA

Diante da ineficácia dos métodos clássicos apresentados neste trabalho que falharam ao tentar resolver o problema da instabilidade para ganhos de controle intermediário e elevados (tal como foi estabelecido no Capítulo 5) e período de amostragem elevados, surgiu a necessidade de se criar um novo tipo de mapeamento. Tal proposta de mapeamento corresponde à principal contribuição deste trabalho de mestrado.

Será proposto um novo mapeamento s-z inspirado na regra de Tustin deslocando-se o pólo desta de  $z = -1$  para  $z' = -\xi$ ,  $0 < \xi < 1$ . Isto evita ou

retarda a instabilização em malha fechada por movê-lo para o interior do círculo unitário, tornando  $\xi$  um parâmetro de projeto. Logo:

$$e_k = \frac{2}{T_s} \cdot \nabla u_k - \mathbf{x} \cdot e_{k-1} \quad (6.5)$$

Aplicando a Equação (4.1) na Equação (6.5) teremos:

$$s \sim \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+\mathbf{x}} \quad ; 0 < \mathbf{x} < 1 \quad (6.6)$$

Tal nova regra corresponderia precisamente ao caso intermediário entre os mapeamentos Tustin e “backward” tal como podemos verificar na Figura 6.4, tornando tais mapeamentos clássicos casos particulares dessa nova regra.

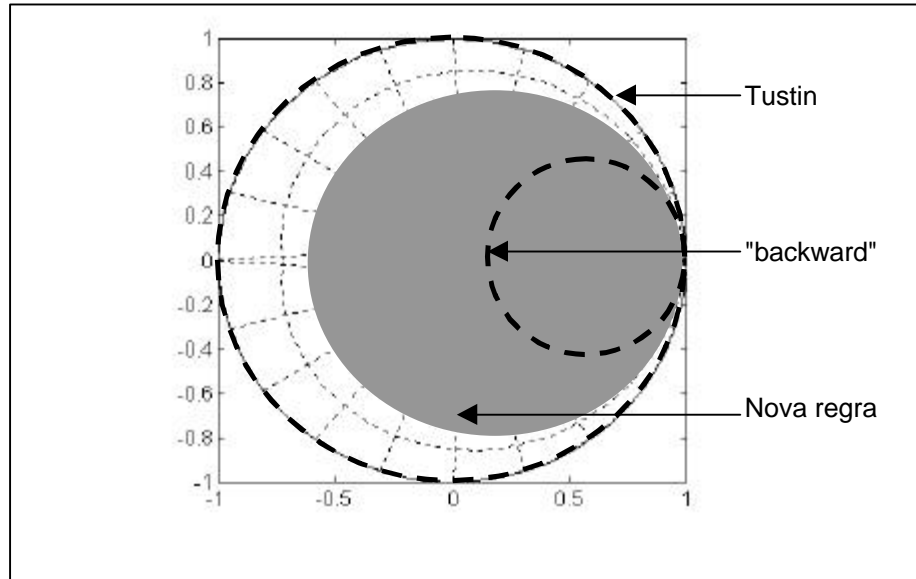


Fig. 6.4 - Mapeamentos s-z para a nova regra, Tustin e Backward.

Um controle PD projetado por essa nova regra é dado pela Equação (6.7).

$$D(z) = PD_{control} = \left( k_p + \frac{2.k_d}{T_s} \right) \frac{z + \left( \frac{k_p.T_s \cdot \mathbf{x} - 2.k_d}{k_p.T_s + 2.k_d} \right)}{z + \mathbf{x}} \quad (6.7)$$



Na Equação (6.7) o caractere grego  $\xi$  (leia-se “csi”) corresponde a um novo parâmetro de projeto além dos ganhos de controle e do período de amostragem.

## 6.8 - SIMULAÇÕES COM A NOVA REGRA

### 6.8.1 - SIMULAÇÃO COM O OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO E PD DISCRETO NO TEMPO PROJETADO PELA NOVA REGRA

- a) Controle PD projetado pela Nova-regra sem compensação de fase - comparação com o projeto pela regra de Tustin:

O sistema de controle em malha fechada e em tempo discreto utilizado nas simulações desta Seção está mostrado na Figura 6.5.

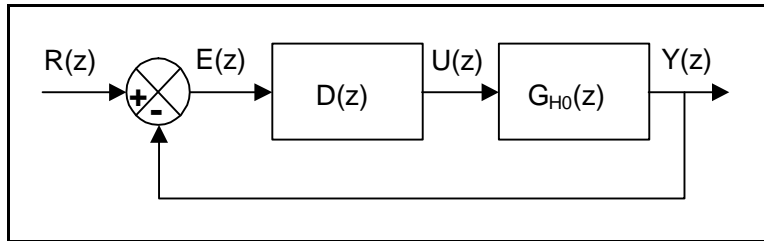


Fig. 6.5 - Diagrama de blocos do controle em tempo discreto.

Na Figura 6.5 o  $D(z)$  corresponde ao PD projetado pela nova regra dado pela Equação (6.7), e  $G_{H0}(z)$  corresponde à Equação (6.8), para o equivalente “zero-order hold” do oscilador harmônico amortecido, tal como foi estudado no Capítulo 4.

$$G_{H0}(z) = \frac{z \left[ 1 - 2e^{-sT_s} \cdot \cos(w_d T_s) - e^{-2sT_s} \left( \frac{s}{w_d} \cdot \sin(w_d T_s) - \cos(w_d T_s) \right) \right] + e^{-2sT_s} + e^{-sT_s} \left( \frac{s}{w_d} \cdot \sin(w_d T_s) - \cos(w_d T_s) \right)}{z^2 - [2e^{-sT_s} \cdot \cos(w_d T_s)] \cdot z + e^{-2sT_s}} \quad (6.8)$$

Pela nova regra com ganhos  $k_p = 3,2$  e  $k_d = 4,8$  e  $T_s = 1,6$  segundos, um fator de amortecimento de  $\zeta = 6$ , e utilizando um  $\xi = 0,2$  obteve-se a estabilização tal como pode ser verificada mediante as Figuras 6.6 e 6.7.

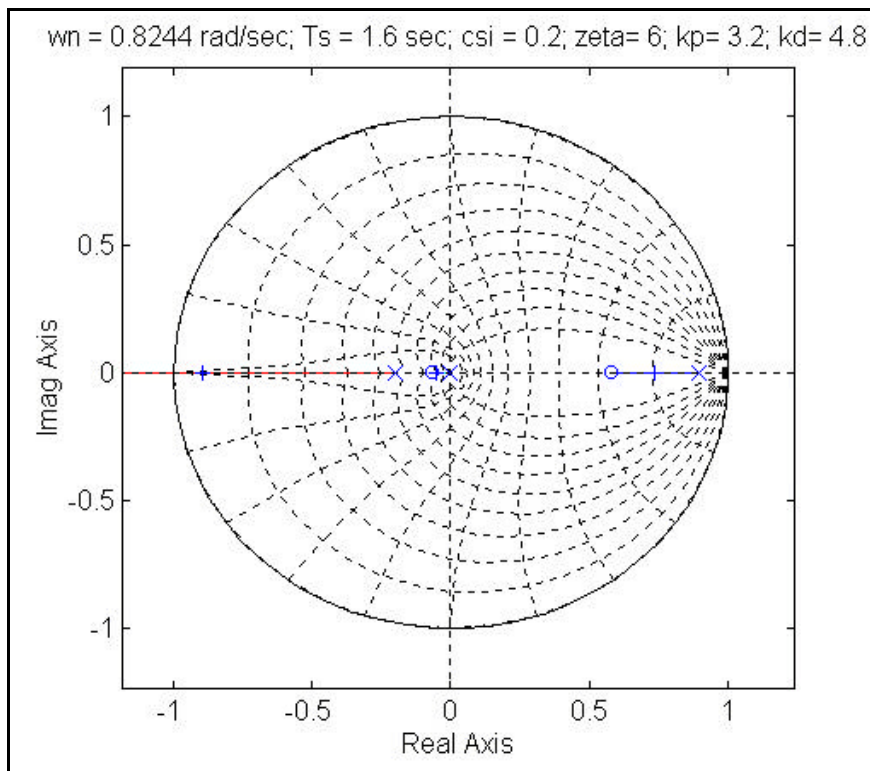


Fig. 6.6 - Root-locus do sistema em malha fechada com a nova regra.

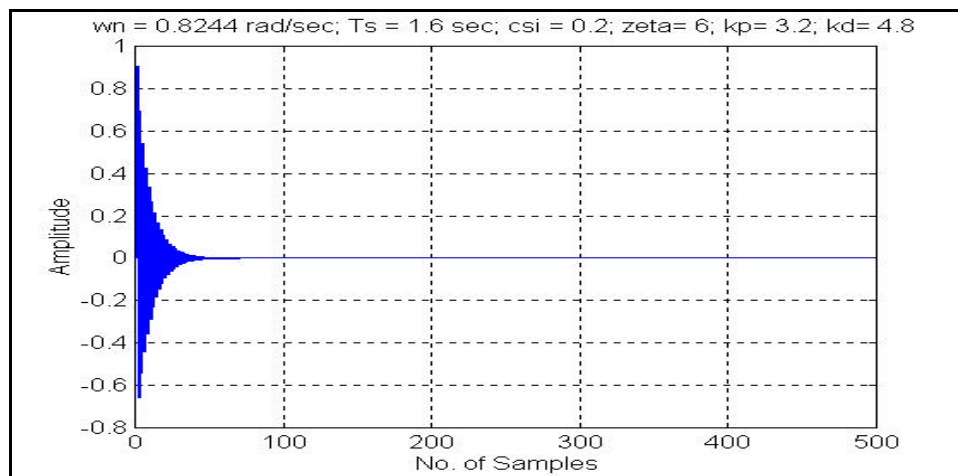


Fig. 6.7 - Resposta transitória para o sistema em malha fechada com a nova regra.

Pela regra de Tustin com ganhos  $k_p = 3,2$  e  $k_d = 4,8$ ,  $T_S = 1,6$  segundos, e um fator de amortecimento de  $\zeta = 6$  (as mesmas constantes do caso feito com a

nova regra) obteve-se a instabilidade como podemos ver mediante as Figuras 6.8 e 6.9.

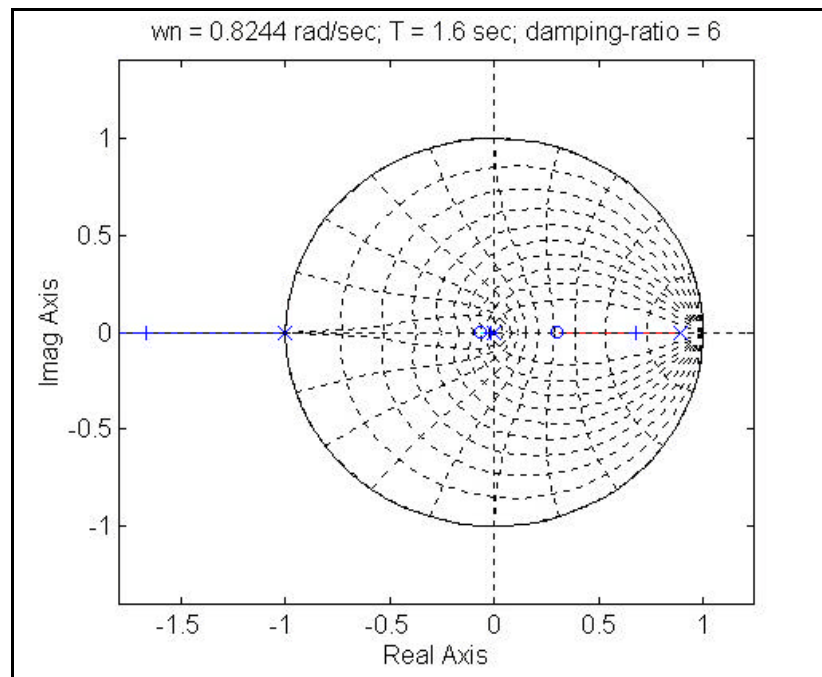


Fig. 6.8 - Root-locus do sistema em malha fechada com a regra de Tustin.

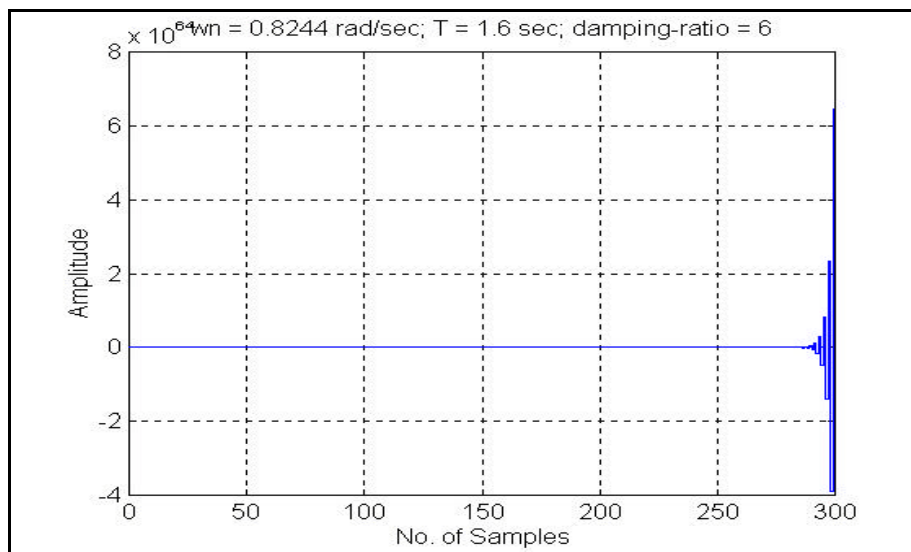


Fig. 6.9 - Resposta transitória para o sistema em malha fechada com a regra de Tustin.

b) Controle PD projetado pela Nova-regra com compensação de fase:

b.1)  $f = 87^\circ,7777$  , o que pode ser conseguido com  $k_d = 100$ ;  $k_p = 3,2$ ;  
 $w_n = 2 \cdot p \cdot 0,1312 = 0,8244$  rad/seg ;  $T_S = 1,6$  segundos.

Para uma compensação de fase de  $87,7777$  graus ocorreu a instabilidade para vários valores de  $\xi$  que foram testados. Na Figura 6.10 está apresentado o caso em que se usou  $\xi = 0,001$ .

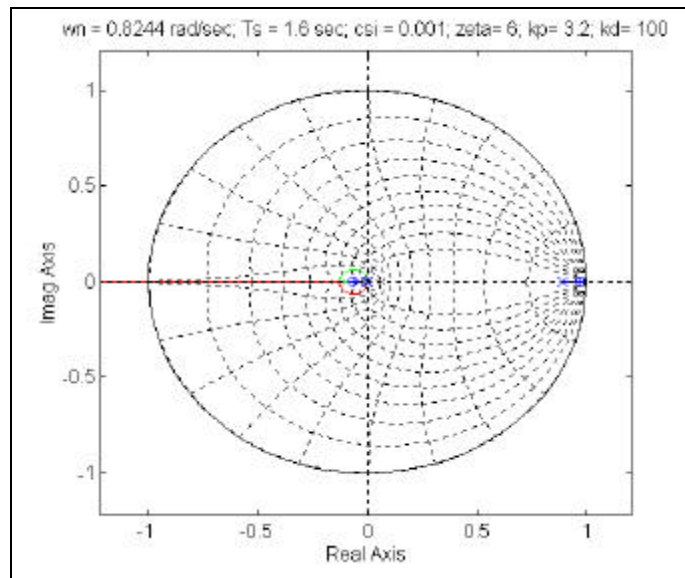


Fig. 6.10 - Root-locus para o Z.O.H. do oscilador harmônico sobre-amortecido controlado por PD projetado com a nova-regra para  $\xi = 0,001$ .

Apesar do avanço de fase mostrado o sistema não conseguiu alcançar a estabilidade. Isso se deve ao fato de que a fase depende estritamente da razão entre os ganhos, e, em contrapartida, o ganho de malha aberta depende estritamente dos valores dos módulos dos ganhos individualmente, tal como foi visto na Seção 4.5.3, item d.

b.2)  $f = 57^\circ,0983$  , o que pode ser conseguido com  $k_d = 6$ ;  $k_p = 3,2$ ;  
 $w_n = 2 \cdot p \cdot 0,1312 = 0,8244$  rad/seg ;  $T_S = 1,6$  segundos.

O “root-locus” da Figura 6.11 apresenta uma disposição dos pólos de malha fechada internamente ao círculo unitário. Na Figura 6.12 temos o respectivo transitório dessa situação assintoticamente estável.

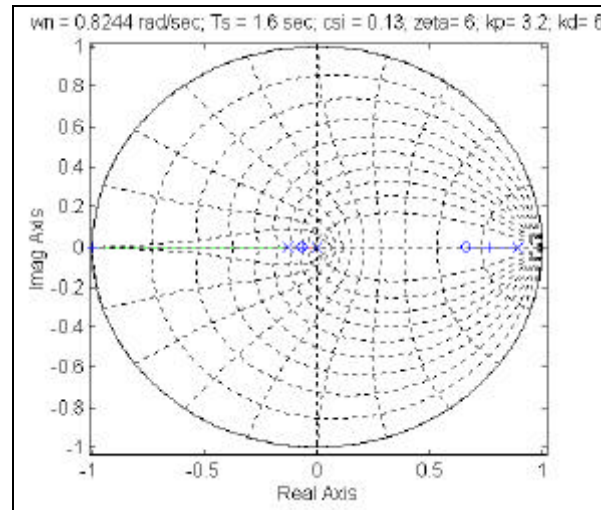


Fig. 6.11 - Root-locus para o Z.O.H. do oscilador harmônico sobre-amortecido controlado por PD projetado com a nova-regra para  $\xi = 0,13$ .

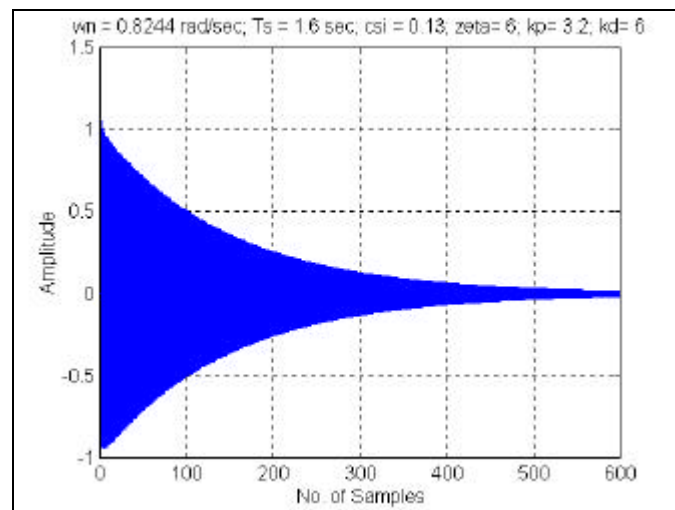


Fig. 6.12 - Resposta ao pulso unitário relativo ao “root-locus” da Figura 6.11.

b.3)  $f = 51^{\circ},0370$  , o que pode ser conseguido com  $k_d = 4,8$ ;  $k_p = 3,2$ ;  
 $w_n = 2 \cdot p \cdot 0,1312 = 0,8244$  rad/seg ;  $T_s = 1,6$  segundos.

O transitório relativo ao “root-locus” assintoticamente estável da Fig. 6.13 é o mostrado na Figura 6.14.

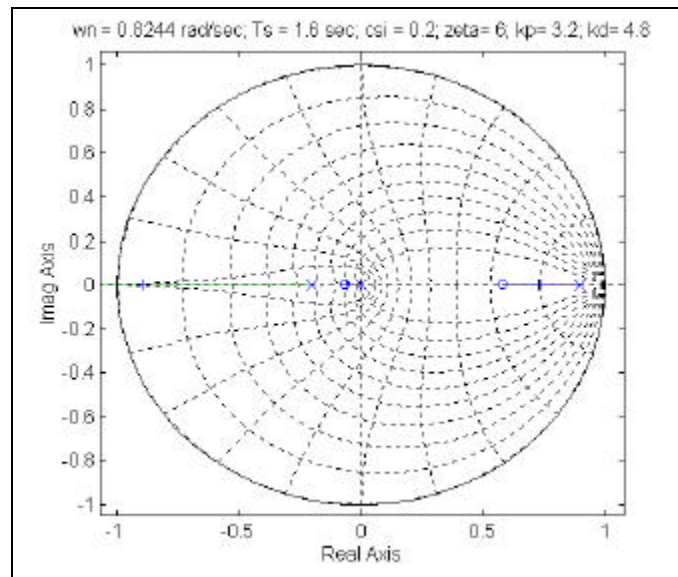


Fig. 6.13 - Root-locus para o Z.O.H. do oscilador harmônico sobre-amortecido controlado por PD projetado com a nova-regra para  $\xi = 0,2$ .

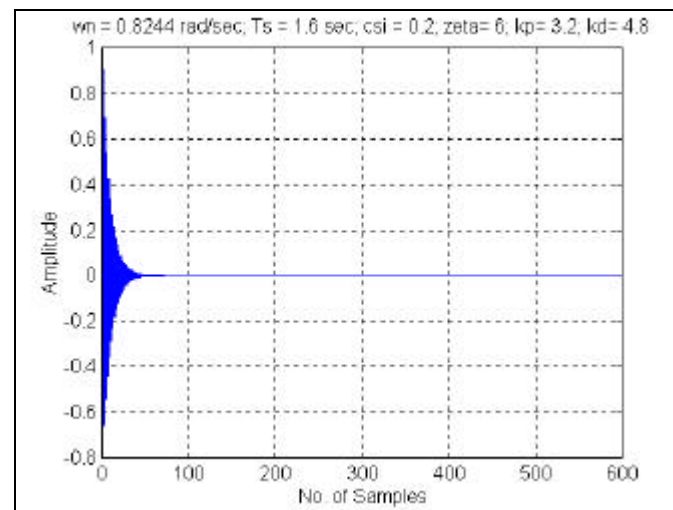


Fig. 6.14 - Resposta ao pulso unitário relativo ao root-locus da Figura 6.13.

Pode-se fazer uma comparação entre as simulações mostradas pelas Figuras 6.10 a 6.14 (PD projetado pela Nova-regra com compensação de fase) e as simulações mostradas nas Figuras 4.47 a 4.49. Tal comparação permite

concluir que a compensação em avanço de fase não apresentou resultados satisfatórios diante do problema da instabilidade vindo até a piorar o problema em certos casos, entretanto, as simulações com a Nova-regra apresentaram resultados melhores que as simulações com a regra de Tustin.

### 6.8.2 - ESTABILIZAÇÃO DE UM MODELO ANALÓGICO DO CBERS-1 UTILIZANDO UM MODO FLEXÍVEL COM PD PROJETADO PELA NOVA REGRA

Nova regra proposta com  $\xi = 0,2$ ;  $T_s = 1,6$  segundos, razão de amortecimento  $\zeta = 6$ . Simulação com integrador Runge-Kutta 4-5, passo de integração fixo de 0,01 segundos, tolerância  $10^{-6}$ ; Ganhos do controle discreto no tempo: roll:  $k_p = 0.316$ ;  $k_d = 0.482$ ; pitch:  $k_p = 1.07$ ;  $k_d = 1.63$ ; yaw:  $k_p = 3.0$ ;  $k_d = 4.6$ .

Os resultados da simulação desta seção apresentados nas Figuras 6.15-6.17 podem ser comparados com as Figuras 5.101-5.103 para o caso do PD projetado pela regra de Tustin nas mesmas condições da simulação com a nova regra: um modo de vibração, mesmos ganhos de controle,  $T_s = 1,6$  segundos, etc. Pode-se observar a instabilização nos eixos de “pitch” e “yaw” na simulação feita com o projeto pela regra de Tustin e a estabilização de todos os eixos com a simulação que usou a nova regra.

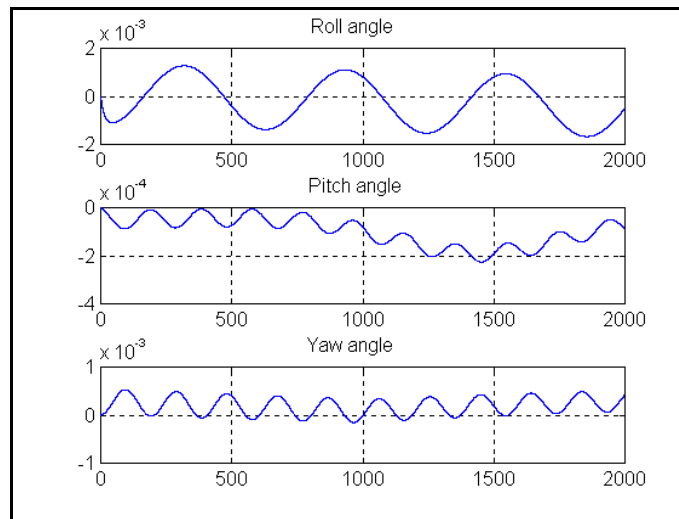


Fig. 6.15 - Ângulos de atitude.

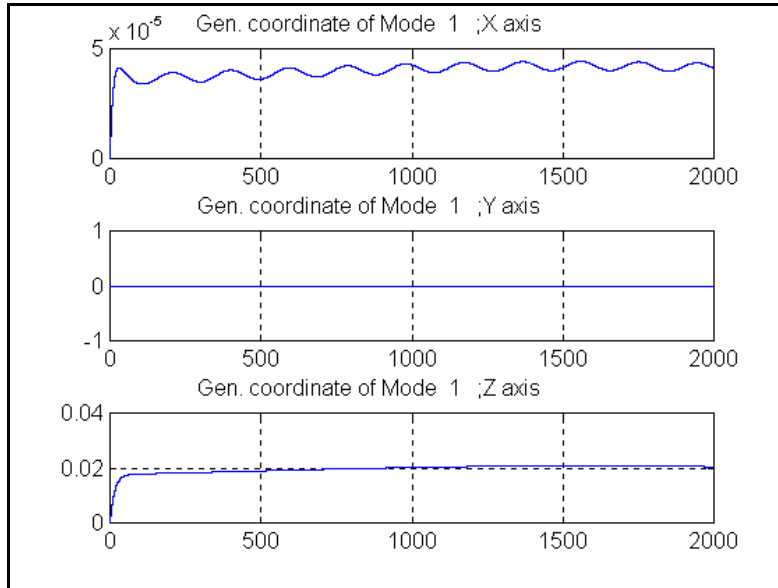


Fig. 6.16 - Coordenadas generalizadas para o único modo simulado.

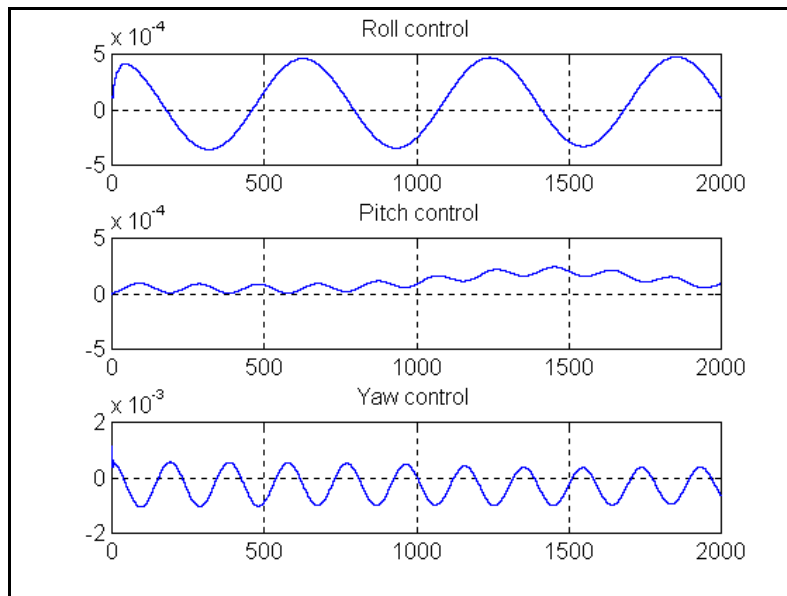


Fig. 6.17 - Sinais de controle de atitude.

### 6.8.3 - ESTABILIZAÇÃO DE UM MODELO ANALÓGICO DO CBERS-1 UTILIZANDO DOIS MODOS FLEXÍVEIS COM PD PROJETADO PELA NOVA REGRA

PD projetado pela nova regra proposta com  $\xi = 0,2$  ;  $T_s = 1,6$  segundos, razão de amortecimento  $\zeta = 6$ . Simulação com integrador Runge-Kutta 4-5, passo de



integração fixo de 0,01 segundos, tolerância  $10^{-6}$ ; ganhos do controle discreto no tempo: roll:  $k_p = 0.316$ ;  $k_d = 0.482$ ; pitch:  $k_p = 1.07$ ;  $k_d = 1.63$ ; yaw:  $k_p = 3.0$ ;  $k_d = 4.6$ .

Os resultados da simulação desta seção podem ser comparados com as Figuras 5.104-5.107 para o projeto que usou a regra de Tustin, com eixos de “pitch” e “yaw” instáveis, e, nas mesmas condições, estabilizaram-se com o projeto que usou a nova regra, como pode-se conferir mediante as Figuras 6.18-6.21.

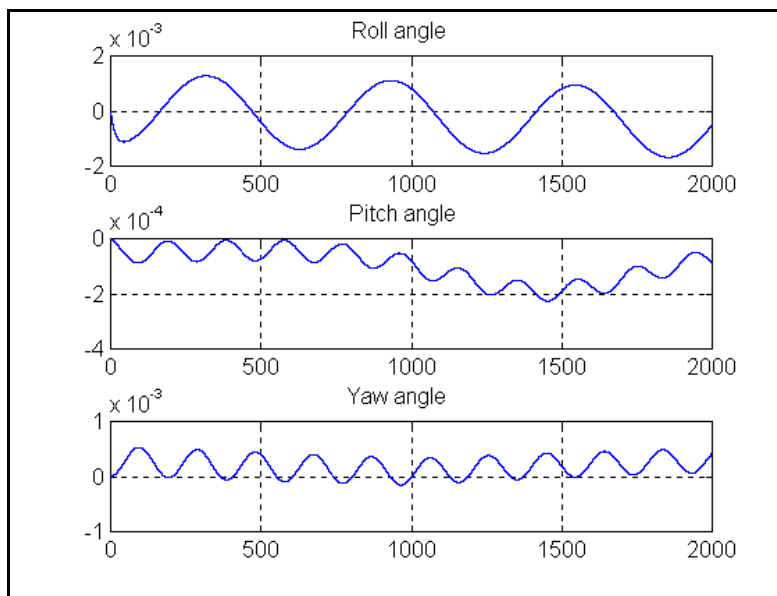


Fig. 6.18 - Ângulos de atitude.

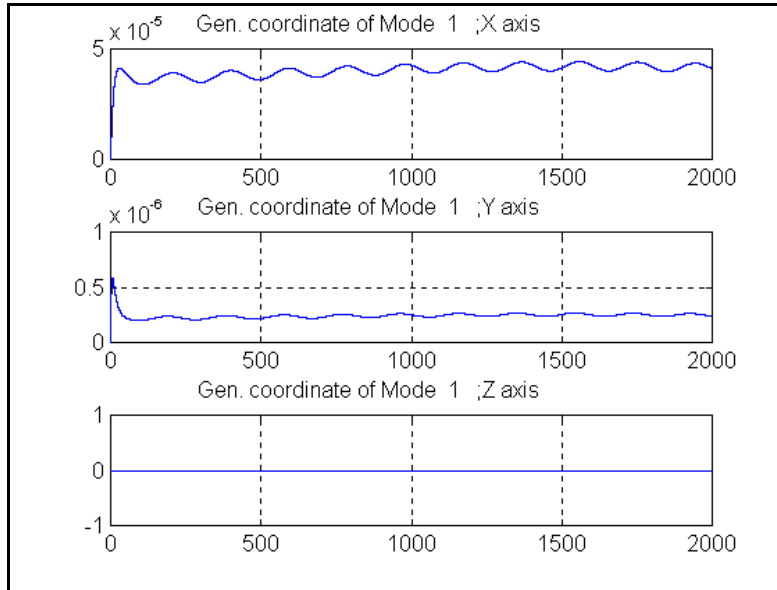


Fig. 6.19 - Coordenadas generalizadas para o primeiro modo.

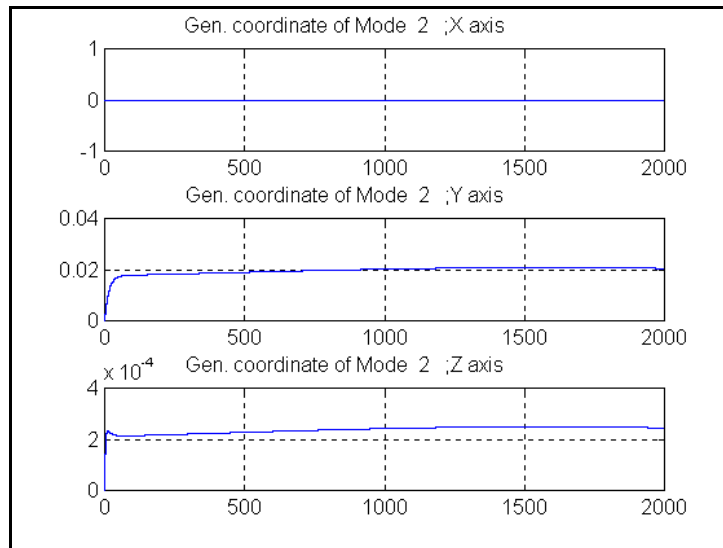


Fig. 6.20 - Coordenadas generalizadas para o segundo modo.

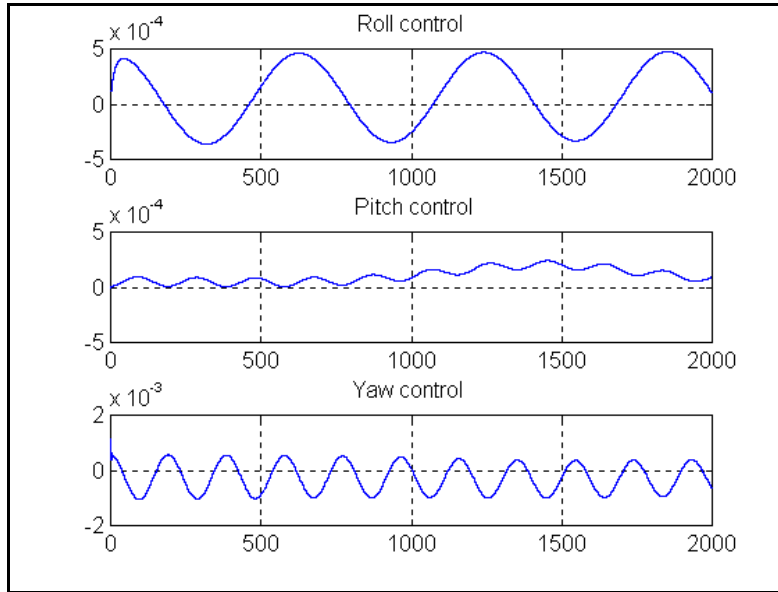


Fig. 6.21 - Sinais de controle de atitude.

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES, SUGESTÕES E RECOMENDAÇÕES

#### 7.1 - CONCLUSÕES

Primeiramente, é importante chamar a atenção para a existência do problema da instabilidade que pode ser introduzida nos sistemas de controle em tempo discreto. Isto é, a escolha do período de amostragem  $T_s$ , do filtro “anti-aliasing” dos ganhos de controle, do amortecimento estrutural, e do tipo de mapeamento do plano-s para o plano-z escolhido para projetar tal controlador em tempo discreto serão os fatores determinantes para a obtenção da estabilidade, ou para a instabilidade.

Conforme verificado nos capítulos anteriores pode-se notar que a nova regra apresentada representa uma alternativa promissora para a estabilização de um sistema de controle em tempo discreto quando a planta tratar-se de uma estrutura flexível e tiver-se valores elevados do período de amostragem  $T_s$ . As simulações com a nova regra mostraram um desempenho deveras melhor que as demais, tanto para o oscilador harmônico amortecido quanto para o modelo utilizado do CBERS-1. Entretanto, é muito importante considerar que o modelo do CBERS-1 usado neste trabalho adaptado de Silva (1997) representa um modelo linear para, no máximo, cinco modos de vibração e não considera todas as nuances da estrutura real. Em particular não considera o amortecimento crescente com o número dos modos e outros fenômenos dissipativos. Portanto, as conclusões aqui obtidas são válidas para os modelos utilizados neste trabalho, mas não necessariamente para o satélite real, por não termos considerado no modelo o amortecimento crescente com o número dos modos e outros fenômenos dissipativos de energia. Sugere-se verificá-los em futuros trabalhos.

Uma sugestão alternativa para o uso de controladores PD projetados por Tustin para o caso com valores de  $T_s$  elevados seria baixar os ganhos do controlador, mas isso causaria alterações nas especificações do sistema (sobresinal, tempo de subida, tempo de acomodação, etc...).

A regra de Schneider tem mostrado ser muito eficaz quando mapeia integradores, mas, o mesmo não ocorre para o caso de controles derivativos, redes de avanço-de-fase ("lead") visto que essa regra instabiliza-se sem a necessidade de fechar a malha de controle.

## **7.2 - SUGESTÕES E RECOMENDAÇÕES**

Como sugestões e recomendações para trabalhos futuros temos:

a) Sistemas de controle digitais:

- Utilizar o que foi aprendido com sistemas em tempo discreto e nas referências citadas neste trabalho para projetar sistemas de controle mais complexos modificando a política de controle mostrada neste trabalho;
- Fazer tratamentos analíticos segundo o critério de estabilidade de Jury para osciladores harmônicos acoplados;
- Considerar a quantização em amplitude, os atrasos em entradas, processamentos, e saídas;
- Aplicar tal teoria a sistemas de controle em transferências orbitais;
- Aplicar tal teoria a controle de manipuladores robóticos flexíveis para aplicações espaciais, ou a outro tipo de planta flexível tal como um modelo da Estação Espacial Internacional;
- Estudar mais profundamente a nova regra proposta de mapeamento entre os planos s e z;

- Sugerir uma aproximação s-z mais geral e mais eficiente que a apresentada nesse trabalho para o caso de controle digital (ou apenas em tempo discreto) de estruturas flexíveis.
- b) Estruturas flexíveis: os modelamentos sugeridos abaixo poderiam ser utilizados como plantas a serem controladas por um controlador digital:
- Diante das limitações técnicas de modelagem que não conseguem modelar bem o amortecimento estrutural crescente com os modos, sugerem-se futuros trabalhos experimentais que os identifiquem e verifiquem para posterior uso dos modelos refinados em trabalhos como este;
  - Modelar um apêndice flexível segundo os modelos de placas e, se possível, refazer os resultados mostrados neste trabalho;
  - Elaborar um modelo não linear com amortecimento crescente com os modos de vibração e outros fenômenos dissipativos para uma estrutura flexível (tal como o apêndice flexível do CBERS-1 ou outras plantas flexíveis) para verificar se as amplitudes em regime estacionário serão aceitáveis ou não pela missão, pelo controle e pela estrutura.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arduini, C. Dinamica e controllo di sistemi flessibili. In: Seminari Italo-Argentini Riguardanti Tematiche Spaziali (seminario 1), La Plata 25-27 de abril, 1995. **Anais**. La Plata: Universidad Nacional de La Plata, 1995, p.1-43.
- Ayres Jr., F. **Equações diferenciais**. São Paulo: McGraw-Hill, 1959. 393p..
- Barbosa, D. S. **Simulação e implementação digital em tempo real do controle autônomo da atitude de satélites estabilizados por rotação via bobinas magnéticas**. São José dos Campos. Dissertação (Mestrado do Curso de Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle). Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1997.
- Banerjee, A. K.; Dickens, J.M. Dynamics of an arbitrary flexible body in large rotation and translation. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.13, n.2, p.221-227, Mar./Apr. 1990.
- Barradas, O. ; Ribeiro, M. **Sistemas analógico-digitais**. Rio de Janeiro: LTC / EMBRATEL, 1980. 1174p..
- Ben-Zwi, A.; Preiszler, M. **Comparison of discretization methods**. (Rafael MOD, Israel, 1979). Comunicação pessoal.
- Benning, R.D.; Hodgins, M.G; Zipfel Jr., G.G. Active control of mechanical vibrations. **Bell Labs Technical Journal**, v.2, n.2, p.246-257, spring 1997.
- Blanchini, F. Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced Lyapunov functions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.39, n.2, p.428-433, Feb. 1994.
- Bukley, A.P. Hubble space telescope pointing control system design improvement study. In: Annual Rocky Montain Guidance and Control Conference, San Diego 6-10 Fev. 1993. **Anais**. P. 461-466.

- Butkov, E. **Física matemática**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1988. 719p.
- Craig, R. R. **Structural dynamics: an introduction to computer methods**. New-York: John Wiley, 1981. 527p.
- D'azzo, J.J.; Houpis, C.H. **Linear control system analysis and design: conventional and modern**. New-York: McGraw-Hill, 1981. 751p.
- Deets, D.A.; Szalai, K.J. **Design and flight experience with a digital fly-by-wire control system using Apollo guidance system hardware on an F-8 aircraft**. Stanford: NASA. Flight Research Center, 1972. 12p. (AIAA paper 72-881).
- Erickson, K.T. A limitation to the use of a constructive approach in the stability analysis of fixed-point digital controllers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-32, n.9, p.842-845, Sept. 1987.
- Fonseca, I. M. **Equações canônicas do movimento de um satélite artificial com apêndices flexíveis sujeito ao campo gravitacional terrestre**. São José dos Campos. Dissertação (Mestrado em Ciências – Instituto Tecnológico da Aeronáutica), 1986.
- Franklin, G.F.; Powell, D. **Digital control of dynamic systems**. Reading: Addison-Wesley, 1981. 335p.
- Ginter, S.D. **Attitude control of large flexible spacecraft**. Boston: 231p.. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Massachusetts Institute of Technology, 1978.
- Greenwood, D.T. **Principles of dynamics**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965. 518p.



Hagiwara, T.; Araki, M. On preservation of strong stabilizability under sampling. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.33, n.11, p.1080-1082, Nov. 1988.

Houpis, C.H.; Lamont, G.B. **Digital control systems**. New-York: McGraw-Hill, 1985. 653p.

Huntress, W.T. Nasa's space science program: our outlook for the new millenium. In: AAS – Strengthening Cooperation in the 21<sup>st</sup> Century, San Diego, 1996. **Anais**. EUA: San Diego, 1996; p.3-30.

Hughes, P.C. **Spacecraft attitude dynamics**. New-York: John Wiley, 1986. 564p.

Isermann, R. **Digital control systems**. New-York: Springer-Verlag, 1989. 334p.

Joshi, S. M. **Control of large and flexible space structure**. New-York: Springer-Verlag; 1989. 199p.

Juang, J.N.; Sparks, D.W. Survey of experiments and experimental facilities for control of flexible structures. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.15, n.4, p.801-816, July-Ago. 1992.

Junkins, J.L. ; Bodden, D.S. Eigenvalue optimization algorithms for structure / controller design iterations. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.8, n.6, p.697-706, Nov.-Dec. 1985.

Junkins, J.L.; Kirk, C.L. Dynamics of flexible structures in space. In: International Conference 1., Cranfield, Maio 1990. **Proceedings**. 659p. Springer-Verlag, 1990.

- Junkins, J.L.; Rahman, Z.H.; Bang, H. Near-minimum-time control of distributed parameter systems: analytical and experimental results. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.14, n.2, p.406-415, Mar.-Apr. 1991.
- Junkins, J.L.; Kim, Y. **Introduction to dynamics and control of flexible structures**. Washington: AIAA, 1993. 444p. (AIAA Educational Series).
- Junkins, J.L. ; Longman, R.W. Active control technology for large space structures. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.16, n.5, p.801-821, Sept.-Oct. 1993.
- Kane, T.R.; Likins, P.W.; Levinson, D.A. **Spacecraft dynamics**. New-York: McGraw-Hill, 1983. 431p..
- Kane, T.R.; Ryan,R.R.; Banerjee, A.K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v.10, n. 2, p.139-151, Mar.-Apr. 1987.
- Katz, P. ; Powell, J.D. Sample rate selection for aircraft digital control. **AIAA Journal**, v.13, n.8, p.975-979, Aug. 1975.
- Katz, P. **Digital control using microprocessors**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1981. 293p..
- Kuo, F.F. **Network analysis and synthesis**. Boston: Toppan Company, 1966. 515p.
- Kwakernaak, H.; Sivan, R. **Linear optimal control systems**. New-York: John Wiley, 1972. 575p..
- Kwakernaak, H., Optimal low-sensitivity linear feedback systems. **Automatica**, v.5, n.3, p.279-285, 1969.
- Lala, J.H. Architectural principles for safety-critical real-time applications. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.82, n.1, p.25-40, Jan. 1994.

- Landau, L.D.; Lifchitz, E.M. **Mechanics**. Reading: Addison-Wesley, 1960. 162p.
- Lathi, B.P. **Sistemas de comunicação**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983. 396p.
- Likins, P.W. Dynamics and control of flexible space vehicles. Washington D.C., NASA, 1970. 82 p. (NASA-JPL, technical report 32-1329).
- Likins, P.W. Finite element appendage equations for hybrid coordinate dynamic analysis. **International Journal of Solids Structures**, v.8, n.9, p.709-731, 1972.
- Likins, P.W.; VanderVoort, R.J.; Singh, R.P. Dynamics of flexible bodies in tree topology - a computer oriented approach. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 8, n. 5, p. 584-590, Sept.-Out. 1985.
- Likins, P.W.; Li, D. Dynamics of a multibody system with relative translation on curved, flexible tracks. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 10, n.3, p.299-306, May-June, 1987.
- Lourenção, P.T.M., Ferreira, D.L. **Condições de estabilidade em orientação para um satélite flexível**. São José dos Campos: INPE, abr. 1982. 12p. (INPE-2389-PRE/109).
- Maciejowski, J.M. **Multivariable feedback design**. Wokingham: Addison-Wesley, 1991. 408p.
- Mathworks **The student edition of MatLab: user's guide**. Massachusetts. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995. 833p..
- Meirovitch, L. Stability of a spinning body containing elastic parts via Liapunov's direct method. **AIAA Journal**, v.8, n.7, p.1193-1200, July 1970a.

- Meirovitch, L. **Methods of analytical dynamics**. New-York: McGraw-Hill, 1970b. 524p.
- Meirovitch, L. A method for the Liapunov stability analysis of force-free dynamical systems. **AIAA Journal**, v.9, n.9, p.1695-1701, Sept. 1971.
- Meirovitch, L. Liapunov stability analysis of hybrid dynamical systems with multi-elastic domains. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v.7, n.6, p.425-443, 1972.
- Meirovitch, L.; Calico, R.A. A comparative study of stability methods for flexible satellites. **AIAA Journal**, v.11, n.1, p.91-98, Jan. 1973.
- Meirovitch, L. A new method of solution of the eigenvalue problem for gyroscopic systems. **AIAA Journal**, v.12, n.10, p.1337-1342, Oct. 1974a.
- Meirovitch, L.; Juang, J.N. Dynamics of a gravity-gradient stabilized flexible spacecraft. Washington D.C.. NASA, 1974b, 97 p. (**NASA**, Contractor Report 2456).
- Meirovitch, L. Liapunov analysis of hybrid dynamical systems in the neighborhood of nontrivial equilibrium. **AIAA Journal**, v.12, n.7, p.889-898, July, 1974c.
- Meirovitch, L. A. Modal analysis for the response of linear gyroscopic systems. **Journal of Applied Mechanics: Transactions of the ASME**, v.42, n.2, p.446-450, June, 1975a.
- Meirovitch, L.; Calico, R.A. Stability analysis of flexible spacecraft via the method of integral coordinates. **AIAA Journal**, v.13, n.5, p.653-657, May, 1975b.

- Meirovitch, L.; Juang, J.N. Natural modes of oscillation of rotating flexible structures about nontrivial equilibrium. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v.13, n.1, p.37-44. Jan. 1976.
- Meirovitch, L.; Öz, H.; Van Landingham, H.F. Control of spinning flexible spacecraft by modal synthesis. **Acta Astronautica**, v.4, n.9-10, p.985-1010, 1977.
- Meirovitch, L. **Computational methods in structural dynamics**. Rockville: Sijthoff & Noordhoff, 1980. 439p.
- Modi, V.J.; Lips, K.W. Transient attitude dynamics of satellites with deploying flexible appendages. **Acta Astronautica**, v.5, n.10, p.797-815, 1978.
- Modi, V.J.; Lips, K.W. Three-axis attitude dynamics during asymmetric deployment of flexible appendages. **Acta Astronautica**, v.8, n.5-6, p.575-590, 1981.
- Modi, V.J.; Suleman, A. Systems modes and dynamics of the proposed space station type configurations. International Conference (Dynamics of Flexible Structures in Space 1.), May, 1990. **Anais**. Cranfield, 1990, p.645-659.
- Morari, M.; Zafiriou, E. Digital controllers for siso systems: a review and a new algorithm. **International Journal of Control**, v.42, n.4, p.844-876, 1985.
- Morari, M.; Zafiriou, E. Design of robust digital controllers and sampling-time selection for siso systems. **International Journal of Control**, v.44, n.3, p.711-735, 1986.
- Nyquist, H. Certain topics in telegraph transmission theory. **AIEE Transactions**, v.47. Apr. 1928.
- Ogata, K. **Discrete-time control systems**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987. 984p.

- Ogata, K. **Engenharia de controle moderno**. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1993. 773p.
- Ohkami, Y.; Okamoto, O.; Kida; T. Simulation of a digital controller for flexible spacecraft attitude control. In: Symposium of Dynamics and Control of Large Flexible Spacecrafts, 2., Blacksburg, 1979. **Proceedings**. Virginia Polytech State University: 1979. p.177-192.
- Passino, K.M.; Michel, A.N.; Antsaklis, P.J. Lyapunov stability of a class of discrete event systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.39, n.2, p.269-279, Feb. 1994.
- Peled, U. **Design methods with application to pre-filters and sampling-rate selection in digital flight control systems**. Dissertação (Mestrado) - Stanford University, SUDAAR, 1978. ("report" no. 512)
- Schneider, A.M.; Anuskiewicz, J.A.; Barghouti, I.S. Accuracy and stability of discrete-time filters generated by high-order s-to-z mapping functions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.39, n.2, p.435-441, Feb. 1994.
- Schneider, A. M.; Groutage, F. D.; Volfson, L. B. S-plane to z-plane mapping using a simultaneous equation algorithm based on the bilinear transformation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-32, n.7, p.635-637, July 1987.
- Schneider, A. M.; Kaneshige, J. T.; Groutage, F. D. Higher order s-to-z mapping functions and their applications in digitizing continuous-time filters. **Proceedings of the IEEE**, v.79, n.11, p.1661-1674, Nov. 1991.
- Shabana, A.A. **Dynamics of multibody systems**. New-York: John Wiley, 1989; 340p.
- Shenberg, I. The design and implementation of digital compensation networks. **IEEE Israel Tenth Conference**, 10., Tel-Aviv, 1977.

- Silva, A.R. **Estudo de controle de um satélite artificial durante a transferência orbital e apontamento.** São José dos Campos. 108p. (INPE-6397-TDI/613). Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais / Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1997.
- Sokolnikoff, I.S.; Redheffer, R.M. **Mathematics of physics and modern engineering.** Tokio: McGraw-Hill / Kogakusha, 1966. 752p.
- Souza, L.C.G. **Dynamics and robust control for uncertain flexible space systems.** São José dos Campos. 246p. (INPE-5510-TAE/020). Tese (Doutorado) – Cranfield Institute of Technology, 1992.
- Souza, L.C.G. **Dynamic model for a flexible space system aiming at a robust control design.** (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1997. 8p.). Comunicação pessoal.
- Suleman, A.; Modi, V.J.; Venkayya, V.B. Structural modeling issues in flexible systems. **AIAA Journal**, v.33, n.5, p.919-923, May, 1995.
- Tocci, J.R. **Sistemas digitais: princípios e aplicações.** São Paulo, Brasil: Prentice-Hall, 1994. 615p.
- Tredinnick, M.R.A.C. **Controle digital de estruturas espaciais com apêndices flexíveis.** Monografia para o curso Seminário de Dinâmica Orbital II (CMC-206-0). (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1997, 37p.).

Tredinnick, M.R.A.C.; Souza, M.L.O.; Souza, L.C.G. Digital control of artificial satellites with flexible appendages. In: International Symposium of Space Flight Dynamics 19., Foz do Iguaçu, 8-12 de Feb. 1999a. **Proceedings**.

Wilkinson, M.A.J.H. **The algebraic eigenvalue problem**. Londres: Clarendon, 1965. 647p.

Ziemer, R.E.; Tranter, W.H. **Systems, modulation, and noise**. Boston, Houghton Mifflin, 1976. 500p.



## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- Bainum, P. M.; Ericson-Jackson, A. J.; Xing, G. Actuator / sensor placement using degree of controllability and observability for digitally controlled orbiting platforms. **Journal of the Astronautical Sciences**, v.45, n.1, p.73-89, Jan.-Mar. 1997.
- Bainum, P. M.; Ericson-Jackson, A. J.; Xing, G. Application of a singular value decomposition method to digitally controlled large orbiting platforms with co-located actuators and sensors. **AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference**. Sun Valley, 4 Aug. 1997. 17p. (Paper AAS 97-722).
- Blachman, N. M. **Noise and its effect on communication**. New York: McGraw-Hill, 1966. 212p.
- Bose, N. K. Comments on "s-plane to z-plane mapping using a simultaneous equation algorithm based on the bilinear transformation". **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.33, n.11, p.1085-1086, Nov. 1988.
- Boykin, W.H.; Frazier, B.D. Analysis of multiloop, multirate sample-data systems. **AIAA Journal**, v.13, n.4, p.453-456, Apr. 1975.
- Diduch, C.P.; Doraiswami, R. Sample period effects in optimally designed digital control systems. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. AC-32, n.9, p.838-841, Sept. 1987.
- Franklin, G.F.; Ragazzini, J.R. **Sampled-data control systems**. New-York: McGraw-Hill, 1958. 331p.
- Gessing, R. Causal and non-causal discrete-time transfer functions and their applications. **International Journal of Control**, v.65, n.1, p.195-204, 1996.
- Glasson, D.P. Development and applications of multirate digital control. **IEEE Control Systems Magazine**, v.3, n.4, p.2-8, Nov. 1983.

- Jury, E.I. Hidden oscillations in sampled-data control systems. **AIEE Transactions**. Part II, v.75, p. 391-95, 1956.
- Jury, E.I. **Sampled-data control systems**. New-York: John Wiley, 1958.
- Jury, E.I.; Blanchard, J. A stability test for linear discrete-time systems in table forms. **Proceedings IRE**, v.49, n.12, p.1947-1948,1961.
- Jury, E.I. A general z-transform formula for sampled-data systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-12, n.5, p. 606-608,1967.
- Jury, E.I.; Anderson, B.D.O. A simplified Schur-Cohn test. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.AC-18, n.2, p. 157-163,1973.
- Kavranođlu, D.; Bettayeb, M. A new general state-space representation for discrete-time systems. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 58, n.1, p.33-49, 1993.
- Krishna, H. Computational aspects of the bilinear transformation based algorithm for s-plane to z-plane mapping. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.33, n.11, p.1086-1087, Nov. 1988.
- Kuhfittig, P.K.F. **Introduction to the Laplace transform**. New-York: Plenum Press, 1978. 205p.
- Leite, R.C.C.; Castro, A.R.B. **Física do estado sólido**. Campinas: Edgard Blücher / Unicamp, 1978. 293p..
- MathWorks **Simulink**: dynamic system simulation software: user's guide. Boston: MathWorks, 1992. 266p.
- MathWorks **Simulink**: dynamic system simulation software: release notes. Boston: MathWorks, 1994. 128p.
- Mathworks **Control system toolbox**. Boston, 1995. 180p..

- Maybeck, P.S. **Stochastic models, estimation, and control**. London: Academic, 1979. 423p.
- Newman, C. P. Comments on “s-plane to z-plane mapping using a simultaneous equation algorithm based on the bilinear transformation”. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.33, n.11, p.1085, Nov. 1988.
- Nunes, D.; Quan-Xing, S. ; Yi-Oing, C. ; Gong-Tian, Y. ; Lan-Jun, T. ; Zu-Guei, C. **Attitude and orbit control subsystem (AOCS) specification**. S.J. Campos, 30 de dez.1993 (first issue 12 de Out. 1989). 36p. (INPE-65455).
- Nurre, G.S.; Nelson, J.D.; Bradley, A.J. Current NASA H.S.T. Controller design and performance. Annual Rocky Mountain Guidance and Control Conference, Feb., 1993. **Proceedings**. San Diego, 1993, p.467-492.
- Prudêncio, S.V. **Simulação digital em tempo real de um sistema de controle de atitude magnética autônomo de um satélite**. São José dos Campos. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais / Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1997.
- Southworth, R.W.; Deleeuw, S.L. **Digital computation and numerical methods**. New-York: McGraw-Hill, 1965. 508p.
- Steinbruch, A.; Winterle, P. **Álgebra linear**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. 583p.
- Tredinnick, M.R.A.C.; Souza, M.L.O. **Degradação do desempenho de sistemas discretos em malha-fechada devido às dinâmicas não modeladas e aos fenômenos do mascaramento e das oscilações escondidas**. (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1999b). Comunicação pessoal.

Wie, B.; Bernstein, D. Benchmark problems for robust control design. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v.15, n.5, p.1057-1059, Sept.-Oct., 1992.

Yoneyama, T. **Efeitos da aproximação discreta do controlador contínuo, do tempo de amostragem e de dinâmicas não modeladas em um sistema massa-mola.** (Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, 1999). Comunicação pessoal.

## APÊNDICE A

### APROXIMAÇÃO BUTTERWORTH AO FILTRO IDEAL

O filtro ideal é uma abstração matemática irrealizável pois, fisicamente, implicaria em utilizar um número infinito de pólos. O que se pode fazer na prática é projetar um filtro que se aproxime das características de um filtro ideal tão próximo quanto possível. Algumas das aproximações mais conhecidas são as de: Butterworth, Chebyshev, Bessel e “Integral of Time-Multiplied Absolute Error” – ITAE (Graham e Lathrop). Aqui apenas nos dedicaremos ao filtro de Butterworth por ter sido usado como filtro “anti-aliasing” nas simulações. Os demais filtros podem ser encontrados em Franklin e Powell (1981), Kuo (1966) e Ziemer e Tranter (1976) e em outras boas referências. Analisaremos aqui somente o filtro de Butterworth atuando como passa-baixas. Variedades tais como passa-bandas e passa-altas não serão apresentadas.

O filtro de Butterworth de ordem- $n$  é caracterizado pela seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{\omega_c^{2n}}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} \quad (\text{A.1})$$

onde os pólos  $s_1, s_2, \dots, s_n$  são simétricos em relação ao eixo real e igualmente espaçados sobre um semicírculo de raio  $\omega_c$  no semiplano esquerdo do plano  $s$ . A frequência  $\omega_c$  é a frequência de corte do filtro de Butterworth, ou seja, onde há uma queda no módulo do sinal de  $-3$  dB.

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}} \quad (\text{A.2})$$

Na Figura A.1 podemos ver os diagramas de Bode para representações Butterworth de ordem 4 e de ordem 16, obtidos com a ferramenta MatLab (versão 4.2c.1). Podemos verificar daí que o filtro ideal seria alcançado quando

$n \rightarrow \infty$ , mas isso corresponderia a um atraso infinitamente grande na resposta como se vê na Figura A.2.

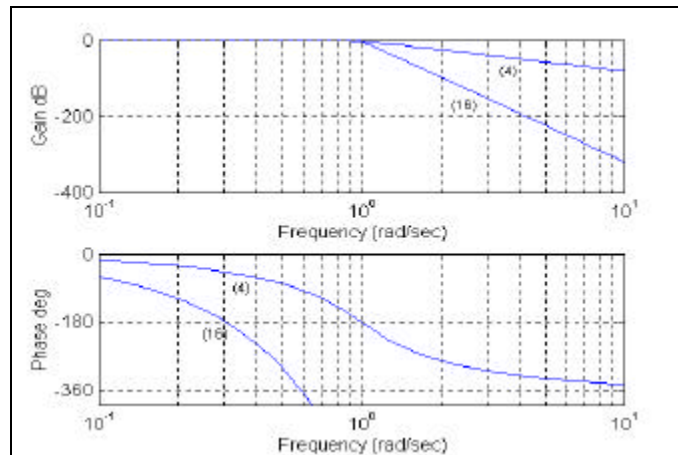


Fig. A.1 - Diagramas de Bode (módulo e fase) para filtros Butterworth de ordens 4 e 16.

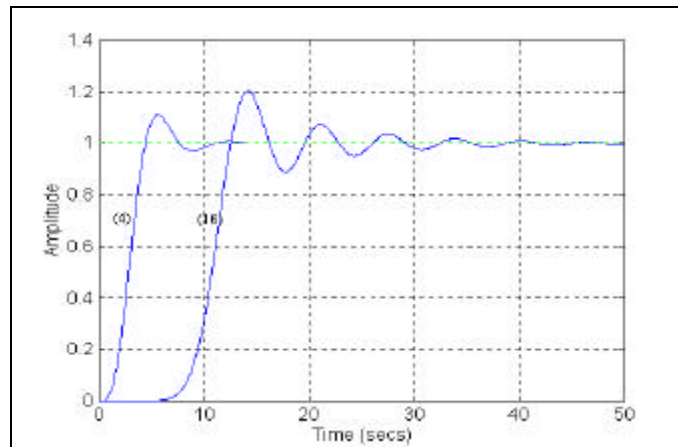


Fig. A.2 - Respostas ao degrau unitário para filtros Butterworth de ordens 4 e 16.

Nas Figuras A.3 e A.4 pode-se visualizar o raio  $\omega_c$ .

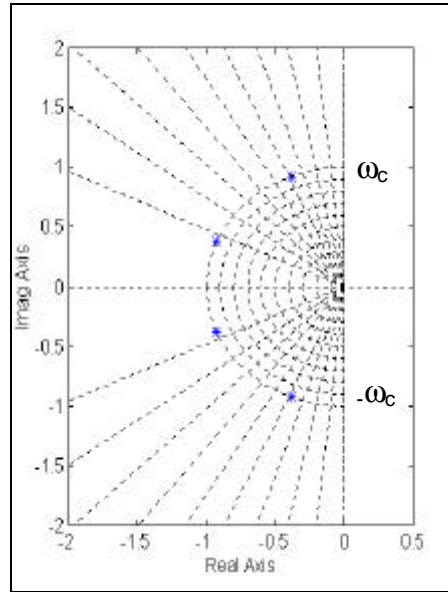


Fig. A.3 - Localização dos pólos de um filtro Butterworth de quarta ordem.

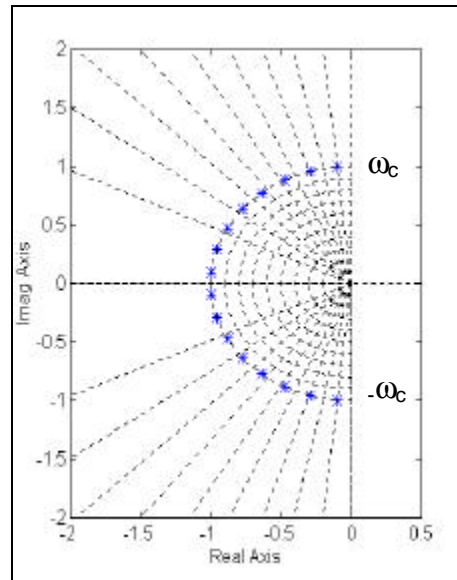


Fig. A.4 - Posição dos pólos de um filtro Butterworth de ordem 16.

Uma outra forma de escrever a Equação (A.1) seria da forma da Equação (A.3):

$$H(s) = \frac{1}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + 1} \quad (\text{A.3})$$

onde os coeficientes  $a_i$  podem facilmente serem obtidos de uma tabela dos polinômios de Butterworth (Tabela A.1).

**TABELA A.1 - POLINÔMIOS DE BUTTERWORTH.**

n	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$A_8$
1	1							
2	$\sqrt{2}$	1						
3	2	2	1					
4	2,613	3,414	2,613	1				
5	3,236	5,236	5,236	3,236	1			
6	3,864	7,464	9,141	7,464	3,864	1		
7	4,494	10,103	14,606	14,606	10,103	4,494	1	
8	5,126	13,138	21,848	25,691	21,848	13,138	5,126	1



## APÊNDICE B

### EQUAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS DISCRETA NO TEMPO

Uma representação de uma equação diferencial de estados para o caso analógico pode ser apresentada como segue:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A.\underline{x} + B.\underline{u} \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad (B.1)$$

cuja solução geral assume a forma:

$$\underline{x}(t) = e^{A.(t-t_0)} .x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A.(t-t)} .B.\underline{u}(t) dt \quad (B.2)$$

O processo de discretização deste resultado é dado fazendo-se  $t_0 = k.T_s$  e  $t = t_0 + \Delta t = k.T_s + T_s$ :

$$\underline{x}((k+1).T_s) = e^{A.T_s} .x(k.T_s) + \int_{k.T_s}^{(k+1).T_s} e^{A.((k+1).T_s-t)} .B.\underline{u}(t) dt \quad (B.3)$$

Como  $k.T_s \leq t \leq (k+1).T_s$  e assumindo que não hajam atrasos no sistema e que  $u(t) = u(k.T_s)$ , temos

$$\underline{x}((k+1).T_s) = e^{A.T_s} .x(k.T_s) + \int_{k.T_s}^{(k+1).T_s} e^{A.((k+1).T_s-t)} dt .B.\underline{u}(k.T_s) \quad (B.4)$$

Para simplificar façamos  $h = (k+1).T_s - t$  teremos  $\eta$  e  $\tau$  caminhando em sentidos opostos na linha do tempo, mas no interior de um intervalo de tempo  $T_s$ , logo

$$\underline{x}((k+1).T_s) = e^{A.T_s} .\underline{x}(k.T_s) + \int_0^{T_s} e^{A.h} dh .B.\underline{u}(k.T_s) \quad (B.5)$$

que é a equação de estado discreta no tempo. Nesta Equação temos que

$$\Phi = e^{A.T_s} \quad (\text{B.6})$$

e

$$\Gamma = \int_0^{T_s} e^{Ah} dh . B \quad (\text{B.7})$$

fornecendo de modo mais compacto a equação de estado em tempo discreto:

$$\underline{x}((k+1).T_s) = \Phi . \underline{x}(k.T_s) + \Gamma . \underline{u}(k.T_s) , \quad \underline{x}(0.T_s) = x_0 \quad (\text{B.8})$$

## APÊNDICE C

### CÁLCULO DA ENERGIA CINÉTICA DO CBERS-1 UTILIZANDO A ÁLGEBRA DE VETRIZES E CONSIDERANDO O DESLOCAMENTO DO CENTRO DE MASSA PROVOCADO POR DEFORMAÇÕES ELÁSTICAS NO PAINEL FLEXÍVEL

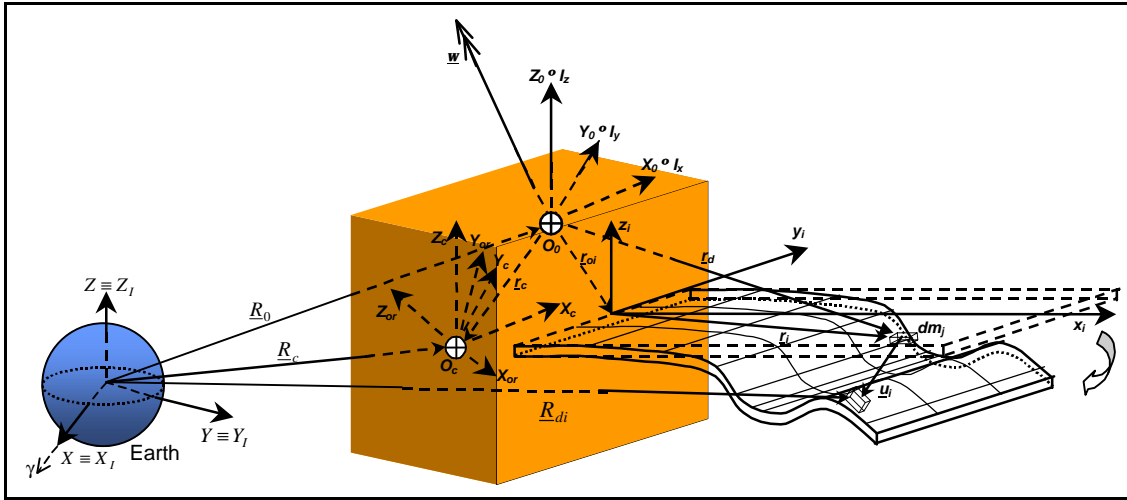


Fig. C.1 - Esquema vetorial para os cálculos da energia cinética.

Podemos ver da Figura C.1 que:

$$\underline{R}_{di,o} = \underline{R}_{c,o} + \underline{r}_d + \underline{\Delta e} = \mathfrak{S}_{O_o}^T \cdot \{R_{di,o}\} \quad (C.9)$$

Onde, segundo Hughes (1986),  $\mathfrak{S}_{O_o}^T$  é o Vetriz de  $R_{di,o}$  (base vetorial do sistema) e  $\{R_{di,o}\}$  é a representação do vetor  $\underline{R}_{di,o}$ .

$$\underline{\Delta e} = \underline{u}_{i,o} - \underline{r}_c \quad (C.10)$$

é o deslocamento elástico do apêndice flexível. A energia cinética é a seguinte:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \int_{m_j} \frac{d}{dt} [\mathfrak{S}_{O_o}^T \cdot \{R_{di,o}\}] \frac{d}{dt} [\mathfrak{S}_{O_o}^T \cdot \{R_{di,o}\}] dm_j \quad (C.11)$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot \int_{m_j} \left[ \frac{d(\mathfrak{S}_{o_o}^T)}{dt} \cdot \{R_{di,o}\} + \mathfrak{S}_{o_o}^T \cdot \frac{d\{R_{di,o}\}}{dt} \right] \left[ \frac{d(\mathfrak{S}_{o_o}^T)}{dt} \cdot \{R_{di,o}\} + \mathfrak{S}_{o_o}^T \cdot \frac{d\{R_{di,o}\}}{dt} \right] dm_j \quad (C.12)$$

usando a regra de Poisson  $\frac{d(\mathfrak{S}^T)}{dt} = \underline{\mathbf{w}} \wedge \mathfrak{S}^T$  onde  $\underline{\mathbf{w}}$  é a velocidade angular da base  $\mathfrak{S}^T$ , teremos

$$K = \frac{1}{2} \cdot \int_{m_j} \left[ \underline{\mathbf{w}}_o \wedge \underline{R}_{c,o} + \underline{\mathbf{w}} \wedge (\underline{r}_d + \underline{\Delta e}) + \underline{\dot{R}}_{c,o} + \underline{\dot{r}}_d + \underline{\dot{\Delta e}} \right] \left[ \underline{\mathbf{w}}_o \wedge \underline{R}_{c,o} + \underline{\mathbf{w}} \wedge (\underline{r}_d + \underline{\Delta e}) + \underline{\dot{R}}_{c,o} + \underline{\dot{r}}_d + \underline{\dot{\Delta e}} \right] dm_j \quad (C.13)$$

onde,  $\underline{\dot{R}}_{c,o} = \mathfrak{S}_{o_o}^T \cdot \frac{dR_{c,o}}{dt}$  é a velocidade translacional (de translação pura) de

$R_{c,o}$ . O mesmo se aplica a  $\underline{\dot{r}}_d$  e  $\underline{\dot{\Delta e}}$ .

Após algumas simplificações e um pouco de álgebra temos:

$$K = \frac{1}{2} M \cdot \underline{\dot{R}}_{c,o} \cdot \underline{\dot{R}}_{c,o} + \underline{\mathbf{w}} \cdot \int_{m_j} \left[ (\underline{r}_d + \underline{\Delta e}) \wedge \underline{\dot{\Delta e}} \right] dm_j + \frac{1}{2} \int_{m_j} \left[ \underline{\mathbf{w}} \wedge (\underline{r}_d + \underline{\Delta e}) \right] \cdot \left[ \underline{\mathbf{w}} \wedge (\underline{r}_d + \underline{\Delta e}) \right] dm_j + \frac{1}{2} \int_{m_j} \underline{\dot{\Delta e}} \cdot \underline{\dot{\Delta e}} dm_j \quad (C.14)$$

Desenvolvendo termo a termo esta equação chegaremos no seguinte resultado:

$$K = \frac{1}{2} M \cdot \frac{d}{dt} \{R_{c,o}\}^T \cdot \frac{d}{dt} \{R_{c,o}\} + \frac{1}{2} \{ \underline{\mathbf{w}} \}^T \cdot \mathbf{J}_u \cdot \{ \underline{\mathbf{w}} \} + \frac{1}{2} \{ \underline{\mathbf{w}} \}^T \cdot \mathbf{J}_d \cdot \{ \underline{\mathbf{w}} \} + \{ \underline{\mathbf{w}} \}^T \cdot \int_{m_j} \left[ \underline{r}_d^\times + \underline{\Delta e}^\times \right] \cdot \left[ \underline{\Delta e} \right] dm_j + \frac{1}{2} \int_{m_j} \left[ \underline{\Delta e} \right] \cdot \left[ \underline{\Delta e} \right] dm_j \quad (C.15)$$

O qual está em plena concordância com o obtido por Fonseca (1986), com o detalhe de que podemos saber que variáveis possuem translação pura de uma forma um pouco mais clara.

## APÊNDICE D

### DEGRADAÇÃO DO DESEMPENHO DE SISTEMAS DISCRETOS EM MALHA-FECHADA DEVIDO ÀS DINÂMICAS NÃO MODELADAS E AOS FENÔMENOS DO MASCARAMENTO E DAS OSCILAÇÕES ESCONDIDAS

Aqui analisamos e simulamos uma 3ª planta, intermediária entre as duas plantas analisadas nos Capítulos anteriores. Teremos neste Apêndice: o desenvolvimento das equações de movimento para um oscilador harmônico duplo e amortecido; cálculo da função de transferência analógica onde apenas a massa  $m_1$  é controlada e observada; ajuste dos parâmetros do oscilador harmônico duplo para se ter seus modos de vibração equivalentes aos modos usados no modelo do satélite CBERS-1; simulações usando os modelos analógico e em tempo discreto de tal oscilador harmônico duplo controlados por um PD (proporcional+derivativo) usando as regras de Tustin e a Nova-regra no projeto discreto de tal controle.

#### a) Modelo do oscilador harmônico duplo e amortecido

Consideremos o oscilador-harmônico duplo da Figura D.1, considerando a superfície tracejada sem atrito e  $u(t)$  é a força de controle.

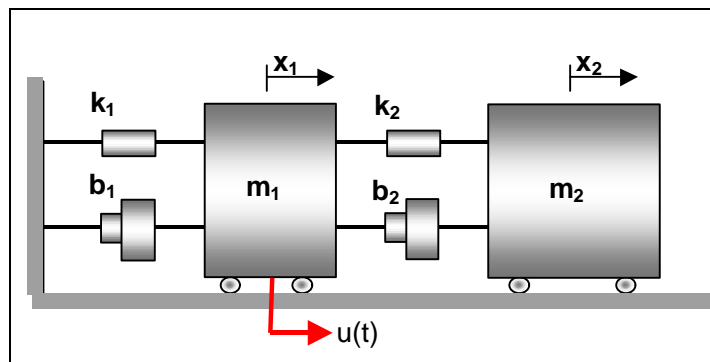


Fig. D.1 - Oscilador harmônico duplo e amortecido.

As equações do movimento são:

1) para a primeira massa  $m_1$ :

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1(t) + (b_1 + b_2) \cdot \dot{x}_1(t) - b_2 \cdot \dot{x}_2(t) + (k_1 + k_2) \cdot x_1(t) - k_2 \cdot x_2(t) = u(t) \quad (\text{D.1})$$

2) para a segunda massa  $m_2$ :

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2(t) - b_2 \cdot \dot{x}_1(t) + b_2 \cdot \dot{x}_2(t) - k_2 \cdot x_1(t) + k_2 \cdot x_2(t) = 0 \quad (\text{D.2})$$

Das Equações (D.1) e (D.2) chega-se à seguinte equação matricial do movimento:

$$M \cdot \ddot{\underline{x}}(t) + D_{amp} \cdot \dot{\underline{x}}(t) + K \cdot \underline{x}(t) = \underline{F}(t) \quad (\text{D.3})$$

onde,

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

$$D_{amp} = \begin{pmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.7})$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

Fazendo agora:

$$\underline{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_1 \\ \cdot \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

teremos:

$$\dot{\underline{\mathbf{J}}}(t) = \mathbf{A}\underline{\mathbf{J}}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (\text{D.10})$$

onde,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + k_2)/m_1 & k_2/m_1 & -(b_1 + b_2)/m_1 & b_2/m_1 \\ k_2/m_2 & -k_2/m_2 & b_2/m_2 & -b_2/m_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

#### b) Modos de vibração

Segundo Craig (1981) e Greenwood (1965) para um oscilador harmônico duplo e livre podemos assumir uma solução do tipo:

$$x_1(t) = X_1 \cdot \cos(\mathbf{I} \cdot t - \mathbf{a}) \quad (\text{D.13})$$

$$x_2(t) = X_2 \cdot \cos(\mathbf{I} \cdot t - \mathbf{b}) \quad (\text{D.14})$$

Substituindo as Equações (D.13) e (D.14) na Equação (D.3), eventualmente desconsiderando os amortecimentos e termos forçantes, teremos:

$$\left\{ \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} - I^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.15})$$

Visto que a Equação (D.15) trata-se de um conjunto de equações algébricas lineares, as únicas soluções não-triviais serão as que satisfizerem a seguinte equação característica para  $\lambda$ :

$$\det \left( \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} - I^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (\text{D.16})$$

que terá como solução:

$$I_{2,1} = \omega_{n2,1} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot m_1 \cdot m_2}} \cdot \sqrt{m_1 \cdot k_2 + m_2 \cdot (k_1 + k_2) \pm \sqrt{(m_1 \cdot k_2 + m_2 \cdot (k_1 + k_2))^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot (k_2 \cdot (k_1 + k_2) - k_2^2)}} \quad (\text{D.17})$$

sendo  $\omega_{n1}$  e  $\omega_{n2}$  as freqüências do primeiro e segundo modos de vibração do oscilador harmônico duplo.

Ajustando a Equação (D.17) aos valores dos primeiro e segundo modos do modelo do satélite CBERS-1 (eixo-x ou de "roll") mostrados no Capítulo 5, que foram os seguintes:

$$\omega_{n1} = 0,8244 \text{ rad/seg}$$

$$\omega_{n2} = 4,3191 \text{ rad/seg}$$

aplicando os seguintes valores para as massas e as molas à Equação (D.17):

$$m_1 = 0,059 \text{ kg}$$

$$m_2 = 0,133 \text{ kg}$$

$$k_1 = 1 \text{ N/m}$$

$$k_2 = 0,1 \text{ N/m}$$



teremos:

$$w_{n1} \sim 0,8252 \text{ rad/seg}$$

$$w_{n2} \sim 4,3261 \text{ rad/seg}$$

c) Cálculo da função de transferência analógica:

Assumindo os valores para as massas e as constantes elásticas do item anterior e os seguintes coeficientes de atrito viscoso:

$$b_1 = 0,1$$

$$b_2 = 0,1$$

vem da Equação (D.11):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -18,64 & 1,69 & -3,39 & 1,69 \\ 0,75 & -0,75 & 0,75 & -0,75 \end{pmatrix} \quad (D.18)$$

Assumamos que somente a posição  $x_1(t)$  da massa  $m_1$  seja a única posição observada, logo:

$$C = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \quad (D.19)$$

A função de transferência em malha fechada é dada por (Kwakernaak e Sivan, 1972):

$$G(s) = C.[I.s - A]^{-1}.B \quad (D.20)$$

Onde foi utilizado Steinbruch (1987) no desenvolvimento da Equação (D.20). Substituindo as Equações (D.12), (D.18) e (D.19) na Equação (D.20) teremos a seguinte expressão, após alguns cálculos algébricos:

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{18,64 \cdot s^2 + 15,27 \cdot s + 15,27}{s^4 + 4,14 \cdot s^3 + 21,18 \cdot s^2 + 12,19 \cdot s + 14} \quad (D.21)$$

d) Equivalência “zero-order hold” da função de transferência analógica:

O equivalente discreto “zero-order hold” da Equação (D.21) pode ser calculado pela seguinte equação (Franklin e Powell, 1981):

$$G_{h0}(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \right\} \quad (D.22)$$

O processo analítico da Equação (D.22) é um tanto tedioso e sua solução pode ser obtida numericamente por um comando da ferramenta Matlab<sup>®</sup> 4.2c.1 chamado C2DM (The Mathworks Inc., 1995):

$$[\text{num}_{\text{disc}}, \text{den}_{\text{disc}}] = \text{C2DM}(\text{num}_{\text{ana}}, \text{den}_{\text{ana}}, T_s, \text{'zoh'}) \quad (D.23)$$

onde  $\text{num}_{\text{disc}}$  e  $\text{den}_{\text{disc}}$  correspondem ao numerador e denominador do  $G_{h0}(z)$ ,  $\text{num}_{\text{ana}}$  e  $\text{den}_{\text{ana}}$  correspondem ao numerador e denominador do  $G(s)$ ,  $T_s$  é o período de amostragem e ‘zoh’ é o método de discretização no tempo adotado (no caso é “zero-order hold”).

e) Política de controle implementada:

Foram usados controles PD (Proporcional+Derivativo) analógicos e discretos. Tal como foi visto no Capítulo 4 o PD analógico é dado por:

$$D(s) = k_p + k_d \cdot s \quad (D.24)$$

O PD projetado pela regra de Tustin é dado por:

$$D(z) = \left( k_p + \frac{2 \cdot k_d}{T_s} \right) \frac{z + \left( \frac{k_p T_s - 2 \cdot k_d}{k_p T_s + 2 \cdot k_d} \right)}{z + 1} \quad (D.25)$$

O PD projetado pela Nova-regra (ver Capítulo 6 deste trabalho) é dado por:

$$D(z) = \left( k_p + \frac{2.k_d}{T_s} \right) \frac{z + \left( \frac{k_p.T_s.x - 2.k_d}{k_p.T_s + 2.k_d} \right)}{z + x} \quad (D.26)$$

- f) Projeto dos controladores PD discretos : simulação do oscilador harmônico simples (apenas a massa  $m_1$ ;  $m_2 = 0$ ;  $k_2 = 0$ ;  $b_2 = 0$ )

Tendo em vista as especificações transitórias para o caso analógico buscou-se ajustar as respostas transitórias das simulações feitas em tempo discreto.

A simulação analógica usando os ganhos:  $k_p = 0,0009$  e  $k_d = 0,00008$  apresentou os resultados mostrados nas Figuras D.2 e D.3 (root-locus e resposta ao impulso); considerando a seguinte função de transferência:

$$G_{1\text{modo}}(s) = \frac{16,95}{s^2 + 1,7.s + 16,95} \quad (D.27)$$

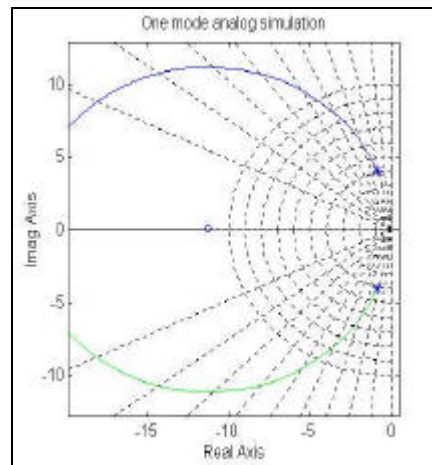


Fig. D.2 - Root-locus para o caso analógico com um modo.

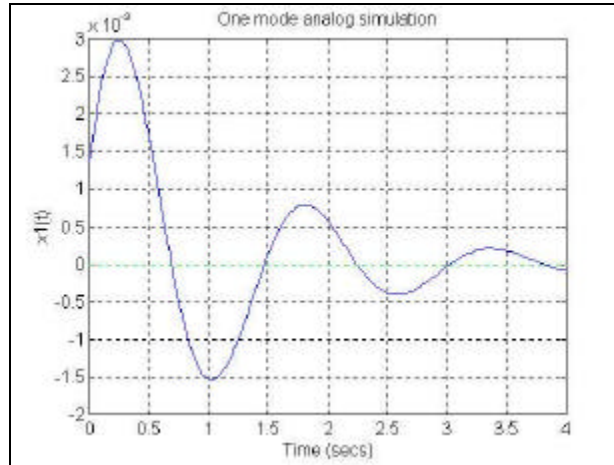


Fig. D.3 - Resposta ao impulso unitário para o caso analógico e com um modo

O projeto do controle PD que usou a regra de Tustin usou os ganhos:  $k_p = 0,095$  e  $k_d = 0,008$ ; e equivalente “zero-order hold”  $G_{H0-1\text{modo}}(z)$  da planta  $G_{1\text{modo}}(s)$ ; resultou nas Figuras D.4 e D.5 (root-locus discreto e resposta ao pulso), para  $T_s = 0,01$  segundos; onde estes ganhos foram aproximados heurísticamente visando aproximar a resposta transitória da simulação em tempo discreto à resposta transitória analógica.

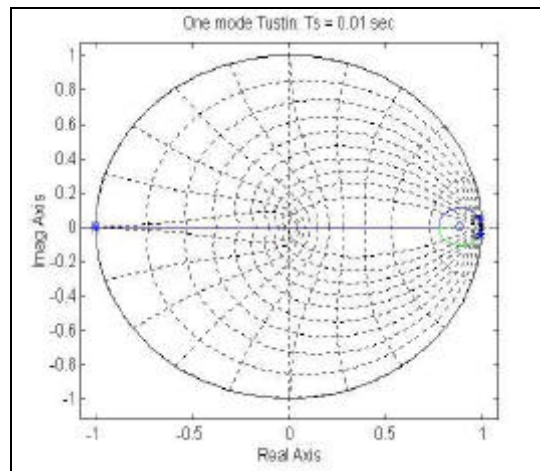


Fig. D.4 - Root-locus para o caso com Tustin e um modo.

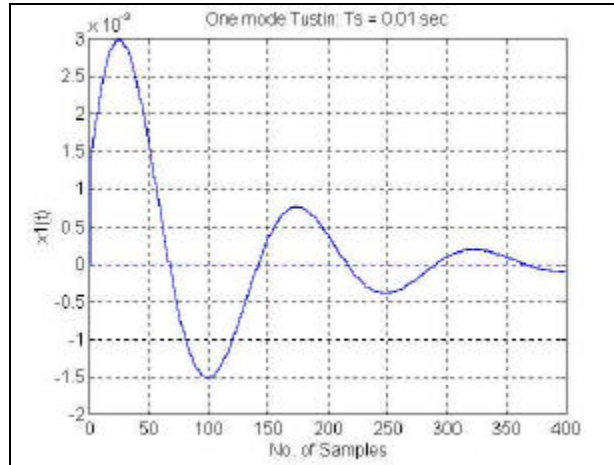


Fig. D.5 - Resposta ao pulso unitário para o caso com Tustin e um modo.

O projeto que usou a Nova-regra (Tredinnick, 1999b) usou os ganhos:  $k_p = 0,095$  e  $k_d = 0,0045$ ; e  $\xi = 0,2$  (estes ganhos foram aproximados heurísticamente visando aproximar a resposta transitória da simulação em tempo discreto à resposta transitória) e resultou nas Figuras D.6 e D.7 (root-locus discreto e resposta ao pulso) , para  $T_s = 0,01$  segundos.

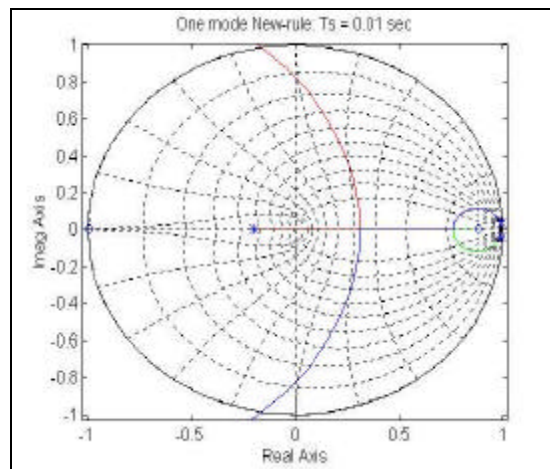


Fig. D.6 - Root-locus para o caso com a Nova-regra e um modo.

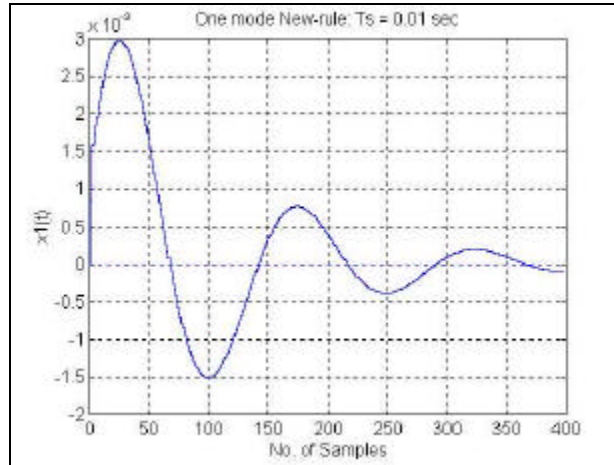


Fig. D.7 - Resposta ao pulso unitário para o caso com a Nova-regra e um modo.

g) Simulações com o oscilador harmônico duplo e amortecido:

Usando os  $k_p$  e  $k_d$  dimensionados na seção anterior obteve-se os resultados mostrados nas Figuras D.8 e D.9 para o caso analógico, onde está apresentado um detalhe da resposta ao impulso (Figura D.10) para comparações com as simulações em tempo discreto.

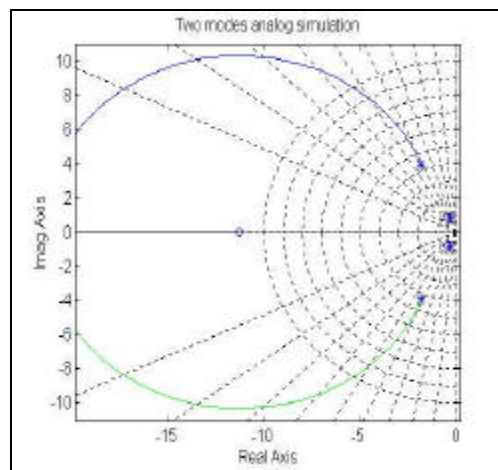


Fig. D.8 - Root-locus para o caso analógico e dois modos.

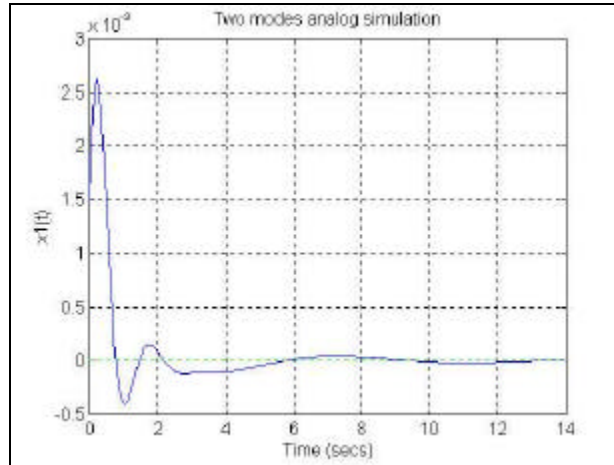


Fig. D.9 - Resposta ao impulso unitário para o caso analógico e dois modos.

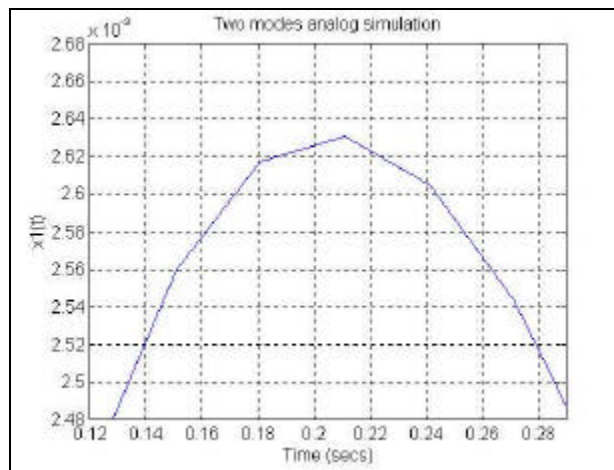


Fig. D.10 - Detalhe do transitório para o caso analógico.

Para o caso com a regra de Tustin (Figuras D.11 e D.12), para  $T_S = 0,01$  segundos, obteve-se uma leve degradação como pode-se ver pelo detalhe apresentado na Figura D.13 (devido à presença da segunda massa que aqui representa a dinâmica não-modelada) que pode ser comparado ao detalhe do caso analógico (Figura D.10).

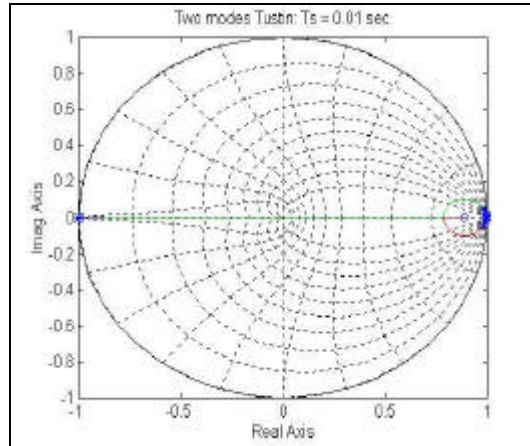


Fig. D.11 - Root-locus para o caso com Tustin e dois modos.

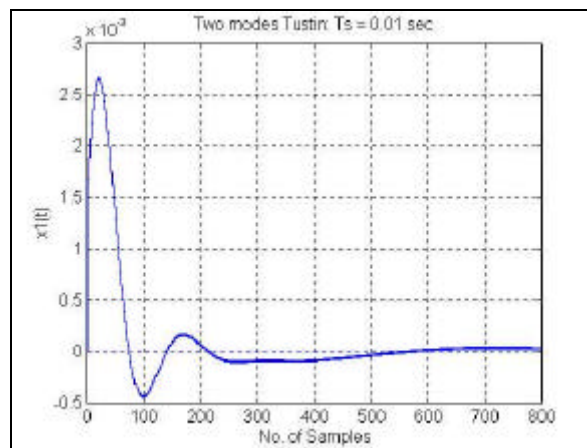


Fig. D.12 - Resposta ao pulso unitário para o caso com Tustin e dois modos

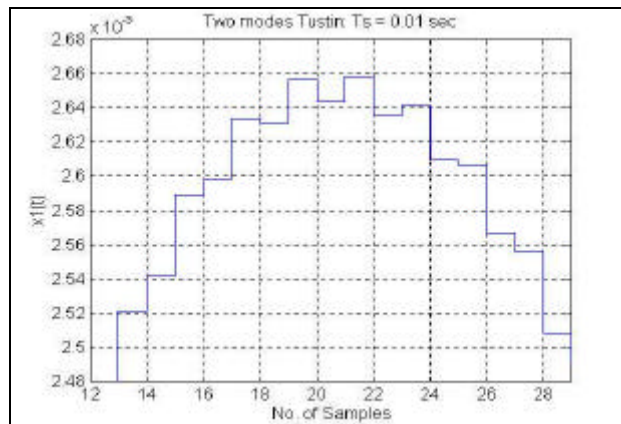


Fig. D.13 - Detalhe do transitório para o caso com Tustin e dois modos.



A simulação realizada com a Nova-regra para  $T_s = 0,01$  segundos apresentou também uma leve degradação em sua resposta transitória devido à presença da dinâmica não modelada (inserção da segunda massa), como pode ser comparada com o caso analógico, mas mesmo assim tal degradação apresentou-se menor que aquela que houve com a simulação com o Tustin, como pode-se ver mediante as Figuras D.14-16.

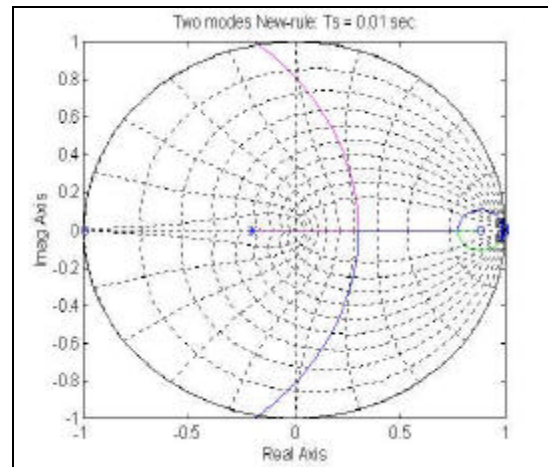


Fig. D.14 - Root-locus para o caso com a Nova-regra e dois modos.

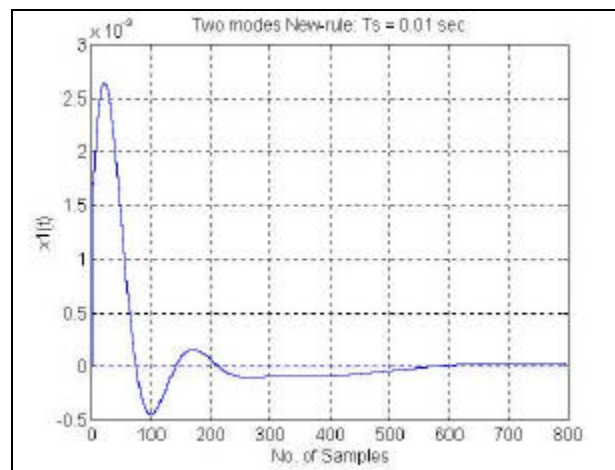


Fig. D.15 - Resposta ao pulso unitário para o caso com a Nova-regra e dois modos.

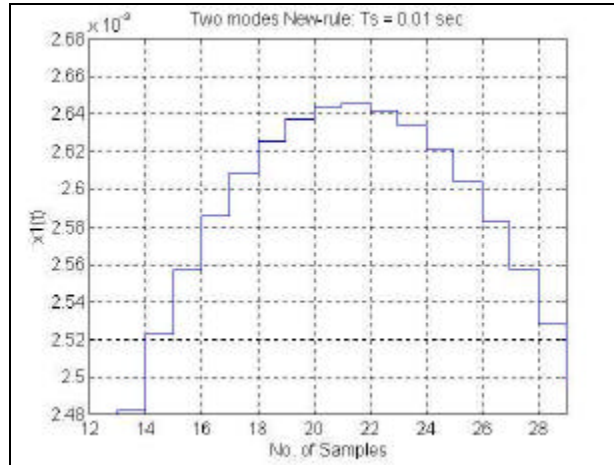


Fig. D.16 - Detalhe do transitório para o caso com a Nova-regra e dois modos.

Para o projeto que usou a regra de Tustin; com  $T_S = 1,6$  segundos; constatou-se uma piora nos resultados obtidos com a simulação usando Tustin, levando inclusive à instabilidade, devido aos fenômenos do mascaramento e das oscilações escondidas (visto que a frequência de Nyquist

$$w_N = \frac{w_S}{2} = \frac{P}{T_S} = 1,9635 \text{ rad/seg} \text{ é menor que a frequência do segundo modo}$$

$w_{n2} = 4,3261 \text{ rad/seg}$ ); além da presença da dinâmica não modelada, tal como pode-se verificar mediante as Figuras D.17 e D.18.

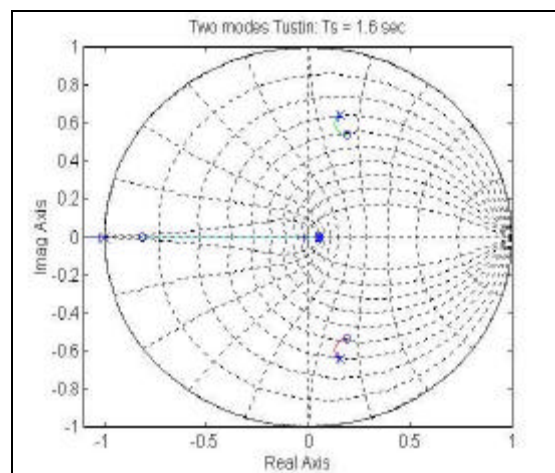


Fig. D.17 - Root-locus para o caso com Tustin, dois modos e  $T_S = 1,6$  segundos.

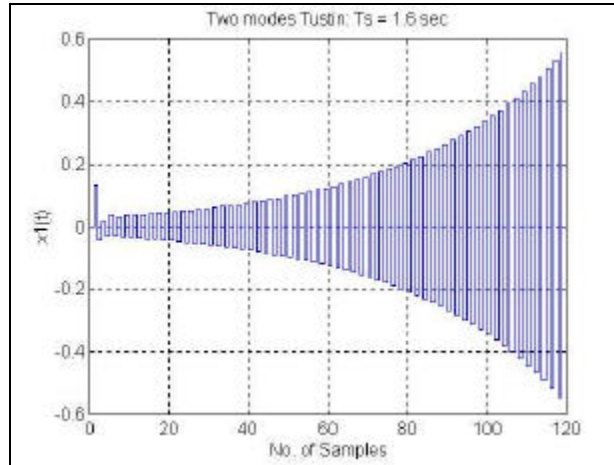


Fig. D.18 - Resposta ao pulso unitário para o caso com Tustin, dois modos e  $T_S = 1,6$  segundos.

Usando  $T_S = 1,6$  segundos com o projeto que usou a Nova-regra, obteve-se os resultados mostrados nas Figuras D.19 e D.20.

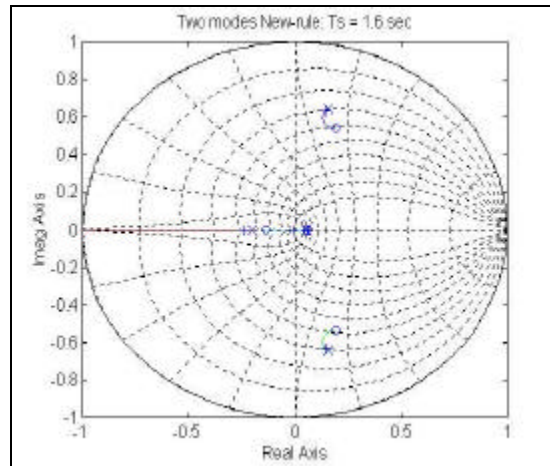


Fig. D.19 - Root-locus para o caso com a nova regra, dois modos e  $T_S = 1,6$  segundos.

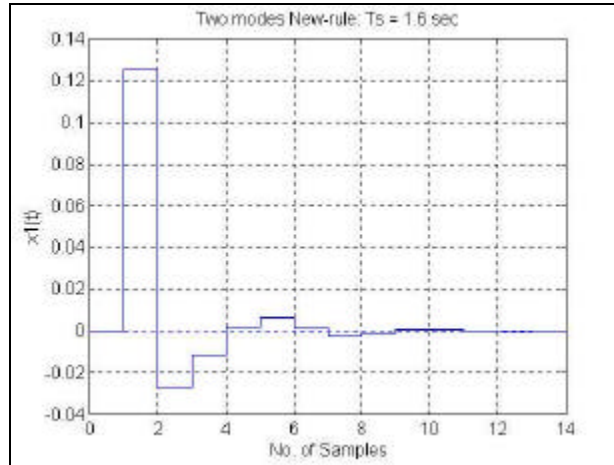


Fig. D.20 - Resposta ao pulso unitário para o caso com a nova regra, dois modos e  $T_s = 1,6$  segundos.

De onde pode-se notar pelo transitório da Figura D.20 que a Nova-regra também sofreu com as interferências do mascaramento e das oscilações escondidas mas, mesmo assim, manteve-se assintoticamente estável.

h) Caminho do pólo instabilizador na simulação do oscilador harmônico duplo amortecido com o controle PD projetado pela regra de Tustin:

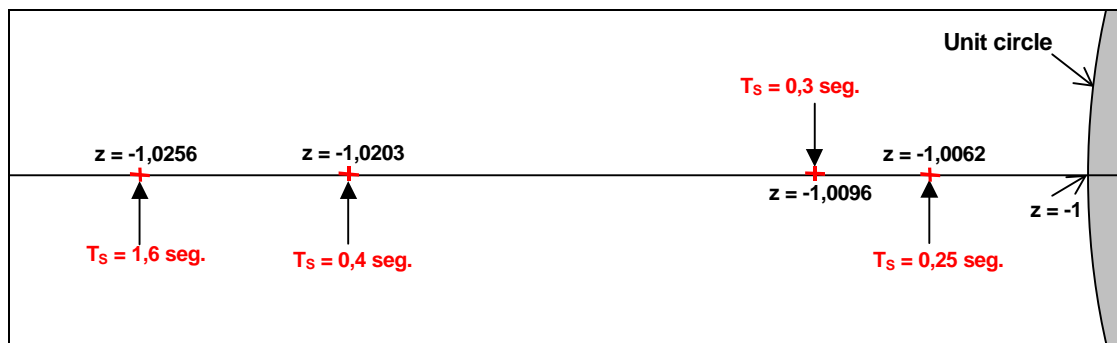


Fig. D.21 - Propagação do pólo instabilizador para as simulações executadas com a regra de Tustin.

A Figura D.21 mostra a posição do pólo que se apresentou problemático à medida em que se aumentou o período de amostragem  $T_s$  (em segundos) para o oscilador harmônico duplo amortecido.