

1. Classificação <i>INPE-COM.4/RPE</i> <i>C.D.U.: 523.3-327</i>		2. Período	4. Critério de Distribuição: interna <input type="checkbox"/> externa <input checked="" type="checkbox"/>
3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor) <i>CAMPO GRAVITACIONAL</i> <i>HARMÔNICOS ESFÉRICOS</i> <i>EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA</i>			
5. Relatório nº <i>INPE-1427-RPE/006</i>	6. Data <i>Março, 1979</i>	7. Revisado por <i>Giorgio E.O. Giadaglia</i>	
8. Título e Sub-Título <i>"REAVALIAÇÃO DOS COEFICIENTES DO GEOPOTENCIAL"</i>		9. Autorizado por <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor	
10. Setor <i>DSE/DDO</i>	Código <i>2801</i>	11. Nº de cópias <i>16</i>	
12. Autoria <i>Wilson Custódio C. da Silva</i> <i>Hans-Ulrich Pilchowski</i> <i>Luiz Danilo D. Ferreira</i>		14. Nº de páginas <i>22</i>	
13. Assinatura Responsável <i>Wilson C. da Silva</i>		15. Preço	
16. Sumário/Notas <i>A expressão do geopotencial em esféricos harmônicos (potencial do campo gravitacional terrestre) tem dois coeficientes C_{21} e S_{21} que são tomados como nulos na teoria (isso devido ao fato de se tomar o eixo de rotação da Terra como um eixo principal de inércia). Porém, medidas por satélites determinaram que C_{21} e S_{21} não são nulos, mostrando portanto que o eixo de rotação da Terra não é um eixo principal de inércia. O presente trabalho visa determinar os ângulos dos quais os eixos principais de inércia estão girados em relação ao sistema de coordenadas geocêntricas (com eixo Z coincidindo com o eixo da Terra), como também avaliar o erro nos cálculos anteriores em relação ao atual e a distribuição do mesmo nos demais coeficientes do geopotencial.</i>			
17. Observações <i>Trabalho apresentado no IX Congresso Brasileiro de Cartografia realizado em Curitiba, de 4 a 9 de fevereiro de 1979.</i>			

ÍNDICE

ABSTRACT	<i>iv</i>
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - APLICAÇÃO - ROTAÇÃO DOS COEFICIENTES DO GEOPOTENCIAL	3
CAPÍTULO III - CONCLUSÃO	15
AGRADECIMENTOS	16
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	17
APÊNDICE A	A.1

ABSTRACT

The expression of geopotential in spherical harmonics (potential of Terrestrial Gravitational field) has two coefficients C_{21} and S_{21} which were taken as zero in theory (e.g. the axis of earth rotation was used as the principal axis of inertia). However satellite measurements determined that C_{21} as well as S_{21} are non-zero, showing that the axis of earth rotation is not the principal axis of inertia. This work determines the angles which the principal axes of inertia rotate in relation to the geocentric coordinate system (where the Z axis coincides with the rotating axis of earth), calculates the error due to using $C_{21} = S_{21} = 0$, and, the effect of such error in the others coefficients of the geopotential.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Um dos fenômenos que podem levar à determinação dos movimentos de massa na crosta e no interior da Terra é o movimento dos eixos principais de inércia em relação a um sistema inercial e em relação aos vetores de rotação e momento angular.

As observações de satélites permitem determinar em cada período, os coeficientes do desenvolvimento do Geopotencial em Harmônicos Esféricos. Dois destes coeficientes (C_{21} , S_{21}) descrevem o desvio do eixo instantâneo de rotação em relação ao eixo principal polar de inércia. Se estes coincidissem, aqueles coeficientes seriam nulos. É possível, assim, acompanhar o movimento relativo desses eixos pela medida dos coeficientes C_{21} e S_{21} , determinando os valores angulares dos quais o sistema de referência deve ser girado para coincidir com os eixos principais de inércia.

Estes ângulos podem ser obtidos de uma forma precisa utilizando a teoria de rotação de harmônicos esféricos (Giacaglia, 1979).

O presente trabalho mostra como isto pode ser feito calculando os ângulos de rotação em função dos coeficientes $C_{\ell m}$, $S_{\ell m}$ que são determinados por satélite.

O conjunto de valores de C's e S's (ver tabelas anexas) foi escolhido arbitrariamente, para efeito apenas de exemplo.

Numa situação real, seria necessário possuir uma série de valores de C_{21} , S_{21} obtidos em períodos diferentes de forma a poder descrever o movimento do eixo principal polar de inércia no decorrer de longos períodos, fornecendo subsídios importantes à teoria de elasticidade da Terra.

Vale também a pena observar que as teorias de satélites utilizam normalmente da hipótese de serem C_{21} e S_{21} iguais a zero. A corre

ção desta hipótese, como aqui proposto, permite a correção correspondente dos outros coeficientes harmônicos de modo a satisfazer àquela hipótese . Isto não significa melhoria do conhecimento do campo, mas uma melhor consistência entre os valores dos coeficientes harmônicos e sua conceituação teórica normalmente aceita.

CAPÍTULO II

APLICAÇÃO - ROTAÇÃO DOS COEFICIENTES DO GEOPOTENCIAL

Como já foi visto (Giacaglia, 1979), o geopotencial no sistema de coordenadas (X, Y, Z) geocêntrico e com eixo Z coincidindo com o eixo de rotação da Terra é

$$U = - \frac{u}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} K_{\ell m} Y_{\ell m}(u, \lambda) \quad (\text{II.1})$$

dando uma rotação em (X, Y, Z) , para que este sistema coincida com o sistema cujos eixos são principais de inércia, tem-se

$$U = - \frac{u}{r} \sum_{\ell \geq 0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} K_{\ell m} Y_{\ell m}(u, \lambda) = - u \sum_{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a^{\ell} K_{\ell m}$$

$$\frac{1}{r^{\ell+1}} \sum_{k=-\ell}^{\ell} D_{\ell mk}(\alpha, \beta, \gamma) Y_{\ell k}(u', \lambda') = - \frac{u}{r} \sum_{\ell \geq 0}^{\infty} \sum_{k=-\ell}^{\ell} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} .$$

$$\left[\sum_{m=-\ell}^{\ell} D_{\ell mk}(\alpha, \beta, \gamma) K_{\ell m} \right] Y_{\ell k}(u', \lambda')$$

$$U = - \frac{u}{r} \sum_{\ell \geq 0}^{\infty} \sum_{k=-\ell}^{\ell} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} K'_{\ell k} Y_{\ell k}(u', \lambda') \quad (\text{II.2})$$

e

$$K'_{\ell k} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} D_{\ell mk}(\alpha, \beta, \gamma) K_{\ell m} \quad (\text{II.3})$$

onde $K'_{\ell m}$ são os novos coeficientes relativos ao sistema X', Y', Z' . Reunindo então todas as expressões já vistas (Giacaglia, 1979) teremos:

$$D_{\ell mk}(\alpha, \beta, \gamma) = i^{k-m} (-1)^{m-k} \frac{(\ell-k)!}{(\ell-m)!} F_{\ell mk}(\beta) e^{i(k\gamma+m\alpha)} \quad (\text{II.4})$$

$$F_{\ell mk}(\beta) = \sum_{q=q_1}^{q_2} \begin{pmatrix} \ell-m \\ \ell-k-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell+m \\ q \end{pmatrix} (-1)^q C^{2\ell-2q-k+m} S^{2q+k-m} \quad (\text{II.5})$$

$$\begin{cases} q_1 = \max |0, m-k| \\ q_2 = \min |\ell-k, \ell+m| \end{cases}$$

$$K_{\ell, -m} = (-1)^m \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} K_{\ell m}^* \quad , \quad K_{\ell m} = \frac{1 + \delta_{0m}}{2} (C_{\ell m} - i S_{\ell m}) \quad (\text{II.6})$$

$$K'_{\ell j} = \sum_{m=-\ell}^{\ell} D_{\ell mj}(\alpha, \beta, \gamma) K_{\ell m} \quad , \quad \text{onde } \delta_{0m} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq 0 \\ 1, & \text{se } m = 0 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Desenvolvendo a (II.7) teremos

$$K'_{21} = D_{2,-2,1} K_{2,-2} + D_{2,-1,1} K_{2,-1} + D_{201} K_{20} + D_{211} K_{21} + \\ + D_{221} K_{22}, \quad \text{onde}$$

$$K_{2,-2} = \frac{4!}{0!} K_{22}^* = 24 K_{22}^* = 12 (C_{22} + i S_{22}),$$

$$K_{2,-1} = -\frac{3!}{1!} K_{21}^* = -6K_{21}^* = -3 (C_{21} + i S_{21}) \quad \text{e } K_{20} = C_{20}$$

$$K_{21} = \frac{1}{2} (C_{21} - i S_{21}) , \quad e \quad K_{22} = \frac{1}{2} (C_{22} - i S_{22})$$

$$F_{2,-2,1} = \sum_{q=0}^0 \begin{pmatrix} 4 \\ 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} (-1)^q C^{4-3-2q} S^{3+2q} = 4 C S^3 ,$$

$$F_{2,-1,1} = \sum_{q=0}^1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} (-1)^q C^{2-2q} S^{2+2q} = 3 C^2 S^2 - S^4 ,$$

$$F_{201} = \sum_{q=0}^1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ q \end{pmatrix} (-1)^q C^{3-2q} S^{2q+1} = 2 C^3 S - 2 C S^3 ,$$

$$F_{211} = \sum_{q=0}^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ q \end{pmatrix} (-1)^q C^{4-2q} S^{2q} = C^4 - 3 C^2 S^2 ,$$

$$F_{221} = \sum_{q=1}^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ q \end{pmatrix} (-1)^q C^{5-2q} S^{2q-1} = -4 C^3 S ,$$

$$D_{2,-2,1} = i^3 (-1)^{-3} \frac{1!}{4!} F_{2,-2,1} (\beta) e^{i(\gamma-2\alpha)} = \frac{i}{6} C S^3 e^{i(\gamma-2\alpha)}$$

$$D_{2,-1,1} = i^2 (-1)^{-2} \frac{1}{3!} F_{2,-1,1} (\beta) e^{i(\gamma-\alpha)} = \left| -\frac{CS}{2} + \frac{S^4}{6} \right| e^{i(\gamma-\alpha)}$$

$$D_{201} = i (-1)^{-1} \frac{1!}{2!} F_{201} (\beta) e^{i\gamma} = (-i C^3 S + i C S) e^{i\gamma}$$

$$D_{211} = \frac{1}{1!} F_{211} e^{i(\gamma+\alpha)} = (C^4 - 3 C^2 S^2) e^{i(\gamma+\alpha)}$$

$$D_{221} = i^{-1} (-1)^1 \frac{1}{0!} F_{221} () e^{i(\gamma+2\alpha)} = 4i C^3 S e^{i(\gamma+2\alpha)}$$

substituindo em

$$K'_{21} = \sum_{m=-2}^2 D_{2m1} K_{2m} = D_{2,-2,1} K_{2,-2} + D_{2,-1,1} K_{2,-1} + D_{201} K_{20} + \\ + D_{211} K_{21} + D_{221} K_{22} = 0$$

$$K'_{21} = \frac{iCS^3}{6} \cdot 12 (C_{22} + iS_{22}) e^{i(\gamma-2\alpha)} + \left[-\frac{C^2S^2}{2} + \frac{S^4}{6} \right] (-3) (C_{21} + iS_{21}) e^{i(\gamma-\alpha)} + \\ + (-iC^3S + iCS^3) C_{20} e^{i\gamma} + (C^4 - 3C^2S^2) \frac{1}{2} (C_{21} - iS_{21}) e^{i(\gamma+\alpha)} - \\ - 4 iC^3S \frac{1}{2} (C_{22} - iS_{22}) e^{i(\gamma+2\alpha)}$$

ou

$$K'_{21} = (-2S_{22} CS^3 + 2iC_{22} CS^3) e^{i(\gamma-2\alpha)} + \left[\frac{3}{2} C^2S^2 C_{21} - \frac{1}{2} C_{21} S^4 + \right. \\ \left. + i \left(\frac{3}{2} S_{21} C^2S^2 - \frac{1}{2} S_{21} S^4 \right) \right] e^{i(\gamma-\alpha)} \\ - i \left[C_{20} C^3S - CS^3 C_{20} \right] e^{i\gamma} + \left[\frac{1}{2} C_{21} C^4 - \frac{3}{2} C_{21} C^2S^2 + \right. \\ \left. + i \left(\frac{3}{2} S_{21} C^2S^2 - \frac{1}{2} S_{21} C^4 \right) \right] e^{i(\gamma+\alpha)} \\ + \left[-2iC^3S C_{22} - 2 S_{22} C^3S \right] e^{i(\gamma+2\alpha)} = 0$$

Se K'_{21} é nulo, significa que suas partes real e imaginária devem ser nulas, portanto, separando ambas as partes e igualando a zero temos:

Parte real

$$= - 2S_{22} CS^3 \cos (\gamma-2\alpha) - 2C_{22} CS^3 \sin (\gamma-2\alpha) + \left(\frac{3}{2} C^2S^2 C_{21} - \frac{1}{2} C_{21}S^4\right) .$$

$$\cos (\gamma-\alpha) - \left(\frac{3}{2} C^2S^2 S_{21} - \frac{1}{2} S_{21} S^4\right) \sin (\gamma-\alpha) + (C_{20} C^3S - CS^3 C_{20}) .$$

$$\text{sen} \gamma + \left(\frac{1}{2} C_{21} C^4 - \frac{3}{2} C_{21} C^2S^2\right) \cos (\gamma+\alpha) - \left(\frac{3}{2} S_{21} C^2S^2 - \frac{1}{2} S_{21} C^4\right) .$$

$$\text{sen} (\gamma+\alpha) - 2 S_{22} C^3S \cos (\gamma+2\alpha) + 2C^3S C_{22} \text{sen} (\gamma+2\alpha) = 0$$

Parte imaginária

$$- 2 S_{22} CS^3 \sin (\gamma-2\alpha) + 2 C_{22} CS^3 \cos (\gamma-2\alpha) + \left(\frac{3}{2} C^2S^2 C_{21} - \frac{1}{2} C_{21} S^4\right) .$$

$$\text{sen} (\gamma-\alpha) + \left(\frac{3}{2} S_{21} C^2S^2 - \frac{1}{2} S_{21} S^4\right) . \cos (\gamma-\alpha) - \left[C_{20} C^3S - CS^3 C_{20}\right]$$

$$\cos \gamma + \left(\frac{1}{2} C_{21} C^4 - \frac{3}{2} C_{21} C^2S^2\right) \text{sen} (\gamma+\alpha) + \left(\frac{3}{2} S_{21} C^2S^2 - \frac{1}{2} S_{21} C^4\right)$$

$$\cos (\gamma+\alpha) - 2 S_{22} C^3S \text{sen} (\gamma+2\alpha) - 2 C^3S S_{22} \cos (\gamma+2\alpha) = 0$$

Temos aqui duas equações para 3 incógnitas (α, β, γ).

Pela Fig. II.1, vemos que γ pode ter qualquer valor porque está no plano X', Y' que não é de interesse, logo tomamos

$$\gamma = 0$$

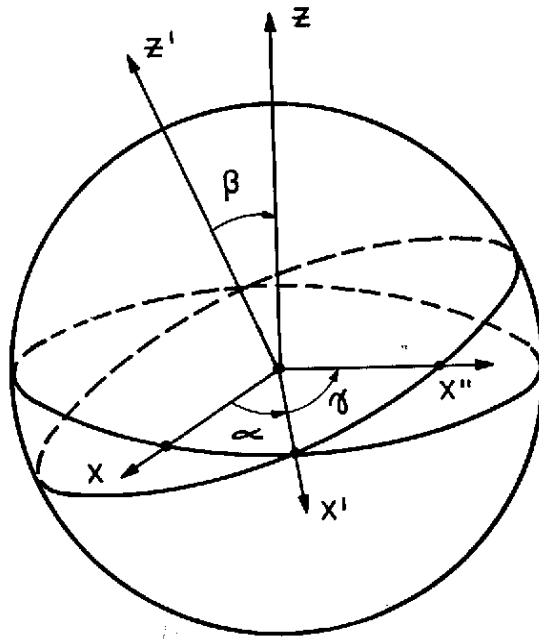


Fig. II.1

Assim, a parte real ficará

$$(C_{22} \operatorname{sen} 2\alpha - S_{22} \cos 2\alpha) \operatorname{sen}\beta + (C_{21} \cos\alpha + S_{21} \operatorname{sen}\alpha) \frac{1}{2} \cos\beta = 0 \quad (\text{II.8})$$

e a parte imaginária ficará:

$$\begin{aligned}
 & - (C_{22} \cos 2\alpha + S_{22} \sin 2\alpha) \frac{1}{2} \sin 2\beta + (C_{21} \sin \alpha - S_{21} \cos \alpha) \frac{1}{2} \cos 2\beta - \\
 & - \frac{1}{4} C_{20} \sin 2\beta = 0 \qquad \qquad \qquad (II.9)
 \end{aligned}$$

Da (II.8) tiramos:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} \frac{C_{21} \cos \alpha + S_{21} \sin \alpha}{S_{22} \cos 2\alpha - C_{22} \sin 2\alpha} \qquad (II.10)$$

Da (II.9) tiramos:

$$\operatorname{cotg} 2\beta = \frac{C_{22} \cos 2\alpha + S_{22} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} C_{20}}{C_{21} \sin \alpha - S_{21} \cos \alpha} \qquad (II.11)$$

mas $\operatorname{cotg} 2\beta = \frac{1}{2} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg} \beta}$, então substituindo a (II.10) em (II.11) virã:

$$\frac{C_{22} \cos 2\alpha + S_{22} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} C_{20}}{C_{21} \sin \alpha - S_{21} \cos \alpha} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{C_{21} \cos \alpha + S_{21} \sin \alpha}{S_{22} \cos 2\alpha - C_{22} \sin 2\alpha} \right)^2}{\frac{1}{2} \frac{C_{21} \cos \alpha + S_{21} \sin \alpha}{S_{22} \cos 2\alpha - C_{22} \sin 2\alpha}}$$

ou

$$\frac{C_{22} \cos 2\alpha + S_{22} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} C_{20}}{C_{21} \sin \alpha - S_{21} \cos \alpha} = \frac{S_{22} \cos 2\alpha - C_{22} \sin 2\alpha}{C_{21} \cos \alpha + S_{21} \sin \alpha}$$

$$- \frac{1}{4} \frac{C_{21} \cos \alpha + S_{21} \operatorname{sen} \alpha}{S_{22} \cos 2\alpha - C_{22} \operatorname{sen} 2\alpha}$$

que desenvolvendo dã

$$(C_{22} \cos 2\alpha + S_{22} \operatorname{sen} 2\alpha) (C_{22} \operatorname{sen} 2\alpha - S_{22} \cos 2\alpha) (C_{21} \cos \alpha + S_{21} \operatorname{sen} \alpha) +$$

$$\frac{1}{2} C_{20} (C_{22} \operatorname{sen} 2\alpha - S_{22} \cos 2\alpha) (C_{21} \cos \alpha + S_{21} \operatorname{sen} \alpha) +$$

$$(C_{21} \operatorname{sen} \alpha - S_{21} \cos \alpha) \left\{ (S_{22} \cos 2\alpha - C_{22} \operatorname{sen} 2\alpha)^2 - \frac{1}{4} (C_{21} \cos \alpha +$$

$$S_{21} \operatorname{sen} \alpha)^2 \right\} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Fazendo uso das relações

$$\operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{subst. em (III.12)}$$

$$(C_{22} \frac{1-x^2}{1+x^2} + S_{22} \frac{2x}{1+x^2}) (C_{22} \frac{2x}{1+x^2} - S_{22} \frac{1-x^2}{1+x^2}) (C_{21} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + S_{21} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) +$$

$$+ \frac{1}{2} C_{20} (C_{22} \frac{2x}{1+x} - S_{22} \frac{1-x^2}{1+x^2}) (C_{21} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} +$$

$$+ S_{21} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \left(\frac{C_{21}x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{S_{21}}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left\{ \left(S_{22} \frac{1-x^2}{1+x^2} - C_{22} \frac{2x}{1+x^2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{C_{21}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{S_{21}x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 \right\} = 0$$

multiplicando a equação por $(1+x^2)^2 \sqrt{1+x^2}$ vem:

$$\begin{aligned} & [C_{22}(1-x^2) + 2x S_{22}] \cdot [2x C_{22} - (1-x^2) S_{22}] \cdot (C_{21} + x S_{21}) + \\ & + \frac{C_{20}}{2} [2x C_{22} - (1-x^2) S_{22}] \cdot (C_{21} + x S_{21}) + (C_{21}x - S_{21}) \left\{ [S_{22}(1-x^2) - \right. \\ & \left. - 2x C_{22}]^2 - \frac{1}{4} (1+x^2) (C_{21} + x S_{21})^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [C_{22}^2(2x-2x^3) - C_{22} S_{22}(1-2x^2+x^4) + 4x^2 C_{22} S_{22} - S_{22}^2(2x-2x^3) + \\ & + C_{22} C_{20}(x+x^3) - \frac{1}{2} C_{20} S_{22}(1-x^4)] \cdot (C_{21} + x S_{21}) + (C_{21}x - S_{21}) \\ & [S_{22}^2(1-2x^2+x^4) - 4 C_{22} S_{22}(x-x^3) + 4 C_{22}^2 x^2 - \frac{1}{4}(x^2+1) \cdot [C_{21}^2 + \\ & + 2 C_{21} S_{21}x + x^2 S_{21}^2]] \left. \right\} = 0 \end{aligned}$$

Separando teremos a equação do 5º grau

$$a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0,$$

onde

$$\begin{cases}
 a_0 = C_{22}S_{22}S_{21} - S_{22}^2C_{21} + \frac{1}{4}S_{21}^2C_{21} - \frac{1}{2}C_{20}S_{21}S_{22} \\
 a_1 = -3C_{22}S_{22}C_{21} - S_{22}^2S_{21} + 2S_{21}C_{22}^2 - \frac{1}{4}S_{21}^3 + C_{21}^2S_{21} - \frac{1}{2}C_{20}S_{22}C_{21} - C_{20}S_{21}C_{22} \\
 a_2 = -2C_{22}S_{22}S_{21} - 2C_{22}^2C_{21} + \frac{1}{4}C_{21}^3 - \frac{1}{4}C_{21}S_{21}^2 - C_{20}C_{21}C_{22} \\
 a_3 = -2C_{21}C_{22}S_{22} + 2C_{22}^2S_{21} + \frac{1}{4}C_{21}^2S_{21} - \frac{1}{4}S_{21}^3 - C_{20}S_{21}C_{22} \\
 a_4 = S_{22}^2C_{21} - 2C_{22}^2C_{21} - 3C_{22}S_{22}S_{21} + C_{21}^3/4 - \frac{1}{2}C_{21}S_{21}^2 + \frac{1}{2}C_{20}S_{21}S_{22} - \\
 \quad - C_{20}C_{21}C_{22} \\
 a_5 = C_{21}C_{22}S_{22} - \frac{1}{4}S_{21}C_{21}^2 + \frac{1}{2}C_{20}C_{21}S_{22} + S_{22}^2S_{21}
 \end{cases}$$

sendo

$$\begin{cases}
 C_{20} = -1082,63 \times 10^{-6} \\
 C_{21} = -0,0101 \times 10^{-6} \\
 S_{21} = -0,0005 \times 10^{-6} \\
 C_{22} = 2,2125 \times 10^{-6} \\
 S_{22} = -1,2684 \times 10^{-6}
 \end{cases}$$

onde os coeficientes acima são retirados do modelo GEM-4, porém desnormalizados.

$$\left| \begin{array}{l} a_0 = 0,360954409325033 \\ a_1 = 5,64791770417978 \\ a_2 = -24,0966450731770 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} a_3 = - 1,25924257346684 \\ a_4 = - 24,4575994825021 \\ a_5 = - 6,90716027764662 \end{array} \right.$$

As raízes da equação são:

$$X_1 = 3,754961475 \quad \rightarrow \quad \alpha = \arctg X_1 = 75^{\circ},08743234$$

$$X_{2,3} = 0,000000017 \pm i 1,0000 0000 7$$

$$X_4 = - 0,266314348 \quad \rightarrow \quad \alpha = - 14^{\circ},91256933$$

$$X_5 = - 19,13582464 \quad \rightarrow \quad \alpha = - 87^{\circ},00855806$$

$$X_1 \rightarrow \alpha = 75^{\circ},08743234 \quad \rightarrow \quad \beta_1 = - 89^{\circ},99947952$$

$$X_{2,3} \rightarrow \alpha = ? \text{ (raízes complexas)}$$

$$X_4 \rightarrow \alpha = - 14^{\circ},91256933 \quad \rightarrow \quad \beta_2 = - 89^{\circ},99838377$$

$$X_5 \rightarrow \alpha = - 87^{\circ},00855806 \quad \rightarrow \quad \beta_3 = \begin{cases} - 0^{\circ},000533136 \\ - 1'',919287962 \end{cases}$$

CAPÍTULO III

CONCLUSÃO

O último resultado da equação do 5º grau parece ser o mais compatível fisicamente, pois os valores $\alpha = - 87^{\circ}$ e $\beta = - 1,9''$ são razoáveis porque α pode, na verdade, ter "qualquer valor" e $\beta = - 1,9''$ é razoável porque o arco ZZ' é menor do que 60 m, fazendo com que o eixo Z' esteja dentro da POLÓDIA (curva descrita pelo polo), cujos afastamentos maiores em relação a uma origem (polo de uma dada época) são menores do que 70 m.

As outras raízes da equação, que dão $\beta \approx - 90^{\circ}$ indicam que existem outras duas posições angulares $\alpha \approx 75^{\circ}$, $\beta \approx 90^{\circ}$, e $\alpha \approx - 14,9^{\circ}$, $\beta \approx - 90^{\circ}$ e em que o eixo Z vem para o equador e o eixo Y , "sobe" para o polo e tais posições são principais de inércia, isto é, são também situações que os eixos principais de inércia podem assumir.

Outra etapa desse trabalho será avaliar, usando os ângulos calculados, quais as variações sofridas pelos coeficientes $S_{\ell m}$, $C_{\ell m}$ em relação aos $C'_{\ell m}$, $S'_{\ell m}$ (nos eixos principais de inércia).

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Dr. Nelson de Jesus Parada, Diretor do INPE e ao Dr. Derli Chaves Machado da Silva, Coordenador do DSE - Departamento de Sistemas Espaciais, pelo apoio de ambos na elaboração desse trabalho, e em especial ao Dr. Giorgio E.O. Giacaglia, pela orientação científica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- GIACAGLIA, G.E.O. *Transformations of Spherical Harmonics and Applications to Geodesy and Satellite Theory.* INPE, 1979.
- NASA. National Geodetic Satellite Program; a report compiled and edited for NASA by the American Geophysical Union. Washington, D.C., 1977. (NASA SP-365) Part 1.

APENDICE A

NASA/GODDARD SPACE FLIGHT CENTER
TABLE I - COEFFICIENTS IN GEM4

n	m	GEM 4	n	m	GEM 4	n	m	GEM 4			
C	2	0	-484.1690	C	6	1	-0.0905	C	16	2	0.0108
S	2	0	0.0	S	6	1	0.0084	S	16	2	0.0217
C	3	0	0.9570	C	7	1	0.2553	C	3	3	0.7063
S	3	0	0.0	S	7	1	0.1334	S	3	3	1.4231
C	4	0	0.5412	C	8	1	0.0297	C	4	3	0.9713
S	4	0	0.0	S	8	1	0.0573	S	4	3	-0.2187
C	5	0	0.0692	C	9	1	0.1536	C	5	3	-0.4701
S	5	0	0.0	S	9	1	0.0088	S	5	3	-0.2506
C	6	0	-0.1528	C	10	1	0.0757	C	6	3	0.0169
S	6	0	0.0	S	10	1	-0.1438	S	6	3	-0.0127
C	7	0	0.0910	C	11	1	-0.0199	C	7	3	0.2558
S	7	0	0.0	S	11	1	0.0371	S	7	3	-0.2281
C	8	0	0.0515	C	12	1	-0.0592	C	8	3	-0.0262
S	8	0	0.0	S	12	1	-0.0466	S	8	3	-0.0809
C	9	0	0.0312	C	13	1	0.0183	C	9	3	-0.1700
S	9	0	0.0	S	13	1	-0.0753	S	9	3	-0.1049
C	10	0	0.0502	C	14	1	-0.0453	C	10	3	-0.0483
S	10	0	0.0	S	14	1	0.0371	S	10	3	-0.0976
C	11	0	-0.0561	C	15	1	0.1043	C	11	3	-0.0205
S	11	0	0.0	S	15	1	0.0419	S	11	3	-0.0887
C	12	0	0.0389	C	16	1	-0.0314	C	12	3	0.1389
S	12	0	0.0	S	16	1	0.0082	S	12	3	0.0429
C	13	0	0.0477	C	2	2	2.4237	C	13	3	-0.0335
S	13	0	0.0	S	2	2	-1.3895	S	13	3	0.0301
C	14	0	-0.0266	C	3	2	0.9164	C	14	3	0.0386
S	14	0	0.0	S	3	2	-0.6322	S	14	3	-0.0157
C	15	0	-0.0050	C	4	2	0.3511	C	15	3	0.0150
S	15	0	0.0	S	4	2	0.6052	S	15	3	0.0552
C	16	0	-0.0093	C	5	2	0.6620	C	16	3	0.0306
S	16	0	0.0	S	5	2	-0.3145	S	16	3	-0.0160
C	17	0	0.0174	C	6	2	0.0679	C	4	4	-0.1811
S	17	0	0.0	S	6	2	-0.3795	S	4	4	0.3153
C	18	0	0.0113	C	7	2	0.3305	C	5	4	-0.3107
S	18	0	0.0	S	7	2	0.0748	S	5	4	0.0321
C	19	0	0.0090	C	8	2	0.0511	C	6	4	-0.1005
S	19	0	0.0	S	8	2	0.0739	S	6	4	-0.4601
C	20	0	0.0090	C	9	2	0.0534	C	7	4	-0.2939
S	20	0	0.0	S	9	2	-0.0171	S	7	4	-0.1064
C	21	0	-0.0076	C	10	2	-0.0457	C	8	4	-0.2480
S	21	0	0.0	S	10	2	-0.0667	S	8	4	0.0466
C	22	0	-0.0038	C	11	2	0.0158	C	9	4	0.0212
S	22	0	0.0	S	11	2	-0.1250	S	9	4	0.0139
C	2	1	-0.0078	C	12	2	-0.0449	C	10	4	-0.0934
S	2	1	-0.0004	S	12	2	0.0532	S	10	4	-0.1177
C	3	1	2.0164	C	13	2	0.0194	C	11	4	0.0027
S	3	1	0.2498	S	13	2	-0.1477	S	11	4	-0.0937
C	4	1	-0.5330	C	14	2	-0.0370	C	12	4	-0.0423
S	4	1	-0.4614	S	14	2	0.1169	S	12	4	-0.0168
C	5	1	-0.0741	C	15	2	0.0098	C	13	4	-0.0543
S	5	1	-0.0786	S	15	2	-0.1010	S	13	4	-0.0737

FONTE: NASA, 1977

NATIONAL GEODETIC SATELLITE PROGRAM

TABLE 1 - Cont.

n	m	GEM 4	n	m	GEM 4	n	m	GEM 4			
C	14	4	0.0346	C	7	6	-0.3230	C	13	7	-0.0528
S	14	4	0.0064	S	7	6	0.1664	S	13	7	0.1473
C	15	4	0.0099	C	8	6	-0.0476	C	14	7	0.1313
S	15	4	-0.0254	S	8	6	0.2841	S	14	7	-0.0797
C	16	4	0.0308	C	9	6	-0.0651	C	15	7	-0.0214
S	16	4	0.0733	S	9	6	0.2210	S	15	7	0.0968
C	5	5	0.1700	C	10	6	-0.0178	C	16	7	0.0298
S	5	5	-0.6845	S	10	6	-0.1220	S	16	7	-0.0462
C	6	5	-0.2964	C	11	6	-0.0211	C	8	8	-0.1075
S	6	5	-0.5115	S	11	6	0.0443	S	8	8	0.1158
C	7	5	0.0035	C	12	6	0.0634	C	9	8	0.2182
S	7	5	0.0321	S	12	6	-0.0252	S	9	8	0.0052
C	8	5	-0.0834	C	13	6	-0.1284	C	10	8	0.0418
S	8	5	0.0848	S	13	6	0.0378	S	10	8	-0.1256
C	9	5	-0.0320	C	14	6	0.0534	C	11	8	0.0011
S	9	5	-0.0548	S	14	6	-0.0323	S	11	8	0.0639
C	10	5	-0.0632	C	15	6	-0.0174	C	12	8	-0.0317
S	10	5	-0.0070	S	15	6	-0.0481	S	12	8	0.0060
C	11	5	0.0736	C	16	6	-0.0407	C	13	8	0.0412
S	11	5	0.0332	S	16	6	-0.0189	S	13	8	-0.0192
C	12	5	0.0399	C	7	7	0.0752	C	14	8	0.0007
S	12	5	-0.0048	S	7	7	0.0130	S	14	8	-0.0605
C	13	5	0.0418	C	8	7	0.0494	C	15	8	-0.1600
S	13	5	0.0543	S	8	7	0.0679	S	15	8	0.0290
C	14	5	0.0428	C	9	7	-0.0685	C	16	8	0.0301
S	14	5	-0.0311	S	9	7	-0.0212	S	16	8	-0.0248
C	15	5	0.0237	C	10	7	0.0110	C	9	9	-0.0273
S	15	5	-0.0175	S	10	7	-0.0337	S	9	9	0.0301
C	16	5	0.0160	C	11	7	0.0223	C	10	9	0.1062
S	16	5	0.0334	S	11	7	-0.1104	S	10	9	-0.0724
C	6	6	0.0313	C	12	7	-0.0335	C	11	9	-0.0505
S	6	6	-0.2348	S	12	7	0.0005	S	11	9	0.0357

FONTE: NASA, 1977.

NASA/GODDARD SPACE FLIGHT CENTER

TABLE I - Cont.

n	m	GEM 4	n	m	GEM 4	n	m	GEM 4			
C	12	9	0.0081	C	16	11	0.0046	C	18	13	-0.0027
S	12	9	0.0208	S	16	11	-0.0064	S	18	13	-0.0334
C	13	9	0.0137	C	12	12	-0.0117	C	19	13	-0.0068
S	13	9	0.1196	S	12	12	0.0049	S	19	13	-0.0012
C	14	9	0.0116	C	13	12	-0.0306	C	20	13	0.0312
S	14	9	0.0460	S	13	12	0.0994	S	20	13	-0.0637
C	15	9	0.0066	C	14	12	0.0098	C	21	13	-0.0190
S	15	9	0.0769	S	14	12	-0.0268	S	21	13	0.0257
C	16	9	0.0409	C	15	12	-0.0341	C	22	13	-0.0137
S	16	9	-0.0608	S	15	12	0.0153	S	22	13	-0.0348
C	10	10	0.0786	C	16	12	0.0256	C	14	14	-0.0521
S	10	10	-0.0232	S	16	12	-0.0076	S	14	14	-0.0074
C	11	10	-0.0727	C	17	12	0.0261	C	15	14	0.0025
S	11	10	-0.0063	S	17	12	-0.0011	S	15	14	-0.0216
C	12	10	-0.0057	C	18	12	-0.0568	C	16	14	-0.0108
S	12	10	0.0312	S	18	12	-0.0229	S	16	14	-0.0374
C	13	10	-0.0128	C	19	12	-0.0256	C	17	14	-0.0155
S	13	10	0.0171	S	19	12	-0.0203	S	17	14	0.0060
C	14	10	0.0273	C	20	12	0.0121	C	18	14	-0.0234
S	14	10	-0.1311	S	20	12	-0.0023	S	18	14	-0.0043
C	15	10	0.0503	C	21	12	0.0972	C	19	14	0.0005
S	15	10	0.0345	S	21	12	-0.0347	S	19	14	-0.0109
C	16	10	-0.0692	C	22	12	-0.0537	C	20	14	0.0117
S	16	10	-0.0093	S	22	12	-0.0333	S	20	14	-0.0035
C	11	11	0.0900	C	13	13	-0.0274	C	21	14	0.0042
S	11	11	-0.0255	S	13	13	0.0930	S	21	14	0.0134
C	12	11	0.0052	C	14	13	0.0318	C	22	14	0.0215
S	12	11	0.0305	S	14	13	0.0087	S	22	14	0.0071
C	13	11	-0.0443	C	15	13	-0.0023	C	15	15	-0.0768
S	13	11	-0.0215	S	15	13	0.0107	S	15	15	0.0308
C	14	11	0.0980	C	16	13	0.0064	C	16	15	-0.0544
S	14	11	-0.0331	S	16	13	-0.0213	S	16	15	0.0099
C	15	11	-0.0537	C	17	13	0.0319	C	16	16	-0.0048
S	15	11	0.0568	S	17	13	0.0423	S	16	16	-0.0036

FONTE: NASA, 1977.