

1. Classificação <i>INPE-COM.4/RPE</i> <i>C.D.U.: 517.977.5:629.76</i>		2. Período	4. Distribuição	
3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor) <i>FOGuetES;</i> <i>CONTROLE SINGULAR;</i> <i>OTIMIZAÇÃO DE ALTITUDE</i>		interna <input type="checkbox"/>		externa <input checked="" type="checkbox"/>
5. Relatório nº <i>INPE-1732-RPE/132</i>	6. Data <i>Maio, 1980</i>	7. Revisado por <i>[assinatura]</i> <i>Atair Rios Neto</i>		
8. Título e Sub-Título  <i>SOLUÇÃO NUMÉRICA DA OTIMIZAÇÃO DA ALTITUDE</i> <i>DE FOGUETES LANÇADOS VERTICALMENTE</i>		9. Autorizado por  <i>[assinatura]</i> <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor</i>		
10. Setor <i>DSE</i>	Código	11. Nº de cópias <i>08</i>		
12. Autoria <i>Valeir Orlando</i> <i>Jerzy Tadeuz Sielawa</i>		14. Nº de páginas <i>07</i>		
13. Assinatura Responsável <i>[assinatura]</i>		15. Preço		
16. Sumário/Notas  <i>Foi efetuado um desenvolvimento teórico do problema de otimização da altitude de foguetes lançados verticalmente, considerando-se o empuxo como variável de controle. Constatou-se que o problema é do tipo "bang-bang" de Mayer. A partir dos resultados assim obtidos, foi deduzida a sequência ótima de controle e, com base nessa sequência, foi desenvolvido um algoritmo numérico, fundamentado em diferenças finitas, para a resolução do sistema otimizado. Foram apresentados, a seguir, resultados e conclusões correspondentes a um exemplo de aplicação, no qual se considerou um foguete hipotético.</i>				
17. Observações: <i>Submetido para apresentação no 3º Congresso Brasileiro de Automática, Rio de Janeiro, 16 a 19 de setembro de 1980.</i>				

# SOLUÇÃO NUMÉRICA DA OTIMIZAÇÃO DA ALTITUDE DE FOGUETES LANÇADOS VERTICALMENTE

Valcir Orlando  
Jerzy Tadeuz Sielawa

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE/CNPq  
Caixa Postal 515 - São José dos Campos, SP., Brasil

## Resumo

Foi efetuado um desenvolvimento teórico do problema de otimização da altitude de foguetes lançados verticalmente, considerando-se o empuxo como variável de controle. Constatou-se que o problema é do tipo "bang-bang" de Mayer. A partir dos resultados assim obtidos, foi deduzida a sequência ótima de controle e, com base nessa sequência, foi desenvolvido um algoritmo numérico, fundamentado em diferenças finitas, para a resolução do sistema otimizado. Foram apresentados, a seguir, resultados e conclusões correspondentes a um exemplo de aplicação, no qual se considerou um foguete hipotético.

Numerical Solution of Altitude Optimization of Vertical Launched Rockets.

## Abstract

Theoretical analysis of the problem of altitude optimization of vertically launched rockets was performed, considering thrust as a control variable. The problem was shown to be of "bang-bang", Mayer type. From these results, the sequence of optimal control was obtained and a numerical algorithm, based on finite differences was developed in order to solve the optimized system. Subsequently, results and conclusions, concerning an example of hypothetical rocket, were presented.

## 1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é calcular a altitude máxima que pode ser alcançada por um foguete lançado verticalmente, utilizando-se como variável de controle o fluxo de massa através da saída da tubeira do motor e, como variáveis de estado, a velocidade ( $v$ ), a altitude ( $h$ ) e a massa ( $m$ ). Supõe-se para os cálculos o problema na sua forma mais real possível, não se fazendo nenhuma hipótese simplificadora.

O problema de otimização da altitude de foguetes foi proposto por Goddard em 1919. As primeiras tentativas de solução foram feitas por Hamel, G. em 1927, por Malina, F.J. e Smith, A.M.O. em 1938, sem que se considerasse o problema da otimização do empuxo (Orlando, 1979). Tsien e Evans (1951) apresentaram uma solução na qual, embora considerassem sem a otimização do empuxo, não contornaram os problemas decorrentes da característica linear do problema variacional. Miele (1958) apresentou uma solução que buscou vencer essa dificuldade, porém, para um caso particular. Garfinkel (1963) apresentou uma solução na qual considera a atmosfera isotérmica.

Fonseca (1977) apresentou um tratamento teórico do problema, onde verificou ser a solução do tipo "bang-bang" de Mayer, ou seja, a variável de controle (fluxo de massa) só pode tomar, no caso ótimo, ou seu valor máximo ou então zero, sendo a transição entre esses dois valores feita pela chamada lei da variação singular de controle.

Neste trabalho, a partir dos valores ótimos obtidos para o fluxo de massa, deduz-se a sequência ótima que esses valores devem seguir no decorrer do tempo e, a partir dessa sequência ótima de controle, desenvolve-se um algoritmo numérico para a resolução do sistema otimizado.

## 2. TRATAMENTO TEÓRICO

### 2.1. EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

O movimento de um foguete lançado verticalmente é regido pelo sistema de equações:

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{m} [uv_A + P(h) - D(v, h) - W(h, m)] \quad (2.1.1)$$

$$\dot{h}(t) = v \quad (2.1.2)$$

$$\dot{m}(t) = u \quad (2.1.3)$$

Onde:

a)  $v$  é a velocidade do foguete;  $h$  a sua altitude;  $m$  a sua massa (funções do tempo);  $v_a$  é a velocidade de saída dos gases.

$$b) P(h) = [P_e - P_1(h)] A_e \quad (2.1.4)$$

sendo:  $P_e$  a pressão de saída dos gases;  $P_1(h)$  a pressão atmosférica no ponto em que o foguete se encontra;  $A_e$  a área de saída da tubelara do motor.

$$c) D(v, h) = \frac{1}{2} \rho(h) v^2 s C_D(M) \quad (2.1.5)$$

sendo:  $\rho(h)$  a densidade atmosférica como função da altitude;  $s$  a área de referência do foguete;  $C_D(M)$  o coeficiente de arrasto;  $M = v/a(h)$  o número de Mach;  $a(h)$  a velocidade do som no ar como função da altitude.

$$d) W(h, m) = mg_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \quad (2.1.6)$$

sendo:  $g_0$  a aceleração da gravidade na superfície da Terra,  $R_T$  o raio médio da Terra.

## 2.2. EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O que se deseja, em resumo, é estabelecer como deverá ser variado o fluxo de massa de corrente da queima do combustível do foguete, para que este, com uma dada quantidade de combustível, atinja a maior altitude possível. Em outras palavras, deseja-se minimizar o funcional.

$$J(v, h, m, u) = -h(t_f) \quad (2.2.1)$$

sujeito aos vínculos dados por (2.1.1, 2, 3) e com as condições de contorno:  $v(0)=0, h(0)=0; m(0)=m_0; v(t_f)=0; h(t_f) = \text{valor a ser maximizado}; m(t_f) = m_f$  (valor conhecido); e com instante final,  $t_f$ , livre.

A variável de controle,  $u$ , está sujeita, por limitações físicas, ao vínculo tipo desigualdade:

$$0 \leq u \leq U_{\max} \quad (2.2.2)$$

## 2.3. SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Adicionando-se os vínculos ao funcional (2.2) através dos multiplicadores de Lagrange, tendo-se em vista a definição de função Hamiltoniana (Pontryagin, 1962), chega-se a:

$$J(x, u, t) = -h(t_f) + \lambda^T x \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [H - \lambda^T \dot{x}] dt \quad (2.3.1)$$

Onde  $\lambda^T [\lambda_v \lambda_h \lambda_m]$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange transposto.

Aplicando-se a condição necessária para mínimo, verifica-se que ela será satisfeita para:

$$H(t_f) = -\frac{\partial h(t_f)}{\partial t_f}; \lambda_2(t_f) = 1 \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{\lambda}^T \quad (2.3.3a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (2.3.3b)$$

É fácil verificar que:

$$H = -\frac{\lambda_v}{m} (uv_a + P - D - W) - \lambda_h v + \lambda_m u \quad (2.3.4)$$

e que, ao longo da trajetória ótima  $H \equiv 0$ .

Com o auxílio de (2.3.4), aplicando-se a equação (2.3.3a), obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_v \\ \dot{\lambda}_h \\ \dot{\lambda}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial H / \partial v \\ \partial H / \partial h \\ \partial H / \partial m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{m} D_v - \lambda_h \\ -\frac{\lambda_v}{m} (P_h - D_h - W_h) \\ \frac{\lambda_v}{m} (uv_a + P - D) \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

Onde utilizou-se a notação  $Y_x = \frac{\partial y}{\partial x}$

Antes de se aplicar a segunda das equações (2.3.3), visto que a variável de controle  $u$  possui um intervalo de variação fechado, efetua-se a seguinte mudança de variável:

$$u = U_{\max} \sin^2 \omega, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (2.3.6)$$

Note-se que enquanto  $\omega$  pode assumir qualquer valor real,  $u$  continua variando de zero a  $U_{\max}$ . Verifica-se facilmente que, em relação a nova variável, a equação (2.3.3b) mantém a sua forma:

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = -\left(\frac{\lambda_v v_a}{m} - \lambda_m\right) U_{\max} \sin 2\omega = 0 \quad (2.3.7)$$

É também necessário que:

$$\frac{\delta^2 [H + \lambda \dot{x}]}{\delta \omega^2} \geq 0 \quad (2.3.8)$$

Considerando-se a mudança de variável (2.3.6), essa condição fornece:

$$-\left[\frac{\lambda_v v_a}{m} - \lambda_m\right] U_{\max}^2 \cos 2\omega \geq 0 \quad (2.3.9)$$

$$\text{Definindo } \lambda_v v_A/m - \lambda_m = \psi(t) \quad (2.3.10)$$

e, analisando-se as equações (2.3.7) e (2.3.9), chega-se finalmente às conclusões:

a) Para  $\psi(t) > 0$ , então  $u^* = U_{\max}$  (2.3.11)

b) Para  $\psi(t) < 0$ , então  $u^* = 0$  (2.3.12)

c) Para  $\psi(t) = 0$ , então  $u^* = u_s^*$  (2.3.13)

Onde o sinal (\*) significa controle ótimo e  $u_s^*$  é a chamada lei de variação singular de controle.

O passo seguinte é a determinação da expressão da lei de variação singular de controle,  $u_s^*$ .

Calculando-se as derivadas de  $\psi(t)$ , em relação ao tempo, até que se obtenha a derivada de ordem mais baixa na qual  $u(t)$  aparece explicitamente, e chamando-se  $d^q\psi(t)/dt^q$  a essa derivada, para a mesma, pode-se provar ser válido que, enquanto  $d\psi/dt = 0$ , ela também será nula. Da expressão dessa derivada termina-se a expressão correspondente a  $u_s^*$ . Seguindo-se esse procedimento, verifica-se que a derivada de ordem mais baixa na qual  $u(t)$  aparece explicitamente é a segunda ordem. Calculando-se essa derivada, obtém-se a seguinte expressão para a lei de variação singular de controle:

$$u_s^* = \frac{(D-P)z + W(v_A^2 + v_A D_v) + m v_A^2 (D_h + W_h - P_h) - v_A z}{v_A z} \quad (2.3.14)$$

$$- \frac{v_m v_A (v_A D_{vh} + D_h - P_h)}{v_A z} \quad (2.3.14)$$

$$z \triangleq v_A^2 D_{vv} + 2v_A D_v + D - P \quad (2.3.15)$$

### 3. OBTENÇÃO DE UMA FUNÇÃO COMUTADORA AUXILIAR PARA A RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA

Como se pode ver em (2.3.10); a função comutadora do sistema,  $\psi(t)$ , se apresenta como função dos multiplicadores de Lagrange e isso faz com que o uso de  $\psi(t)$ , diretamente no processo de resolução numérica; se torna inviável. O objetivo agora se resume em, através de um processo matemático, eliminar os multiplicadores de Lagrange, obtendo-se uma função independente dos mesmos que possa ser utilizada em lugar de  $\psi(t)$ , para a resolução numérica do sistema otimizado.

Conforme (2.3.13), a lei de variação singular de controle deve ser aplicada, quando a função comutadora atingir o valor zero. Viu-se também que a função Hamiltoniana,  $H$ , é identicamente nula ao longo da trajetória ótima e, ainda, que  $d\psi(t)/dt = 0$ . As equações  $\psi(t) = 0$ ,  $d\psi(t)/dt = 0$  e  $H = 0$  formam um sistema de três equações algébricas através incógnitas, tomando-se como incógnitas os multiplicadores de Lagrange. O sistema de equações assim formado é homogêneo e, para que o mesmo apresente solução não trivial, o determi-

nante da matriz dos coeficientes deve ser nulo, isto é:

$$v = v_A \frac{P - D - W}{P - D - v_A D_v} = \psi_A(t) \quad (3.1)$$

Então, o sistema só apresentará solução não trivial quando ocorrer a igualdade (3.1) e isso significa que apenas quando ocorrer essa igualdade haverá a possibilidade de se ter  $\psi(t) = 0$  e, portanto, a aplicação do controle singular. Comparando-se o valor de  $\psi_A$  com o valor de  $v$ , durante o processo de resolução numérica das equações diferenciais do sistema, ter-se-á; então, uma indicação de quando deverá ser aplicada a lei de variação singular de controle. Resumindo:

Se  $\psi_A \neq v$ , aplica-se  $u^* = 0$  ou  $u^* = U_{\max}$  (3.2)

Se  $\psi_A = v$ , aplica-se  $u^* = u_s^*$  (3.3)

## 4. RESOLUÇÃO NUMÉRICA

### 4.1. DEDUÇÃO DA SEQUÊNCIA ÓTIMA DE CONTROLE

Para que haja movimento, em  $t = 0$  deve ocorrer necessariamente  $u^* = -\dot{m} \neq 0$ . Então, por (3.2) se  $\psi_A(0) \neq v(0)$ , portanto,  $\psi_A(0) \neq 0$ , tem-se  $u^*(0) = U_{\max}$ . De uma rápida análise, verifica-se que em  $t = 0$ :

$$\psi_A(0) = v_A \frac{P(0) - W(0, m_0)}{P(0)} \quad (4.1.1)$$

Mas,  $P(h)$  é uma parcela de caráter corretivo da força de tração e, em  $t = 0$ ,  $W(h, m)$  tem seu valor máximo. Assim, no caso geral, pode-se considerar  $P(0) < W(0, m_0)$  e, com isso de (4.1.1):  $\psi_A(0) < 0$ , portanto,  $u^*(0) = U_{\max}$ . Esse valor deverá ser mantido até que a função comutadora auxiliar,  $\psi_A$ , e a velocidade,  $v$ , atinjam a igualdade. Quando isso acontecer, conforme (3.3), deverá ser aplicado, ao sistema, a lei da variação singular de controle. Como a aplicação dessa lei mantém  $d\psi/dt = 0$  e  $d^2\psi/dt^2 = 0$ , a função comutadora original  $\psi(t)$  será mantida nula e com isso a igualdade  $\psi_A = v$  também será mantida. Isso significa que uma vez aplicado ao sistema o controle singular, este deverá permanecer até que se dê o esgotamento do combustível ou, então, até que seu valor se anule, se isto acontecer antes do primeiro evento, pois, não tem sentido físico a aplicação do controle singular após o instante em que este se anulou, visto ter sido constatado, em exemplos de resolução numérica, que, após esse instante,  $u_s^*$  torna-se negativo. Como a variável de controle,  $u$ , foi definida como o negativo da taxa de variação temporal de massa, isso significaria que a massa do foguete estaria aumentando com o decorrer do tempo. Por outro lado, se, após o instante em que  $u_s^*$  se anulou, a aplicação de  $u^* = 0$  for mantida, então o foguete passaria a perder energia cinética sob a ação das forças gravitacionais e de ar

rasto e, com o combustível restante teria novamente de vencer a força gravitacional e aumentar a velocidade, o que excluiria esta possibilidade, pois, pelo raciocínio intuitivo acima, isso fugiria da solução ótima (ver seção 6).

Conclui-se, então, que se ocorrer de  $u^*$  se anular, antes que o combustível se esgote, deve-se, a partir desse instante, aplicar novamente  $u^* = U_{max}$ . Se o combustível se esgotar durante a aplicação do controle singular, obviamente o próximo valor ótimo a ser tomado pela variável de controle será  $u^* = 0$  e, nesse caso a sequência ótima será:  $\{u^* = U_{max}, u^* = u_s^*, u^* = 0\}$ . Se o combustível se esgotar durante a aplicação, pela segunda vez, de  $u^* = U_{max}$ , então a sequência ótima será:  $\{u^* = U_{max}, u^* = u_s^*, u^* = U_{max}, u^* = 0\}$ . Se ocorrer que antes do término do combustível, durante a segunda aplicação de  $u^* = U_{max}$ , novamente  $\psi = v$  então, nesse instante, deve-se ter uma comutação de controle de  $u^* = U_{max}$  para  $u^* = u_s^*$  e, se ainda agora, antes de esgotar o combustível, novamente  $u^*$  se anula outra vez, a comutação de  $u^* = u_s^*$  para  $u^* = U_{max}$  será aplicada e, assim sucessivamente. Genericamente a sequência ótima de controle é, então, dada por:

$$\{u^* = U_{max}, u^* = u_s^*, u^* = U_{max}, u^* = u_s^*, \dots \\ \dots u^* = 0\} \quad (4.1.2)$$

#### 4.2. MÉTODO NUMÉRICO

Como se conclui na seção anterior, o valor da variável de controle a ser aplicado em  $t = 0$  é  $u^* = U_{max}$ . Esse valor deve ser substituído nas equações diferenciais do sistema (2-1-1, 2, 3), a fim de se iniciar o processo de resolução numérica a partir de  $t = 0$ , com condições iniciais  $v(0)$ ,  $h(0)$ , e  $m(0)$ . A equação relativa a  $m(t)$ , neste caso, é de solução analítica imediata. As equações relativas a  $v(t)$  e  $h(t)$  necessitam de integração numérica. O método que se utilizou para essa finalidade tem como base a chamada fórmula de Adams (Salvadori e Baron, 1966) e, para que a mesma possa ser utilizada é necessário que antes se obtenha valores de  $v(t)$  e  $h(t)$  em alguns pontos iniciais, o que foi feito através de decomposições em séries de Taylor de  $v(t)$  e  $h(t)$ , em torno de  $v(0)$  e  $h(0)$ . O processo de resolução se repete a cada comutação de controle, tomando-se então como instante inicial, aquele em que se deu a comutação de controle em questão. As interpolações, necessárias durante a resolução numérica, das funções atmosféricas foram feitas através da chamada fórmula de interpolação de Gregory-Newton (Salvadori e Baron, 1966).

Para maiores detalhes, sugere-se a leitura da referência Orlando (1979).

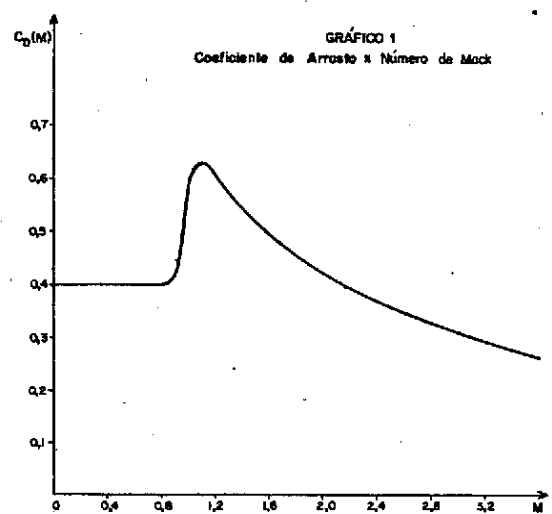
#### 5. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS EM EXEMPLO DE APLICAÇÃO

O método foi aplicado para a resolução do problema de otimização, considerando-se um

foguete hipotético. Obtidos os resultados para o caso ótimo, foram feitos a título de comparação, cálculos para a determinação da altitude alcançada pelo foguete, com variações do empuxo diferentes daquela deduzida como sendo a ótima.

Os dados utilizados no experimento numérico foram os seguintes:  $m_0 = 350$  kg;  $m_f = 100$  kg;  $s = 0,07$  m<sup>2</sup>;  $A_E = 0,05$  m<sup>2</sup>;  $V_A = 650$  m/s;  $m_{max} = U_{max} = -19,23$  kg/s;  $P_e = 101325$  N/m<sup>2</sup>.

Admite-se a curva  $C_D(M) \times M$  abaixo, a qual foi discretizada para valores de  $M$  espaçados de intervalos iguais a 0,02, obtendo-se uma tabela  $C_D(M) \times M$ , com a qual foi alimentada a memória do computador.

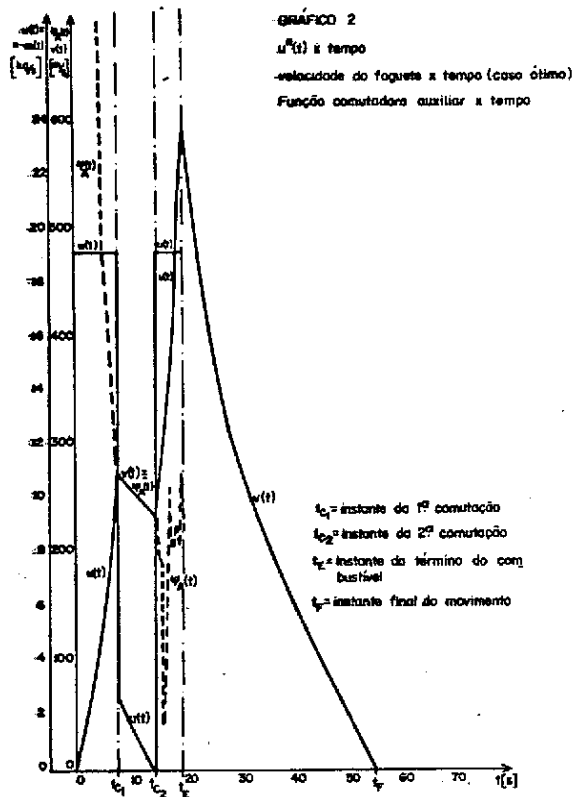


Considerou-se, para a aceleração da gravidade na superfície da Terra, o valor  $g_0 = 9,81$  m/s<sup>2</sup> e para o raio médio da Terra, o valor  $R_T = 6,37 \times 10^6$  m.

O gráfico 2 apresenta as curvas, obtidas a partir dos resultados computados pela aplicação do método, para a velocidade do foguete e para a função comutadora auxiliar em função do tempo, como também a curva  $u^*(t) \times t$ .

Examinando-se este gráfico, vê-se que a partir de  $t = 0$ , com a aplicação de  $u^* = U_{max}$ , a velocidade, nula a princípio, começa a aumentar. Por outro lado, a função comutadora auxiliar, assintótica em  $t = 0$ , diminui com o decorrer do tempo. Esse comportamento faz com que as duas curvas se encontrem em  $t = t_{c1} = 7,6547$  segundos. Tem-se, então, nesse ponto, a igualdade  $\psi_A(t_{c1}) = v(t_{c1}) = v(t_{c1})$  e, portanto, conforme (3.3), a primeira comutação de controle, de  $u^* = U_{max}$  para  $u^* = u_s^*$ . Verifica-se que, a partir daí, as duas curvas se sobrepõem, como já era esperado, uma vez que, a aplicação do controle singular mantém  $\psi(t) = 0$  e com isso a igualdade  $\psi_A(t) = v(t)$ . Note-se agora que o valor da variável de controle singular,  $u_s^*$ , diminui com o decorrer do tempo e, em  $t = t_{c1}$

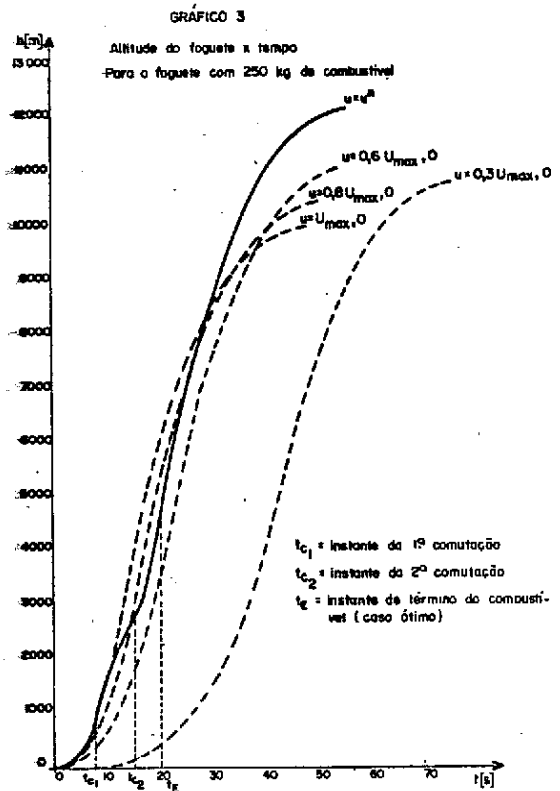
$\approx 14,6557$  seu valor atinge zero. Isso significa que nova comutação de controle deve se dar nesse ponto, agora de  $u^* = u_s^*$  para  $u^* = u_{\max}$ .



Novamente a velocidade do foguete passa a aumentar, enquanto que a função comutadora auxiliar diminui mais acentuadamente, fazendo com que a partir desse ponto  $\psi_A < V$ . Embora após algum tempo a função comutadora auxiliar apresente oscilações, seu valor permanece, ainda, menor que o da velocidade, até que em  $t = t_E = 19,7559$  seg. se dá o esgotamento de combustível. Nesse ponto, obviamente, ocorre a última comutação de controle de  $u^* = u_{\max}$  para  $u^* = 0$ . A partir daí, sob a ação das forças de gravidade e arrasto, a velocidade passa a diminuir até que em  $t = t_F = 55,2463$  seg., finalmente se anula, com o que termina o movimento, cujo estudo é de interesse. Note-se também que a partir do instante do esgotamento de combustível, não há mais interesse no cálculo de  $\psi_A(t)$  e, daí em diante, essa curva não é mais representada no gráfico.

O gráfico 3 apresenta a altitude de foguete em função do tempo, tanto para a sequência ótima de controle, como também para as sequências:  $\{u_{\max}, 0\}$ ,  $\{0,8 u_{\max}, 0\}$ ,  $\{0,6 u_{\max}, 0\}$  e  $\{0,3 u_{\max}, 0\}$ .

No caso ótimo foi atingida a altitude de 12160,60 metros, contra uma altitude de 11079,72 metros para a sequência  $\{0,6 u_{\max}, 0\}$ , sendo esta a sequência que forneceu maior altitude depois da ótima, o que nos dá uma diferença de 1080,88 metros.



## 6. CONCLUSÕES

Analisando-se os resultados obtidos em exemplos de aplicação, nos quais foi considerado o mesmo foguete hipotético com outras quantidades de combustível, chegou-se à conclusão de que quando a quantidade de combustível é tal que permite a comutação de controle de  $u^* = u_{\max}$  para  $u^* = u_s^*$ , esgotando-se durante a aplicação de  $u_s^*$ , dentre os casos de  $u = cte$ , a maior altitude é conseguida para  $u^* = u_{\max}$  mantido até o término do combustível. À medida que se diminui o valor  $u = cte$ , também diminui a altitude alcançada. Isso não acontece quando se tem uma quantidade maior de combustível, cuja queima permite que se tenham outras comutações de controle no caso ótimo, como se pode observar pelo gráfico 3, que apresenta a sequência ótima de controle:  $\{u^* = u_{\max}, u^* = u_s^*, u^* = u_{\max}, u^* = 0\}$ , onde o término de combustível se deu durante a aplicação de  $u^* = u_{\max}$  pela segunda vez. Nota-se que  $u = u_{\max}$  não é mais, dentre os casos  $u = cte$ , aquele que se faz com que seja atingida a maior altitude. Dentre os casos calculados, a maior altitude é agora atingida para  $u = cte = 0,6 u_{\max}$ .

Concluindo-se, para os casos analisados, quando se tem uma quantidade de combustível que se esgote antes que ocorra a primeira comutação de  $u^* = u_{\max}$  para  $u^* = u_s^*$ , então a sequência de controle ótima será, obviamente,  $\{u^* = u_{\max}, u^* = 0\}$ . Se o combustível for aumentado, permitindo, porém, apenas uma comutação de controle, então  $u = cte = u_{\max}$  deixa de ser ótimo mas, dentro os casos  $u = cte$  é o que resulta em maior altitude. Se, para uma quantidade de combustível ainda maior,

ocorrer uma nova comutação de controle, então,  $u = \text{cte} = U_{\text{max}}$  se afasta ainda mais do caso ótimo, deixando de ser, dentre os casos de  $u = \text{cte}$ , o que fornece maior altitude final.

É importante notar também que, embora a lei de variação singular de controle seja dada por uma expressão relativamente complexa, sua representação gráfica se aproxima muito de uma reta, o que pode significar simplificações bastante compensatórias em uma possível utilização prática da otimização estudada.

Um aspecto que será verificado e que talvez possa mudar a sequência aqui deduzida, como sendo ótima, é a possibilidade de, a partir do instante em que  $u^*$  se anula, continuar-se com a aplicação de  $u^* = 0$ . Então, o objetivo será verificar, através de integração numérica, a possibilidade de que as sequências do tipo  $\{u = U_{\text{max}}, u = u_s, u = 0 \dots, u = 0\}$ , as quais foram, neste trabalho, excluídas de serem ótimas, através de raciocínio intuitivo, possam vir a sê-lo.

#### 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cherle, F.C., (1974). *Manual de Meteorologia Aeronáutica*, ETA-EAPAC, 47-51.
- Fonseca, A.M.F., (1977). *Otimização da Altitude de Foguete Lançado Verticalmente numa Atmosfera com Densidade Variável*, ITA.
- Garfinkel, B., (1963). "A Solution of Goddard Problem", *J. Siam Control Ser. A.*, nº 3.
- Miele, A., (1958). "Flight Mechanics and Variational Problem of a Linear Type", *J. of the Aeron. Sc.*, nº 1.
- Orlando, V., (1979). *Solução Numérica do Problema Bolza-Mayer da Otimização da Altitude de Foguetes Lançados Verticalmente, através de Controle de Empuxo*, ITA.
- Pontryagin, L.S., (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, W. Neustad.
- Salvador, M.G. e Baron, M.L., (1966). *Numerical Methods in Engineering*, Prentice Hall of India LTD.
- Tsien, H.S., e Evans, R.C., (1951). "Optimum Thrust Programming for a Sounding Rocket", *J. of the Amer. Rocket. Soc.*