

1. Publicação nº <i>INPE-3908-PRE/948</i>	2. Versão	3. Data <i>Maio, 1986</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DMC/DGC</i>		Programa <i>A81</i>	
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>OBSERVAÇÕES TENDENCIOSAS      PREPROCESSAMENTO</i> <i>ESTIMAÇÃO DE TENDENCIOSIDADE      FILTRO DE KALMAN</i>			
7. C.D.U.: <i>629.7.062.2:629.783</i>			
8. Título  <i>PROCEDIMENTO PARA TRATAMENTO AUTOMÁTICO DE TENDENCIOSIDADE EM OBSERVAÇÕES DE ESTADO DE SISTEMAS DINÂMICOS</i>		10. Páginas: <i>07</i>	
9. Autoria <i>Valcir Orlando</i> <i>Atair Rios Neto</i>		11. Última página: <i>06</i>	
		12. Revisada por <i>Helio Koiti Kuga</i>	
		13. Autorizada por <i>Marco Antonio Raupp</i> Diretor Geral	
Assinatura responsável <i>Valcir Orlando</i>			
14. Resumo/Notas  <i>Erros tendenciosos geralmente estão presentes em medidas em geral, tanto devido à instrumentação quanto a fenômenos perturbadores externos. O procedimento apresentado neste trabalho tem por objetivo permitir o emprego direto de observações contaminadas por erros tendenciosos em processos de estimação de estado via filtro de Kalman, evitando-se a necessidade de correção a priori destes erros. Emprega-se um processo de compensação dinâmica, modelando os erros tendenciosos das observações por processos de Gauss Markov de primeira ordem incorporando-os a seguir às equações do sistema dinâmico. O procedimento foi testado, através de simulação numérica em computador digital, na estimação de órbita de um satélite artificial de baixa altitude, utilizando como observações dados simulados de rastreamento contaminados por erros tendenciosos impostos, na prática, a este tipo de dados pelo fenômeno de refração atmosférica.</i>			
15. Observações Trabalho a ser submetido no 2º Congresso LatinoAmericano de Control Automático - A.A.D.E.C.A (Argentina)			

PROCEDIMENTO PARA TRATAMENTO AUTOMÁTICO DE TENDENCIOSIDADES EM OBSERVAÇÕES DE ESTADO DE SISTEMAS DINÂMICOS

Valcir Orlando  
Atair Rios Neto

Departamento de Mecânica Espacial e Controle

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE  
Ministério da Ciência e Tecnologia - MCT  
12200 - São José dos Campos - SP - Brasil  
Telex: (011) 33530

RESUMO

Erros tendenciosos geralmente estão presentes em medidas em geral, tanto devido à instrumentação quanto a fenômenos perturbadores externos. O procedimento apresentado neste trabalho tem por objetivo permitir o emprego direto de observações contaminadas por erros tendenciosos em processos de estimação de estado via filtro de Kalman, evitando-se a necessidade de correção a priori destes erros. Emprega-se um processo de compensação dinâmica, modelando os erros tendenciosos das observações por processos de Gauss Markov de primeira ordem incorporando-os a seguir às equações do sistema dinâmico. O procedimento foi testado, através de simulação numérica em computador digital, na estimação de órbita de um satélite artificial de baixa altitude, utilizando como observações dados simulados de rastreamento contaminados por erros tendenciosos impostos, na prática, a este tipo de dados pelo fenômeno de refração atmosférica.

A PROCEDURE FOR AUTOMATIC TREATMENT OF DYNAMIC SYSTEMS STATE OBSERVATION BIAS ERRORS.

ABSTRACT

Bias type errors are generally present in measurements either due to the equipment or to external phenomena. In this work a procedure to directly treat biased observations in the Kalman filter state estimation process, with no need of a priori bias correction, is presented. To do this a dynamic compensation process is used by modelling the observation bias as a first-order Gauss Markov dynamic process. The resulting bias dynamic equations are then incorporated into the dynamic system equations. The procedure was tested by numerical simulation in digital computer, for a low altitude artificial satellite orbit estimation, using range and range rate simulated tracking data considering atmospheric refraction bias errors.

1. INTRODUÇÃO

Erros tendenciosos são geralmente impostos a dados resultantes de medidas de alguma grandeza física de interesse, tanto pela instrumentação como por efeitos perturbadores devidos a fenômenos externos. Os erros tendenciosos devidos à instrumentação são geralmente constantes e determinados por calibração do equipamento (Wertz, 1978; Cappellari et alii ed, 1976). Quanto aos erros tendenciosos devidos a fenômenos externos, estes geralmente variam com o tempo e exigem modelos matemáticos e procedimentos computacionais que podem ser de relativa complexidade e depender de parâmetros locais de caráter aleatório de difícil monitoração. Esse é o caso, por exemplo, do erro tendencioso imposto as medidas de distância estação de rastreamento-satélite artificial e de variação temporal dessa distância (Cappellari et alii ed, 1976).

O procedimento apresentado neste trabalho (Orlando, 1983) visa evitar a necessidade de correção a priori de erros tendenciosos em observações de estado de sistemas dinâmicos, permitindo que essas observações sejam utilizadas diretamente no processo de estimação de estado do sistema. A influência dos erros tendenciosos das observações nas estimativas do estado é automaticamente retirada em um processo no qual estes são estimados juntamente com o estado do sistema. O processo de estimação baseia-se no emprego de um estimador estocástico sequencial, o filtro de Kalman (Jazwinski, 1970; Gelb, 1974; Liebelt, 1967), que pode permitir a aplicação do procedimento em tempo real.

## 2. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Considere-se um sistema dinâmico genérico, cujo modelo matemático é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t] + G(t) w(t), \quad (2.1)$$

onde  $x(t)$  é o vetor de estado do sistema cuja dimensão é  $n$ ;  $f(\cdot)$  é um vetor de dimensão  $n$  cujas componentes são funções, lineares ou não, do estado do sistema;  $G(t)$  é uma matriz  $n \times r$  contínua no tempo;  $w(t)$  é um vetor de dimensão  $r$  que expressa incertezas no conhecimento da dinâmica do sistema, sendo por hipótese, um vetor de ruídos brancos gaussianos com:

$$E[w(t)] = 0; E[w(t) \cdot w^T(\tau)] = Q(t) \delta(t-\tau), \quad (2.2)$$

sendo  $Q(t)$  uma matriz  $r \times r$  positiva definida e  $\delta(t-\tau)$  a função delta de Dirac.

Suponha-se que as observações do sistema são modeladas matematicamente por:

$$y(k+1) = h[x(k+1), k+1] + e(k+1) + v(k+1), \quad (2.3)$$

onde  $y(k+1)$  é o vetor,  $m$ -dimensional, de observações do sistema relativo ao instante de tomada da medida,  $t_{k+1}$ ;  $h(\cdot)$  é um vetor  $m$  dimensional cujas componentes são funções, lineares ou não, do estado do sistema;  $e(k+1)$  é um vetor de dimensão  $m$  cujas componentes representam erros tendenciosos das respectivas componentes do vetor de observações;  $v(k+1)$  é um vetor de dimensão  $m$  de ruídos nas observações cujas propriedades estatísticas são:

$$E[v(k+1)] = 0; E[v(k+1) \cdot v^T(k+1)] = R(k+1), \quad (2.4)$$

Suponha-se ainda que o ruído no estado,  $w(t)$ , é não-correlacionado com o vetor de estado inicial e com o ruído nas observações, assim como este último é não-correlacionado com o estado. Considere-se também que o vetor de estado inicial,  $x(t_0)$ , é uma variável aleatória gaussiana com:

$$E[x(t_0)] = \bar{x}(t_0); E\{[x(t_0) - \bar{x}(t_0)][x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^T\} = P(t_0). \quad (2.5)$$

Verifica-se que, para o sistema acima considerado, uma das condições básicas requeridas à aplicação do filtro de Kalman à estimação do estado do sistema não está sendo observada (Jazwinski, 1970): a dedução das equações do filtro de Kalman supõe observações contaminadas apenas por erros aleatórios gaussianos de média nula e, contrariando esta hipótese, conforme a Equação 2.3, as observações consideradas para o sistema acima apresentam também uma parcela de erros tendenciosos. Será apresentado, na sequência, um procedimento cuja finalidade é permitir a aplicação do filtro de Kalman com processamento direto das observações modeladas pela Equação 2.3.

Suponha-se inicialmente os erros tendenciosos das observações modelados dinamicamente por:

$$\dot{e}(t) = B(t) e(t) + w_e(t), \quad (2.6)$$

onde  $e(t)$  é um vetor de dimensão  $m$  cujos elementos representam continuamente no tempo os erros tendenciosos dos respectivos elementos do vetor de observações;  $B(t)$  é uma matriz diagonal  $m \times m$ , de funções contínuas no tempo; e  $w_e(t)$  é um vetor de dimensão  $m$  que representa uma faixa de incerteza em relação ao modelo adotado para os erros. Suponha-se que  $w_e(t)$  possui distribuição gaussiana com:

$$E[w_e(t)] = 0; E[w_e(t) w_e^T(\tau)] = Q_e \delta(t-\tau), \quad (2.7)$$

onde  $Q_e$  é uma matriz positiva semidefinida.

Seja  $b(t)$  o vetor formado pelos elementos da diagonal da matriz  $B(t)$  e suponha-se que este vetor é modelado dinamicamente por:

$$\dot{b}(t) = w_b(t), \quad (2.8)$$

onde  $w_b(t)$  é um vetor de dimensão  $m$  com:

$$E[w_b(t)] = 0; E[w_b(t) w_b^T(\tau)] = Q_b \delta(t-\tau), \quad (2.9)$$

sendo  $Q_b$  uma matriz  $m \times m$  positiva semidefinida.

Os valores iniciais de  $e(t)$  e  $b(t)$ :  $e(t_0)$  e  $b(t_0)$ , respectivamente, serão considerados variáveis aleatórias com distribuição gaussiana e:

$$E[e(t_0)] = \bar{e}_0; E\{[e(t_0) - \bar{e}_0][e(t_0) - \bar{e}_0]^T\} = P_e(t_0), \quad (2.10)$$

$$E[b(t_0)] = \bar{b}_0; E\{[b(t_0) - \bar{b}_0][b(t_0) - \bar{b}_0]^T\} = P_b(t_0), \quad (2.11)$$

onde  $\bar{e}_0$  e  $\bar{b}_0$  são estimativas a priori do vetor de erros tendenciosos e do vetor de parâmetros,  $b$ , no instante  $t_0$ . Suponham-se ainda válidas as seguintes hipóteses de não-correlação:

$$E[w_e v^T] = 0; E[e(t_0) v^T] = 0, \quad (2.12)$$

$$E[w_b v^T] = 0; E[b(t_0) v^T] = 0. \quad (2.13)$$

Incluindo as Equações 2.6 e 2.8 ao modelo dinâmico do sistema dado pela Equação 2.1 obtém-se, em forma vetorial, o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{x}_A(t) = f_A[x_A(t), t] + G_A(t) w_A(t), \quad (2.14)$$

sendo:

$$x_A \triangleq [x(t) \ e(t) \ b(t)]^T \quad (2.15)$$

$$f_A \triangleq [f(x(t), t) B(t) \cdot e(t) \ 0_{mx1}]^T, \quad (2.16)$$

$$G_A \triangleq \begin{bmatrix} G(t) & 0_{nxm} & 0_{nxm} \\ 0_{mxr} & I_{mxm} & 0_{mxm} \\ 0_{mxr} & 0_{mxm} & I_{mxm} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

onde as notações  $I_{ixj}$  e  $0_{ixj}$  representam, respectivamente, as matrizes identidade e nula de dimensão  $ixj$ .

Note-se, pela Equação 2.15, que:

$$e(t) = [x_{A(n+1)} \ x_{A(n+2)} \ \dots \ x_{A(n+m)}], \quad (2.18)$$

representando  $x_{A(i)}$  a  $i$ -ésima componente do vetor  $x_A$ . Com isso a equação de observações (Equação 2.3) pode ser colocada na forma:

$$y(k+1) = h_A[x_A(k+1), k+1] + v(k+1), \quad (2.19)$$

onde:

$$h_A \triangleq h[x(k+1), k+1] + e(k+1). \quad (2.20)$$

Note-se ainda pelas Equações 2.2, 2.7 e 2.9 que:

$$E[w_A(t) w_A^T(\tau)] = Q_A \delta(t-\tau) \quad (2.21)$$

com

$$Q_A = \begin{bmatrix} Q & 0_{rxm} & 0_{rxm} \\ 0_{mxr} & Q_e & 0_{mxm} \\ 0_{mxr} & 0_{mxm} & Q_b \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Em resumo, transformou-se o sistema de equações diferenciais estocásticas, que modelam a dinâmica do sistema físico, em um sistema aumentado com  $n+2m$  equações, acrescentando  $m$  equações para modelar dinamicamente as tendenciosidades das observações e outras  $m$  para modelar os parâmetros desconhecidos destas equações. Com as tendenciosidades incluídas ao vetor de estado do sistema obteve-se um sistema aumentado para o qual tudo se passa se as observações só possuísem a componente aleatória de erro,  $v(k+1)$ , já que a componente tendenciosa faz agora parte do estado.

Para o sistema aumentado definido são válidas todas as hipóteses necessárias. A aplicação do filtro de Kalman para a estimação sequencial de seu estado. Com isto, os erros tendenciosos das observações são estimados juntamente com o estado do sistema dinâmico, sendo retirados automaticamente neste processo as influências destes erros nos valores estimados para as variáveis de estado do sistema original, dentro dos limites de precisão impostos pelo modelo dinâmico simplificado adotado para os erros e condições particulares de observabilidade dos erros tendenciosos.

### 3. APLICAÇÃO DO PROCEDIMENTO EM ESTIMAÇÃO DE ÓRBITA DE SATÉLITE ARTIFICIAL

O procedimento descrito na seção 2 foi testado, através de simulação numérica em computador digital, no problema de estimação de órbita de um satélite artificial, utilizando observações da distância entre estações de rastreamento e o satélite, e da variação temporal desta distância. Consideraram-se as observações afetadas por erros tendenciosos impostos a estes tipos de medidas pelo fenômeno de refração atmosférica. As observações foram geradas a partir da simulação da órbita do satélite TD-1A (ESA, 1977), considerando três estações de rastreamento fictícias dispostas de maneira a existir uma região de intersecção entre os respectivos cones de visibilidade de suas antenas de rastreamento. A órbita é aproximadamente circular (excentricidade igual a 0,0027), com altitude de aproximadamente 550km.

Para a simulação da órbita utilizada para a geração das observações usaram-se as equações do movimento orbital do satélite na forma:

$$\dot{x}(t) = f_m(x, t) + f_{nm}(x, t), \quad (3.1)$$

onde:  $x(t)$  é o vetor de estado orbital do satélite, de dimensão 6, cujas três primeiras componentes são coordenadas de posição do centro de massa do satélite e as outras três são coordenadas de velocidade, em relação a um referencial pseudo-inercial solidário à Terra;  $f_m(x, t)$  é um vetor, de dimensão 6, de funções que modelam o movimento orbital considerando apenas o movimento kepleriano e a influência do achatamento terrestre através do coeficiente zonal  $J_2$  (Kuga, 1982);  $f_{nm}(x, t)$  é um vetor, de dimensão 6, de funções que modelam a influência dos seguintes efeitos perturbadores: termos superiores do geopotencial, arrasto atmosférico e perturbações luni-solares (Kuga, 1982).

As equações para o cálculo das observações da distância estação-satélite,  $\rho$ , e da variação temporal desta distância,  $\dot{\rho}$ , são as seguintes:

$$\rho = \left[ \sum_{i=1}^3 (x_i - x_{ei})^2 \right]^{1/2}, \quad (3.2)$$

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 (x_i - x_{ei}) (\dot{x}_i - \dot{x}_{ei}), \quad (3.3)$$

onde  $x_i$  e  $x_{ei}$ , para  $i = 1, 2$  e  $3$  são coordenadas de posição do satélite e da estação de rastreamento, respectivamente.

Aos valores de  $\rho$  e  $\dot{\rho}$  calculados pelas Equações 3.2 e 3.3 para cada instante de amostragem somaram-se erros aleatórios gaussianos de média nula e desvio padrão de 3 metros e de 0,01 metros por segundo, respectivamente. Esses valores são compatíveis

com a precisão de equipamentos utilizados na prática para a elaboração destes tipos de medidas. A adição de erros tendenciosos devidos ao efeito de refração atmosférica foi feita com auxílio de um modelo matemático deste efeito, baseado no Perfil Modificado de Chapman (Wagner and Velez ed. 1972), modelo este normalmente utilizado para correções destes erros, na fase pré-processamento dos dados de rastreamento, em centros de controle de missões. As observações assim calculadas possuem modelamento matemático da forma da Equação 2.3, ou seja:

$$y(k+1) = h[x(k+1), k+1] + e(k+1) + v(k+1).$$

Visto que, como já foi mencionado, consideraram-se três estações de rastreamento observando simultaneamente o satélite, o vetor de observações,  $y(k+1)$ , possui dimensão  $m=6$ , sendo as três primeiras componentes relativas às observações das distâncias entre cada uma das estações e o satélite e as três últimas relativas às observações de variação temporal destas distâncias.

Nas Figuras 3.1 apresenta-se, a título ilustrativo, a curva do erro devido à refração atmosférica em função do tempo, adicionado às medidas da distância estação satélite, para uma das estações de rastreamento considerada.

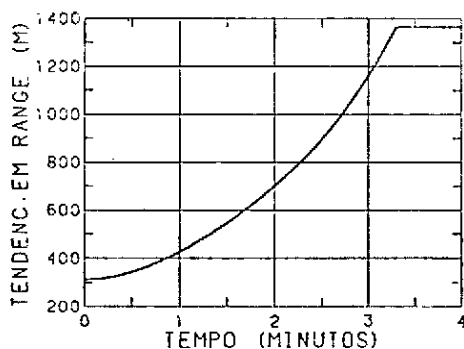


Fig. 3.1 - Erro devido à refração atmosférica em medidas de distância x tempo.

O modelo dinâmico do estado orbital utilizado no estimador foi simplificado, considerando apenas a função  $f_m(x,t)$  da Equação 3.1. As estimativas iniciais, tanto do estado quanto dos erros tendenciosos, para o estimador foram calculados a partir dos valores iniciais da órbita e dos erros simulados, aos quais foram somados erros aleatórios gaussianos de média nula e desvio padrão de 1000 metros e 1 metro por segundo, para as componentes de posição e velocidade, respectivamente. A matriz de covariância inicial do erro no estado foi tomada como uma matriz diagonal cujos elementos são as variâncias tomadas para os erros de posição e velocidade na geração da estimativa inicial do estado.

Para os parâmetros desconhecidos do modelo dinâmico adotado para o erro,  $b(t)$  na equação 2.8, adotaram-se condições iniciais nulas e as variâncias foram calibradas por tentativa e erro.

Deve ainda ser destacado que foi utilizado um procedimento adaptativo para a estimação em tempo real do ruído dinâmico no estado. O objetivo é evitar a divergência do filtro através da estimação deste ruído segundo um critério de consistência estatística entre este e o resíduo nas observações (Rios Neto e Kuga, 1985).

#### 4. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS NOS TESTES DO PROCEDIMENTO

A título de comparação o algoritmo do Filtro Estendido de Kalman (Jaszewski, 1970; Gelb et alii, 1974; Liebelt, 1967) foi aplicado diretamente ao problema da Seção 3, utilizando diretamente as observações simuladas contaminadas com erros tendenciosos de refração atmosférica, sem o emprego do procedimento descrito na Seção 2. Na Figura 4.1 são apresentadas, superpostas em um único gráfico, as curvas dos erros em posição, real e estimado, em função do tempo, para um intervalo de quatro minutos, obtidas para este caso:

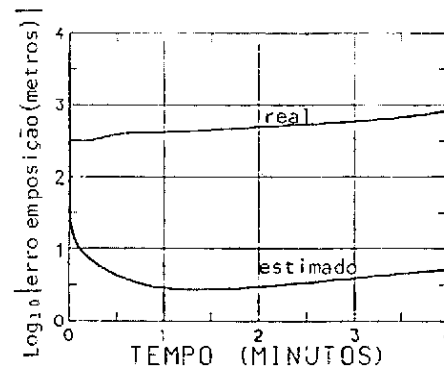


Fig. 4.1 - Curvas sobrepostas dos erros em posição, real e estimado, sem o emprego do procedimento apresentado.

Observa-se nessa figura que o erro real em posição, inicialmente da ordem de 700 metros, cai rapidamente para valores da ordem de 300 metros, passando em seguida a aumentar, atingindo novamente valores próximos a 1000 metros ao fim do intervalo. Por outro lado, o erro estimado, cujo valor inicial utilizado foi de 1000 metros, conforme citado na Seção 3, cai rápida e irrealisticamente para valores menores que 10 metros, o que caracteriza a divergência do filtro. Isto ocorre porque, a despeito dos erros tendenciosos os existentes, para o processo de filtragem tudo se passa como se as observações só contivessem as imprecisões devidas à parcela de erros aleatórios considerada no modelo das observações. Como as informações

sobre o estado contidas nas observações são errôneas, devido à existência de erros tendenciosos não-abrangidos pela faixa de incerteza criada pela parcela de ruído aleatório, o estimador converge para um estado errado. Isto implica um decaimento da matriz de covariância do erro das estimativas e um crescimento do erro real, já que as estimativas mais e mais divergem do valor real do estado do sistema. Com relação aos erros em velocidade as curvas obtidas mostraram um comportamento semelhante com o erro estimado, caindo para valores da ordem de 0,03 metros por segundo, enquanto o erro real atingiu, ao final do intervalo, valores da ordem de 10 metros por segundo.

Serão apresentados a seguir os resultados obtidos com a aplicação, ao mesmo problema, do procedimento para tratamento automático das tendenciosidades. Na Figura 4.2 apresentam-se as curvas dos erros em posição obtidas neste caso.

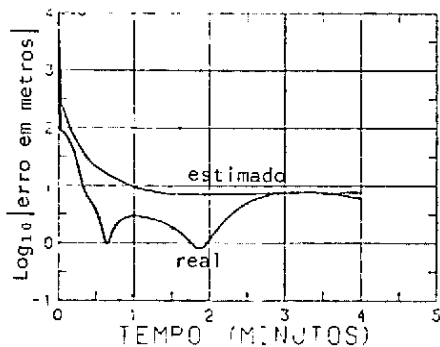


Fig. 4.2 - Curvas sobrepostas dos erros em posição e estimado, com o emprego do procedimento apresentado.

Note-se nesta figura que tanto o erro estimado quanto o real caem para valores da ordem de 6,5 metros, mantendo-se após nesta ordem de grandeza. O comportamento das curvas demonstram uma coerência entre valores reais e estimados, atestando a convergência do estimador. Com relação às curvas relativas aos erros real e estimado em velocidade, os resultados obtidos mostraram também um comportamento semelhante ao apresentado para os erros em posição, caindo os valores destes erros para valores da ordem de 0,025 m/s, confirmando a convergência do filtro. Finalmente, na Figura 4.3, apresentam-se as curvas superpostas dos erros, real e estimado, para as estimativas do erro de refração atmosférica nas observações de distância relativas a uma das três estações de rastreamento fictícias utilizadas.

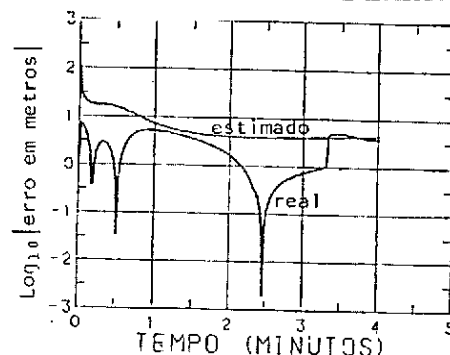


Fig. 4.3 - Curvas sobrepostas dos erros na estimativa do erro de refração em observação de distância, com o emprego do procedimento apresentado.

Conforme pode ser observado pela Figura 3.1, a influência da refração atmosférica nas medidas da distância possui um valor relativamente grande e uma larga faixa de variação (250 a 1400 metros). Ainda assim, os erros estimados e real cometidos nas estimativas dessa tendenciosidade, apresentados na Figura 4.3, caem para valores da ordem de 5 metros, confirmando o bom desempenho do procedimento apresentado.

## 5. CONCLUSÕES

O procedimento apresentado foi testado sob condições rigorosas em que os erros tendenciosos adicionados às observações simuladas eram muitas ordens de grandeza maiores que as imprecisões consideradas para essas observações. Apesar disso, o procedimento apresentou um bom desempenho, mostrando-se promissor para aplicações nas quais o modelo matemático, necessário a uma correção prévia de erros tendenciosos presentes nas observações, seja desconhecido ou muito complexo, ou ainda, que requeira a monitoração constante de certas grandezas envolvidas. Nestes casos, a fase de correção prévia pode ser evitada através da estimação conjunta das tendenciosidades com o estado do sistema, efetuada com o emprego do procedimento. Deve ser ressaltado, porém, que mesmo em casos nos quais as tendenciosidades das observações já foram corrigidas em um pré-processamento, esta técnica poderia, a princípio, refinar o processo de estimação de estado, evitando a divergência do filtro em virtude de possíveis erros tendenciosos residuais que ainda possam estar presentes nas observações, devido a imprecisões dos procedimentos de correção utilizados no pré-processamento.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CAPPELLARI, J.O.; VELEZ, C.E.; FUCHS, A.J. ed., (1976) Mathematical Theory of the Goddard Trajectory Determination System. Goddard Space Flight Center.
- EUROPEAN SPACE AGENCY (ESA)., (1977). TD-1A. In: 6 Report presented by the European Space Agency to the 20th COSPAR Meeting, Tel Aviv, Israel (ESA SP-1002).
- GELB, A.; KASPER, J.F.; NASH Jr., R.A.; PRICE, C.F.; SUTHERLAND Jr., A.A., (1974). Applied Optimal Estimation. Cambridge, MA, MIT.
- JAZWINSKI, A.H. (1970) Stochastic Processes and Filtering Theory. New York, Academic.
- KUGA, H.K. (1982) Estimação adaptativa de órbitas aplicada a satélites a baixa altitude. Dissertação de mestrado, São José dos Campos, Brazil. (INPE-2316-TDL/079).
- LIEBELT, P.B. (1967). An Introduction to Optimal Estimation. Addison-Welsey.
- ORLANDO, V., (1983). Técnicas Estocásticas Aplicadas à Suavização, Tratamento de Tendências e Compressão de Dados de Rastreamento ou Telemetria de Satélites Artificiais. Tese de Doutorado, São José dos Campos, Brasil. (INPE-2909-TLD/148).
- RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. (1985) Kalman Filtering State Noise Adaptive Estimation. Proceedings of TELECON'85 held at Rio de Janeiro, Brazil, Dec. 1985.
- WAGNER, W.E.; VELEZ, C.E. ed. (1972). Goddard Trajectory Determination Subsystem Mathematical Specification. Goddard Space Flight Center.
- WERTZ, J.R.; (1978) Spacecraft Attitude Determination and Control. D.Reidel, Astrophysics and Space Science Library.