

Determinação do Fator Q Ôhmico de Ressonadores com Corrugação Transversa de Perfil Senoidal

Pedro J. Castro, Joaquim J. Barroso e Joaquim P. Leite
INPE, Laboratório Associado de Plasma, C.P. 515, 12201-970 São José dos Campos, SP

Resumo — Ressonadores cilíndricos com corrugações azimutalmente periódicas descritas por uma função senoidal são investigados teórica e experimentalmente. Os experimentos foram conduzidos para medir as frequências de ressonância e seus correspondentes fatores de qualidade ôhmicos para uma superposição de modos TE que se apresentam na forma de harmônicos espaciais nesse tipo de estrutura. A teoria é comparada com os experimentos em cavidades com 4 e 8 períodos de corrugação transversal e amplitudes de corrugação de 10 e 20% em relação ao raio médio, sendo obtida uma boa concordância com os valores medidos. Uma comparação dos Q ôhmicos desses ressonadores é feita com os cilíndricos de seção circular.

Palavras-chaves — Fator de qualidade ôhmico, ressonadores corrugados, harmônicos espaciais, magnetrons, gyrotrons harmônicos

I. INTRODUÇÃO

Neste tipo de ressonador os modos normais consistem na superposição de harmônicos espaciais, todos com a mesma velocidade de grupo, mas com velocidades de fase individuais para satisfazer a condição de contorno de que a componente tangencial resultante do campo elétrico se anule ao longo do perfil senoidal de determinado período de corrugação.

A cavidade azimutalmente corrugada possui importante aplicação em girotrons harmônicos porque ela possibilita eficiente interação harmônica entre um feixe helicoidal de elétrons e um determinado modo TE da composição de modos (ou harmônicos espaciais, representados por componentes de Fourier que se superpõem e coexistem no interior da cavidade para satisfazer as condições de contorno na parede corrugada).

Confinados por um campo magnético uniforme B_0 em um sistema axi-simétrico, os elétrons são injetados (com energia γmc^2) na cavidade do girotron harmônico povoada de modos TE e a atravessam girando — na frequência ciclotrônica $\Omega_B = eB_0 / \gamma m$ (onde e e m representam a carga e a massa do elétron, respectivamente; γ é o fator relativístico) — em torno do eixo do sistema. Ao fim do percurso, os elétrons terão transferido energia para o campo de RF da cavidade desde que determinada condição de sincronismo seja satisfeita. A

condição de sincronismo significa que o elétron mantém a mesma relação de fase com uma particular componente de Fourier, ou seja, $\omega t - n\Phi = \text{const.}$, sendo n o número harmônico, ω — a frequência angular do campo de RF e Φ — a posição angular do elétron, isto é, $\partial\Phi/\partial t = \Omega_e$. Tem-se então $\omega = n\Omega_e$ que reescrita na forma

$$B_0 [\text{kG}] = \frac{1}{n} \frac{\gamma f [\text{GHz}]}{2,8} \quad (1)$$

estabelece a condição de sincronismo elétron-campo de RF.

Em termos práticos, isto significa que a intensidade de campo magnético em um girotron harmônico fica reduzida pelo fator n (o número harmônico da interação) em relação a um girotron que opera na frequência ciclotrônica fundamental ($n=1$). Como ilustração, um girotron em 32 GHz requer um campo magnético de 12,3 kG para operação fundamental, enquanto este campo se reduz a 1,5 kG em operação harmônica com $n=8$. Redução de campo magnético implica em redução de peso, volume e energia de alimentação das bobinas com a conseqüente possibilidade de utilização de ímãs permanentes.

Desta forma, o emprego de cavidades azimutalmente corrugadas em girotrons harmônicos torna possível a realização de fontes de radiação submilimétrica de alta potência em sistemas compactos e portáteis. Assim se prevê a utilização de um girotron harmônico de 480 GHz em diagnóstico de plasma do tokamak ETE [1] — determinação de densidade e do perfil da corrente a partir de medidas de campo magnético com base na rotação de Faraday.

A confecção de tais estruturas com seção reta senoidalmente corrugada utiliza a técnica de erosionamento com fio. Neste processo, a cavidade é usinada a partir de um tarugo de cobre (de 10 cm de comprimento), onde um fio de latão é introduzido através de um canal de 0,25 mm de diâmetro. O fio é então aquecido ôhmicamente e o seu movimento é controlado por um torno computadorizado para remover a parte interna do tarugo seguindo o trajeto senoidal prescrito. Depois de usinado, dois discos de cobre são fixados nas extremidades do cilindro erosionado, assim fechando o guia de onda oco de 10 cm de comprimento. Utilizando essa técnica, foi confeccionado um conjunto de quatro cavidades de raio médio $R_0 = 1.00$ cm, amplitude de corrugação de $\varepsilon = 0,1$ e $\varepsilon = 0,2$ com períodos de corrugação de $N = 4$ e $N = 8$.

Pedro J. de Castro, castro@plasma.inpe.br, Joaquim J. Barroso, barroso@plasma.inpe.br, Joaquim P. Leite, leite@plasma.inpe.br, — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais — INPE, Laboratório Associado de Plasma, Tel. +55-12-39456689, Fax +55-12-3945-6710.

Este trabalho foi apoiado pela FAPESP — Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, processo nº 2001/02496-6.

II. TEORIA ELETROMAGNÉTICA, RELAÇÃO DE DISPERSÃO E FATOR Q ÔHMICO

No presente estudo, o perfil da cavidade corrugada azimutalmente obedece à seguinte variação senoidal:

$$R_w(\theta) = R_0(1 + \varepsilon \cos(N\theta)) \quad (2)$$

onde ε é a amplitude de corrugações, N fornece o número de corrugações e R_0 é o raio médio da cavidade como ilustrado na Fig. 1.

Os autovalores transversais da cavidade cilíndrica com a secção transversal de forma senoidal são determinados a partir da expansão dos modos normais em harmônicos espaciais de acordo com o teorema de Floquet [2-5]. Como no caso de girotrons de operação fundamental, somente os modos TE são considerados no presente trabalho, para os quais a seguinte equação de dispersão relaciona o autovalor transversal com os parâmetros de corrugação:

$$\det[D_{nm}(k_c)] = 0 \quad (3)$$

em que D_{nm} é a matriz

$$D_{nm} = \frac{N}{\pi} \int_0^{2\pi} \{k_c R_w^2(\theta) J'_v[k_c R_w(\theta)] - j\varepsilon R_0 N \cos(N\theta) J_v[k_c R_w(\theta)]\} e^{-jN(m-n)\theta} d\theta \quad (4)$$

onde $v = mN + \ell$ com ℓ e m inteiros. O índice v indica que um modo normal é composto de um número infinito de componentes azimutais; o índice ℓ caracteriza o modo por especificar a diferença de fase entre corrugações.

Embora a equação de dispersão envolva uma matriz infinita, na prática temos de limitar os valores de n e m . A idéia é escolher um valor adequado de m ($m = n$) para o qual a solução da (3) seja essencialmente a mesma para um valor superior ao m fixado.

Se a estrutura da cavidade corrugada for fixa, então o modo de ressonância é caracterizado pelo índice ℓ do modo e que indica a diferença de fase entre os campos que ocupam as corrugações. Os modos para $\ell = 0$ são conhecidos como modos 2π , em que os campos de corrugações adjacentes têm a mesma fase. Os modos $\ell = N/2$ (admitindo que N é um número inteiro par) são os chamados modos π , que significa que há uma diferença de fase de 180° entre os campos de corrugações adjacentes.

Como ilustração, a Fig. 1 representa as linhas de campo elétrico em cavidade de 8 períodos para os modos π e 2π , nos quais se pode observar as suas respectivas características.

O fator de qualidade ôhmico (Q_Ω) é calculado da expressão

$$Q_\Omega = \omega_o E_{cav} / P_d \quad (5)$$

onde ω_o é a frequência de oscilação na ausência de perda, e E_{cav} indica a energia média armazenada em um período de

oscilação, isto é,

$$E_{cav} = \frac{1}{2} \varepsilon_o \int |E|^2 dV \quad (6)$$

com as componentes do campo elétrico sendo dadas por

$$E_r(r, \theta, z) = -\sum_m A_m \frac{v}{k_\perp r} J_v(k_\perp r) \sin[(mN + \ell)\theta] \sin \beta_\parallel z \quad (7)$$

$$E_\theta(r, \theta, z) = \sum_m A_m J'_v(k_\perp r) \cos[(mN + \ell)\theta] \sin \beta_\parallel z \quad (8)$$

com $v = mN + \ell$, sendo os coeficientes A_m e o número de onda transversal determinados a partir da relação de dispersão.

A potência dissipada P_d nas paredes da cavidade é obtida por

$$P_d = \frac{R_s}{2} \int_{\text{paredes}} |H_{tan}|^2 dS \quad (9)$$

onde H_{tan} é a componente do campo magnético tangente às superfícies resistivas caracterizadas por $R_s = 1/\sigma\delta$, sendo σ

— a condutividade do material e $\delta = \sqrt{2/\omega_o \mu_o \sigma}$ — a profundidade pelicular. As componentes do campo magnético expressam-se por

$$H_z(r, \theta, z) = j \sum_m A_m J_v(k_\perp r) \cos v \theta \sin \beta_\parallel z \quad (10)$$

$$H_r(r, \theta, z) = \frac{j\beta_\parallel}{k_\perp^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (11)$$

$$H_\theta(r, \theta, z) = -\frac{j\beta_\parallel}{k_\perp^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (12)$$

onde $\beta_\parallel$ representa o número de onda axial.

No caso da cavidade circular ($N = 0$), obtém-se uma expressão analítica exata para o fator de qualidade ôhmico (Q_Ω) que pode ser escrita na seguinte forma:

$$Q_\Omega = \frac{V}{S\delta} \left\{ \frac{(1 - \frac{\ell^2}{\chi^2})(1 + A)[1 + \frac{1}{A^2}(\frac{n\pi}{\chi})^2] \frac{A^2 \chi^2}{(n\pi)^2}}{(1 - \frac{\ell^2}{\chi^2}) + A \frac{\ell^2}{2\chi^2} + A^3 \frac{\chi^2}{2(n\pi)^2}} \right\} \quad (13)$$

onde V é o volume e S — a superfície total da cavidade, $A = L/R_0$ — a razão de aspecto comprimento/raio, χ — n -ésima raiz

de $J_\ell'(x) = 0$, ℓ – índice azimutal, n – índice axial. O termo entre chaves pode ser interpretado como um fator geométrico.

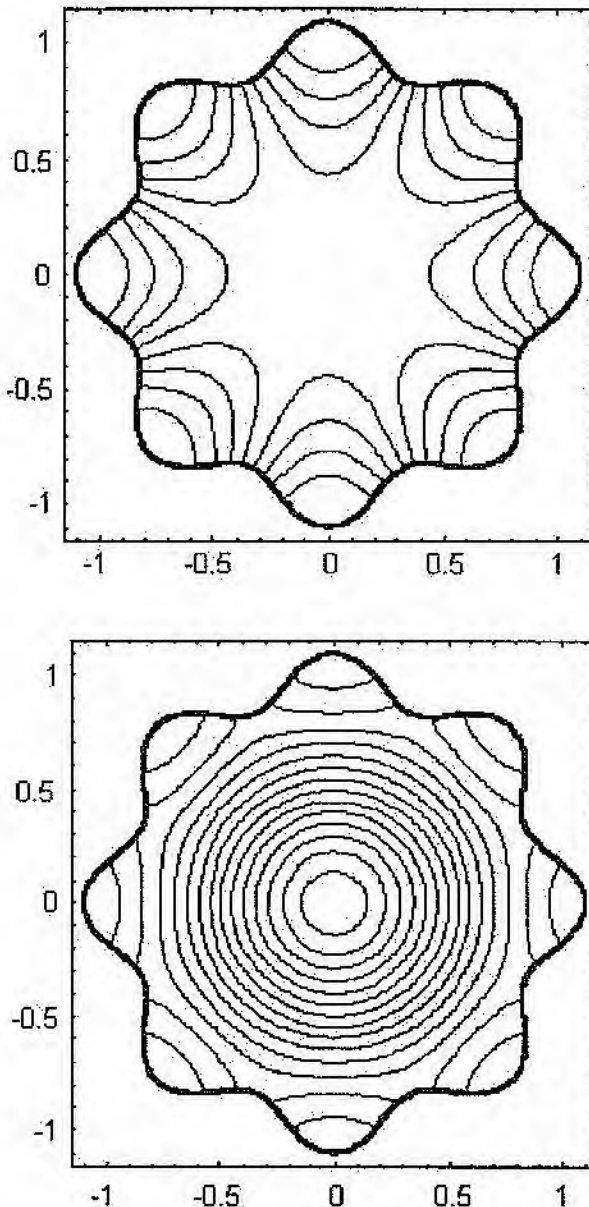


Fig. 1. Linhas de campo elétrico em cavidade de 8 períodos para os modos π (superior) e 2π (inferior)

III. MEDIÇÕES DE FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA E Q ÔHMICO

A Fig. 2 ilustra a montagem experimental para medir as frequências de ressonância e dos seus associados Q_Ω . Os modos ressonantes TE foram excitados por meio de uma sonda magnética (ou elétrica) que injeta potência através de um furo de diâmetro de 1 mm localizado na tampa [6]. Uma sonda receptora detectou o modo excitado. O tipo de sonda e o local de excitação e extração de potência de microondas dependeram da eficiência de acoplamento para cada modo.

Para cada modo detectado, as sondas foram devidamente posicionadas para maximizar a intensidade do sinal detectado, e ao mesmo tempo, para desacoplar o máximo possível a cavidade do circuito externo a fim de obter o Q não-carregado. Desta forma se pôde assegurar que o fator de qualidade medido é o Q ôhmico ou não-carregado. A sua medição decorreu das medições das frequências nos pontos de -3 dB do espectro detectado.

Os ressoadores foram confeccionados com a técnica de erosionamento ôhmico por um torno computadorizado. Quatro protótipos de comprimento $L = 10,00$ cm foram testados com períodos de corrugação $N = 4$ e $N = 8$ e amplitudes $\varepsilon = 0,1$ e $\varepsilon = 0,2$ em relação ao raio médio do ressoador de $R_0 = 1,00$ cm.

Os parâmetros geométricos e os de corrugação dos diversos ressoadores foram usados na equação de dispersão (3) para calcular os autovalores $\chi = k_c R_0$ dos modos normais referentes a cada índice azimutal $\ell \in [0, N/2]$. Determinado o valor de χ , as correspondentes frequências de ressonância são calculadas pela expressão:

$$f(\text{GHz}) = \frac{15}{\pi} \sqrt{\left(\frac{\chi}{R_0 / \text{cm}}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L / \text{cm}}\right)^2} \quad (14)$$

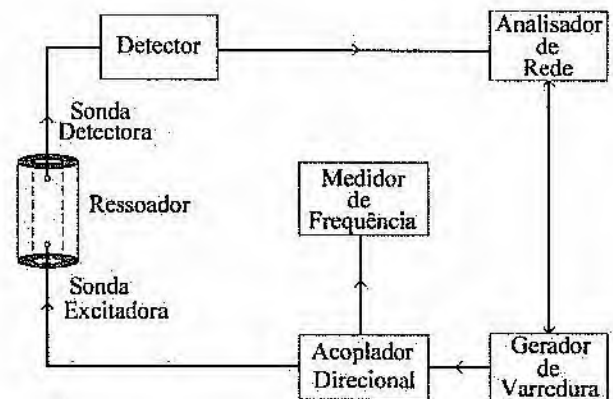


Fig. 2. Montagem experimental para medir as frequências de ressonância e os correspondentes Q_Ω dos modos investigados

IV. RESULTADOS EXPERIMENTAIS E DISCUSSÕES

A Tabela 1 apresenta os resultados calculados e medidos das frequências de ressonância e respectivos fatores Q ôhmicos para modos fundamentais TE detectados na faixa de 8 a 25 GHz. O Q_Ω foi calculado adotando o valor da condutividade do cobre como $5,6 \times 10^7$ S/m. Este valor foi medido experimentalmente [7] tendo em vista que não se sabia qual o tipo de cobre usado na usinagem das peças. O valor da condutividade altera significativamente o valor do Q_Ω . Resta dizer que em relação ao latão, o valor do Q_Ω diminui cerca de 90%. Efetuando um tratamento estatístico dos dados, verificou-se que nas medições do Q_Ω , o desvio padrão relativo é tipicamente da ordem de 2%.

Nas medições do Q_Ω constatou-se experimentalmente que a sonda magnética é mais eficiente em relação à sonda elétrica e proporciona um acoplamento mais fraco sem perder a resolução do sinal.

Como outro padrão de comparação, foram feitas medições para o ressonador cilíndrico de seção circular com raio $R_0 = 1,00$ cm. Como se pode observar pelos resultados mostrados na Tabela 1, há uma maior consistência entre os valores experimentais em relação aos calculados, as frequências de ressonância são todas de valores inferiores. Isto se deve a uma maior homogeneidade da estrutura do ressonador cilíndrico reto. Tal fato não ocorre com as estruturas dos ressoadores corrugados, cujas variações azimutais não correspondem exatamente à função senoidal por defeito de fabricação, o que se pôde constatar visualmente. Isto se refletiu nos valores medidos, pois as imperfeições na estrutura senoidal devem ter afetado algumas frequências de ressonância mais que outras, influenciando também no valor do Q_Ω , pois altera a relação volume/área da superfície total.

TABELA I
VALORES CALCULADOS E MEDIDOS DAS FREQUÊNCIAS DE
RESSONÂNCIAS E DOS SEUS RESPECTIVOS Q_Ω PARA ÍNDICES ℓ
DOS MODOS TE

N	ε	Índice do modo ℓ	calculado F [GHz]	medido $F \pm 1 \times 10^{-3}$ [GHz]	calculado Q_Ω	medido Q_Ω
4	0,1	0 (2π)	17,7693	17,6678	17860	13133
4	0,1	1	8,7316	8,6916	9884	7244
4	0,1	2 (π)	12,7979	12,7347	9329	6920
4	0,2	0 (2π)	16,3847	16,3410	15266	12410
4	0,2	1	8,2144	8,2136	9500	7220
4	0,2	2 (π)	10,9479	10,9725	8852	7200
8	0,1	0 (2π)	18,0961	17,9926	18962	14265
8	0,1	1	8,7139	8,6755	9804	8175
8	0,1	2	13,9422	14,1022	9475	7580
8	0,1	3	18,2260	18,3229	8739	7840
8	0,1	4 (π)	20,2738	20,0446	7853	5977
8	0,2	0 (2π)	17,1307	17,1479	16446	12385
8	0,2	1	8,1840	8,1146	7600	5747
8	0,2	2	12,1686	11,9954	7070	5346
8	0,2	3	14,5782	14,3185	6154	5303
8	0,2	4 (π)	15,3839	15,3726	5464	4041
0	0	TE ₀₁	18,3435	18,2854	20302	18929
0	0	TE ₁₁	8,9116	8,8852	10083	9485
0	0	TE ₂₁	14,6494	14,6083	10357	9483
0	0	TE ₃₁	20,1010	19,9727	10383	9125
0	0	TE ₄₁	25,4158	25,3378	10332	8750

De qualquer forma, foi verificada uma boa concordância entre a teoria e os experimentos; para as frequências de ressonância uma discrepância média situou-se abaixo de 1%, com exceção de um modo ($N = 8$, $\varepsilon = 0,2$ e $\ell = 3$) que atingiu 1,8%; quanto aos Q_Ω os piores resultados de discrepância alcançaram 20-26%, principalmente para as frequências mais altas, acima de 20 GHz.

Resta ainda considerar que, relativamente às frequências de ressonância, o cálculo dos fatores de qualidade envolve uma propagação de erro pelas expansões em série dos campos e pela integração nas superfícies das cavidades e isso se traduz num resultado aproximado.

Para melhor ilustrar o comportamento dos ressoadores corrugados de períodos de corrugação $N = 4$ com os não-corrugados, a Fig. 3 retrata o efeito da amplitude de corrugação (ε) sobre o Q_Ω . Então, para ressoadores com o mesmo número de corrugações, o Q_Ω diminui à medida que aumenta a amplitude de corrugação. Dependendo da aplicação quando não são exigidas grandes perdas ôhmicas, este é um aspecto que pode não ser muito interessante para os ressoadores corrugados.

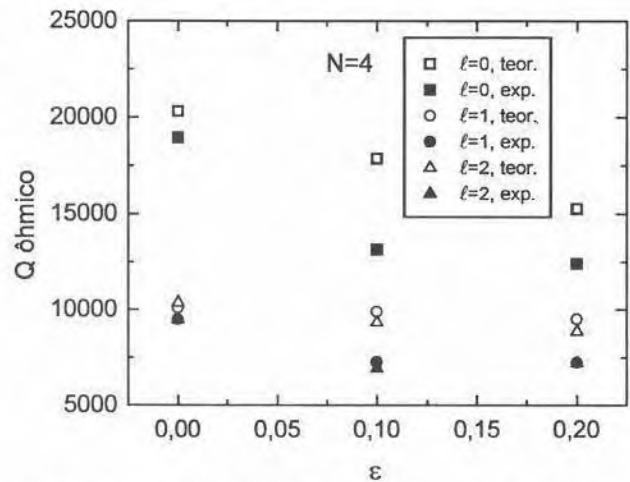


Fig. 3. Dependência do Q_Ω com a amplitude de corrugação para ressoadores corrugados com número de corrugações azimutais $N = 4$

A Fig. 4 mostra como varia o Q_Ω em relação aos diferentes índices de modo ℓ para o ressonador com $N = 8$ e $\varepsilon = 0,1$. Isto mostra que o Q_Ω decresce quando o modo ressonante da cavidade passa de 2π (modo de volume) para o modo de superfície π .

A Fig. 5 apresenta os detalhes em diferentes vistas dos ressoadores corrugados com perfil senoidal investigados neste trabalho.

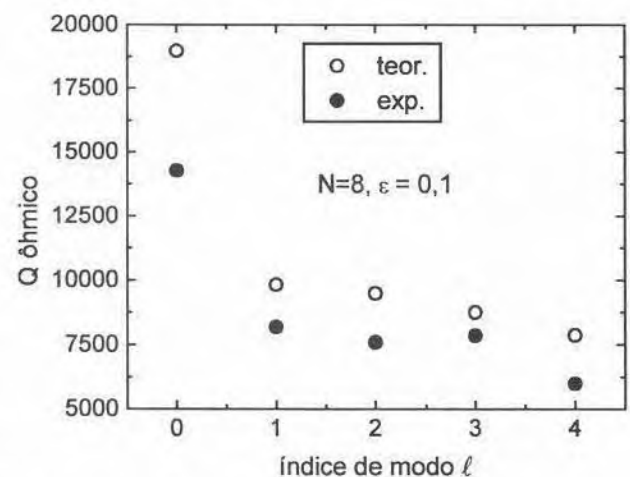


Fig. 4. Variação de Q_Ω para os diferentes índices de modo ℓ do ressonador com $N = 8$ e $\varepsilon = 0,1$

V. CONCLUSÕES

Ressoadores cilíndricos corrugados azimutalmente conforme um contorno senoidal foram confeccionados de cobre pela técnica de erosionamento ôhmico e estudados teórica e experimentalmente. Medições das frequências de ressonância e dos Q ôhmicos para modos TE foram realizadas e comparadas com os valores previstos teoricamente e foi obtida uma concordância relativamente boa. Os resultados experimentais podem ser melhorados pela confecção de protótipos com um acabamento mais preciso do perfil senoidal.

As estruturas em guias de ondas cilíndricos aqui estudadas com perfil corrugado de formato contínuo apresentam um aspecto atraente para dispositivos eletrônicos relativísticos pela sua maior resistência à ruptura elétrica de campos de RF em comparação com as cavidades tradicionais de magnetrons. Ressoadores azimutalmente corrugados encontram aplicação em fontes de alta potência em ondas milimétricas.

REFERÊNCIAS

- [1] G.O. Ludwig et al., "The ETE spherical tokamak project", INPE, São José dos Campos, Brazil, Tech. Rep. 7301-RPQ/699, Aug. 1999.
- [2] N. Kroll, "The untrapped resonant system", in *Microwave Magnetrons*, G. B. Collins, ed., McGraw-Hill, New York, 1948, ch. 2.
- [3] P. S. Rha, L. R. Barnett, J. M. Baird, and R. W. Grow, "Self-consistent simulation of harmonic gyrotron and peniotron oscillator operating in a magnetron-type cavity", *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 36 (4), pp. 789-800, 1989.
- [4] G. F. Brand, "Resonant frequencies of a rising-sun gyrotron cavity", *Int. J. Infrared and Millimeter Waves*, vol. 17, No. 1, pp. 269-281, 1996.
- [5] R.A. Corrêa, and J.J. Barroso, "Electromagnetic field and cutoff frequencies of the azimuthally rippled wall waveguide", *Int. J. Infrared and Millimeter Waves*, 21(6), pp. 1019-1029, June 2000.
- [6] P.J. Castro, J.J. Barroso, and J.P. Leite, "Resonance frequency of cavities with sinusoidally rippled cross sections", *Proc. Int. Microwave and Optoelectronics Conf.*, Belém-PA, Brazil, Aug. 6-10, 2001, pp. 75-78.
- [7] J.J. Barroso, P.J. Castro, and J.P. Leite, "Medida da condutividade elétrica de materiais metálicos através do fator Q de uma cavidade ressonante". Apresentado neste Simpósio.

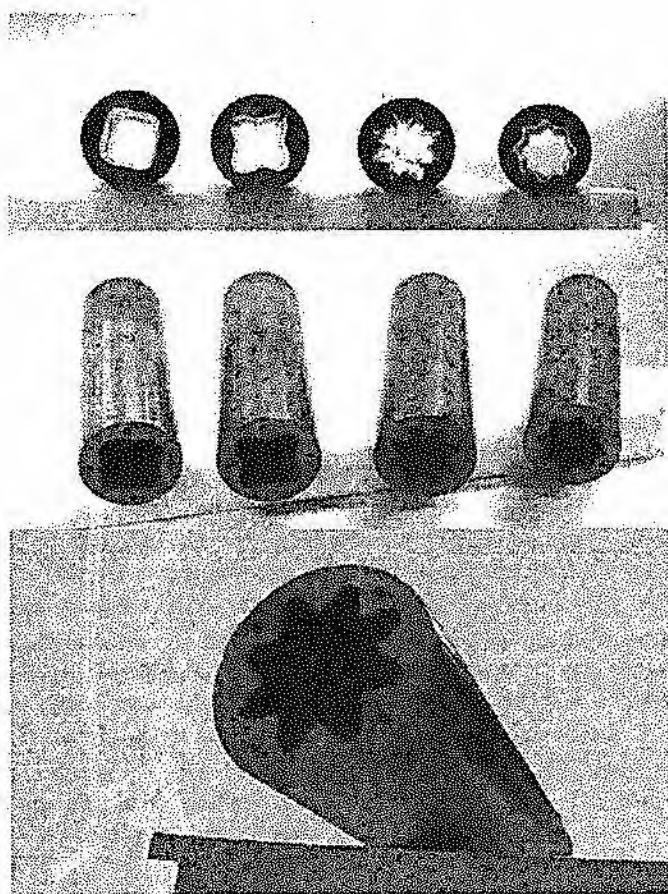


Fig. 5. Vistas dos ressoadores com corrugação transversa de perfil senoidal. O comprimento e o diâmetro externo dos cilindros são respectivamente 10,0 e 3,2 cm.