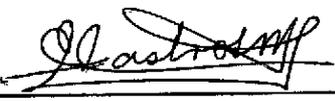


1. Publicação nº <i>INPE-3428-PRE/688</i>	2. Versão <i>2ª*</i>	3. Data <i>Fev., 1985</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DIN-DGA</i>	Programa <i>DENUME</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>DIFERENÇAS FINITAS RELAXAÇÃO SUCESSIVA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS</i>			
7. C.D.U.: <i>519.63</i>			
8. Título <i>UMA VARIAÇÃO DO MÉTODO S.O.R. PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS POR DIFERENÇAS FINITAS EM AERONOMIA</i>		10. Páginas: <i>16</i>	
9. Autoria <i>Elia Rosario Castro San Miguel Inez Staciarini Batista</i>		11. Última página: <i>11</i>	
		12. Revisada por <i>Bittencourt</i> <i>Guilherme Bittencourt</i>	
Assinatura responsável 		13. Autorizada por <i>Parada</i> <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor Geral</i>	
14. Resumo/Notas <i>A solução de sistemas de equações diferenciais parciais usando esquemas de diferenças finitas leva à solução de sistemas de equações lineares de grande porte, sendo portanto mais conveniente o uso de métodos iterativos. No problema de cálculo global do potencial eletrostático na região E da ionosfera, tem-se uma equação diferencial parcial elíptica para cuja discretização são usados esquemas de diferenças finitas de intervalo variável e um algoritmo de sobre-relaxação sucessiva (S.O.R.) para a solução do sistema associado.</i>			
15. Observações <i>Trabalho apresentado no VII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 24-28 de setembro de 1984, em Campinas, SP.</i> <i>*Versão revisada em Maio de 1985.</i>			

ABSTRACT

The solution of partial differential equations systems using finite difference schemes leads to the solution of large sparse linear systems, thus being convenient the use of iterative methods. In the global electrostatic potential problem at the E-region in the ionosphere, we have an elliptic partial differential equation for whose discretization finite difference schemes with variation in the distance between the net points and the Successive Over Relaxation Algorithm (S.O.R.) are used for the resolution of the associated system.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1. <u>INTRODUÇÃO</u>	1
2. <u>PROBLEMA CONSIDERADO</u>	1
3. <u>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA</u>	2
4. <u>SOLUÇÃO NUMÉRICA</u>	3
5. <u>SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES</u>	5
6. <u>TÉCNICAS COMPUTACIONAIS</u>	6
7. <u>CONCLUSÕES</u>	9
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	



1. INTRODUÇÃO

A solução de sistemas de equações diferenciais parciais usando esquemas de diferenças finitas geralmente leva à solução de sistemas de equações lineares de grande porte. É, portanto, pouco conveniente a utilização de métodos diretos, tais como calcular a inversa ou fatorar a matriz correspondente pela eliminação de Gauss, já que estes métodos estão sujeitos a restrições computacionais.

Estas restrições agravam-se ainda mais quando a formulação matemática do problema, o sistema de equações de conservação e as condições de contorno geram uma matriz associada sem nenhuma característica especial de esparsidade.

No problema de cálculo global do potencial eletrostático da região E da ionosfera, para estudar o acoplamento eletrodinâmico das regiões E e F (Batista, não publicado) tem-se uma formulação matemática com as características acima descritas.

Neste trabalho apresenta-se a solução do problema usando esquemas de diferenças finitas para a discretização e o método S.O.R. (Successive Over Relaxation) para a solução do sistema de equações lineares resultantes.

2. PROBLEMA CONSIDERADO

Os gradientes horizontais de pressão existentes na termosfera devidos ao aquecimento solar dão origem a ventos termosféricos horizontais que, por sua vez, induzem movimentos às partículas carregadas da região F da ionosfera. Embora o movimento principal seja a deriva dos íons e elétrons ao longo das linhas de campo magnético, há um movimento bem mais lento na direção perpendicular tanto ao campo quanto ao vento, o qual gera correntes elétricas. Estas correntes, por sua vez, fluem através das linhas de campo magnético devido à alta mobilidade dos elétrons nesta direção, e o circuito se fecha na região E quando sua

condutividade $\bar{\epsilon}$ suficientemente alta. Este mecanismo, proposto por Rishbeth (1971 a,b), e modelado por Heelis et alii (1974), acopla as regiões E e F da ionosfera equatorial, e os efeitos dessas correntes na distribuição do campo elétrico podem ser estudados através da resolução das equações elétricas e dinâmicas.

Neste trabalho apresenta-se o método numérico usado na solução da equação do potencial eletrostático da região E, a qual surge das considerações acima descritas.

3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A equação do potencial eletrostático na região E da ionosfera $\bar{\epsilon}$ é uma equação elíptica do tipo Poisson

$$\nabla^2 \psi = G, \quad (1)$$

porém com todos os coeficientes variáveis. Após simplificações algébricas e algumas considerações físicas do problema, obtém-se uma equação do tipo

$$A(\phi, \theta) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + B(\theta, \phi) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + C(\theta, \phi) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + D(\theta, \phi) \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = G(\theta, \phi), \quad (2)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \left. \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi/2} = 0, \\ \text{b) } \psi(\theta, 0) = \psi(\theta, 2\pi) = \psi(\theta), \\ \text{c) } \psi(0, \phi) = 0, \end{array} \right.$$

onde:

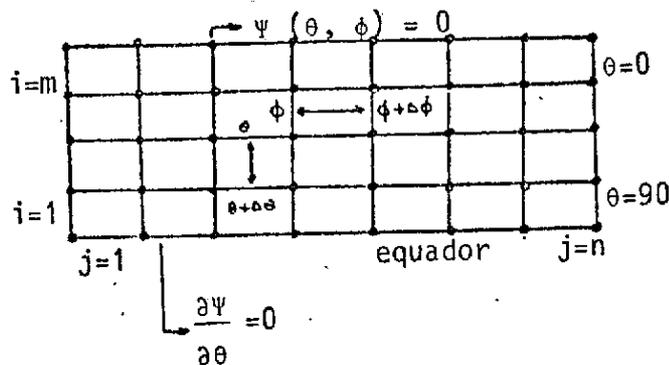
- a) A distribuição do potencial elétrico na região E é simétrica com relação ao equador.
- b) As derivadas de Ψ com relação a θ e ϕ , e conseqüentemente o campo eletrostático, não mudarão de valor pela adição de uma constante; logo qualquer valor constante pode ser atribuído a Ψ no pólo e, neste caso, $\Psi=0$, $\theta=0$.
- c) As variações do tempo local e da longitude são equivalentes. Para uma dada distribuição do campo de corrente na região E, o potencial eletrostático deve ser fixado para períodos sucessivos de 24 horas.

4. SOLUÇÃO NUMÉRICA

A Equação pode ser resolvida pelo método de diferenças finitas (Young Jr., 1962) e por relaxação sucessiva.

A equação é resolvida para um único hemisfério devido à condição de simetria em relação ao equador.

Aplicando diferenças finitas centrais de 2ª ordem a uma rede do tipo:



as derivadas parciais na Equação 2 podem ser aproximadas por:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{(\Delta\phi)^2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\Delta\phi},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = - \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1(\Delta\theta_1+\Delta\theta_2)} \Psi_{i+1,j} + \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2(\Delta\theta_1+\Delta\theta_2)} \Psi_{i-1,j} + \frac{\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1}{\Delta\theta_1\Delta\theta_2} \Psi_{i,j},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = \frac{2}{\Delta\theta_1(\Delta\theta_1+\Delta\theta_2)} \Psi_{i+1,j} + \frac{2}{\Delta\theta_2(\Delta\theta_1+\Delta\theta_2)} \Psi_{i-1,j} - \frac{2}{\Delta\theta_1\Delta\theta_2} \Psi_{i,j}.$$

Em cada ponto nodal da malha, a equação diferencial parcial é aproximada por:

$$A\Psi_{i+1,j} + B\Psi_{i,j} + C\Psi_{i-1,j} + D\Psi_{i,j+1} + E\Psi_{i,j-1} - G = 0 \quad (3)$$

para

$$\begin{aligned} i &= 2, \quad m-1, \\ j &= 2, \quad n-1, \end{aligned}$$

onde as constantes A, B, C, D, E, G mudam para as condições de contorno (San Miguel, 1983).

Por serem as variações em θ maiores na vizinhança do equador ($\theta = \pi/2$), é usado o método de diferenças finitas com intervalo variável como no trabalho de San Miguel (1983). Na variável ϕ é usado um intervalo constante.

A Equação 3 aplicada aos pontos da rede define um sistema de equações lineares.

5. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Para a solução iterativa, coloca-se o sistema na seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} u_j = b_i,$$

onde

$A = (a_{ij})$ é uma matriz $N \times N$ conhecida;

$N = \bar{n}$ é o número de incógnitas e de equações; neste caso $n = n - m + 1$;

$b = b_i$ é um vetor coluna conhecido;

$u = u_j$ é o vetor de incógnitas:

Utilizando o algoritmo de relaxação sucessiva S.O.R., tem-se

$$u = Bu + C,$$

onde

$$B = (b_{ij}),$$

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} & \text{se } i \neq j, \\ 0 & \text{se } i = j, \end{cases}$$

$$c_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \implies a_{ii} \neq 0.$$

Então, define-se

$$u_i^{(n+1)} = w \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} u_j^{(n+1)} + \sum_{j=i+1}^n b_{ij} u_j^{(n)} + C_i \right\} + (1-w) u_i^{(n)},$$

onde

w é um parâmetro real conhecido como "fator de relaxação" para a aceleração de convergência, $w \in [1,2)$.

Aplicando este método à Equação 3, obtêm-se

$$\psi_{ij}^{(n+1)} = w \left\{ A'_{i+1,j} \psi_{i+1,j}^{(n)} + C'_{i,j+1} \psi_{i,j+1}^{(n)} + D'_{i-1,j} \psi_{i-1,j}^{(n+1)} + E'_{i,j-1} \psi_{i,j-1}^{(n+1)} - G'_{ij} \right\} + (1-w) \psi_{ij}^{(n)}$$

para $i=2,3 \dots m-1$
 $j=2,3 \dots n-1$

com as devidas modificações para as condições de contorno.

6. TÉCNICAS COMPUTACIONAIS

O algoritmo foi implementado em linguagem FORTRAN no sistema B-6800 do INPE como uma sub-rotina chamada SORDF.

A solução do problema é obtida após um número finito de iterações por convergência, ou por um limitante máximo do número delas. A solução inicial $\psi_{ij}^{(0)}$ é igual à solução nula $\psi_{ij}^{(0)}=0$.

Os valores dos parâmetros mais importantes são:

$m = 42$ é o número de pontos horizontais;

$n = 73$ é o número de pontos verticais;

$\Delta\theta = 0,5 - 2,0$ graus;

$\Delta\phi = 5$ graus;

$w = 1,8$.

Note-se que $w \in [1,2]$, que é o intervalo definido como mais eficiente para w na literatura (Young Jr., 1962).

Quando desejado, o programa traça as curvas do potencial utilizando o sistema CALCOMP, como mostra a Figura 1.

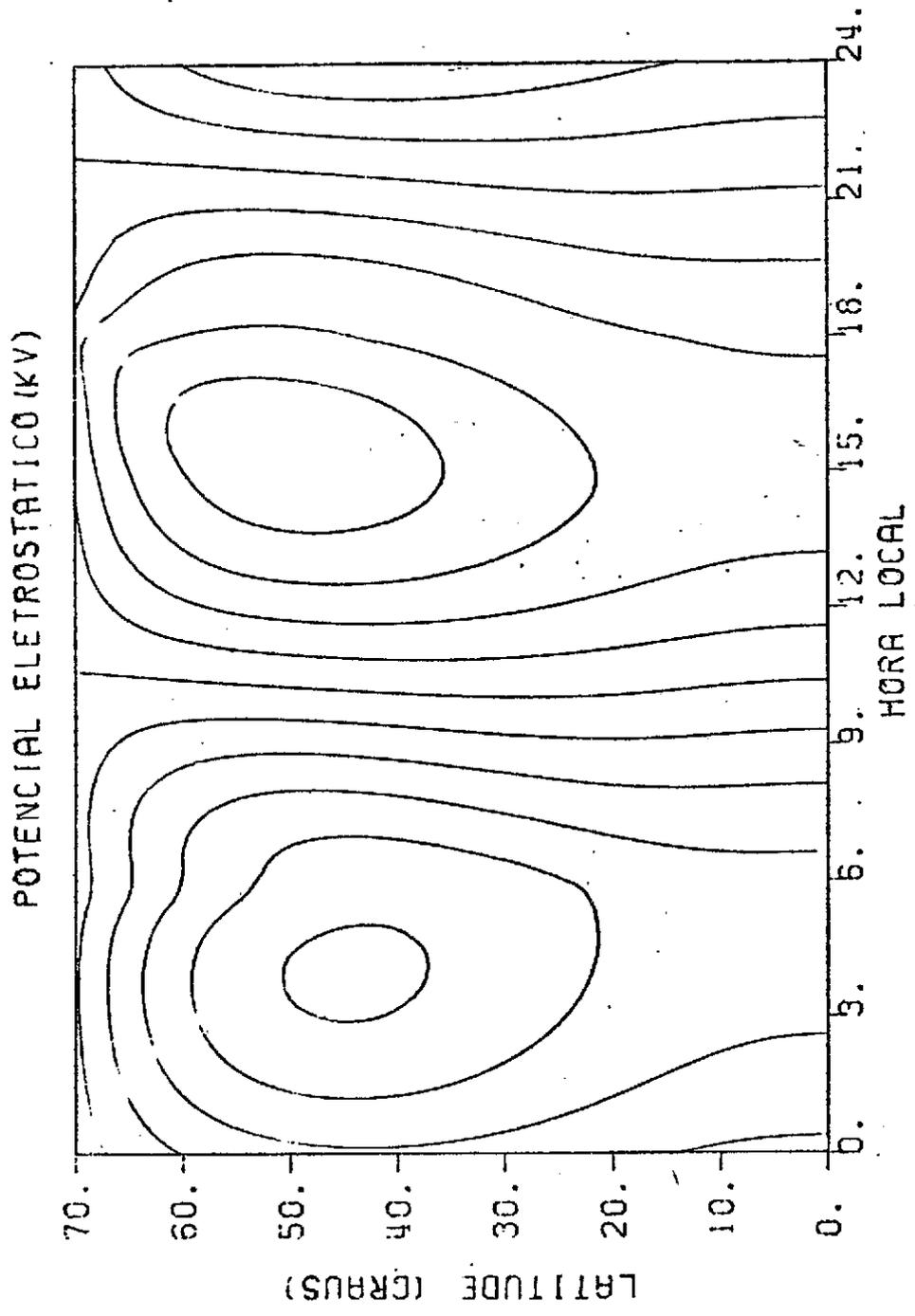


Fig. 1 - Curvas do potencial eletrostatico.

7. CONCLUSÕES

O método tem mostrado vantagens como flexibilidade e economia de memória por usar um método iterativo para a solução do sistema linear, bem como possibilidade de refinamento da solução introduzindo como solução inicial uma aproximação já calculada.

A rotina também apresenta estabilidade e rapidez computacional.

Pretende-se futuramente investigar as equações que regem o acoplamento da região E com a região F para este problema específico, bem como aplicar esta rotina ao problema de escoamento rotativo de gases em cilindros em rotação (San Miguel, 1983).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATISTA, I.S. *Dinamo da região F equatorial; assimetrias sazonais e longitudinais no setor americano*. Preliminar de tese de Doutorado em Ciência Espacial. (não publicado)
- HEELIS, R.A.; KENDALL, P.C.; MOFFET, R.S.; WINDLE, D.W.; RISHBETH, H. Electrical coupling of the E and F regions and its effects on F-region drifts and winds. *Planetary and Space Science*, 22:743 - 756, 1974.
- RISHBETH, H. The F-layer dynamo. *Planetary and Space Science*, 19(3): 263-267, 1971a.
- RISHBETH, H. Polarization fields produced by winds in the equatorial F-region. *Planetary and Space Science*, 19(4):357-369, 1971b.
- SAN MIGUEL, E.R.C. *Métodos numéricos aplicados a escoamento rotativo de gases*. Tese de Mestrado em Matemática Aplicada. Campinas, UNICAMP, 1983.
- YOUNG Jr., D.M. The numerical solution of elliptic and parabolic differential equations. In: TODD, J. ed. *Survey of Numerical Analysis*. New York, NY, McGraw Hill, 1962.