1. Classificação *INPE-COM.4/RPE* *C.D.U.: 551.509.313*	2. Período	4. Distribuição
3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor) *ESQUEMAS IMPLÍCITOS* *DIFERENÇAS CENTRADAS*		interna ☐ externa ☒
5. Relatório nº *INPE-2015-RPE/287*	6. Data *Março, 1981*	7. Revisado por *Antônio Divino Moura*
8. Título e Sub-Título *ESQUEMAS IMPLÍCITOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA* *PARTE I: EQUAÇÕES DE ONDAS LONGAS,* *BARATRÓPICAS DE GRAVIDADE*		9. Autorizado por Parada *Nelson de Jesus Parada* *Diretor*
10. Setor *DME* Código		11. Nº de cópias *10*
12. Autoria *Marco Antônio Maríngolo Lemes* *Yoshihiro Yamazaki* 13. Assinatura Responsável		14. Nº de páginas *36* 15. Preço

16. Sumário/Notas

Esquemas implícitos de integração das equações termo-hidrodinâmicas são esquemas econômicos que permitem um apreciável aumento no intervalo máximo de tempo, Δt, usado na obtenção das soluções numéricas. O tempo de computação, desta forma poupado, pode ser utilizado para aumentar a precisão dos esquemas de diferenças finitas em espaço. O presente trabalho analisa as propriedades computacionais de um esquema implícito, que é uma versão modificada do esquema Shuman-Brown-Campana, no sentido que uma média temporal é feita no termo da divergência da equação da continuidade. Resultados preliminares usando um modelo barotrópico de ondas longas de gravidade mostram que além de permitir um maior Δt, o esquema pode exercer um efeito corretivo na propagação espúria de fase, deficiência intrínseca do esquema "leapfrog" convencional.

17. Observações

2015

ÍNDICE

ABSTRACT

Implicit finite-difference schemes have been widely used in the numerical integration of the hidrodynamic equation as they allow a significantly larger time-increment Δt. This has a special importance in Numerical Weather Prediction because the time saved in the calculations may be used in improving the accuracy of the space finite-difference schemes, without any appreciable increase in the total computation costs, provided, the sizes of the matrices involved are not excessively large. Here, the computational properties of an implicit scheme are studied. This scheme is a modified version of the well-known Shuman-Brown-Campana scheme, in the sense that a 3 level time average operator is also applied to the divergence term in the continuity equation. Preliminary results, obtained by considering the equations that govern long barotropic gravity waves, show that the scheme, besides being economical, has a corrective effect on the spurious phase propagation of the waves, thus minimizing the intrinsic disavantage of the conventional "leapfrog" scheme.

LISTA DE FIGURAS

1 - INTRODUÇÃO

Em geral,os problemas não-lineares de valor inicial, e em especial aqueles de Previsão Numérica de Tempo (PNT),não são susceptíveis a um tratamento analítico,e assim sendo,métodos numéricos são usados na obtenção de suas soluções.

Na determinação da evolução temporal do escoamento de um fluído a partir de um estado inicial,usam-se esquemas de diferenças finitas,independentemente de como a estrutura espacial é tratada.Tal fato explica o grande número de trabalhos publicados sobre aspropriedades computacionais de esquemas de diferenças finitas em tempo,hoje encontrado na literatura especializada.Tais trabalhos dizem respeito a erros de truncamento, estabilidade computacional,convergência das soluções numéricas, seletividade da atenuação,habilidade do esquema em reproduzir velocidades de fase iguais às analíticas etc.Assim, dentro deste enfoque, Kurihara (1965) analisou vários esquemas de diferenças finitas temporais, quando empregados na integração numérica da equação da onda(equação hiperbólica protótipo);também mostrou a aplicabilidade dos resultados na integração de um sistema linear de equações primitivas.Young(1968) examinou exaustivamente as propriedades numéricas de treze esquemas de integração usando um modelo baroclínico espectral.

Por outro lado, quando se inclui o aspecto operacional, é altamente desejável que os esquemas de integração sejam computacionalmente econômicos, isto é, no sentido de não exigirem tempo de computação excessivamente longo.

Pode-se justificar a grande atenção que os modeladores da atmosfera vêm dedicando ao desenvolvimento de esquemas de integração temporal econômicos do seguinte modo.De acordo com o critério de estabilidade de Courant-Friedrichs (critério CFL),o intervalo máximo de tempo usado na integração de modelos de PNT de equações primitivas (maioria dos modelos operacionaisatualmente) é bem menor que aquele usado em modelos de equações filtradas,os quais contêm só movimentos quase-geostróficos mais lentos.Com estes intervalos de tempo relativamente menores, Robert (1974) estima que do erro total,até 40% pode ser atribuído à discretização espacial,enquanto que somente 1% é causado pela discretização em tempo. Assim,o tempo poupado no processo de integração numérica das equações pode ria ser empregado para aumentar a precisão dos esquemas de diferenças finitas espaciais.

Shuman (1971) propôs um esquema econômico, usando um procedimento diferente de integração, que consiste em fazer uma média temporal envolvendo três níveis de tempo no termo da força horizontal de gradiente de pressão, e que usa o esquema "leapfrog" (i.e. de diferenças centradas)convencional na marcha do tempo.

Esse esquema, como inicialmente concebido, apesar de exigir uma pequena área adicional de memória, permitiu o uso de um intervalo máximo de tempo, até *duas vezes maior* que aquele dado pelo critério CFL para o esquema "leapfrog" puro. No entanto, apresentou-se ineficaz para exercer um controle, tão necessário sobre o crescimento dos modos computacionais.

A fim de remover essa deficiência, Shuman et al (1972) incorporaram ao esquema um mecanismo amortizador em tempo do tipo descrito por Robert (1966). O esquema assim modificado passou a ser denominado esquema SBC (Shuman, Brown e Campana) e encontra-se documentado em Brown e Campana (1978).Apesar do intervalo máximo ser agora *menor* que no caso de não se ter atenuação.conseguiu-se ainda uma economia significante no tempo de computação,e o esquema SBC é hoje empregado nos modelos operacionais do Centro Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos.

Subsequentemente, Schoenstald e Willimas (1976) estenderam a análise do esquema SBC no sentido de incluir o mecanismo de advecção por um escoamento básico uniforme.

Apesar da grande vantagem prática do esquema SBC ele ainda apresenta uma deficiência intrínseca de esquema "leapfrog" convencional, ou seja: uma aceleração espúria na propagação de fase devido ao erro de truncamento (em tempo).

O objetivo principal do presente trabalho é estudar as propriedades computacionais de um novo esquema da integração, proposto pelo primeiro autor. Apesar de poder ser considerado como uma generalização do esquema SBC, o esquema em questão apresenta certas vantagens adicionais que o tornaram um candidato potencial a ser usado nos modelos de PNT desenvolvidos no Instituto de Pesquisas Espaciais (INPE).

2 - ANÁLISE LINEAR

Considere-se as equações linearizadas, em uma dimensão, das ondas longas de gravidade em um modelo barotrópico, na ausência da força de Coriolis e de um escoamento básico, ou sejam:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = -g \frac{\partial h'}{\partial x'} \tag{1}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t'} = -H_0 \frac{\partial u'}{\partial x'} \tag{2}$$

onde u' é a componente x da velocidade, h' o desvio da superfície livre em torno de sua posição média H_0, e g a aceleração da gravidade.

Por conveniência matemática, estas equações são colocadas em suas formas adimensionalizadas, obtidas com as seguintes escalas intrínsecas:

$$u = \frac{u'}{c_0} \; ; \quad t = \frac{t'}{T} \; ; \quad h = \frac{h'}{H_0} ; \quad x = \frac{x'}{L}$$

com $c_0 = \sqrt{gH_0}$ igual a velocidade de propagação de fase de ondas longas e $T = L/c_0$, sendo L o comprimento de onda.

Supondo-se soluções do tipo:

$$\begin{Bmatrix} u \\ h \end{Bmatrix} = \mathrm{Re} \begin{Bmatrix} U(t)\; e^{ikx} \\ H(t)\; e^{ikx} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

onde $k = k'L$ é o número de onda adimensional, as equações adimensionais são escritas como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -ikH \tag{4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -ikU \tag{5}$$

Nestas equações, as derivadas espaciais estão analiticamente representadas, e deste modo pode-se estudar as propriedades inerentes a qualquer esquema de integração numérica, empregado para determinar a evolução temporal do sistema.

Neste trabalho, considerar-se-ão essencialmente, esquemas que constituem versões generalizadas do esquema "leapfrog" convencional. Como se trata de esquemas de 2a. ordem, as equações de diferenças finitas correspondentes às Equações diferenciais 4 e 5 podem ser rearranjadas para se ter:

$$\begin{pmatrix} U^{n+1} \\ H^{n+1} \\ X^{n+1} \\ Y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} U^{n} \\ H^{n} \\ X^{n} \\ Y^{n} \end{matrix} \end{pmatrix} \tag{6}$$

onde o índice n refere-se ao nível de tempo $n\Delta t$, Δt sendo o incremento temporal e as variáveis X e Y definidas por:

$$X^{n+1} = U^{n} \qquad \text{e} \qquad Y^{n+1} = H^{n}$$

A matriz A, de 4 x 4 elementos é a matriz de amplificação do esquema e é dada, explicitamente, para dois casos específicos na seção seguinte. A análise das propriedades computacionais para os esquemas é baseada inteiramente no comportamento dos autovalores μ_i da matriz A.

A condição necessária de von-Neuman, para assegurar a estabilidade computacional do esquema, exige que esses autovalores sejam tais que:

$$|\mu| \leq 1 + O(\Delta t) \tag{7}$$

para qualquer k, quando $\Delta t \to 0$.

De acordo com o teorema de equivalência de Lax (Richtmyer, 1957), se o critério acima for satisfeito e se o esquema for consistente, como o são os dois esquemas aqui tratados (o erro de truncamento tendo a zero, para $\Delta t \to 0$), então a Relação 7 torna-se a condição necessária e suficiente para que a solução das equações de diferenças finitas convirja para a solução das equações diferenciais.

Neste estudo, far-se-á uma análise de estabilidade para um esquema "leapfrog" modificado nos casos de incluir ou não um mecanismo atenuador, procurando enfatizar os problemas de: a) utilização dos maiores valores permissíveis para o intervalo de tempo; b) controle dos modos computacionais e c) correção das velocidades de fase no processo de integração numérica:

3 - RESULTADOS

3.1 - CASO I: AUSÊNCIA DE ATENUAÇÃO

Aqui, o seguinte esquema de integração será aplicado às Equações 4 e 5, a saber:

$$\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} = -ik\left[\alpha(H^{n+1} + H^{n-1}) + (1 - 2\alpha)H^{n}\right] \tag{8}$$

$$\frac{H^{n+1} - H^{n-1}}{2\Delta t} = -ik\left[\beta(U^{n+1} + U^{n-1}) + (1 - 2\beta)U^{n}\right] \tag{9}$$

onde α e β são pesos de médias ponderadas para os termos de gradiente de pressão e divergência, respectivamente. O caso $\alpha=\beta=0$ reduz-se ao conhecido esquema explícito de diferenças centradas (ou "leapfrog"), en quanto que $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ reproduz o esquema inicialmente proposto por Shuman (1971) e posteriormente modificado por Brown e Campana (1978). Deve-se notar que, neste caso, tem-se um esquema explícito, pois H^{n+1} pode ser obtido na Equação 9 antes de ser usado na Equação 8. Valores de $\beta \neq 0$ tornam o esquema implícito, fazendo com que o procedimento simples de "avançar em tempo" não seja mais aplicável.

A matriz de amplificação, para o esquema dado pelas Equações 8 e 9:

$$A \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma^2\,\alpha(1-2\beta)}{1-\gamma^2\alpha\beta} & -\dfrac{\gamma\,(1-2\alpha)}{1-\gamma^2\alpha\beta} & \dfrac{1+\gamma^2\alpha\beta}{1-\gamma^2\alpha\beta} & -\dfrac{2\gamma\alpha}{1-\gamma^2\alpha\beta} \\ -\dfrac{\gamma(1-2\beta)}{1-\gamma^2\alpha\beta} & \dfrac{\gamma^2\beta(1-2\alpha)}{1-\gamma^2\alpha\beta} & -\dfrac{2\gamma\beta}{1-\gamma^2\alpha\beta} & \dfrac{1+\gamma^2\alpha\beta}{1-\gamma^2\alpha\beta} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

onde $\gamma = 2i\ k\Delta t = 2i\ \sqrt{D}$; $D = (k\Delta t)^2$

O estudo da estabilidade computacional, como já mencionado, exige o conhecimento dos autovalores da matriz A, dada em 10.No entanto, a fim de examinar analiticamente o comportamento dos autovalores μ, em função dos parâmetros α, β e γ, para alguns casos específicos, obteve-se a equação característica associada a este problema de autovalor:

$$(1 + 4D\alpha\beta)\ \mu^4 + \left[4D(\alpha + \beta) - 16D\alpha\beta\right]\mu^3 + \left[(1 - 2\beta)(1 - 2\alpha)4D - 2 \times \right.$$
$$\left. \times\ (1 - 4D\alpha\beta)\right]\mu^2 + \left[4D(\alpha + \beta) - 16D\alpha\beta\right]\mu + (1 + 4D\alpha\beta) = 0 \qquad (11)$$

Para obter o máximo valor de α, α_{max}, que para um dado β, resulta no máximo domínio estável D_{max}, diferencia-se a Equação 11 com respeito a μ e impõe-se $dD/d\mu = 0$ quando $\mu = -1$, pois este é o valor limitante para a estabilidade do autovalor crítico que primeiro se amplifica. Assim, tem-se:

$$\alpha_{max} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - 4\beta}{1 - 4\beta} = 0.25 \tag{12}$$

isto é, α_{max} é independente de β. Para obter D_{max}, substitui-se α por 0.25 na Equação 11, resultando:

$$D\{\beta(\mu + 1)^2(\mu - 1)^2 + \mu(\mu + 1)^2\} = -(\mu + 1)^2(\mu - 1)^2$$

que, para $\mu \to -1$ reduz-se à:

$$D_{max} = 4/(1 - 4\beta) \tag{13}$$

Deste modo, a média temporal introduzida no termo da divergência na equação da continuidade proporciona um substancial aumento do domínio estável, quando $\alpha = \alpha_{max}$. Por exemplo, em relação ao intervalo máximo permissível para o esquema "leapfrog" convencional, os fatores multiplicativos são $\sqrt{4} = 2$ (para $\beta = 0$), $\sqrt{10} = 3.16$ (para $\beta = 0.15$) e $\sqrt{20} = 4.47$ (para $\beta = 0.20$).

Os domínios de estabilidade para o esquema podem ser demarcados através de curvas $D_{max}(\alpha,\beta)$ para $0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$, como mostrados na Figura 1. As curvas neutras foram obtidas da seguinte relação (vigorando o sinal de igualdade):

$$D^2\alpha^2 \geq \{(1 - 2\alpha)(1 - 2\beta)\, D - 1\} \div (1 + 4D\alpha\beta) \tag{14}$$

cuja derivação é mostrada no Apêndice A. A Tabela 1 também fornece o limite do domínio de estabilidade $D_{max} = (k\Delta t_{max})^2$ dados α e β.

TABELA 1.

VALORES DE $(K\Delta T)^2$ COMO FUNÇÃO DOS PESOS α E β

$\alpha \downarrow$ \ $\beta \rightarrow$	0.000	0.050	0.100	0.150	0.160	0.170	0.180	0.190	0.200	0.210	0.220	0.230	0.240
.000	1.000	1.115	1.270	1.501	1.563	1.632	1.711	1.802	1.910	2.041	2.207	2.431	2.778
.015	1.031	1.151	1.315	1.559	1.624	1.697	1.781	1.878	1.993	2.133	2.310	2.550	2.924
.030	1.065	1.191	1.364	1.622	1.691	1.769	1.858	2.962	2.084	2.234	2.424	2.683	3.088
.045	1.102	1.235	1.417	1.691	1.765	1.848	1.943	2.054	2.186	2.347	2.552	2.832	3.273
.060	1.142	1.282	1.476	1.768	1.847	1.936	2.238	2.157	2.299	2.473	2.695	3.000	3.482
.075	1.186	1.335	1.541	1.853	1.938	2.034	2.144	2.273	2.427	2.616	2.858	3.192	3.722
.090	1.235	1.393	1.613	1.949	2.041	2.145	2.264	2.404	2.571	2.778	3.044	3.411	4.000
.105	1.289	1.459	1.695	2.058	2.158	2.271	2.401	2.554	2.738	2.965	3.258	3.667	4.326
.120	1.350	1.533	1.788	2.183	2.183	2.416	2.559	2.728	2.930	3.182	3.510	3.969	4.715
.135	1.420	1.617	1.895	2.328	2.448	2.585	2.744	2.931	3.158	3.441	3.810	4.331	5.186
.150	1.501	1.716	2.020	2.500	2.633	2.786	2.964	3.175	3.431	3.752	4.175	4.775	5.772
.165	1.596	1.832	2.170	2.707	2.858	3.031	3.233	3.474	3.768	4.139	4.630	5.334	6.523
.180	1.711	1.974	2.353	2.964	3.137	3.337	3.571	3.852	4.196	4.633	5.218	6.067	7.524
.195	1.853	2.152	2.586	3.297	3.500	3.736	4.015	4.350	4.765	5.296	6.015	7.076	8.936
.210	2.041	2.387	2.899	3.752	4.000	4.289	4.633	5.051	5.573	6.250	7.180	8.579	11.111
.225	2.309	2.729	3.362	4.444	4.765	5.143	5.597	6.155	6.863	7.798	9.110	11.146	15.010
.240	2.778	3.340	4.211	5.772	6.250	6.823	7.524	8.404	9.549	11.111	13.397	17.157	25.000
.250	4.000	5.000	6.667	10.000	11.111	12.500	14.286	16.667	20.000	25.000	33.333	50.000	100.000

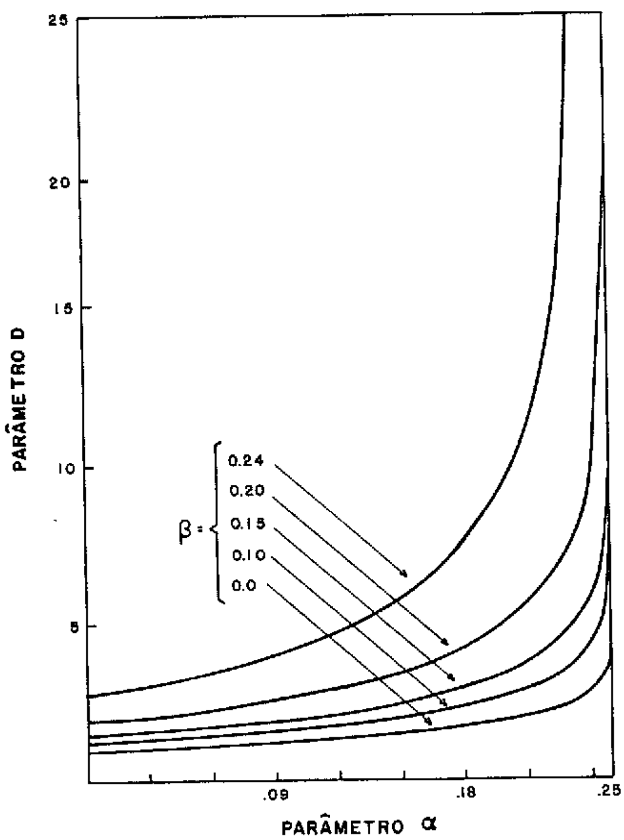


Fig. 1 - Regiões de estabilidade para o Sistema (8) - (9) para vários valores do peso β. O domínio estável situa-se sob a curva correspondente.

As características da matriz de ampliação, em termos de seus autovalores complexos $\mu = \mu_r + i\mu_i$ são mostradas no plano complexo (μ_r, μ_i) nas Figuras 2 (para $\beta = 0$) e 3 (para $\beta = 0.10$), para vários valores do parâmetro α. A simetria das Equações 8 e 9 faz com que os casos (α,β) e (β,α) sejam intercambiáveis.

Como notado nessas figuras, os dois modos físicos e os dois computacionais constituem entre si pares complexos conjugados. Em particular, para $\alpha = 0.25$, pode-se fatorar a Equação 11 para se ter:

$$(\mu + 1)^2\{\mu^2 + (\frac{D}{1 + \beta D} - 2)\mu + 1\} = 0 \qquad (15)$$

mostrando que os autovalores correspondentes aos dois modos computacionais são coincidentes e iguais a -1. Isso implica que um deles tem um crescimento linear com o tempo.

Pode-se observar também nas Figuras 2 e 3 que o esquema em questão, apesar de permitir o uso de valores de Δt relativamente maiores, não é atenuador, pois na extenção total do domínio estável, $|\mu| = 1$. Sendo assim, o esquema é incapaz de controlar os modos computacionais; em particular $\alpha = 0.25$ não deve ser usado devido ao crescimento linear de um desses modos. Mesmo para $\alpha < 0.25$, os modos computacionais, se bem que não exibindo esse tipo de crescimento, estão presentes e torna-se necessário controlá-los por outros artifícios, o que é tratado na subseção seguinte.

A velocidade de fase c_*, como computada numericamente, é facilmente obtida a partir de soluções do tipo $\exp\{-ikc_* n\Delta t\}$ nas Equações 8 e 9. A expressão resultante para c_* é:

$$(1 + 4D\alpha\beta)\cos^2\Theta + 2D\{\alpha(1 - 2\beta) + \beta(1 - 2\alpha)\}\cos\Theta + D(1 - 2\alpha)(1 - 2\beta) - 1 = 0 \qquad (16)$$

onde $\Theta = kc_* \Delta t = \sqrt{D}\, c_*$

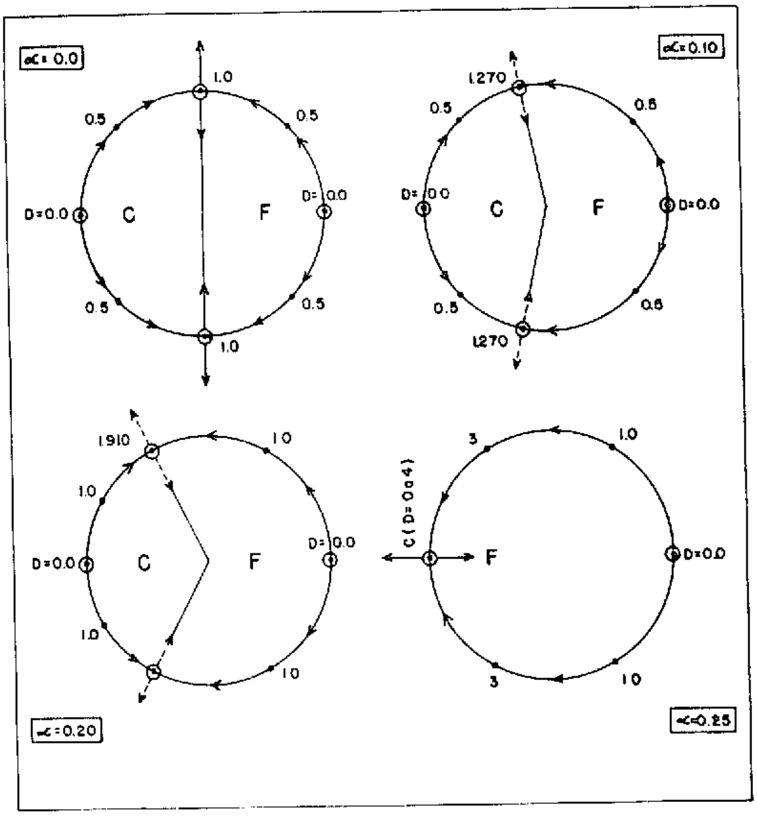


Fig. 2 - Características dos autovalores μ para o Sistema (8) - (9) no plano complexo (μ_r, μ_i) para vários valores de α e $\beta = 0.0$. (F e C denotam o domínio dos modos físicos e computacionais, respectivamente)

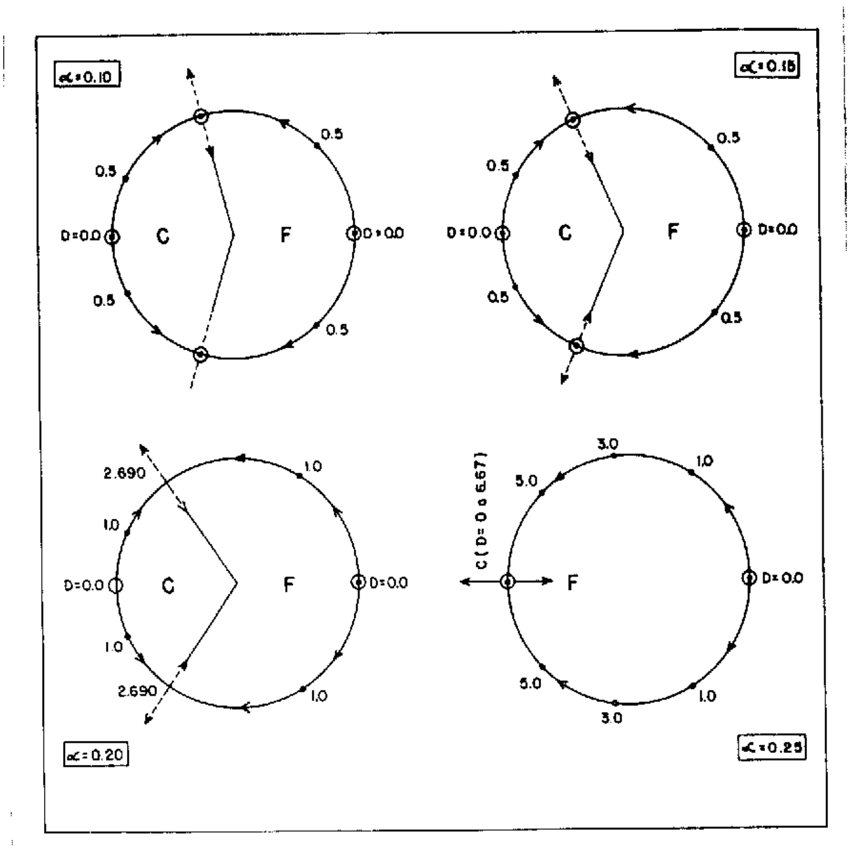


Fig. 3 - Mesmo que Figura 2, exceto para β = 0.10

Trata-se de uma equação do 2º grau, em $\cos\Theta$, cujas raízes r_1 e r_2 fornecem as velocidades de fase dos modos físicos e computacionais, isto é

$$c_*\Big|_{\text{físico}} = (\text{arc cos } r_1) \div \sqrt{D}$$

$$c_*\Big|_{\text{computacional}} = (\Pi - \text{arc cos } r_2) \div \sqrt{D}$$

Curvas de c_*, para os modos físicos e computacionais, são mostradas nas Figuras 4, 5 e 6, em função de D para vários valores de α e β. (Devido à adimensionalização, as velocidades de fase analíticas são ± 1).

Observa-se que devido à discretização em tempo, os modos físicos movem-se com velocidades c_* maiores que as analíticas, especialmente para $\beta = 0$ (Figuras III.4). Mediando o termo da divergência, pode-se ter algum controle sobre a propagação espúria dos modos físicos. Notou-se que este efeito é mais corretivo para valores moderados de β, (Figura III.5), sendo que para $\beta > 0.15$ aparece novamente o problema de propagação espúria, na forma de retardação.

3.2 - CASO COM ATENUAÇÃO SELETIVA

Já se mencionou que o efeito de mediar o termo da divergência na equação da continuidade não introduz nenhuma atenuação, o que seria desejável no controle do crescimento dos modos computacionais. Várias técnicas poderiam ser utilizadas para esse propósito(filtragem em espaço, difusão artificial), mas adotar-se-á o mesmo procedimento de Brown e Campana (1978), ou seja a filtragem *em tempo* de todas as variáveis.

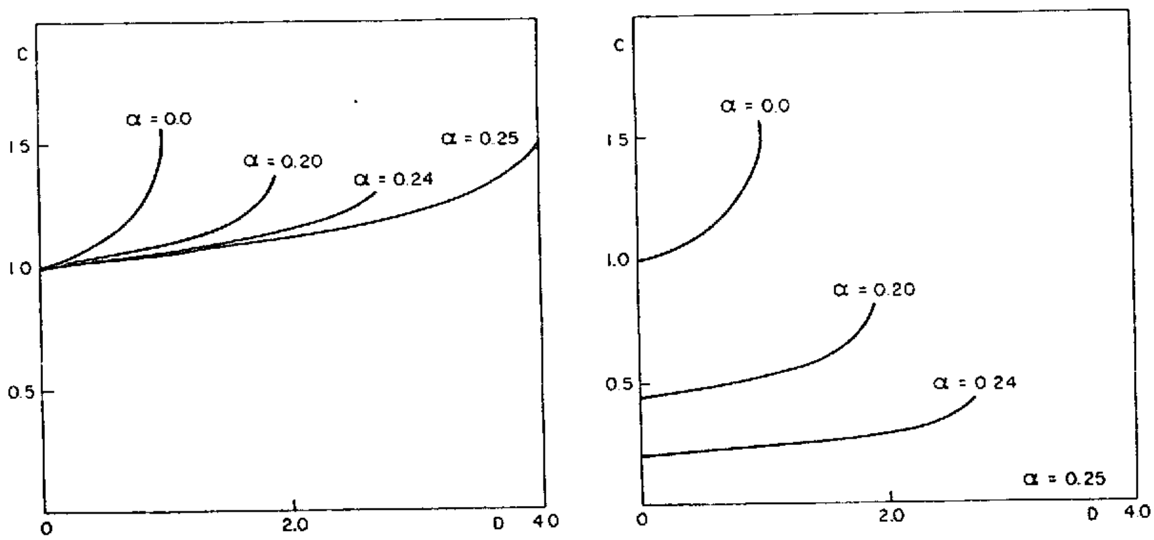


Fig. 4 - Velocidades normalizadas, em funçaõ de $D = (K\Delta t)^2$ para vários valores de α quando $\beta = 0.0$. O diagrama à esquerda refere-se aos modos físicos, e o da direita, aos modos computacionais.

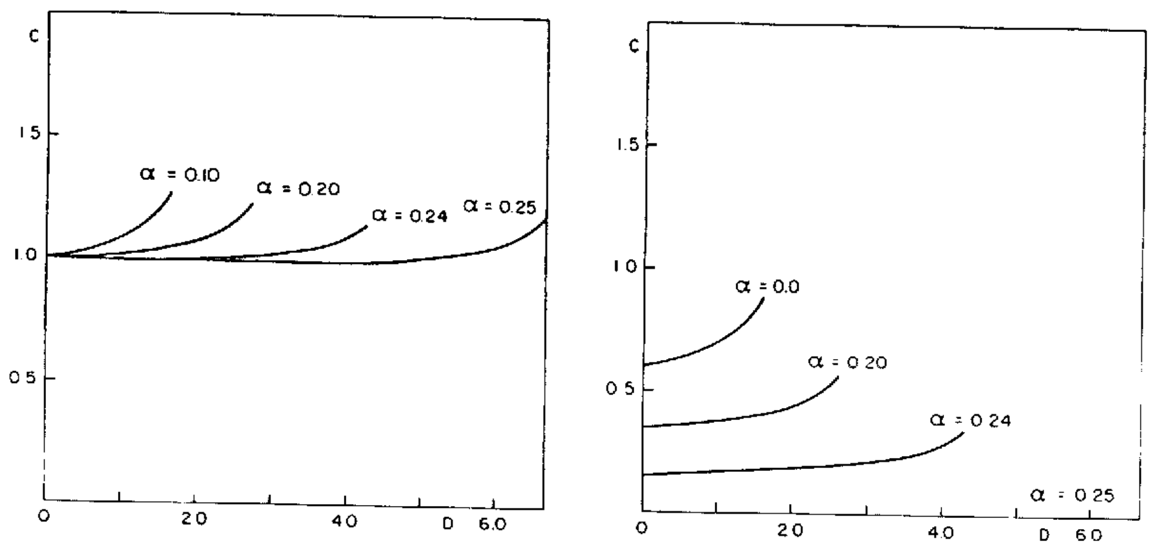


Fig. 5 - Mesmo que Figura 4, exceto para β = 0.10

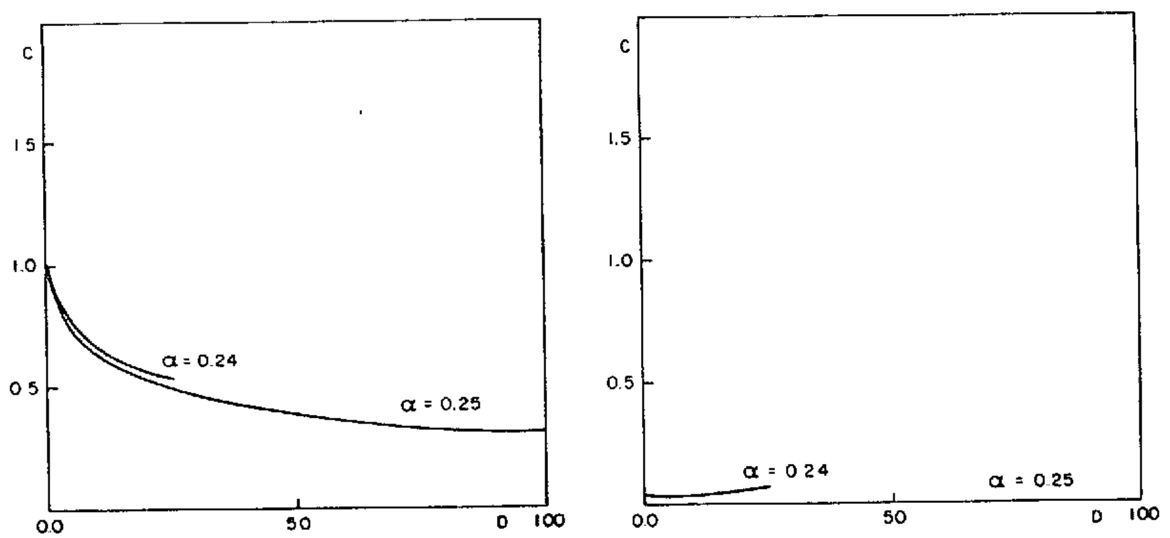


Fig. 6 - Mesmo que Figura 4, exceto para β = 0.20

O esquema modificado para incluir uma média temporal das variáveis é:

$$\frac{U_*^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} = -ik\{\alpha(H_*^{n+1} + H^{n-1}) + (1 - 2\alpha)H_*^n\} \qquad (17)$$

$$\frac{H_*^{n+1} - H^{n-1}}{2\Delta t} = -ik\{\beta(U_*^{n+1} + U^{n-1}) + (1 - 2\beta)U_*^n \qquad (18)$$

onde as variáveis com asteriscos são valores intermediários, não finais.

Aplicam-se, agora, médias temporais do tipo de Robert (1966) ou seja:

$$U^n = U_*^n + \rho\{U^{n+1} + U^{n-1} - 2U_*^n\} \qquad (19)$$

e

$$H^n = H_*^n + \rho\{H_*^{n+1} + H^{n-1} - 2H_*^n\} \qquad (20)$$

Manipulando-se as Equações 17 a 20, podem-se obter expressões para U_*^{n-1} e H_*^{n-1} em função dos valores definitivos dessas variáveis nos níveis n-1 e n de tempo, respectivamente:

$$U_*^{n+1} = c_1 U^{n-1} + c_2 U^n + c_3 H^{n-1} + c_4 H^n \qquad (21)$$

e

$$H_*^{n+1} = d_1 H^{n-1} + d_2 H^n + d_3 U^{n-1} + d_4 U^n \qquad (22)$$

onde os coeficientes c_i, d_i, i = 1 a 4 são definidos no Apêndice B.

Para obter a nova matriz de amplificação, deve-se escre ver o conjunto de Equações 17 a 20, referentes ao instante $(n+1)\Delta t$ ou seja:

$$\frac{U_*^{n+2} - U^n}{2\Delta t} = -ik\{\alpha(H_*^{n+2} + H^n) + (1 - 2\alpha)H_*^{n+1}\} \tag{23}$$

$$\frac{H_*^{n+2} - H^n}{2\Delta t} = -ik\{\beta(U_*^{n+2} + U^n) + (1 - 2\beta)U_*^{n+1}\} \tag{24}$$

$$U^{n+1} = U_*^{n+1} + \rho\{U_*^{n+2} + U^n - 2U_*^{n+1}\} \tag{25}$$

$$H^{n+1} = H_*^{n+1} + \rho\{H_*^{n+2} + H^n - 2H^{n+1}\} \tag{26}$$

Substituindo-se H_*^{n+2} na Equação 23 pelo seu valor obtido da Equação 24 e U_*^{n+2} na Equação 24 pela Equação 25, pode-se escrever:

$$U_*^{n+2} = f_1 U^{n-1} + f_2 U^n + f_3 H^{n-1} + f_4 H^n \tag{27}$$

e

$$H_*^{n+2} = g_1 H^{n-1} + g_2 H^n + g_3 U^{n-1} + g_4 U^n \tag{28}$$

onde os coeficientes f_i, g_i, $i = 1$ a 4 são também definidos no Apêndi ce B.

Usando as Equações 21, 22, 27 e 28 nas Equações 25 e 26 tem-se, já na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} U^{n+1} \\ H^{n+1} \\ X^{n+1} \\ Y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho f_2 + \rho + \rho^* c_2 & \rho f_4 + \rho^* c_4 & \rho f_1 + \rho^* c_1 & \rho f_3 + \rho^* c_3 \\ \rho g_4 + \rho^* d_4 & \rho g_2 + \rho + \rho^* d_2 & \rho g_3 + \rho^* d_3 & \rho g_3 + \rho^* d_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^n \\ H^n \\ X^n \\ Y^n \end{pmatrix} \tag{29}$$

onde $\rho^* = k - 2\rho$. A matriz 4 x 4 que aparece na Equação 29 é a nova matriz de amplificação.

A equação característica correspondente é:

$$\mu^4 - \{\rho(f_2 + g_2 + 2) + \rho^*(c_2 + d_2)\}\mu^3 +$$
$$+ \{(\rho f_2 + \rho + \rho^* c_2)(\rho g_2 + \rho + \rho^* d_2) - (\rho g_4 + \rho^* d_4)(\rho f_4 + \rho^* c_4) -$$
$$- \rho(f_1 + g_1) - \rho^*(c_1 + d_1)\}\mu^2 + \{(\rho g_1 + \rho^* d_1)(\rho f_2 + \rho + \rho^* c_2) +$$
$$+ (\rho f_1 + \rho^* c_1)(\rho g_2 + \rho + \rho^* d_2) - (\rho f_3 + \rho^* c_3)(\rho g_4 + \rho^* d_4) -$$
$$- (\rho f_4 + \rho^* c_4)(\rho g_3 + \rho^* d_3)\}\mu + \{(\rho f_1 + \rho^* c_1)(\rho g_1 + \rho^* d_1) -$$
$$- (\rho g_3 + \rho^* d_3)(\rho f_3 + \rho^* c_3)\} = 0 \qquad (30)$$

Devido à impraticabilidade no subsequente manuseio dessa equação característica, os domínios de estabilidade, agora dados por curvas de D_{max} versus α, tendo β e ρ como parâmetros, foram obtidos numericamente do seguinte modo. Para cada uma dessas curvas, com valores de α, β e ρ fixados, fez-se uma varredura em D de 0 a um valor D_1 (por exemplo) e acompanhou-se o comportamento dos autovalores da matriz de amplificação. O valor D_{max}, correspondendo a α, β e ρ, é obtido quando o módulo de um desses autovalores se iguala à unidade. D foi incrementado de um valor: $\Delta D = 0.01$.

A Figura 7 mostra as curvas neutras para o caso $\beta = 0$, i.e., o esquema SBC; e a Figura 8 para o caso $\beta = 0.10$, para valores $\rho=0$, 0.125 e 0.250. Qualitativamente, nota-se uma grande semelhança entre o esquema SBC e o aqui examinado. A vantagem de mediar o termo da divergência, permitindo o uso de maiores intervalos máximos de tempo, ainda está presente se bem que esses intervalos, quando $\rho \neq 0$, são menores que aqueles correspondentes ao caso $\rho = 0$.

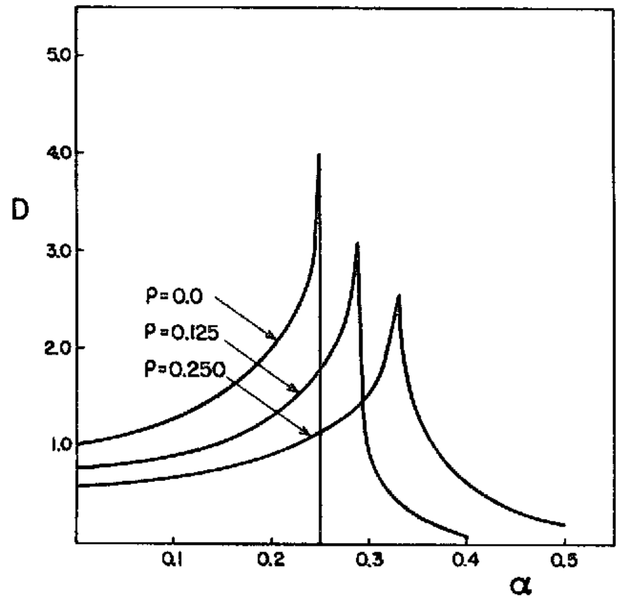


Fig. 7 - Regiões de estabilidade para o sistema (17) - (18) para vários valores do peso ρ da média externa, quando β = 0.0. O domínio estável situa-se sob a curva correspondente.

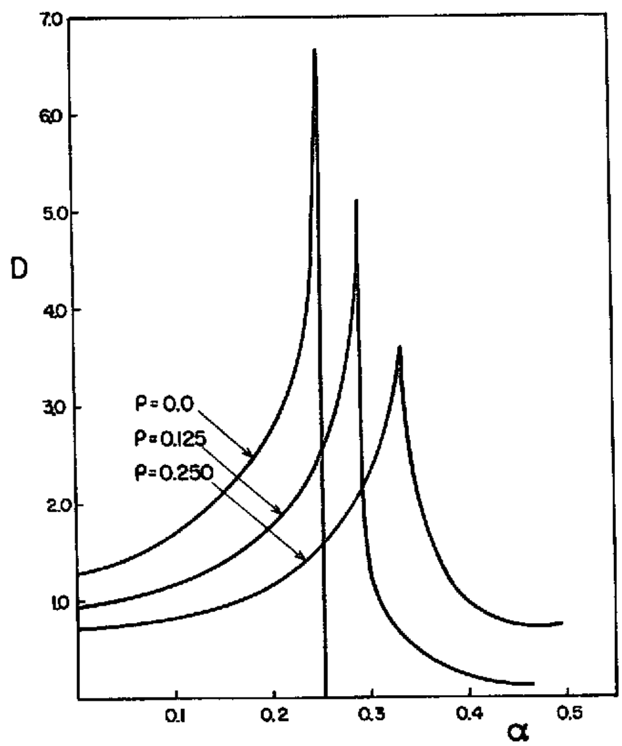


Fig. 8 - Mesmo que Figura 7, exceto para $\beta = 0.10$.

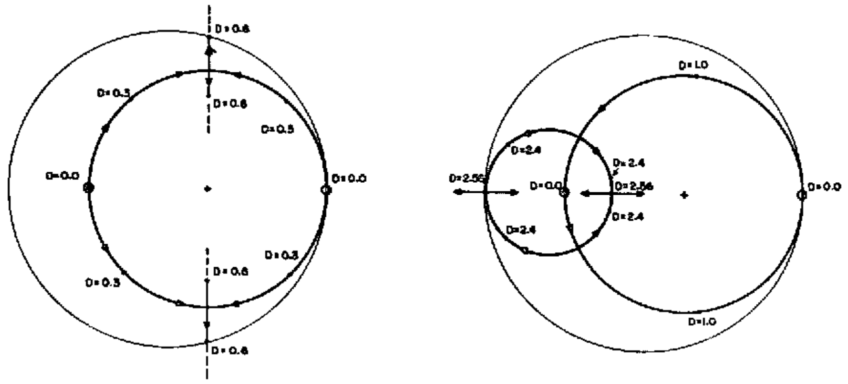
Por outro lado, a introdução dessa média temporal externa ($\rho \neq 0$) tornou o esquema seletivamente atenuante, como visto nas Figuras 9, 10 e 11 (β = 0, 0.10 e 0.15, respectivamente), onde se pode notar que a atenuação é tanto maior quanto maior for D. Isto é equivalente a afirmar que para um Δt fixo, a atenuação, dentro do domínio estável, será tanto maior quanto menor for o comprimento de onda da oscilação.

4 - CONCLUSÕES

A análise de Shuman, Brown e Campana referente às propriedades computacionais do esquema inicialmente proposto por Shuman, foi estendida ao caso de se ter um operador média em 3 níveis de tempo também aplicado ao termo da divergência na equação da continuidade. O esquema, assim modificado, foi testado usando-se as equações linearizadas que governam a propagação de ondas longas de gravidade em um fluido baratrópico, sem rotação.

Mediando-se o termo da divergência, consegue-se uma apreciável expansão do domínio de estabilidade computacional, permitindo o uso de maiores valores máximos de intervalos de tempo permissíveis, em relação ao esquema SBC. Por outro lado, não se obtém nenhum efeito atenuante sobre os modos computacionais presentes, pois os autovalores da matriz de amplificação caem sobre um círculo de raio unitário, para todos valores possíveis de α e β (pesos das médias aplicadas ao gradiente de pressão e divergência, respectivamente).

Tornou-se então necessário, como no esquema SBC, introduzir uma média temporal (peso ρ) externas às variáveis u e h, o que faz o esquema seletivamente atenuador (a atenuação é tanto maior quanto menor for o comprimento de onda). No entanto, neste caso, os valores máximos de incremento temporal são menores que no caso $\rho = 0$ (ié, ausência da média externa).



α = 0.0 $\qquad\qquad$ α = 0.332

Fig. 9 - Características dos autovalores μ para o sistema (17) - (18) no plano complexo (μ_r, μ_i) para $\alpha = 0.0$ e $\alpha = 0.332$ quando $\alpha = 0.250$ e $\rho = 0.0$. O círculo externo tem raio inteiro.

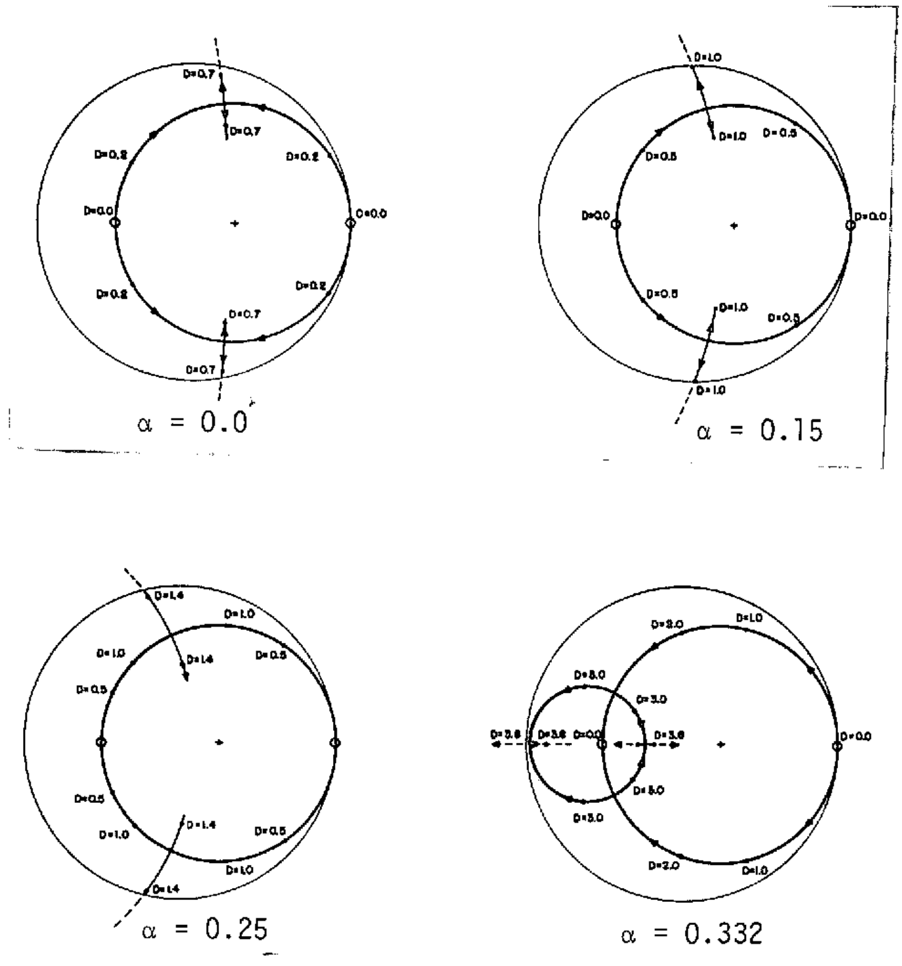


Fig. 10 - Mesmo que Figura 9, exceto para a) α = 0.0, b) α = 0.15, c) α = = 0.25 e d) α = 0.332, quando ρ = 0.250 e β = 0.10.

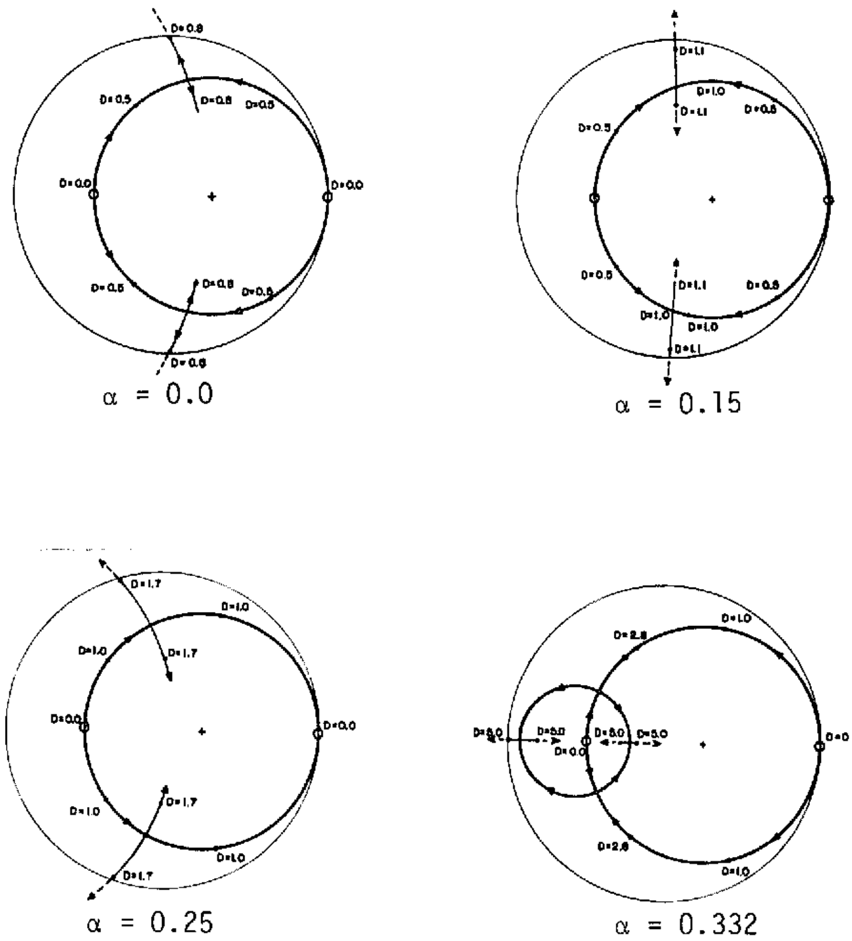


Fig. 11 - Mesmo que Figura 9, exceto para a) α = 0.0, b) α = 0.15, c) α = = 0.250 e d) α = 0.332, quando ρ = 0.250 e β= 0.15.

Em termos de propagação de fase, vê-se que com uma combinação adequada dos pesos α e β, pode-se conseguir uma correção sobre a velocidade de fase, numericamente calculada, minimizando a propagação espúria devido ao erro de truncamento (em tempo) do esquema. Esta vantagem adicional faz com que o esquema estudado seja um candidato em potencial a ser empregado em modelos operacionais de previsão de tempo.

Deve-se, no entanto, notar que na ausência da média sobre o termo divergente ($\beta = 0$), tem-se um esquema explícito. Para $\beta \neq 0$, o esquema torna-se implícito e o processo de integração em tempo pode ser crítico, no sentido de requerer tempos excessivamente longos de computação. Em outras palavras, o simples procedimento de "avançar em tempo", típico de esquemas explícitos não é mais aplicável, e os valores futuros das variáveis do modelo são determinados por uma inversão de matrizes, por métodos diretos ou iterativos.

Acredita-se que o maior tempo de computação, exigido nesse processo de inversão, possa ser compensado pelo uso de intervalos de tempo maiores, em especial quando se tratar de modelos de áreas limitados (ou sejam matrizes não excessivamente grandes).

As vantagens e desvantagens, do ponto de vista prático, do esquema aqui considerado foram avaliadas dentro das limitações nas quais suas propriedades foram estudadas. Assim, uma apreciação final e conclusiva, em termos de aplicação, só será possível através de experimentação numérica usando-se modelos mais elaborados.

Finalmente, como continuação lógica deste trabalho, considera-se a extensão dessa análise linear para incluir os efeitos da rotação e de um escoamento básico.

BIBLIOGRAFIA

BROWN, J.A.; CAMPANA, K.A. An economical time-differencing system for numerical Weather Prediction. *Monthly Weather Review*, 106 (8): 1125-1136, Aug. 1978.

KURIHARA, Y. On the used od implicit and iterative methods for the time integration of the wave equation. *Monthly Weather Review*, 96(1): 33-46, Jan. 1965.

RICHTMYER, R.D. *Difference methods for initial-value problems.* New York, Interscience, 1957, 238 p.

ROBERT, A.J. The Integration od a low-order spectral form of the primitive meteorological equation. *Journal of Meteorological Society of Japan*, 44, 237-245, 1966.

SHOENSTALDT, A.L.; WILLIAMS, R.T. The Computational stability properties of the shuman pressure gradient averaging technique. *Journal of Computational Physics*, 21, 166-177, 1976.

SHUMAN, F.G. *Ressuscitation of an integration procedure.* NMC Office, 1971. 55 p (MMC Office, Note 54).

SHUMAN, F.G.; BROWN, J.A.; CAMPANA, K.A. A New explicit differencing system for primitice equations. *Transaction American Geophysical Union*, 53(4): 386, Apr 1972.

AGRADECIMENTOS

Os autores expressam seus sinceros agradecimentos ao Dr. Antônio Divino Mouta por sua valiosa cooperação e cuidadosa revisão do trabalho e ao Sr. José Paulo Bonatti, por suas sugestões. Finalmente, agradecemos à Sra. Tânia Regina Freire Sanchez, pela excelente datilografia e organização do texto, bem como aos membros da Seção de Desenho pelo excelente trabalho realizado.

APÊNDICE A

Fazendo-se $\psi = e^{-i\psi} = \cos\psi - i\,\mathrm{sen}\psi$ na equação característica (11), tem-se:

$$e^{-i4\psi} + A\, e^{-i3\psi} + A\, e^{-i2\psi} + A\, e^{-i\psi} + 1 = 0 \qquad (A.1)$$

onde $A = \dfrac{4D(\alpha+\beta) - 16D\alpha\beta}{1 + 4D\alpha\beta}$ e $B = \dfrac{(1-2\beta)(1-2\alpha)4D - 2(1-4D\alpha\beta)}{1 + 4D\alpha\beta}$.

Fatorando-se $e^{-i2\psi}$:

$$e^{-2i\psi}\{e^{-2i\psi} + e^{2i\psi} + A(e^{-i\psi}) + B\} = 0$$

resulta numa equação de 2a. ordem em $\cos\psi$, ou seja:

$$\cos 2\psi + \frac{A}{2}\cos\psi + \frac{1}{2}\left(\frac{B}{2} - 1\right) = 0 \qquad (A.2)$$

cujas soluções são:

$$\cos\psi = -\alpha D \pm \left\{D^2\alpha^2 - \frac{(1-2\alpha)(1-2\beta)D - 1}{1 + 4D\alpha\beta}\right\}^{1/2}$$

Para que $\cos\psi$ seja real ou $|\mu| = 1$, deve-se impor:

$$D^2\alpha^2 \geqslant \frac{(1-2\alpha)(1-2\beta)D - 1}{1 - 4D\alpha\beta} \qquad (A.3)$$

relação esta que se presta para traçar a curva neutra de estabilidade.

APÊNDICE B

Os coeficientes que aparecem na sub-seção 3.2 são aqui dados.

Definindo-se:

$$a_o = 1 - \gamma^2\alpha\beta + \frac{\gamma^2\alpha\beta^*\rho}{\rho^*} \quad ; \quad b_o = 1 - \gamma^2\alpha\beta + \frac{\gamma^2\alpha^*\beta\rho}{\rho^*}$$

$$a_1 = 1 + \gamma^2\alpha\beta - \frac{\gamma^2\alpha\beta^*\rho}{\rho^*} \quad ; \quad b_1 = 1 + \gamma^2\alpha\beta - \frac{\gamma^2\alpha^*\beta\rho}{\rho^*}$$

$$a_2 = \frac{\gamma^2\alpha\beta^*}{\rho^*} \quad ; \quad b_2 = \frac{\gamma^2\alpha^*\beta}{\rho^*}$$

$$a_3 = \frac{\gamma\alpha^*\rho}{\rho^*} - 2\gamma\alpha \quad ; \quad b_3 = \frac{\gamma\beta^*\rho}{\rho^*} - 2\gamma\beta$$

$$a_4 = -\frac{\gamma\alpha^*}{\rho^*} \quad ; \quad b_4 = -\frac{\gamma\beta^*}{\rho^*}$$

$$a_5 = \frac{\alpha^*\gamma\rho}{\rho^*} \quad ; \quad b_5 = \frac{\gamma\beta^*\rho}{\rho^*}$$

os coeficientes c_i, d_i, $i = 1$ a 4, são:

$$c_1 = \frac{a_1b_o + a_5b_3}{a_ob_o - a_5b_5} \quad ; \quad d_1 = \frac{b_1a_o + b_5a_3}{a_ob_o - b_5a_5}$$

$$c_2 = \frac{a_2b_o + a_5b_4}{a_ob_o - a_5b_5} \quad ; \quad d_2 = \frac{a_ob_2 + b_5a_4}{a_ob_o - a_5b_5}$$

$$c_3 = \frac{a_3b_o + a_5b_1}{a_ob_o - a_5b_5} \quad ; \quad d_3 = \frac{a_ob_3 + b_5a_1}{a_ob_o - a_5b_5}$$

$$c_4 = \frac{a_4b_o + a_5b_2}{a_ob_o - a_5b_5} \quad ; \quad d_4 = \frac{a_ob_4 + a_2b_5}{a_ob_o - a_5b_5}$$

e os coeficientes f_i, g_i, $i = 1$ a 4 são:

$$f_1 = \frac{\gamma^2\alpha\beta^* c_1 - \gamma\alpha^2 d_3}{1 - \gamma^2\alpha\beta} \quad ; \quad g_1 = \frac{\gamma^2\alpha^*\beta d_1 - \gamma\beta^* c_3}{1 - \gamma^2\alpha\beta}$$

$$f_2 = \frac{1 + \gamma^2\alpha\beta + \gamma^2\alpha\beta^* c_2 - \gamma\alpha^* d_4}{1 - \gamma^2\alpha\beta} ; \quad g_2 = \frac{1 + \gamma^2\alpha\beta + \gamma^2\alpha^*\beta d_2 - \gamma\beta^* c_4}{1 - \gamma^2\alpha\beta}$$

$$f_3 = \frac{\gamma^2\alpha\beta^* c_3 - \gamma\alpha^* d_1}{1 - \gamma^2\alpha\beta} \quad ; \quad g_3 = \frac{\gamma^2\alpha^*\beta d_3 - \gamma\beta^* c_1}{1 - \gamma^1\alpha\beta}$$

$$f_4 = \frac{\gamma^2\alpha\beta^* c_4 - 2\gamma\alpha - \gamma\alpha^* d_2}{1 - \gamma^2\alpha\beta} \quad ; \quad g_4 = \frac{\gamma^2\alpha^*\beta d_4 - \gamma\beta^* c_2 - 2\gamma\beta}{1 - \gamma^2\alpha\beta}$$

onde $\alpha^* = 1 - 2\alpha$; $\beta^* = 1 - 2\beta$; $\rho^* = 1 - 2\rho$