



PALAVRAS CHAVES/KEY WORDS

AUTORES
AUTHORS

ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA
TAXA DE AMOSTRAGEM

AUTORIZADA POR/AUTHORIZED BY

Ralf Gielow
Ralf Gielow
Presidente do Conselho de PG

AUTOR RESPONSÁVEL
RESPONSIBLE AUTHOR

Roberto Vieira da Fonseca Lopes
Roberto Vieira da Fonseca
Lopes

DISTRIBUIÇÃO/DISTRIBUTION

INTERNA / INTERNAL
 EXTERNA / EXTERNAL
 RESTRITA / RESTRICTED

REVISADA POR / REVISED BY

Valcir Orlando
Valcir Orlando

CDU/UDC

681.513.6

DATA / DATE

Novembro, 1989

TÍTULO/TITLE	PUBLICAÇÃO Nº PUBLICATION NO
	INPE-4960-TDL/389
ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA DE ESTADO E ANÁLISE DA TAXA DE AMOSTRAGEM PARA SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO	
AUTORES/AUTHORSHIP	Roberto Vieira da Fonseca Lopes

ORIGEM
ORIGIN

DEM/PG

PROJETO
PROJECT

FRH/CEA

Nº DE PAG.
NO OF PAGES

265

ULTIMA PAG.
LAST PAGE

D. 14

VERSÃO
VERSION

Nº DE MAPAS
NO OF MAPS

RESUMO - NOTAS / ABSTRACT - NOTES

A necessidade de técnicas adaptativas para romper dificuldades práticas da teoria de estimação de estados é tão antiga quanto as aplicações desta própria teoria! Este trabalho apresenta uma revisão introdutória das técnicas adaptativas e dá três contribuições a este tema ainda atual. Estende-se o método de correlação de resíduos para estimação de estatísticas de ruídos ao caso de processamento de sinais contínuos. Define-se um processo secundário excitado pelo resíduo, cuja covariância amostral é uma observação linear finita daquelas estatísticas. Fica claro que o modelo discreto com ruído branco sequencial é inconsistente com uma taxa de amostragem contínua. Em seguida estende-se ao caso contínuo o método de validação cruzada para ajuste do grau de suavização de dados, usando o conceito de grão do sinal medido que determina sua resolução. Analisam-se resultados de diferentes tipos de sinais e comparam-se com os de suavização de estados. Estes estudos teóricos dão motivação heurística para o método das malhas, principal contribuição do trabalho. Uma análise paramétrica do caso escalar mostra que se o ruído no sistema é suposto branco, então o intervalo de discretização não deve ser maior que a resolução do sinal. Neste caso a covariância amostral do resíduo de processamento de malhas distintas é uma observação linear das estatísticas dos ruídos no estado e nas observações. Com base nisto o método das malhas estima tais estatísticas e a taxa de amostragem ideal. Resultados são apresentados para um exemplo simplificado de determinação de satélites artificiais.

OBSERVAÇÕES/REMARKS

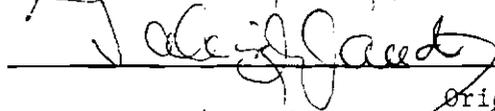
Tese de doutoramento em Ciência Espacial, aprovada em 8 de março de 1989.

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Doutor
em Ciência Espacial

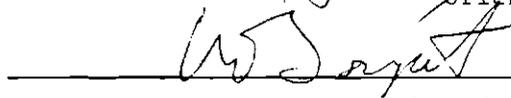
Dr. Aganor de Toledo Fleury


Presidente

Dr. Valcir Orlando


Orientador

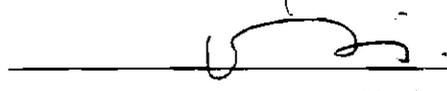
Dr. Wladimir Borgest


Membro da Banca
-convidado-

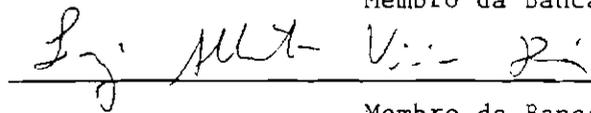
Dr. Takashi Yoneyama


Membro da Banca
-convidado-

Dr. Atair Rios Neto


Membro da Banca

Dr. Luiz Alberto Vieira Dias


Membro da Banca

Candidato: Roberto Vieira da Fonseca Lopes

São José dos Campos, 08 de março de 1989

A sabedoria edificou a sua casa,
lavrou as suas sete colunas.
Carneou os seus animais, misturou o seu vinho,
e arrumou a sua mesa.

Já deu ordem às suas criadas,
e assim convida desde as alturas da cidade:
Quem é simples, volte-se para aqui.
Aos faltos de senso diz:

Vinde, comei do meu pão,
e bebei do vinho que misturei.
Deixai os insensatos, e vivei;
andai pelo caminho do entendimento.

O que repreende o escarnecedor, traz afronta sobre si;
e o que censura o perverso, a si mesmo se injúria.
Não repreendas o escarnecedor, para que te não aborreça;
repreende o sábio e ele te amará.
Dá instrução ao sábio, e ele se fará mais sábio ainda;
ensina ao justo, e ele crescerá em prudência.

O temor do SENHOR é o princípio da sabedoria,
e o conhecimento do Santo é prudência.
Porque por mim se multiplicam os teus dias,
e anos de vida se te acrescentarão.
Se és sábio, para ti mesmo o és;
se és escarnecedor, tu só o suportarás.

(Provérbios de Salomão, capítulo 9)

*A minha irmã Denise,
contagante exemplo de dedicação aos estudos.*

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais pelas facilidades concedidas, que permitiram a realização deste trabalho.

Ao Dr. Valcir Orlando, pelo importante apoio, pela solicitude demonstrada e pela amizade e frutífera cooperação que caracterizaram não só a sua orientação do trabalho mas todo o período de convivência ao longo deste curso de pós-graduação.

Aos demais membros da banca examinadora pela paciente revisão da primeira versão do texto e pelas significativas sugestões que contribuíram de modo decisivo à conclusão do trabalho.

Aos colegas: Dr. José Jaime da Cruz, pela disposição e obsequiosidade em discutir assuntos e fornecer referências que tanto me foram úteis na resolução de questões conceituais e de intrincados problemas algébricos; Dr. Kondapalli Rama Rao, Dr. Hélio Koiti Kuga e quantos mais, com seus companheirismos, me incentivaram a persistir.

À Sra. Fátima A.A. Usifatti pela boa vontade e eficiência em enfrentar a datilografia das mais de quinhentas (!) equações do trabalho, além da infundável lista de símbolos, entre outras.

Aos meus pais, incansáveis, pelos cuidados, estímulos e ativo interesse com que me conduziram desde meu primeiro título de "Doutor em Artes Infantís", pela Escola Barbara Ottoni, em 1961.

À minha amada esposa Alair e aos queridos filhos Paulina, Filipe e Marcela, que além de suportarem os muitos e longos dias (e noites) desta jornada ainda acharam inesquecíveis e surpreendentes meios de me reanimar, suportar e participar da luta por este alvo.

Acima de tudo ao Cordeiro que foi morto, que é digno de receber poder, riqueza, sabedoria, força, honra, glória e louvor.

ABSTRACT

The needs for adaptive techniques to overcome practical difficulties related to the state estimation theory is as old as the applications of the theory itself! This work presents an introductory review of adaptive techniques and gives three contributions to this still up-to-date topic. The residue correlation method for noise statistics estimation is extended to cover the continuous signal processing case. A secondary process driven by the residue is defined in such a way that its sample covariance is a finite linear observation of those statistics. It becomes evident that the discrete model with sequential white noise is not consistent with a continuous sampling rate. Then the cross-validation method for fitting the data smoothing degree using the concept of pixel of the output signal which determines its resolution is extended to the continuous case. Results corresponding to different kinds of signals are analyzed and compared with the state smoothing ones. These theoretical studies give the heuristic motivation for the meshes method - the major contribution of this work. A parametric analysis of the scalar case shows that if the system noise is taken as white the discretization time step must not be greater than the signal resolution. In this case the residue sample covariances that results from processing distinct meshes is a linear observation of both the state and observation noise statistics. On this basis, the meshes method estimates such statistics as well as the ideal sampling rate. Results are presented for a simplified satellite attitude determination problem.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<u>LISTA DE FIGURAS</u>	xv
<u>LISTA DE TABELAS</u>	xix
<u>LISTA DE SÍMBOLOS</u>	xxi
<u>LISTA DE ABREVIATURAS</u>	xxix
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
1.1 - Motivação do trabalho	1
1.2 - Sumário de técnicas de aplicação de estimadores	9
1.2.1 - Detecção de erros grosseiros	9
1.2.2 - Técnicas de validação de modelos	10
1.2.3 - Técnicas de detecção de falhas	10
1.2.4 - Métodos de compensação de erros de modelagem	12
1.2.5 - Métodos de fatorização	14
1.2.6 - Estimadores adaptativos	14
1.3 - Objetivo do trabalho	17
<u>CAPÍTULO 2 - FILTRAGEM LINEAR ADAPTATIVA DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS COM OBSERVAÇÕES CONTÍNUAS</u>	21
2.1 - Extensão do método de correlação de resíduos para o caso contínuo	21
2.1.1 - O filtro linear contínuo	22
2.1.2 - O processo secundário	24
2.1.3 - Cálculo da covariância do processo secundário	25
2.1.4 - Estimação das matrizes R e Q	27
2.1.5 - Considerações sobre a escolha dos parâmetros do filtro se cundário	30
2.2 - Discretização no domínio da frequência para o filtro contínuo o	32
2.2.1 - Expansões de Karhunen-Loève	33
2.2.2 - Discretização do ruído branco no domínio da frequência ...	34

2.2.3 - Simulação do processo secundário	37
2.3 - Análise de desempenho do filtro contínuo adaptativo	41
2.3.1 - Descrição do exemplo numérico	41
2.3.2 - Resultados e conclusões	42
<u>CAPÍTULO 3 - EXTENSÃO DO MÉTODO DE VALIDAÇÃO CRUZADA PARA O CASO</u> <u>DE SUAVIZAÇÃO CONTÍNUA DE DADOS UTILIZANDO O CONCEITO</u> <u>DE RESOLUÇÃO</u>	47
3.1 - Introdução	47
3.2 - Formulação do problema de suavização de dados.....	47
3.3 - O método de validação cruzada e o conceito de resolução	52
3.4 - Ajuste do grau de suavização	56
3.4.1 - Primeiro caso: processo browniano corrompido por ruído branco	57
3.4.2 - Segundo caso: processos estacionários de Gauss-Markov de primeira ordem	58
3.4.3 - Terceiro caso: processos estacionários periódicos	71
3.4.4 - Conclusão	79
<u>CAPÍTULO 4 - ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA PELO MÉTODO DAS MALHAS</u>	81
4.1 - Introdução	81
4.2 - A questão da taxa de amostragem	82
4.2.1 - O filtro linear contínuo-discreto para o caso de ruído <u>es</u> <u>tacionário</u> de Gauss-Markov de primeira ordem	82
4.2.2 - Solução no limite contínuo: o filtro de Deyst	87
4.2.3 - Solução para o modelo branco	92
4.2.4 - Análise do efeito da taxa de amostragem nos filtros com modelos branco e colorido	93
4.2.5 - Extensão da análise para o caso de dinâmica com ruído branco	107
4.3 - Introdução ao método das malhas	112
4.3.1 - Análise de resíduo	112
4.3.2 - Estimativa das variâncias dos ruídos e da taxa de amostra gem adequada pelo método das malhas	115

4.4 - Formulação do método das malhas	140
4.4.1 - O filtro estendido contínuo-discreto de Kalman	141
4.4.2 - Estimação das covariâncias dos ruídos no estado e nas ob servações	143
4.4.3 - Esquema para determinar a taxa de amostragem adequada	148
4.4.4 - Considerações operacionais sobre a aplicação do método das malhas	149
<u>CAPÍTULO 5 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS MALHAS A UM SISTEMA MULTI-VARIÁVEL</u>	<u>155</u>
5.1 - Introdução	155
5.2 - Aspectos gerais do problema de determinação de atitude	155
5.3 - Equacionamento	161
5.4 - Resultados e conclusões	172
<u>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES GERAIS</u>	<u>173</u>
6.1 - Introdução	173
6.2 - Avaliação crítica	174
6.3 - Principais resultados	176
6.4 - Perspectivas	177
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	<u>179</u>
<u>APÊNDICE A - ERGODICIDADE DO PROCESSO SECUNDÁRIO $Z(t)$</u>	
<u>APÊNDICE B - EXPRESSÃO ANALÍTICA PARA A ESTIMATIVA DA VARIÂNCIA DO PROCESSO SECUNDÁRIO NO CASO ESCALAR</u>	
<u>APÊNDICE C - VARIÂNCIA DO ERRO DO SUAVIZADOR LINEAR</u>	
<u>APÊNDICE D - CÁLCULO DA FUNÇÃO DE VALIDAÇÃO CRUZADA</u>	

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
1.1 - Experimento do amortecedor de natação	4
1.2 - Diagrama Teoria & Prática de estimadores de estados	6
2.1 - Desempenho do filtro contínuo adaptativo: a) Erro na estimativa de Q; b) Erro na estimativa de R; c) Relação entre a frequência fundamental e o número de termos da série de Foürier para alcançar um dado nível de precisão; d) Desvio médio e tendenciosidade média	44
2.2 - Desempenho do filtro contínuo adaptativo no caso escalar ...	45
3.1 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov: $\beta=0,5$ e $\beta=0,7$	62
3.2 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov: $\beta=2$	63
3.3 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov: $\beta=3$	64
3.4 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov: $\beta=4$	65
3.5 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov: $\beta=5$	66
3.6 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov: $\beta=1,25$ e $\beta=10$	67
3.7 - Mapeamento dos parâmetros do sistema com modelo e Gauss-Markov quanto ao desempenho do suavizador linear	70
3.8 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo estacionário periódico: $\beta=2$ e $\beta=3$	72
3.9 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo estacionário periódico: $\beta=4$	73
3.10 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo estacionário periódico: $\beta=5$	74
3.11 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo estacionário periódico: $\beta=6$	75
3.12 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo estacionário periódico: $\beta=7$	76

3.13 - Mapeamento dos parâmetros do sistema com modelo estacionário periódico quanto ao desempenho do suavizador linear ...	78
4.1 - Desempenho do filtro de Kalman com modelo de ordem reduzida em um sistema com ruídos de Gauss-Markov: caso 1	95
4.2 - Desempenho do filtro de Kalman com modelo de ordem reduzida em um sistema com ruídos de Gauss-Markov: caso 2	96
4.3 - Desempenho do filtro de Kalman com modelo de ordem reduzida em um sistema com ruídos de Gauss-Markov: caso 3	97
4.4 - Desempenho do filtro de Kalman com modelo de ordem reduzida em um sistema com ruídos de Gauss-Markov: caso 4	98
4.5 - Desempenho do filtro de Kalman com modelo de ordem reduzida em um sistema com ruídos de Gauss-Markov: caso 5	99
4.6 - Desempenho do filtro de Kalman com modelo de ordem reduzida em um sistema com ruídos de Gauss-Markov: caso 6.	100
4.7 - Mapeamento dos parâmetros do sistema com ruídos de Gauss-Markov quanto ao desempenho do filtro de Kalman	105
4.8 - Mapeamento dos parâmetros do sistema com ruído de Gauss-Markov na observação e ruído branco no estado, quanto ao desempenho do filtro de Kalman	111
4.9 - Esquema de processamento paralelo das observações no método das malhas	119
4.10 - Incerteza relativa nas estimativas das variâncias dos ruídos no estado e nas observações pelo método das malhas: caso 1	120
4.11 - Incerteza relativa nas estimativas das variâncias dos ruídos no estado e nas observações pelo método das malhas: caso 2	122
4.12 - Incerteza relativa nas estimativas das variâncias dos ruídos no estado e nas observações pelo método das malhas: caso 3	124
4.13 - Incerteza relativa nas estimativas das variâncias dos ruídos no estado e nas observações pelo método das malhas: caso 4	126
4.14 - Incerteza relativa nas estimativas das variâncias dos ruídos no estado e nas observações pelo método das malhas: caso 5	128

4.15 - Incerteza relativa nas estimativas das variâncias dos ruídos no estado e nas observações pelo método das malhas: caso 6	130
4.16 - Desempenho real (simulado) do método das malhas em um sistema com Ruído Branco: $\phi = 0,995$; $R=1$; $Q=0,04$	132
4.17 - Desempenho real (simulado) do método da máxima verossimilhança no sistema com ruído branco: $\phi=0,995$; $R=1$; $Q=0,04$	134
4.18 - Desempenho real (simulado) do método de correlação da saída no sistema com ruído branco: $\phi=0,995$; $R=1$; $Q=0,04$...	136
4.19 - Desempenho real (simulado) do método correlação do resíduo sistema com ruído branco: $\phi=0,995$; $R=1$; $Q=0,04$	138
5.1 - Desempenho do estimador adaptativo de atitude pelo método das malhas com observações angulares	166
5.2 - Desempenho do estimador adaptativo de atitude pelo método das malhas com observações de velocidade angular	169
B.1 - Relação geométrica entre os índices i,j e ℓ,k	B.4
B.2 - Esquema das correlações direta e inversa entre duas sequências aleatórias quaisquer u_1 e u_2	B.5
C.1 - Mapeamento das propriedades de $\tilde{\sigma}^2$ no plano $\beta-\epsilon^2$	C.9
C.2 - Comportamento qualitativo do suavizador no caso de processos de Gauss-Markov de primeira ordem: a) $\beta=0,25$; b) $\beta=0,5$; c) $\beta=1,5$; d) $\tilde{\sigma}^* \times p^*/(1+p^*)$; e) $p^*/(1+p^*) \times \epsilon$; f) $\tilde{\sigma}^* \times \epsilon$	C.11
C.3 - Comportamento qualitativo do suavizador no caso de processos periódicos: a) $\beta=0,5$; b) $\beta=1$; c) $\beta=2$; d) $\tilde{\sigma}^* \times p^{*2}/(1+p^{*2})$; e) $p^{*2}/(1+p^{*2}) \times \epsilon$; f) $\tilde{\sigma}^* \times \epsilon$	C.17

LISTA DE TABELAS

	Pág.
2.1 - Coeficientes das séries de Fôurier para simular o filtro contínuo adaptativo	40
2.2 - Resultados da simulação do filtro adaptativo	43
4.1 - Auto-valores e auto-vetores da matriz do filtro de Deyst para sistemas com ruídos de Gauss-Markov	91
4.2 - Classificação das configurações dos parâmetros de um sistema em termos do desempenho do filtro de Kalman levando em conta a taxa de amostragem	105
4.3 - Auto-valores e auto-vetores da matriz do filtro de Deyst para sistema com ruído branco e de Gauss-Markov	111
5.1 - Sumário de aspectos relevantes à determinação de atitude de satélites artificiais	157

LISTA DE SÍMBOLOS

- a_x - Coeficiente par da expansão da variável genérica x em série de Fourier (vetorial ou escalar)
- a - Parâmetro de correlação do ruído colorido no estado
- b_x - Coeficiente ímpar da expansão da variável genérica x em série de Fourier (vetorial ou escalar)
- b - Parâmetro de correlação do ruído colorido na observação
- c - Representa constante genérica, com significado especificado no contexto
- $\frac{d\zeta}{dx}$ - Representa a derivada da função genérica ζ em relação a seu argumento genérico x
- e - Vetor nulo
- e - Argumento nulo de função
- f - Função não linear do estado, a cujo sistema dinâmico realimenta
- ζ - Representa função genérica, com significado especificado no contexto
- g - Ganho escalar de filtro linear
- g - Representa função genérica, com significado especificado no contexto
- h - Função de observação não linear do estado de um sistema dinâmico
- i - Índice nulo
- j - Índice nulo
- j - Unidade imaginária
- k - Índice nulo
- k_i - Constante de amortecimento do i -ésimo harmônico na suavização de um sinal periódico
- ℓ - Índice nulo

m	- Dimensão do estado secundário
n	- Dimensão do estado
σ	- Ordem de suavização de dados
p	- Parâmetro de suavização
ρ	- Coeficiente secular da solução da equação diferencial Hamiltoniana para o filtro de Deyst
q	- Dimensão do ruído no estado
q	- Coeficiente linear da densidade espectral de potência do ruído no estado
r	- Dimensão do ruído de observação
r	- Coeficiente linear da covariância do ruído de observação
s	- Constante de realimentação escalar do processo secundário
δ	- Tempo relativo; "shift"
t	- Tempo
u	- Sequência aleatória gaussiana
u	- Meia resolução normalizada
v	- Ruído escalar de observação
x	- Estado escalar de sistema linear
x	- Variável muda
y	- Observação escalar
z	- Processo secundário escalar
A	- Matriz de realimentação de sistema dinâmico linear
\hat{A}	- Matriz de realimentação do sistema dinâmico linear do suavizador com um grão ausente
B	- Matriz de coeficientes do ruído no estado
\hat{B}	- Vetor de coeficientes do termo forçante no sistema dinâmico linear do suavizador com um grão ausente
$C_{e_1, e_2}(t, \tau)$	- Função, ou "kernel", de covariância de processos vetoriais genéricos $e_1(t)$ e $e_2(\tau)$

- $C_{e_1, e_2}^\infty(\delta)$ - Valor de regime permanente (limite $t \rightarrow \infty$) de $C_{e_1, e_2}(t+\delta, t)$
- $C_e(\delta)$ - Função, ou "kernel", de auto-covariância de processo vetorial estocástico genérico estacionário, e , com "shift" δ
- $\vec{C}_{u_1, u_2}(k)$ - Correlação amostral direta de sequência aleatórias u_1 e u_2 , genéricas com "shift" k
- $\overleftarrow{C}_{u_1, u_2}(\ell)$ - Correlação amostral inversa de sequências aleatórias u_1 e u_2 , genéricas com acúmulo ℓ
- C^i - Classe de funções com derivadas contínuas até a ordem i
- $C_e(\delta)$ - Correlação de processo vetorial estocástico genérico e efêmero, e , com "shift" δ
- D_i - Matriz de amortecimento do i -ésimo harmônico do termo forçante em sistema dinâmico linear periódico
- D - Matriz do filtro de Deyst
- $E[.]$ - Operador esperança
- F - Derivada parcial da função f em relação ao estado
- F - Transformada de Foürier
- G - Matriz ganho de filtro linear
- G - Matriz ganho do processo secundário
- H - Matriz de observação, derivada parcial da função h em relação ao estado
- H - Matriz Hamiltoniana associada a covariância do erro de estimação do filtro de Deyst
- I_i - Matriz identidade de dimensão $i \times i$
- J - Representa integral definida especificada no contexto
- K - Representa constante especificada no contexto
- L - Matriz genérica
- ξ - Representa operador linear
- M - Matriz de realimentação dinâmica do erro de estimação de estado

N	- Número de instantes de observação ou de termos em expansão em série de Fourier
\mathbb{N}	- Conjunto dos naturais
P	- Matriz de covariância do erro de estimação
P_0	- Variância do erro de estimação no caso trivial: $\hat{x}=y$, para o sistema com ruído colorido
P_{∞}^*	- Variância do erro de estimação ótima em regime permanente quando $\Delta t \rightarrow \infty$, para o sistema com ruído colorido
P_d	- Variância do erro de estimação ótima em regime permanente quando $\Delta t \rightarrow 0$ para o sistema com ruído colorido (filtro de Deyst)
P_v	- Variância do erro de estimação em regime permanente para o sistema com ruído colorido quando o ganho é projetado supondo que os ruídos são brancos
P	- Matriz peso para estimação do método das malhas
Q	- Matriz de covariância do ruído no estado
Q_i	- i -ésima parcela matricial do modelo linear de Q
R	- Matriz de covariância do ruído na observação
\mathbb{R}	- Conjunto dos reais
R_i	- i -ésima parcela matricial do modelo linear para R
S	- Matriz de realimentação do sistema dinâmico do processo secundário
S	- Densidade espectral de potência
T	- Intervalo de tempo
U	- Auto-vetor da matriz linear do estado A
U	- Auto-vetor da matriz Hamiltoniana transposta H'
V	- Vetor ruído de observação
V	- Auto-vetor da matriz Hamiltoniana H
W	- Vetor de ruído no estado

ω	- Frequência de Nyquist (ou frequência de corte)
X	- Vetor de estados
Y	- Vetor de observação
Z	- Vetor de estado secundário
Z	- Matriz de covariância do processo secundário
α	- Grau de suavização
β	- Cor relativa do ruído
γ	- Parâmetro de dispersão no estado
δ	- Variação infinitesimal
$\delta(t)$	- Função delta de Dirac
δ_i	- Delta de Kröenecker
ϵ	- Incerteza relativa
ζ	- Vetorização da matriz $S Z_\infty + Z_\infty S'$
η	- Ruído branco no filtro branqueador que forma o ruído colorido na observação
θ	- Vetor de parâmetros a serem estimados
κ	- Auto-valor da matriz Hamiltoniana H
λ	- Auto-valor da matriz de realimentação em sistemas dinâmicos lineares
μ	- Auto-função do "kernel" de auto-covariância $C_{x,x}(t,\tau)$
ν	- Parâmetro de desempenho do filtro: $\epsilon_d/\epsilon_{\max}$
ξ	- Ruído branco no filtro branqueador que forma o ruído colorido no estado
π	- Semi-círculo em radianos: 3,141 ...
ρ	- Vetor de resíduos
σ	- Vetorização da matriz de covariância amostral do resíduo
σ_x^2	- Variância da variável genérica x
T	- Tempo

ϕ	- Parâmetro de transição de estado no caso escalar
ψ	- Meia resolução normalizada
ω	- Frequência
ω_0	- Frequência fundamental
Γ	- Matriz aditiva de dispersão no estado
Δx	- Erro na variável genérica x (escalar, vetor ou matriz)
Δ	- Resolução, ou intervalo de discretização
Θ	- Matriz de observação do parâmetro θ
$\Lambda(\lambda_i)$	- Matriz diagonal com elementos $\Lambda_{i,i} = \lambda_i$
Ξ	- Matriz de decomposição da covariância do erro de estimação no filtro de Deyst
Π	- Fator da covariância do filtro de Deyst, partição à esquerda de Ξ
Σ	- Matriz de covariância do resíduo
T_k	- Conjunto de observações até o instante t_k : y_i , $i=1, \dots, k$
Φ	- Matriz de transição de estados
Ψ	- Fator da covariância do filtro de Deyst, partição à direita de Ξ
Ω	- Matriz unitária anti-simétrica na definição de matriz Hamiltoniana

Índices Superiores

*	- Indica valor ótimo, segundo determinado critério especificado no contexto
~	- Indica valor estimado
~	- Indica valor suavizado
-	- Indica valor normalizado (adimensional)
(o)	- Indica derivada de ordem o em relação a t

Índices Inferiores

0	- Indica valor inicial, a priori
∞	- Indica valor em regime permanente
*	- Indica valor centrado no grão ausente
a	- Indica grandeza associada ao filtro com malha alternada de observações
d	- Indica grandeza associada ao filtro de Deyst
e	- Indica grandeza associada a estado estendido
eq	- Indica grandeza associada ao ruído equivalente, discretizado no domínio da frequência
f	- Indica grandeza associada a instante final
m	- Indica grandeza associada ao instante médio de amostragem
max	- Indica grandeza associada ao filtro com taxa de amostragem tendendo a zero ($\Delta t \rightarrow \infty$)
p	- Indica grandeza associada ao pseudo-filtro de Kalman, onde o pseudo ganho de Kalman é projetado supondo modelo de ruído branco quando o modelo "verdadeiro" é colorido
t	- Indica grandeza associada a estimativa trivial $\hat{x}=y$
v	- Indica grandeza associada a valor verdadeiro, relativo ao filtro com "pseudo" ganho de Kalman projetado supondo modelo de ruído branco quando a modelo "verdadeiro" é colorido

Especiais

\in	- Pertence a
U	- União
(. .)	- Indica informação condicionada, dado que
.	- Módulo
$\frac{\partial f(e_1.)}{\partial e}$	- Indica derivada parcial de função f genérica em relação a seu argumento e genérico

.	- Indica derivada temporal
\forall	- Para todo, qualquer
\int	- Integral
\triangleq	- Definição
\cong	- Aproximação
$\dot{=}$	- Por hipótese
$\ \cdot \ $	- Norma

LISTA DE ABREVIATURAS

cos(.)	- Função co-seno
cosh(.)	- Função co-seno hiperbólico
det(L)	- Determinante de matriz quadrada L genérica
diag(x_i)	- Matriz diagonal com elemento i, i dado por x_i
exp(.)	- Função exponencial (de escalar ou de matriz quadrada)
lim	- Limite
$N_{\text{Eqs.}}$	- Número de equações
$N_{\text{Inc.}}$	- Número de incógnitas
tr(L)	- Traço de matriz quadrada L genérica
sen(.)	- Função seno
senh(.)	- Função seno hiperbólico
vet(L)	- Vetorização de matriz genérica L

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

Os estimadores baseados em modelos de estado-espço formam, juntamente com os baseados em modelos de entrada e saída, ferramentas teóricas com grande potencial de aplicação nas mais diversas áreas das ciências exatas. Suas origens remontam ao método de mínimos quadrados de Gauss para resolver o problema prático de determinação de órbitas de corpos celestes, em 1795. Com os trabalhos fundamentais de Kolmogorov, Wiener e Kalman em meados deste século, aliados ao advento do computador digital, foram lançadas as bases que permitiram o grande desenvolvimento que se verificou nesta área desde então (Kailath, 1977). O bojo da produção científica especializada na área atesta a força destes resultados teóricos fundamentais. Em particular as excelentes características de otimalidade (sob ampla variedade de critérios de otimalidade) e recursividade do filtro linear de Kalman e os conceitos de observabilidade e controlabilidade estocástica (Maybeck, 1979) sobressaem quase a ponto de induzirem uma expectativa de desempenho além daquela apropriada, que a rigor se restringe ao contexto matemático bem definido por certas hipóteses (Maybeck, 1983). De fato este aparente entusiasmo gerado cedo topou com a realidade do fenômeno conhecido por divergência (Heffes, 1966; Schlee et alii, 1967; Smith, 1967; Price, 1968; e Bryson, 1978, por exemplo), que consiste basicamente em o filtro seguir bem um modelo teórico que se afasta da realidade. Os seguintes fatores são geralmente apontados como causas de divergência: instabilidades numéricas; incertezas nos parâmetros dos modelos dinâmico e de observação; incerteza nas covariâncias dos ruídos na dinâmica e nas observações; truncamento do modelo dinâmico; não linearidades; invalidade de hipóteses estatísticas dos ruídos (aleatórios, brancos, gaussianos, não correlacionados entre si e com a estimativa a priori e não tendenciosos). Diante disto torna-se necessária uma certa cautela na aplicação das idéias de filtragem. O seguinte exemplo concreto de

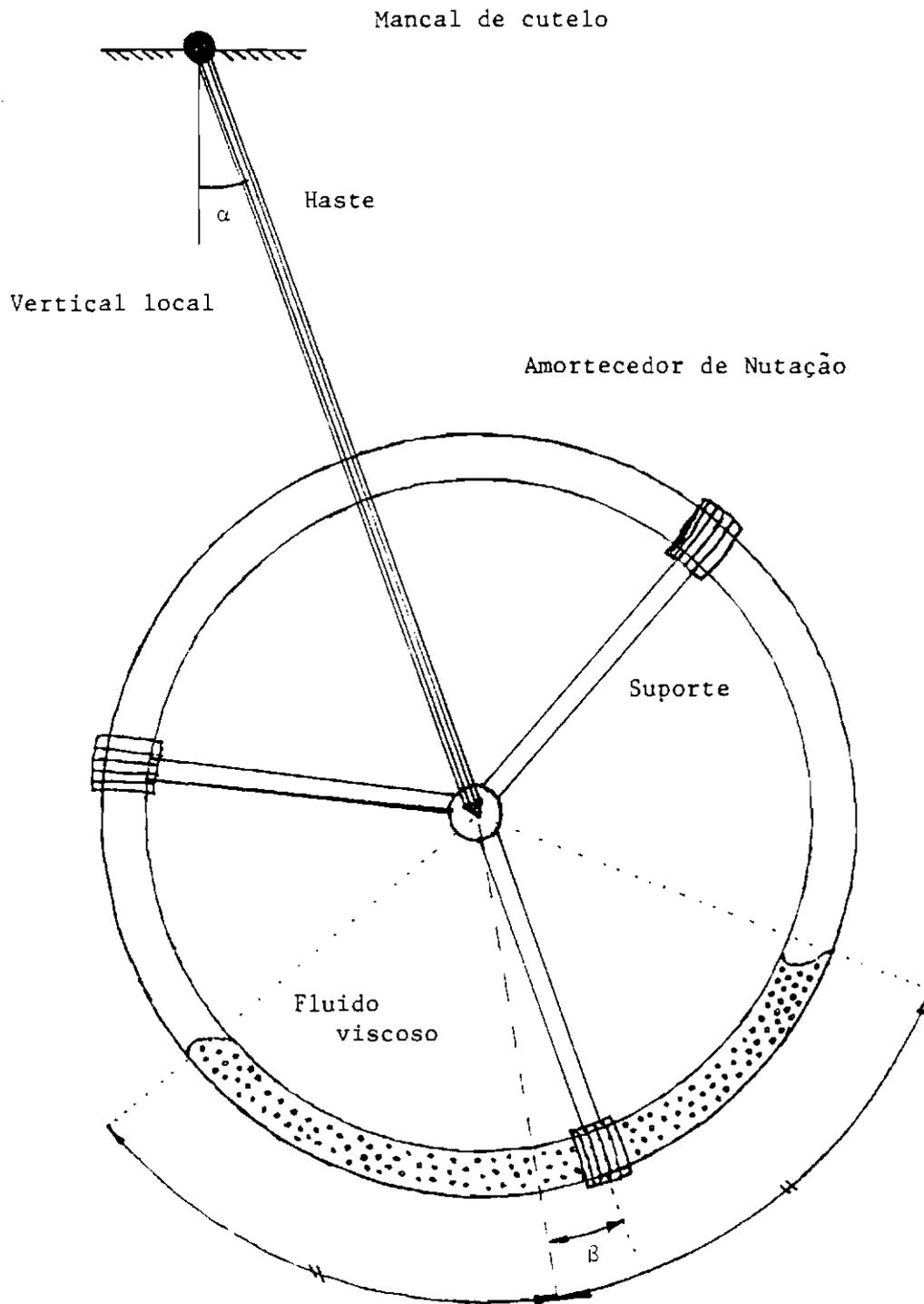
fracasso na tentativa de aplicação de um procedimento de estimação ótima pode ilustrar bem esta questão.

Um interessante experimento com um pêndulo foi elaborado para levantar as características de desempenho de um amortecedor de nutação do tipo anular excêntrico, parcialmente cheio de líquido viscoso, para uso em satélites estabilizados por rotação (Lopes, 1987 e Cruz e Lopes, 1987). O experimento consistia basicamente em observar o deslocamento angular do pêndulo em função do tempo, durante o decaimento da amplitude de oscilação (ver Figura 1.1). Considerando o líquido no interior do anel como um tarugo viscoso com potencial dissipativo de Rayleigh, a dinâmica do sistema pode ser descrita por um sistema de 2 equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem. O problema a ser resolvido se reduz à estimação da constante do potencial dissipativo, que determina as características de amortecimento do equipamento. Dado que o sistema linearizado associado é observável, controlável e estável, o problema proposto não apresenta qualquer dificuldade teórica. Entretanto o que aparentava ser uma situação adequada para a aplicação da teoria de estimação de estado revelou graves impedimentos relacionados a seguir.

Em primeiro lugar, as condições iniciais não eram conhecidas por razões operacionais. Embora o pêndulo fosse disparado sempre de um dado ângulo em relação à vertical local e em repouso, este evento não era sincronizado com a taxa de amostragem do sistema digital de aquisição de dados, de modo que o instante inicial não correspondia ao do disparo do pêndulo. Além disso o dispositivo mecânico de disparo introduzia vibrações na estrutura do pêndulo de modo a descaracterizar a situação original de repouso do sistema. Por esta razão, passou a ser necessário estimar também as condições iniciais. O segundo fator problemático deveu-se a incerteza em alguns parâmetros do modelo dinâmico, principalmente a posição do centro de massa do sistema e seu momento de inércia. Ocorre que neste exemplo em particular, incertezas nos parâmetros do sistema acarretam erros na frequência de oscilação do pêndulo, o que por sua vez implica em um crescimento secular na defasagem entre o modelo e as observações. Tais

parâmetros deveriam porisso ser estimados. Com isso o número de parâmetros a serem estimados, que inicialmente era de apenas um, ficou acrescido de outros seis elementos (4 referentes ao estado inicial e 2 parâmetros do modelo) totalizando assim sete elementos a serem estimados a partir da observação de uma única variável angular.

Não bastasse esta desproporção, contribuiu para agravar a situação o fato de que o modelo dinâmico era muito simplificado, pois não incorporava o efeito de atrito no mancal do pêndulo e nem do exato perfil de velocidades do fluido no interior do anel. Evidentemente com tal conjunção de fatores desfavoráveis ocorreu a divergência e não foi possível aplicar com sucesso o método de mínimos quadrados para a estimação do parâmetro desejado. Ao invés disso, optou-se ali por um método mais robusto de ajuste das amplitudes máximas amostradas em cada período de oscilação por um modelo de decaimento exponencial, cuja constante de tempo é determinada pela parte real do auto-valor correspondente do sistema dinâmico completo linearizado. Uma vez assim estimada esta constante de tempo e conhecida a relação analítica entre os auto-valores do sistema dinâmico e a constante do potencial dissipativo, esta última pode ser facilmente determinada. A vantagem deste método é que ele não é sensível a erros no estado inicial e na frequência de oscilação. Em contrapartida, o preço que se pagou por isso é que o nível de precisão obtido foi pior do que poderia ter sido alcançado pelo método de estimação ótima num caso ideal, ainda que satisfatório para os objetivos do experimento.

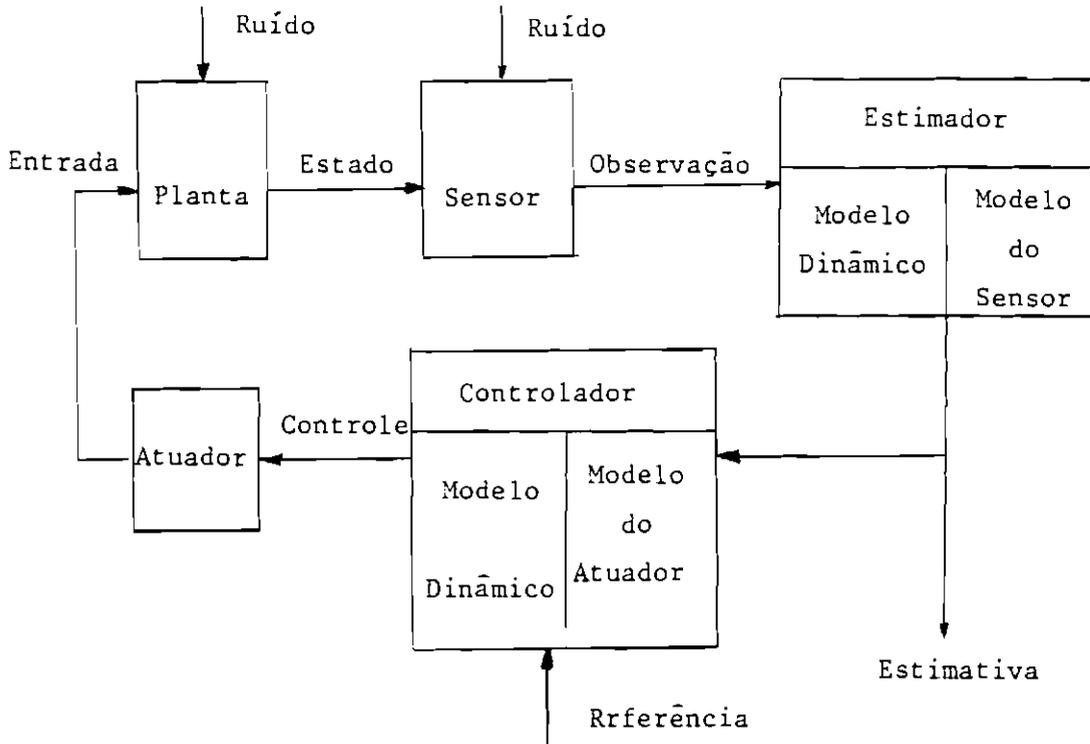


- α ... Ângulo de oscilação do pêndulo.
- δ ... Deslocamento angular interno do fluido.

Fig. 1.1 - Experimento do amortecedor de nutação.

Este exemplo desastroso é, como tantos outros, uma consequência do simples fato de que a aplicação da teoria de estimação de estados a uma situação real não se resume ao problema ideal de obtenção de uma estimativa de mínima variância condicionada a uma sequência de observações, dado um modelo dinâmico e uma função de observação, ambos corrompidos por ruídos aleatórios com distribuição gaussiana de média nula e covariância conhecida, de preferência brancos e não correlacionados entre si e com o estado inicial! Surge necessariamente o conflito entre a capacidade de estabelecer resultados gerais dentro do escopo estritamente matemático e as peculiaridades inerentes a aplicação destes resultados a situações específicas no mundo real (ver Figura 1.2). O compromisso entre a sofisticação teórica e a experiência prática é que tem produzido soluções de engenharia para este conflito, por exemplo, nas áreas de sistemas de potência, aviação, navegação, química, medicina, satélites artificiais e mesmo amortecedores de nutação. A questão a ser ponderada é em quais circunstâncias se pode esperar um desempenho satisfatório para um dado estimador de estados e o que é possível fazer para que um estimador de estados se adapte a uma dada circunstância. É portanto notória a existência de motivação de origem prática para pesquisas sobre técnicas que reduzam a distância que separa finas teorias de cruas realidades. Especialmente na medida em que não há meios de evitar que estas por vezes insistam em escapar às rígidas hipóteses sobre as quais aquelas tão bem se fundamentam.

a) Teoria:



b) Prática:

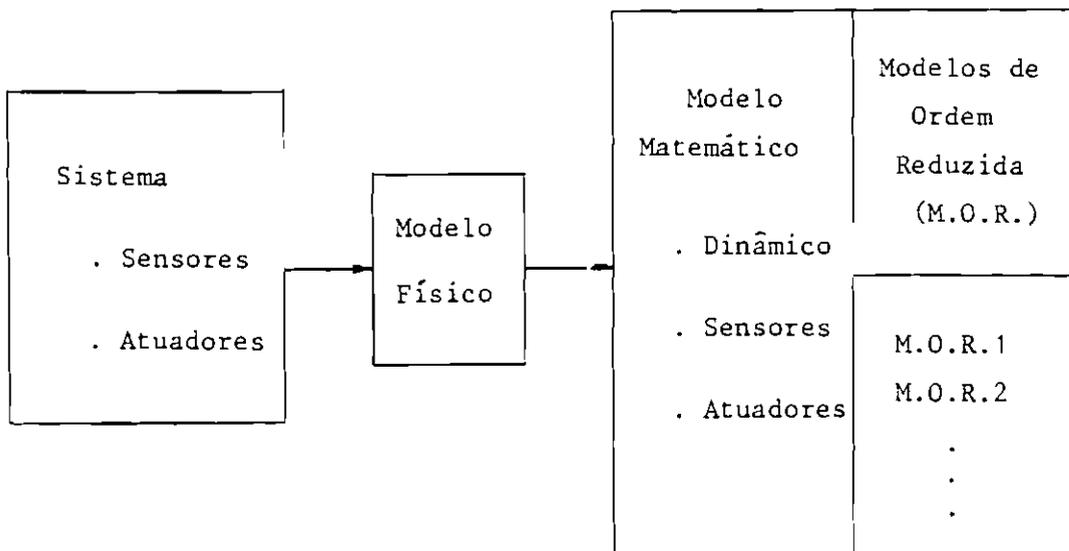


Fig. 1.2 - Diagrama teoria & prática de estimadores de estado.

A relevância do tema do trabalho no que tange à realidade nacional na área de Ciência Espacial fica evidenciada pela possibilidade de aplicações, por exemplo, em determinação de atitude de satélites artificiais dentro do programa espacial nacional, atualmente com perspectivas de desenvolvimentos de satélites com níveis crescentes de sofisticação. A Missão Espacial Completa Brasileira (MECB) prevê dois satélites de coleta de dados, estabilizados por rotação, e dois de sensoriamento remoto, mais complexos, com estabilização em três eixos. Paralelamente à MECB está em andamento um projeto em conjunto com a China, de dois satélites de sensoriamento remoto, bem mais pretensiosos. Existem também, ainda num estágio embrionário, algum interesse em se desenvolver um satélite científico e a cogitação de alguma participação nacional mais efetiva nos próximos satélites de telecomunicações da EMBRATEL. O sucesso de tais envolvimento certamente está vinculado, entre diversos outros itens, ao domínio de técnicas e procedimentos confiáveis que satisfaçam os requisitos de precisão para a determinação da atitude.

Esforços vem sendo consistentemente somados nesta direção pelo Instituto de Pesquisas Espaciais (INPE/MCT). Em particular, no curso de pós-graduação em Ciências Espaciais / Mecânica Orbital, foram desenvolvidas nos últimos dez anos cinco dissertações de mestrado especificamente na área de determinação de atitude em três eixos e uma outra sobre determinação de atitude em um eixo. A primeira delas (Lopes, 1982) considerou o problema com modelagem dinâmica simplificada, utilizando filtragem adaptativa com compensação do modelo dinâmico. Em seguida Cardenutto (1984) abordou o problema com modelo cinemático. Mais tarde Trabasso (1986) investigou a possibilidade de determinar a atitude substituindo giros por acelerômetros convenientemente distribuídos no satélite. Ferraresi (1987) apresentou então um estudo comparativo detalhado sobre métodos distintos de determinação de atitude em três eixos que utilizam apenas o modelo cinemático e tratam da questão da singularidade na matriz de covariância do erro de estimação do quaternion. Logo após, Varotto (1987) propôs um esquema de utilização conjunta dos métodos estático e dinâmico para estimação de atitude em três eixos. Recentemente Guedes

(no prelo) estudou o caso de determinação de atitude em um eixo para um satélite estabilizado por rotação, estimando parâmetros do modelo dinâmico.

Além destes trabalhos houve três teses de doutoramento (Ceballos, 1983; Ferreira, 1983 e Moro, 1983) e quatro dissertações de mestrado (Souza, 1980; Ribeiro, 1986; Souza, 1987 e Padilha, (no prelo), sobre controle de atitude mas que estão de algum modo relacionadas com a determinação de atitude. Ainda com referência a este tema, devem ser mencionadas duas teses de doutoramento (Orlando, 1983 e Fleury, 1985), e uma outra prestes a ser concluída, e uma tese de mestrado (Kuga, 1982) propondo métodos de compensação e de filtragem adaptativa de aplicação geral, juntamente com duas outras teses de doutoramento (Silva, 1982 e Negreiros de Paiva, no prelo) empregando métodos desta linha para determinação de órbita de satélites artificiais.

O presente trabalho de pesquisa pretende acrescentar alguma contribuição neste sentido. Dentro da área de estimação de estados, estuda-se principalmente o efeito da taxa de amostragem e elabora-se um esquema básico de filtragem adaptativa tendo em vista futuras aplicações práticas tais como determinação de atitude de satélites artificiais. Neste tipo específico de aplicação, os parâmetros do sistema dinâmico são em geral bem conhecidos, pois derivam de equações da mecânica dos sólidos. Porém os distúrbios no sistema, modelados como ruídos, variam com a posição do satélite na órbita e suas covariâncias não são bem conhecidas. A própria covariância do ruído nas observações pode não ser bem conhecida devido a fatores tais como desalinhamentos em voo, interferências variáveis e incertezas nos modelos das referências observadas. Além disso a taxa de amostragem dos sensores de atitude pode atingir tipicamente a ordem de 1 Hz, o que dificilmente se compatibiliza com o modelo de ruído branco nas observações. Assim, a utilidade do procedimento está não só em permitir estimar as covariâncias dos ruídos, como em estabelecer, de modo sistemático, a taxa de amostragem adequada para validar o processamento de um filtro baseado em modelo com ruído branco.

1.2 - SUMÁRIO DE TÉCNICAS DE APLICAÇÃO DE ESTIMADORES

Para melhor delinear o problema da filtragem adaptativa, apresenta-se nesta seção uma breve explanação introdutória ao contexto mais amplo das técnicas desenvolvidas para adequar os procedimentos de estimação ótima a aplicações reais. O desenvolvimento de pesquisas e suas aplicações nesta área vem sendo continuamente incentivado pela crescente capacidade dos microprocessadores a custos cada vez mais acessíveis. Assim, a lista de tópicos aqui citados não pretende ser completa mas sim ilustrar os diferentes aspectos envolvidos. Também a linha divisória entre algumas técnicas abordadas não é rigidamente definida e portanto a classificação utilizada deve ser entendida apenas como um recurso didático para a exposição do assunto. Tendo isto em mira, são enumeradas a seguir as técnicas de: detecção de erros grosseiros; validação de modelos; detecção de falhas; métodos de compensação de erros de modelagem; fatorização; e os estimadores adaptativos. Cada uma destas técnicas está direcionada para a solução de aspectos específicos cuja importância varia com o tipo de aplicação prática.

1.2.1 - DETEÇÃO DE ERROS GROSSEIROS

As técnicas de detecção de erros grosseiros (Handschim et alii, 1975) são baseadas na análise estatística de resíduos e visam evitar que distúrbios esporádicos não modelados e de grandes amplitudes degradem o desempenho do estimador. Neste tipo de técnica há sempre a necessidade de escolher níveis de confiabilidade que regulam o compromisso entre o risco de aceitar dados inválidos e o de rejeitar dados válidos. Estas técnicas são especialmente adequadas em aplicações onde há grande redundância de observações sendo processadas em tempo real. É o caso, por exemplo, dos sistemas de potência (Doraíswami and Pereira, 1980; e Amaral e Simões Costa, 1986). Outra área de aplicação é o pré-processamento de dados em geral (Orlando e Lopes, 1985).

1.2.2 - TÉCNICAS DE VALIDAÇÃO DE MODELOS

As técnicas de validação de modelos estabelecem meios de verificar se um dado modelo se ajusta a um dado sistema. Tais técnicas usualmente baseiam-se em: análise estatística de resíduos; teste de hipóteses; testes de razão de verossimilhança segundo o ponto de vista local assintótico; e método de variável instrumental (Benveniste et alii, 1987), por exemplo. A aplicação prática destas técnicas é bastante abrangente e é particularmente necessária sempre que se utilizam modelos simplificados para descrever algum sistema real. É o que ocorre quando se desconhecem detalhes do sistema real ou há dificuldade para implementar um modelo mais completo.

1.2.3 - TÉCNICAS DE DETEÇÃO DE FALHAS

Bastante relacionadas com as técnicas de validação de modelos são as técnicas de detecção de falhas, cujo desenvolvimento está bem estruturado em classes de problemas (Willsky, 1976 e Benveniste et alii, 1987): alarme; estimação; identificação e diagnose. O conceito de falha é utilizado aqui num sentido amplo, incluindo falhas de equipamentos (sensores, atuadores, ou elementos do sistema) ou de modelagem, devidas a mudanças abruptas e inesperadas no ponto de operação do sistema, por exemplo. Trata-se portanto de um fenômeno qualquer a partir do qual o modelo (dos sensores, atuadores, ou do próprio sistema) adotado deixa de ser válido.

Sumariamente, alarme (ou detecção propriamente dita) consiste em decidir se uma falha ocorreu ou não. Estimação consiste em determinar o instante da falha, caso tenha ocorrido. Estes dois primeiros itens em conjunto permitem que um procedimento seja utilizado em sua forma ótima original até que ocorra alguma falha. São então acionados os itens seguintes, que em geral tornam o procedimento sub-ótimo. O próximo item é a identificação, que consiste em determinar a intensidade da falha. Isto é, se algum parâmetro dos sensores, dos atuadores, ou do sistema sofreu alteração, determinar o

novo valor do parâmetro. Por fim, a diagnose trata de determinar a origem da falha pela análise de seus efeitos. Existem diversos métodos para responder a estas questões. Willsky (1976) classifica estes métodos em categorias enumeradas a seguir.

Na primeira delas encontram-se os filtros sensíveis a falhas: filtro de memória limitada e filtro com ponderação exponencial dos resíduos (nos quais o ganho permanece aberto para se adaptar a novos pontos de operação do sistema) (Jazwinsky, 1970); e filtro sintonizado a falhas, cuja idéia básica consiste em projetar o ganho não de modo a minimizar a incerteza na estimativa mas sim assegurar que em caso de ocorrência de falha, o resíduo assuma uma direção com características pré-estabelecidas (White and Speyer, 1987). Existem fortes resultados teóricos sobre a convergência deste último tipo de filtro, mas sua aplicação ainda está restrita a sistemas lineares invariantes no tempo.

A segunda categoria citada é a dos sistemas de voto, onde as estimativas de três filtros, alimentadas por medidas de sensores redundantes independentes, são confrontadas entre si. Caso ocorra falha em um dos sistemas sensores, prevalece o voto da maioria. Este método é o mais simples e seguro, porém só se aplica se houver redundância suficiente de sensores.

Numa terceira categoria estão os filtros detetores de múltiplas hipóteses (Lainiotis, 1971). Neste caso são projetados uma bateria de filtros baseados em modelos distintos. A estimativa final é obtida pela média das estimativas de cada filtro, ponderadas pela probabilidade de ocorrência de seus resíduos. A idéia básica dos métodos desta categoria é que os filtros baseados em modelos falsos tendem a divergir e neste caso seus resíduos assumem valores cuja probabilidade de ocorrência prevista teoricamente (isto é, supondo que o modelo fosse correto) é muito pequena. Com isso reduz-se o efeito das estimativas oriundas dos filtros divergentes na estimativa final. Esta técnica apresenta os resultados de melhor precisão, mas requer

uma tal quantidade e complexidade de cálculos que a torna dificilmente aplicável na prática.

Numa outra categoria de métodos encontram-se os chamados processos de saltos (Pearson, 1973), cuja formulação teórica fornece uma representação bastante adequada para o problema de detecção de falhas. Segundo esta representação, as alterações nos parâmetros nominais do sistema são processos de saltos aleatórios modelados como cadeias de Markov. A partir daí as questões de alarme, estimação e identificação podem ser teoricamente resolvidas numa base probabilística. Entretanto, a implementação deste método é também muito onerosa e em geral exige simplificações consideráveis.

A última categoria citada é a dos métodos baseados na inovação, onde se analisam os resíduos por meio de estatísticas para decidir sobre a ocorrência de falhas (Basseville et alii, 1986, e Benveniste et alii, 1987). Este tipo de método permite uma ampla gama de graus de sofisticação de modo a facilitar o projeto de um procedimento voltado para cada aplicação específica.

De modo geral o problema de detecção de falhas se aplica nas seguintes áreas: sistemas controlados (tais como controle digital automático de aeronaves com baixa estabilidade estática); reconhecimento de padrões em sinais ou imagens (diagnose de eletrocardiograma, por exemplo); e reconfiguração do ganho em algoritmos adaptativos.

1.2.4 - MÉTODOS DE COMPENSAÇÃO DE ERROS DE MODELAGEM

Ao contrário dos métodos de detecção de falhas, os métodos de compensação visam ser insensíveis (isto é, robustos) com relação a incorreções nos parâmetros do modelo ou a hipóteses de trabalho. Isto é, a própria estrutura do método é capaz de absorver melhor estes erros. Em geral tratam-se de métodos sub-ótimos cuja convergência pode ser garantida para uma certa classe de erros de modelagem. São recomendados em situações onde é mais importante a garantia de convergência do que a precisão na estimativa.

Nesta classe de métodos citam-se os filtros ortogonais adaptativos (Skelton, 1981) que são robustos a uma ampla variedade de erros de modelagem: erros nos parâmetros dos modelos (dinâmico e de observação); erros devidos a truncamento do modelo; erros devidos à modelagem incorreta dos ruídos (covariâncias, correlações e distribuições); e erros devidos a não linearidades desconsideradas no modelo. O procedimento utiliza séries ortogonais para compensar o efeito dos erros de modelagem. A convergência do estimador pode ser garantida pelo método de estabilidade de Liapunov.

Nesta mesma linha, existem procedimentos de compensação dinâmica, que agregam um processo de Gauss-Markov ao estado para compensar erros de modelagem dinâmica ou de observação. Esta técnica tem sido proposta para aplicação em problemas de determinação de órbita (Tapley and Ingran, 1973; Rios Neto and Tapley, 1975; Negreiros de Paiva, 1980; e Rios Neto e Kuga, 1982) e de atitude (Lopes, 1982; e Rios Neto e outros, 1982) de satélites artificiais. Orlando (1983) aplica este método para compensar erros tendenciosos nas observações.

Uma outra contribuição nesta direção é dada por Fleury e Rios Neto (1986), que apresentam um esquema baseado no princípio da dualidade entre os problemas de estimação e controle ótimo, para compensar erros de modelagem dinâmica.

Por fim, existem técnicas voltadas especificamente para contornar o problema de não gaussianidade dos ruídos nas observações. É o caso dos erros de discretização, por exemplo, cuja distribuição é uniforme. A idéia básica destas técnicas consiste em aplicar o teorema do limite central para gaussianizar os erros de medidas realimentando as observações durante um certo intervalo de tempo (Alves, 1982).

1.2.5 - MÉTODOS DE FATORIZAÇÃO

As técnicas de fatorização fornecem algoritmos robustos, isto é, menos sensíveis a instabilidades numéricas nas equações do filtro de Kalman. Em particular, a forma algébrica da covariância do erro na estimativa do filtro de Kalman é numericamente instável. Isto pode levar a matriz de covariância a deixar de ser semi-positiva definida.

A primeira contribuição para resolver este problema é conhecida como a forma de Joseph (Maybeck, 1979), que tira proveito de relações de simetria para reescrever as equações na forma explicitamente quadrática, menos sensível a erros numéricos. Posteriormente, outras técnicas ainda mais eficientes foram desenvolvidas, baseadas na decomposição da matriz de covariância em produtos na forma explicitamente quadrática. Nesta categoria enquadram-se a decomposição da matriz de covariância na forma $P = SS'$ (filtro de raiz quadrada) (Maybeck, 1979) e na forma $P = UDU'$, onde U representa matriz triangular superior unitária e D matriz diagonal (Thorton and Bierman, 1980). Estas formas produzem algoritmos estáveis e computacionalmente eficientes. Sua principal aplicação é em problemas em que a matriz de covariância é mal condicionada (quase singular, ou com auto-valores muito díspares).

1.2.6 - ESTIMADORES ADAPTATIVOS

Os estimadores adaptativos se enquadram como procedimentos robustos e podem ser classificados nas seguintes categorias (Mehra, 1972): bayesianos; de máxima verossimilhança; de correlação; e de "casamento" de covariância. Os dois primeiros tipos permitem adaptar tanto parâmetros do sistema quanto covariâncias dos ruídos, enquanto que os dois últimos são voltados especificamente para adaptar as covariâncias dos ruídos.

No método bayesiano são obtidas as distribuições (o que equivale a obter todos os momentos estatísticos) de todos os parâmetros do modelo a serem adaptados (além do próprio estado), condicionadas às observações. No método de máxima verossimilhança, os parâmetros do modelo são adaptados de modo a maximizar a função de verossimilhança das observações. Infelizmente estes métodos envolvem cálculos matemáticos de notável complexidade, o que restringe sua implementação na prática a situações muito particulares e simplificadas.

Os métodos de correlação se subdividem em método de correlação de saídas e método de correlação de resíduos. Ambos os casos baseiam-se na propriedade de que a covariância (seja da saída ou do resíduo) é função linear das covariâncias dos ruídos a serem adaptadas. O método consiste em avaliar covariâncias amostrais da saída (ou do resíduo) relativas a diversos pares de instantes de amostragem ("lag-covariance") e resolver o sistema linear que relaciona estas matrizes com as covariâncias dos ruídos. Como teoricamente não há limite para o número de pares de instantes considerados, torna-se possível estimar todos os elementos da matriz de covariância dos ruídos no estado e nas observações. Em ambos os casos, utiliza-se o fato de que a correlação é uma função linear das covariâncias a serem adaptadas. Quando se utiliza a correlação da saída existe a vantagem de se poder iniciar o processo de adaptação antes da filtração propriamente dita. Por outro lado, existe a restrição teórica de que a saída seja estável.

Originalmente o método das correlações foi proposto para aplicações em sistemas lineares invariantes no tempo e com taxa de amostragem constante. Posteriormente, Bélanger (1974) e Dee et alii (1985) estenderam o método para sistemas lineares variantes no tempo, utilizando a correlação de resíduos.

Finalmente, os filtros de "casamento" de covariâncias são aqueles que impõem coerência estatística entre o resíduo e sua covariância prevista pelo filtro. Neste caso, o número de parâmetros possíveis de serem adaptados é limitado em função do número de elemen

tos do vetor de resíduos. Pode-se adaptar, por exemplo, a covariância do ruído nas observações, ou alguns elementos desta e outros da covariância do ruído no estado. Contudo ainda não foi possível garantir a convergência destes filtros adaptativos quando se desconhecem ambas as covariâncias dos ruídos no estado e nas observações (Tapley and Born, 1971; Mehra, 1970; Myers and Tapley, 1976).

Este tipo de método também foi proposto originalmente para sistemas lineares invariantes no tempo, sendo posteriormente generalizado de modo a abranger sistemas variantes no tempo e inclusive sistemas não lineares (Jazwinsky, 1970; e Rios Neto e Kuga, 1982). Dada a relativa simplicidade e versatilidade da estrutura deste método e a sua eficácia para evitar a divergência do filtro, sua aplicação tem sido proposta difundidamente nas áreas de determinação de órbita (Kuga, 1982; Rios Neto e Negreiros de Paiva, 1983) e de atitude (Rios Neto e outros, 1982) de satélites artificiais, entre várias outras. Em um estudo comparativo, Nascimento e Yoneyama (1986) confirmaram a robustez do filtro adaptativo proposto por Rios Neto e Kuga (1982) que estima a matriz de covariância diagonal do ruído no estado.

Shuster et alii (1982) apresentam um engenhoso algoritmo para estimar a covariância do ruído de sensores que pode ser classificado na categoria de método de casamento de covariâncias. Seu procedimento se aplica estritamente ao problema de determinação de atitude usando o modelo estático e explora as relações peculiares existentes neste caso particular. Um outro algoritmo também voltado para o problema específico de incerteza de sensores encontra-se em Lopes (1985).

Outras referências sobre filtragem adaptativa são Chin (1979) e Ohnishi (1980).

Convém frizar ao final desta seção que a classificação aqui apresentada não pretende ter caráter absoluto ou exclusivo. Pelo contrário, reconhece-se um alto grau de interseção entre os itens

abordados, como aliás é natural, dado que todos visam essencialmente lidar com o problema de aplicação prática da teoria de estimação de estados. Os métodos de detecção de erros grosseiros, por exemplo, bem poderiam ser classificados como um caso particular de detecção de falhas. Ainda neste sentido é importante esclarecer também que o significado mais geral do termo adaptativo conforme empregado na literatura de filtragem adaptativa (Goodwin and Sin, 1984, por exemplo), designa algoritmos aplicáveis a sistemas apenas parcialmente conhecidos, o que certamente engloba quase todas as categorias citadas nesta seção. Entretanto, segundo a notação mais restrita utilizada por Mehra (1972), consideram-se neste trabalho que estimadores adaptativos são aqueles que permitem estimar alguns parâmetros desconhecidos do modelo (e não apenas o estado), sejam estes constantes (no caso de sistemas invariantes no tempo), ou não. Enfim, a idéia desta seção, conforme citado desde seu início, é apenas levantar os tópicos pertinentes constantes da literatura da área e assim melhor situar o assunto específico a ser tratado no trabalho.

1.3 - OBJETIVO DO TRABALHO

Uma das conhecidas características do filtro linear de Kalman é que se a taxa de amostragem da sequência de observações crescer ilimitadamente e o sistema for observável e controlável, então a covariância do erro na estimativa tende a zero (ver o Exemplo 5.13 na página 261 de Maybeck, 1979, que ilustra bem esta questão). E de fato é isto o que ocorre em uma simulação em computador digital, se o ruído de observação seguir fielmente o modelo de sequência branca suposto pelo filtro. Infelizmente, esta aparente solução matemática ideal para o problema econômico-tecnológico de precisão de sensores pressupõe que o ruído de observação tenha potência infinita, o que não corresponde à realidade. Assim, se o modelo de sequência branca para o ruído é suposto no filtro de Kalman, a frequência de amostragem não deveria ser maior que a faixa limitada de frequências do ruído de observação sob pena de induzir o filtro a uma covariância do erro de estimação do estado irrealisticamente pequena. Este fato leva o ganho de Kalman a se fechar para novas informações, o que sabidamente pode

provocar a divergência do filtro (Schlee et alii, 1967). Entretanto, ainda assim o modelo de ruído branco é em geral preferido pela sua incomparável simplicidade de modelagem em relação a algum modelo sofisticado mais coerente com a realidade, tal como o ruído colorido. No caso de ruído colorido ainda há o inconveniente prático de se determinar todo o seu kernel de covariância para projetar o filtro branqueador equivalente ("shaping filter").

Não obstante, a necessária tarefa de ajustar a taxa de amostragem em uma aplicação real parece que tem sido relegada a um papel de pouco destaque, senão de total esquecimento, na bibliografia de filtragem adaptativa, e supostamente é feita na prática por critérios experimentais ou com base no teorema da amostragem. O assunto tem permanecido circunscrito apenas ao âmbito das técnicas de compressão de dados (Kortman, 1967), cujo principal interesse é a economia de transmissão de dados. Neste trabalho estuda-se a influência da taxa de amostragem no processamento de observações. O objetivo principal do trabalho é obter um procedimento adaptativo que leve em conta de modo sistemático a questão da taxa de amostragem das observações.

No Capítulo 2 é feita a extensão de um procedimento adaptativo para o caso contínuo, que ajuda a esclarecer as diferenças conceituais entre o caso discreto e o contínuo, onde a frequência de amostragem tende a infinito. Resultados numéricos referentes a uma simulação em computador digital são obtidos por uma técnica de discretização no domínio da frequência.

O Capítulo seguinte trata do problema de suavização de dados que permite introduzir a noção de resolução da informação contida em um sinal de observações. Esta noção aparece naturalmente ao se estender para o caso de sinais contínuos o método de validação cruzada (Wahba, 1975) para determinação do grau ótimo de suavização. São apresentados resultados numéricos para ilustrar a relação qualitativa entre os conceitos de correlação e de resolução.

Os procedimentos propostos nos Capítulos 2 e 3 já são por si sô contribuições teóricas do trabalho e não pretendem formar juntamente com o próximo Capítulo uma sequência estreitamente concatenada e progressiva de idéias. Entretanto, uma análise global mais cuidadosa destes capítulos revela a existência oportuna de paralelismos conceituais elucidativos. Por esta razão os Capítulos 2 e 3 antecedem a proposta principal do trabalho justamente com a intenção de salientar as analogias e diferenças entre os casos contínuo e discreto e levantar a questão da escolha da taxa de amostragem e sua relação com a densidade espectral de potência do ruído. Dentro desta perspectiva é que se torna suficiente a análise de casos simplificados, para os quais existem soluções analíticas e de mais fácil interpretação.

No quarto Capítulo é formulado um procedimento de filtragem adaptativa que permite estimar as covariâncias dos ruídos dinâmico e de observação e, além disso verificar se a taxa de amostragem é compatível com o modelo de ruído branco. O procedimento se aplica também a sistemas não lineares, através do filtro estendido de Kalman. Resultados numéricos comparativos são obtidos para um exemplo simplificado utilizando alguns dos métodos adaptativos mencionados no item 1.2.6.

Para ilustrar o esquema de aplicação do procedimento apresenta-se no Capítulo 5 um exemplo simplificado de determinação de atitude em um eixo. Embora a aplicação seja despreziosa em relação aos problemas reais nesta área, ela permite mostrar a potencialidade do método proposto.

Deduções de propriedades e expressões matemáticas para os métodos de estimação adaptativa e validação cruzada no caso contínuo são colocadas em Apêndices, abrangendo especificamente os casos de sinais brancos, estacionários de Gauss-Markov de primeira ordem e periódicos.

Em linhas gerais, o trabalho dá mais ênfase à exploração do argumento heurístico por meio de exemplos didáticos. Para o tipo de procedimento proposto considerou-se que demonstrar formalmente a sua convergência em condições gerais seria, ainda, um objetivo prematuro e mal dimensionado.

CAPÍTULO 2

FILTRAGEM LINEAR ADAPTATIVA DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS COM OBSERVAÇÕES CONTÍNUAS

2.1- EXTENSÃO DO MÉTODO DE CORRELAÇÃO DE RESÍDUOS PARA O CASO CONTÍNUO

Na Seção 1.2.6 do Capítulo de Introdução foi mencionado um método de filtragem adaptativa baseado na propriedade de que a covariância dos resíduos em um filtro linear é função linear das covariâncias dos ruídos no estado e na observação. Tal método tira proveito desta propriedade para estimar as covariâncias destes ruídos a partir de correlações amostrais dos resíduos, provendo assim um esquema para calcular o ganho de Kalman de modo adaptativo (Mehra, 1972). Em princípio, este método de correlação de resíduos, aplicado originalmente a sistemas discretos, poderia ser igualmente utilizado em sistemas contínuos. Entretanto surgem restrições práticas em se implementar em um computador um método que dependa diretamente do resíduo no caso contínuo, pois formalmente sua auto-covariância não é finita, já que envolve a função delta de Dirac.

Neste Capítulo propõe-se um método ligeiramente diferente para, em um filtro linear contínuo e invariante no tempo, estimar as densidades espectrais de potência dos ruídos no estado e na observação, respectivamente denotadas por Q e R . A idéia é utilizar o resíduo para guiar um processo secundário cuja covariância além de ser uma função linear de R e Q , é limitada. Esta é a principal contribuição desta proposta. Tal processo faz o papel de uma espécie de filtro passa-baixas para o resíduo e sua matriz de covariância amostral supre instantaneamente um tipo de informação análoga ao que o método de correlação de resíduos fornece baseado na covariância relativa a diversos atrasos. O método é desenvolvido na sequência desta seção e se aplica a processos vetoriais.

2.1.1- O FILTRO LINEAR CONTÍNUO

Seja o processo estocástico linear gaussiano e invariante no tempo descrito formalmente na notação de ruído branco por (Maybeck, 1979):

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A X(t) + B W(t) \quad , \quad X \in \mathbb{R}^n \quad , \quad W \in \mathbb{R}^q \quad , \\ X(t_0) &= X_0 \quad , \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde X é o vetor de estado, A e B são matrizes constantes de dimensões consistentes e W é um ruído branco não tendencioso tal que:

$$E[W(t) W'(\tau)] = Q \delta(t-\tau) \quad . \tag{2.2}$$

onde $\delta(\cdot)$ representa a função delta de Dirac.

Seja Y o vetor de observações contínuas formalmente relacionadas com o estado pelo seguinte modelo linear (Maybeck, 1979):

$$Y(t) = H X(t) + V(t) \quad , \quad Y \in \mathbb{R}^r \quad , \quad V \in \mathbb{R}^r \quad , \tag{2.3}$$

onde H é uma matriz constante, de dimensão consistente, e V é um ruído branco não tendencioso e não correlacionado com o ruído no estado, tal que:

$$E[V(t) V'(\tau)] = R \delta(t-\tau) \quad . \tag{2.4}$$

Seja o filtro linear invariante no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= A \hat{X}(t) + G [Y(t) - \hat{H} X(t)] \quad , \quad \hat{X} \in \mathbb{R}^n \quad , \\ \hat{X}(t_0) &= \hat{X}_0 \quad , \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde \hat{X} é a estimativa do estado, G é a matriz de ganho, constante, com dimensão consistente, e \hat{X}_0 é a estimativa a priori, não tendenciosa e

não correlacionada com os ruídos W e V. O erro na estimativa, definido por:

$$\Delta X(t) \triangleq \hat{X}(t) - X(t) \quad , \quad (2.6)$$

obedece à seguinte equação:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta X} &= M \Delta X + G V - B W \quad , \\ \Delta X(t_0) &= \tilde{X}_0 - X_0 \quad , \end{aligned} \quad (2.7)$$

cuja solução é dada por:

$$\Delta X(t) = \exp[M(t-t_0)] \Delta X(t_0) + \int_{t_0}^t \exp[M(t-\tau)] [GV(\tau) - BW(\tau)] d\tau \quad , \quad (2.8)$$

onde:

$$M \triangleq A - G H \quad . \quad (2.9)$$

Levando em conta as Equações 2.2, 2.4, 2.7 e 2.8 pode-se obter a lei de variação da matriz de covariância do erro na estimativa, P(t):

$$\begin{aligned} P(t) &= E[\dot{\Delta X}(t) \Delta X'(t)] + E[\Delta X(t) \dot{\Delta X}'(t)] \\ &= M P(t) + P(t) M' + G R G' + B Q B' \quad . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Se o ganho for tal que a matriz M seja negativa definida, então a matriz de covariância P entra em regime permanente quando $t \rightarrow \infty$, satisfazendo à seguinte equação:

$$M P_\infty + P_\infty M' + G R G' + B Q B' = 0 \quad . \quad (2.11)$$

O ganho, a ser mantido constante no filtro, pode ser sintonizado a priori de modo a minimizar P_∞ . Com esta finalidade,

diferenciando a Equação 2.11 obtém-se a seguinte relação para a variação em P_∞ devida a uma variação infinitesimal arbitrária em G :

$$M \partial P_\infty + \partial P_\infty M' - \partial G H P_\infty - P_\infty H' \partial G' + \partial G R G' + G R \partial G' \equiv 0. \quad (2.12)$$

Impondo então a condição necessária para que P_∞ seja mínimo (isto é, $\partial P_\infty \equiv 0$) segue que a matriz $\partial G[RG' - HP_\infty]$ deve ser anti-simétrica para qualquer ∂G infinitesimal. Dada a arbitrariedade em ∂G conclui-se que o ganho ótimo G^* é tal que:

$$R G^{*'} = H P_\infty. \quad (2.13)$$

As Equações 2.1 a 2.13 descrevem o conhecido problema de filtragem linear invariante no tempo com estado e observação contínuos (Maybeck, 1979), e servem como introdução aos Ítens seguintes.

2.1.2- O PROCESSO SECUNDÁRIO

O método a ser proposto neste Capítulo visa estimar as matrizes Q e R por um esquema baseado no resíduo $Y - H\hat{X}$, análogo ao método de correlação de resíduos (Mehra, 1972). O conhecimento destas matrizes, além de permitir o cálculo da covariância do erro de estimação, possibilita sintonizar o filtro com o ganho ótimo, de acordo com as Equações 2.11 e 2.13.

O esquema se baseia na definição de um processo gaussiano secundário $Z(t)$, guiado pelo resíduo:

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &\stackrel{\Delta}{=} S Z(t) + G [Y(t) - H \hat{X}(t)] \quad , \quad Z \in \mathbb{R}^m \quad , \\ Z(t_0) &\stackrel{\Delta}{=} 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde S e G são matrizes constantes arbitrárias de dimensões consistentes, e S é negativa definida. Nota-se que este processo pode ser avaliado em qualquer instante a partir das Equações 2.5 e 2.14, dada a observação $Y(t)$.

Com o auxílio das Equações 2.3 e 2.6 pode-se reescrever o resíduo em função do ruído de observação e do erro de estimação:

$$Y - H \hat{X} = V - H \Delta X \quad , \quad (2.15)$$

o que permite expressar a Equação 2.14 assim:

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= S Z(t) - G H \Delta X(t) + G V(t) \quad , \\ Z(t_0) &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.16)$$

cuja solução é dada por:

$$Z(t) = \int_{t_0}^t \exp[S(t-\tau)] G [V(\tau) - H \Delta X(\tau)] d\tau \quad . \quad (2.17)$$

Dai se conclui facilmente que $Z(t)$ é um processo não tendencioso, isto é, de média nula.

2.1.3- CÁLCULO DA COVARIÂNCIA DO PROCESSO SECUNDÁRIO

A matriz de covariância do processo secundário pode ser obtida definindo um vetor de "estado" estendido:

$$\Delta X_e(t) \triangleq [\Delta X'(t) : Z'(t)]' \quad . \quad (2.18)$$

Das Equações 2.7 e 2.16 pode-se escrever a equação diferencial estocástica do processo $\Delta X_e(t)$:

$$\dot{\Delta X}_e(t) = M_e \Delta X_e(t) - B_e W_e(t) \quad , \quad (2.19)$$

onde M_e , B_e e W_e são definidos por:

$$M_e \triangleq \begin{pmatrix} M & 0 \\ -GH & S \end{pmatrix} \quad , \quad (2.20)$$

$$B_e = \begin{bmatrix} B & -G \\ 0 & -G \end{bmatrix} , \quad (2.21)$$

$$W_e \stackrel{\Delta}{=} [W'(t) : V'(t)]' . \quad (2.22)$$

O cálculo da covariância de $Z(t)$ recai assim num problema formalmente igual ao cálculo da covariância do processo $\Delta X(t)$. Por isso a solução é dada por uma equação semelhante à Equação 2.10:

$$P_e(t) = M_e P_e(t) + P_e(t) M_e' + B_e Q B_e' , \quad (2.23)$$

onde:

$$P_e(t) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} P(t) & C'(t) \\ C(t) & Z(t) \end{bmatrix} , \quad (2.24)$$

$$Q_e \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} , \quad (2.25)$$

$$C(t) \stackrel{\Delta}{=} E[Z(t) \Delta X'(t)] , \quad (2.26)$$

$$Z(t) \stackrel{\Delta}{=} E[Z(t) Z'(t)] . \quad (2.27)$$

Dada a estrutura da matriz M_e os auto-valores de suas partições M e S são também seus auto-valores (Kailath, 1980). Substituindo as Definições 2.20, 2.21, 2.24 e 2.25 na Equação 2.23 segue que em regime permanente P_∞ satisfaz à Equação 2.11, enquanto que C_∞ e Z_∞ satisfazem às seguintes relações:

$$S C_\infty + C_\infty M' + G[R G' - H P_\infty] = 0 , \quad (2.28)$$

$$S Z_\infty + Z_\infty S' + GR G' - [G H C_\infty' + C_\infty H' G'] = 0 . \quad (2.29)$$

Como consequência direta das Equações 2.13 e 2.28, conclui-se que o processo secundário não é correlacionado com o erro na estimativa quando o sistema entra em regime permanente, se o ganho for ótimo. Ou seja, se $G=G^*$ então $C_\infty=0$. Sabe-se ainda que o próprio resíduo neste caso é branco e não correlacionado com ΔX . Entretanto, estes fatos não implicam em a covariância de $Z(t)$ não conter informação sobre as covariâncias que caracterizam o erro no estado.

2.1.4 - ESTIMAÇÃO DAS MATRIZES R e Q

As Equações 2.11, 2.28 e 2.29 formam um sistema linear de equações matriciais que relacionam P_∞ , C_∞ e Z_∞ com Q e R . Se as matrizes Q e R forem conhecidas, estas equações podem ser utilizadas para calcular Z_∞ numa sequência direta de cálculos. De fato, sabendo Q e R , determina-se P_∞ pela Equação 2.11. Em seguida, com R e P_∞ , determina-se C_∞ pela Equação 2.28. Finalmente, a partir de R e C_∞ calcula-se Z_∞ pela Equação 2.29.

O objetivo do método proposto é, entretanto, resolver o problema inverso, isto é, dada uma estimativa de Z_∞ , deseja-se estimar R e Q . Dado que o processo $Z(t)$ possui média nula e é acessível, pode-se calcular uma estimativa não tendenciosa de Z_∞ assim:

$$\hat{Z}_\infty = \int_{t_1}^{t_1+T} Z(t) Z'(t) \frac{dt}{T}, \quad t_1 \gg t_0, \quad (2.30)$$

onde t_1 é um instante arbitrário e T é um intervalo de tempo também arbitrário, ambos muito maiores que as constantes de tempo do sistema. Pode-se mostrar que a densidade espectral de potência do processo gaussiano $Z(t)$ não possui descontinuidades desde que as matrizes M e S sejam definidas negativas (ver Apêndice A). Isto garante que $Z(t)$ é ergódico (Bendat and Piersol, 1971) e portanto o estimador \hat{Z}_∞ é consistente, isto é:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{Z}_\infty = Z_\infty. \quad (2.31)$$

Para estimar as matrizes R e Q é necessário resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$f_1(\bar{Q}, \bar{R}, \bar{P}_\infty) \stackrel{\Delta}{=} M \bar{P}_\infty + \bar{P}_\infty M' + G \bar{R} G' + B \bar{Q} B' = 0 \quad , \quad (2.32)$$

$$f_2(\bar{C}, \bar{R}, \bar{P}_\infty) \stackrel{\Delta}{=} S \bar{C}_\infty + \bar{C}_\infty M' + G [\bar{R} G' - H \bar{P}_\infty] = 0 \quad , \quad (2.33)$$

$$f_3(\bar{R}, \bar{C}_\infty) \stackrel{\Delta}{=} G H \bar{C}'_\infty + \bar{C}_\infty H' G' - G R G' = S \bar{Z}_\infty + \bar{Z}_\infty S' \quad . \quad (2.34)$$

A Equação 2.32 está na forma matricial simétrica, e possui $\frac{1}{2}(n+n^2)$ termos distintos. A Equação 2.33 está na forma matricial não simétrica e possui nm termos distintos. A Equação 2.34 está na forma matricial simétrica, e possui $\frac{1}{2}(m+m^2)$ termos distintos. O sistema de Equações 2.28-30 perfaz assim um total de equações distintas dado por:

$$N_{\text{Eqs.}} = \frac{1}{2} [n + m + (n+m)^2] \quad . \quad (2.35)$$

Por outro lado, o número de incógnitas (elementos distintos das matrizes \bar{Q} , \bar{R} e \bar{P}_∞ simétricas, e da matriz \bar{C}_∞ não simétrica) é dado por:

$$N_{\text{Inc.}} = \frac{q}{2}(q+1) + \frac{r}{2}(r+1) + \frac{n}{2}(n+1) + nm \quad . \quad (2.36)$$

Para que o sistema seja determinado é necessário que:

$$N_{\text{Eqs.}} \geq N_{\text{Inc.}} \quad ,$$

ou seja:

$$m(1+m) \geq q(1+q) + r(1+r) \quad , \quad (2.37)$$

o que implica em:

$$m \geq \left[\frac{1}{4} + q(1+q) + r(1+r) \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \quad . \quad (2.38)$$

Para formalizar a solução definem-se:

$$\text{vet}(L) \triangleq \begin{cases} [L_{1,1}:L_{2,1}: \dots :L_{i,1}:L_{1,2}:L_{2,2}: \dots :L_{i,2}: \dots :L_{1,j}: \\ L_{2,j}: \dots :L_{i,j}]' & , \quad \forall L \in \mathbb{R}^{i,j}, \text{ não simétrica,} \\ [L_{1,1}:L_{2,1}: \dots :L_{i,1}:L_{2,2}:L_{3,2}: \dots :L_{i,2}:L_{3,3}:L_{4,3}: \\ \dots :L_{i,3}: \dots :L_{i-1,i-1}:L_{i,i-1}:L_{i,i}]' & , \quad \forall L \text{ simétrica,} \\ L \in \mathbb{R}^{i,j} & , \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\hat{\Theta} \triangleq [\text{vet}(\hat{Q})' : \text{vet}(\hat{R})' : \text{vet}(\hat{P}_\infty)' : \text{vet}(\hat{C}_\infty)']' \quad , \quad (2.40)$$

$$\hat{\zeta} \triangleq [0' : \text{vet}(S \hat{Z}_\infty + \hat{Z}_\infty S')]' \quad , \quad (2.41)$$

$$\hat{\zeta}(\hat{\Theta}) \triangleq [\text{vet}(\hat{\zeta}_1)' : \text{vet}(\hat{\zeta}_2)' : \text{vet}(\hat{\zeta}_3)']' \quad , \quad (2.42)$$

$$\Theta \triangleq \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial \hat{\Theta}} \quad , \quad (2.43)$$

onde 0 representa o vetor nulo com $\frac{1}{2}n(n+1+2m)$ elementos. A partir destas definições, o sistema de Equações 2.32-34 pode ser reescrito assim:

$$\Theta \hat{\Theta} = \hat{\zeta} \quad (2.44)$$

cuja solução pode ser dada por:

$$\Theta = \begin{cases} \Theta^{-1} \hat{\zeta} & , \quad \text{se } N_{Eqs} = \text{posto de } \Theta = N_{Inc} & , \\ [\Theta' \Theta]^{-1} \Theta' \hat{\zeta} & , \quad \text{se } N_{Eqs} > \text{posto de } \Theta = N_{Inc} & . \end{cases} \quad (2.45)$$

2.1.5 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A ESCOLHA DOS PARÂMETROS DO FILTRO SECUNDÁRIO

A escolha das matrizes S e G representa um aspecto prático que depende dos objetivos a serem atingidos em cada caso. Esta questão, juntamente com a escolha do intervalo de tempo T na Equação 2.26, afeta a precisão na estimativa de R e de Q . Os aspectos a serem ponderados na escolha de T são os desejos claramente conflitantes de se ter uma estimativa de \hat{z}_∞ por um lado o mais rapidamente possível e por outro lado, o mais precisa possível. Já no caso das matrizes S e G , os aspectos envolvidos são a complexidade dos cálculos e a precisão nas estimativas de R e de Q . O primeiro destes aspectos será brevemente explorado neste ítem, enquanto que o segundo parece ser bem mais difícil de ser explicitado e permanece como uma questão em aberto que requer um estudo mais detalhado e escapa aos propósitos deste trabalho. Menciona-se aqui apenas que estas matrizes afetam simultaneamente a precisão da estimativa \hat{z}_∞ e a sensibilidade da precisão das estimativas \hat{Q} e \hat{R} ao erro em \hat{z}_∞ . De todo modo, a questão da precisão sempre pode ser melhorada simplesmente aumentando T , ainda que às custas de um maior atraso na obtenção da resposta.

A questão da complexidade dos cálculos é grave na medida em que, para a obtenção da solução completa, o número de equações do sistema a ser resolvido (Equação 2.44), cresce, de acordo com as Equações 2.36 e 2.38, pelo menos com o quadrado do número de elementos do estado e dos ruídos. Seria de interesse prático, portanto, a obtenção de soluções simplificadas. De fato as matrizes S e G oferecem, neste sentido, graus de liberdade suficientes para explorar diversos tipos de solução. Algumas destas possibilidades são analisadas a seguir.

Os dois primeiros casos particulares analisados consideram a situação em que se conheçam estimativas aproximadas para R e Q e deseja-se apenas monitorar a validade do modelo. Neste caso, o ganho pode ser aproximadamente sintonizado resolvendo a equação algébrica de

Riccati (Maybeck, 1979) correspondente às Equações 2.11 e 2.13. Daí segue que as Equações 2.33 e 2.34 passam a ser:

$$\hat{C}_\infty \cong 0 \quad , \quad (2.46)$$

$$- G R G' \cong S Z_\infty + Z_\infty S' \quad . \quad (2.47)$$

A primeira possibilidade consiste em escolher G e S tais que:

$$S = M \quad , \quad (2.48)$$

$$G \hat{R} G' = G \bar{R} G' + B \hat{Q} B' \quad . \quad (2.49)$$

Substituindo as Equações 2.48 e 2.49 na Equação 2.47 e comparando com a Equação 2.32, vê-se facilmente que esta escolha torna:

$$\hat{Z}_\infty \cong \hat{P}_\infty \quad . \quad (2.50)$$

O significado desta igualdade é que o processo $Z(t)$ fica, neste caso, estatisticamente equivalente ao erro de estimação $\Delta X(t)$. Deve-se observar que o cálculo do ganho ótimo, bem como o cálculo de G pela Equação 2.49, embora seja em geral uma tarefa trabalhosa, independe das observações e portanto pode ser feito antecipadamente ao processamento destas. O importante aqui é que a parte da filtragem adaptativa a ser feita em tempo real (Equação 2.50) se torna simplificada.

A segunda possibilidade é tomar S e G dados por:

$$S = -s I_m \quad , \quad (2.51)$$

$$G = \sqrt{2s'} I_r \quad , \quad (2.52)$$

onde s é uma constante real positiva arbitrária e I_i representa a matriz identidade de ordem i . Com esta escolha mais simples que a anterior, a Equação 2.47 resulta em:

$$\hat{z}_{\infty} \cong \hat{R} \quad . \quad (2.53)$$

Nestes dois primeiros casos, o monitoramento de \hat{z}_{∞} permite detectar falhas na modelagem (alarme) sempre que qualquer discrepância significativa ocorrer entre membros das Igualdades 2.50 ou 2.53.

A terceira possibilidade a ser abordada consiste em tomar S e G novamente de acordo com as Equações 2.51 e 2.52, porém numa situação onde apenas a covariância do ruído no estado, Q, seja conhecida e o ganho não seja necessariamente ótimo. Neste caso, substituindo tais valores de S e G nas Equações 2.33 e 2.34, resulta:

$$\hat{C}_{\infty} = \sqrt{2s} [H \hat{P}_{\infty} - \hat{R} G'] [M' - sI_n]^{-1} \quad , \quad (2.54)$$

$$\hat{z}_{\infty} = \hat{R} - [H P_{\infty} - \hat{R} G'] [M' - sI_n]^{-1} H' - \\ H [M - sI_n]^{-1} [\hat{P}_{\infty} H' - G \hat{R}] \quad . \quad (2.55)$$

Daí verifica-se que se o valor de s for arbitrado suficientemente grande de modo tal que os auto-valores da matriz $H[M-sI_n]^{-1}[PH'R^{-1}-G]$ forem desprezíveis em relação à unidade, então segue que \hat{z}_{∞} satisfaz à Equação 2.53. Uma vez estimada a covariância \hat{R} , o ganho de Kalman pode ser calculado e o desempenho do filtro otimizado.

2.2- DISCRETIZAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA O FILTRO CONTÍNUO

Embora modelos contínuos sejam naturalmente adequados para representar determinados sistemas reais, na implementação prática de um filtro é frequentemente desejável e conveniente o emprego de computador digital, o que implica em discretização do sistema (estado e/ou observação) no tempo. Este procedimento pode deturpar o desempenho previsto para o filtro, de modo que se um computador digital tiver de ser utilizado, é geralmente preferível projetar o filtro desde o princípio baseado no modelo contínuo discreto (Maybeck, 1979). Entre-

tanto, deve-se frisar que a implementação de um filtro linear contínuo invariante no tempo pode ser feita totalmente com circuitos analógicos, evitando-se com isso a necessidade de discretizações. Ainda assim, para testes de desempenho e análises na fase de projeto do filtro, as facilidades de simulação em computador digital são de grande proveito.

Nesta seção apresenta-se um procedimento de discretização no domínio da frequência que permite simular o filtro contínuo em computador digital. A idéia se baseia nas expansões de Karhunen-Loève (Kailath, 1977), brevemente recapitulada a seguir. A técnica apresentada da será utilizada na seção seguinte para ilustrar o desempenho do filtro adaptativo proposto neste capítulo.

2.2.1- EXPANSÕES DE KARHÜNEN-LOÈVE

Seja um processo gaussiano escalar $x(t)$, com covariância contínua $Cov_{x,x}(t,\tau)$ tal que:

$$\int_{t_0}^{t_f} \int_{t_0}^{t_f} Cov_{x,x}(t,\tau) d\tau dt < \infty \quad . \quad (2.56)$$

Então, existe uma sequência gaussiana branca, u , não tendenciosa, tal que:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i u_i(t) \quad , \quad (2.57)$$

$$E[u_i u_j] = \kappa_i \delta_{i-j} \quad , \quad \delta_i \triangleq \begin{cases} 1, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} \quad , \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (2.58)$$

onde κ_i e u_i são os auto-valores e auto-funções do kernel de auto-covariância de x :

$$\int_{t_0}^{t_f} Cov_{x,x}(t,\tau) u_i(\tau) d\tau = \kappa_i u_i(t) \quad , \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad . \quad (2.59)$$

Esta sequência é dada por:

$$u_i = \int_{t_0}^{t_f} x(t) \mu_i(t) dt \quad . \quad (2.60)$$

Das Equações 2.57 e 2.60 verifica-se que a auto-covariância de x também pode ser expressa pela seguinte série:

$$\text{Cov}_{x,x}(t, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \mu_i(t) \mu_i(\tau) \quad . \quad (2.61)$$

Nota-se que as Equações 2.57 e 2.61 expressam um processo gaussiano contínuo completamente em função de uma sequência gaussiana branca e uma série de auto-funções e auto-valores. Estas expansões para o processo $x(t)$ e sua auto-covariância satisfazem às Relações 2.60 e 2.59 respectivamente, dado que as auto-funções são ortonormais.

É evidente que este tipo de expansão pode ser utilizado para representar processos contínuos em computador digital, sem recorrer a discretizações no tempo. Entretanto o cálculo de auto-funções em geral não é uma tarefa simples. No caso do ruído branco, se o intervalo de interesse para a validade da expansão, $[t_0, t_f]$, não for limitado, a rigor o procedimento não se aplica, pois $\text{Cov}_{x,x}$ não satisfaz à Inequação 2.56. Entretanto, ainda assim, as idéias aqui apresentadas servem de motivação para a obtenção de uma representação aproximada para o ruído branco com base em uma sequência gaussiana branca e uma série de funções ortonormais.

2.2.2- DISCRETIZAÇÃO DO RUÍDO BRANCO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

O conteúdo deste Ítem equivale a discretizar a densidade espectral de potência do ruído branco no domínio da frequência.

Seja $W(t)$ um ruído branco vetorial caracterizado por:

$$E[W(t)] = 0 \quad , \quad E[W(t) W'(\tau)] = Q \delta(t-\tau) \quad , \quad W \in \mathbb{R}^q \quad , \quad (2.62)$$

onde Q representa a sua matriz densidade espectral de potência.

Seja $W_{eq}(t)$ um outro processo estocástico definido por:

$$W_{eq}(t) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{\infty} [a_{w_i} \cos(i\omega_0 t) + b_{w_i} \text{sen}(i\omega_0 t)] \sqrt{\omega_0/\pi}, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (2.63)$$

onde a frequência fundamental ω_0 e as sequências gaussianas brancas a_w e b_w são tais que:

$$\omega_0 = 2\pi / (t_f - t_0), \quad (2.64)$$

$$E[(a_{w_i} \ b_{w_i})' (a_{w_j} \ b_{w_j})] = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \delta_{i-j}, \quad a_{w_i} \in \mathbb{R}^q, \quad b_{w_i} \in \mathbb{R}^q. \quad (2.65)$$

Então, pode-se afirmar que W_{eq} simula o ruído branco W no sentido de que qualquer processo linear estacionário guiado por W_{eq} possui covariância idêntica a que teria caso fosse guiado por W . Ou seja, no regime permanente:

$$P_{\infty} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} E[X(t) X'(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[X_{eq}(t) X_{eq}'(t)] \stackrel{\Delta}{=} P_{eq_{\infty}}, \quad (2.66)$$

onde X e X_{eq} obedecem a:

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B W(t), \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad (2.67)$$

$$\dot{X}_{eq}(t) = A X_{eq}(t) + B W_{eq}(t), \quad X_{eq} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.68)$$

e as matrizes A e B são arbitrárias, de dimensões convenientes, A definida negativa. Admitindo a validade da Equação 2.66 segue que:

$$P_{\infty} - P_{eq_{\infty}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \exp[A(t-\tau)] B E[W(\tau) W'(\tau_1) - W_{eq}(\tau) W_{eq}'(\tau_1)] B' \exp[A'(t-\tau_1)] d\tau_1 d\tau = 0, \quad (2.69)$$

donde, dadas as arbitrariedades, conclui-se que W e W_{eq} possuem covariâncias idênticas. Evidentemente esta conclusão pressupõe a

validade da Igualdade 2.66, a qual, por sua vez, pode ser verificada a partir das Equações 2.67 e 2.68, conforme se mostra a seguir.

Por um lado, P_∞ satisfaz à relação:

$$A P_\infty + P_\infty A' + B Q B' = 0 \quad . \quad (2.70)$$

Por outro lado, a solução de regime permanente para X_{eq} é dada por:

$$X_{eq} = \sqrt{\omega_0/\pi} \sum_{i=1}^{\infty} [a_{x_i} \cos(i\omega_0 t) + b_{x_i} \text{sen}(i\omega_0 t)] \quad , \quad (2.71)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} a_{x_i} \\ b_{x_i} \end{Bmatrix} \triangleq \begin{Bmatrix} -A & i\omega_0 \\ -i\omega_0 & -A \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} D_i B a_{w_i} \\ D_i B b_{w_i} \end{Bmatrix} \quad , \quad (2.72)$$

$$D_i = [A A + i^2 \omega_0 I_n]^{-1} \quad , \quad (2.73)$$

conforme pode ser verificado por substituição direta na Equação 2.68. A partir da Equação 2.72 verifica-se que as sequências a_x e b_x são também gaussianas, brancas, não correlacionadas entre si e suas auto-covariâncias são dadas por:

$$E[a_{x_i} a_{x_i}'] = E[b_{x_i} b_{x_i}'] = [A D_i B Q B' D_i' A' + i^2 \omega_0^2 D_i B Q B' D_i'] \quad , \quad (2.74)$$

A covariância de X_{eq} em regime permanente pode ser então calculada:

$$\begin{aligned} P_{eq_\infty} &= \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} E[a_{x_i} a_{x_i}' \cos^2(i\omega_0 t) + b_{x_i} b_{x_i}' \text{sen}^2(i\omega_0 t)] \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} [A D_i B Q B' D_i' A' + i^2 \omega_0^2 D_i B Q B' D_i'] \quad . \quad (2.75) \end{aligned}$$

Das Equações 2.73 e 2.75 verifica-se que:

$$A P_{eq_\infty} + P_{eq_\infty} A' = \frac{\omega_0}{\pi} [B Q B' \sum_{i=1}^{\infty} D_i' A' + A \sum_{i=1}^{\infty} D_i B Q B'] \quad . \quad (2.76)$$

Tendo em vista que no regime permanente $t_{\bar{t}} - t_0 \rightarrow \infty$ e portanto, $\omega_0 \rightarrow 0$, pode-se mostrar que:

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{2\omega_0}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} D_i = -A^{-1} \quad . \quad (2.77)$$

De fato, decompondo A na forma:

$$A = U \Lambda(\lambda) U^{-1} \quad , \quad (2.78)$$

onde U é a matriz de auto-vetores de A e $\Lambda(\lambda)$ representa a matriz diagonal de auto-valores λ_j , pode-se reescrever a Equação 2.73 assim:

$$D_i = U \Lambda[(\lambda^2 + i^2 \omega_0^2)^{-1}] U^{-1} \quad , \quad (2.79)$$

e portanto, fazendo uso da definição de integral, tem-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{2\omega_0}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} D_i &= U \Lambda[(2/\pi) \int_0^{\infty} (\lambda^2 + x^2)^{-1} dx] U^{-1} \\ &= U \Lambda(-\lambda^{-1}) U^{-1} = -A^{-1} \quad . \end{aligned} \quad (2.80)$$

Substituindo este limite na Equação 2.76 chega-se finalmente a:

$$A P_{eq_{\infty}} + P_{eq_{\infty}} A' + B Q B' = 0 \quad , \quad (2.81)$$

que, comparando com a Equação 2.70, comprova a Igualdade 2.66.

2.2.3- SIMULAÇÃO DO PROCESSO SECUNDÁRIO

A técnica de discretização do ruído branco apresentada no ítem anterior permite obter expansões em série de Fourier para os processos lineares de que tratam a primeira seção deste capítulo. Neste ítem, será explicitada a solução para um caso escalar, para o qual a seção seguinte apresenta resultados numéricos ilustrativos do desempenho do método. A Tabela 2.1 mostra os coeficientes para os diversos

processos envolvidos no seguinte caso escalar em que se observa diretamente o estado:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + w(t) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad (2.82)$$

$$y(t) = x(t) + v(t) \quad , \quad (2.83)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = -\lambda \hat{x}(t) + g [y(t) - \hat{x}(t)] \quad , \quad g \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad (2.84)$$

$$\dot{z}(t) = -s z(t) + [y(t) - \hat{x}(t)] \quad , \quad s \in \mathbb{R}^+ \quad . \quad (2.85)$$

A partir dos resultados desta tabela, após uma sequência de cálculos enfadonhos porém diretos e que não envolvem qualquer dificuldade teórica (ver Apêndice B), obtém-se a expressão analítica para \bar{z}_∞ em função de T:

$$\begin{aligned} \bar{z}_\infty(T) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^N a_{z_i} \cos(i\omega_0 t) + b_{z_i} \text{sen}(i\omega_0 t) \right]^2 \frac{\omega_0}{\pi} dt \\ &= \bar{z}_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{z}_1(T, k) + \sum_{\ell=2}^{2N} \bar{z}_2(T, \ell) \quad . \end{aligned} \quad (2.86)$$

Nesta expressão, N representa o número de termos considerados na expansão em série de Fourier, e:

$$\bar{z}_0 \triangleq \frac{\omega_0}{2\pi} [\bar{C}_{a,a}(0) + \bar{C}_{b,b}(0)] \quad , \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_1(T, k) &\triangleq [\bar{C}_{a,a}(k) + \bar{C}_{b,b}(k)] \frac{\text{sen}(k\omega_0 T)}{\pi kT} + \\ &\quad [\bar{C}_{b,a}(k) - \bar{C}_{a,b}(k)] \frac{1 - \cos(k\omega_0 T)}{\pi kT} \quad , \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_2(T, \ell) &\triangleq [\bar{C}_{a,a}(\ell) - \bar{C}_{b,b}(\ell)] \frac{\text{sen}(\ell\omega_0 T)}{2\pi\ell T} + \\ &\quad 2 \bar{C}_{a,b}(\ell) \frac{1 - \cos(\ell\omega_0 T)}{2\pi\ell T} \quad , \end{aligned} \quad (2.89)$$

onde \bar{C} e \bar{C} representam respectivamente as correlações amostrais direta e inversa de sequências aleatórias quaisquer, u_1 e u_2 :

$$\bar{C}_{u_1, u_2}(k) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{N-k} u_{1, i+k} u_{2, i} \quad , \quad (2.90)$$

$$\bar{C}_{u_1, u_2}(\ell) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=-k_0}^{k_0, 2} u_{1, \frac{\ell+k}{2}} u_{2, \frac{\ell-k}{2}} \quad , \quad k_0 \stackrel{\Delta}{=} N-1-|\ell-(N+1)| \quad . \quad (2.91)$$

As equações apresentadas neste ítem formam um algoritmo para simular \bar{Z}_∞ em computador digital. Inicialmente, geram-se as sequências aleatórias gaussianas brancas, a_w, b_w, a_v e b_v . Em seguida, calculam-se as sequências a_z e b_z que definem o processo secundário $Z(t)$, conforme indicado na Tabela 2.1. Procedese então o cálculo das correlações amostrais \bar{C} e \bar{C} pelas Equações 2.90 e 2.91. Finalmente, usando as Equações 2.86 a 2.89, calcula-se $\bar{Z}_\infty(T)$.

Analisando as Equações 2.86-89 verifica-se que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{Z}_0 = \bar{Z}_\infty \quad , \quad (2.92)$$

$$\bar{Z}_1(2\pi/\omega_0, k) = \bar{Z}_2(2\pi/\omega_0, \ell) = 0 \quad , \quad \forall \ell, k \quad . \quad (2.93)$$

Isto ajuda a identificar as fontes de erro em \bar{Z}_∞ . Em parte, este erro se deve à discretização do ruído branco, notada no truncamento da expansão em N termos, de modo que:

$$\bar{Z}_0 \neq Z_\infty \quad .$$

Esta parcela do erro não deve portanto ser atribuída ao estimador adaptativo, pois é inerente ao tipo de simulação realizada. De outro lado, pelo fato de T ser finito, e portanto menor que o limite $2\pi/\omega_0$, $\omega_0 \rightarrow \infty$, as somatórias em $\bar{Z}_1(T, k)$ e $\bar{Z}_2(T, \ell)$ não são nulas (embora diminuam quando T cresce) e caracterizam o erro do estimador propriamente dito.

TABELA 2.1

COEFICIENTES DAS SÉRIES DE FOURIER PARA SIMULAR O FILTRO CONTÍNUO ADAPTATIVO

PROCESSO	COEFICIENTES PARES (CO-SENOS): a_i	COEFICIENTES ÍMPARES (SENOS): b_i
Estado: X	$a_{x_i} = \frac{\lambda a_{w_i} - i\omega_0 b_{w_i}}{\lambda^2 + (i\omega_0)^2}$	$b_{x_i} = \frac{\lambda b_{w_i} + i\omega_0 a_{w_i}}{\lambda^2 + (i\omega_0)^2}$
Observação: Y	$a_{y_i} = a_{x_i} + a_{v_i}$	$b_{y_i} = b_{x_i} + b_{v_i}$
Estimativa: \hat{X}	$a_{\hat{x}_i} = g \frac{(\lambda+g) a_{y_i} - i\omega_0 b_{y_i}}{(\lambda+g)^2 + (i\omega_0)^2}$	$b_{\hat{x}_i} = g \frac{(\lambda+g) b_{y_i} + i\omega_0 a_{y_i}}{(\lambda+g)^2 + (i\omega_0)^2}$
Resíduo: ρ	$a_{\rho_i} = a_{y_i} - a_{\hat{x}_i}$	$b_{\rho_i} = b_{y_i} - b_{\hat{x}_i}$
Processo Auxiliar: Z	$a_{z_i} = \frac{s a_{\rho_i} - i\omega_0 b_{\rho_i}}{s^2 + (i\omega_0)^2}$	$b_{z_i} = \frac{s b_{\rho_i} + i\omega_0 a_{\rho_i}}{s^2 + (i\omega_0)^2}$

2.3- ANÁLISE DE DESEMPENHO DO FILTRO CONTÍNUO ADAPTATIVO

Para ilustrar o desempenho do filtro contínuo adaptativo proposto apresentam-se, nesta seção, os resultados de um teste para o caso escalar em que se observa diretamente o próprio estado.

2.3.1- DESCRIÇÃO DO EXEMPLO NUMÉRICO

As equações que descrevem o sistema utilizado neste exemplo, bem como a expressão analítica da simulação de \tilde{z}_∞ são dadas pelas Equações 2.82-91. As Equações 2.32-34 que definem o estimador adaptativo, se reduzem, no caso escalar, a:

$$2(\lambda+g) \hat{P}_\infty = g^2 \hat{R} + \hat{Q} \quad , \quad (2.94)$$

$$(s+\lambda+g) \hat{C}_\infty = g \hat{R} - \hat{P}_\infty \quad , \quad (2.95)$$

$$2s \tilde{z}_\infty = \hat{R} - 2 \hat{C}_\infty \quad , \quad (2.96)$$

donde:

$$\tilde{z}_\infty = \frac{\frac{1}{2} [\lambda^2 + s(\lambda + g)] \hat{R} + \hat{Q}}{s(\lambda + g)(s + \lambda + g)} \quad . \quad (2.97)$$

Para ilustrar também a versatilidade do procedimento proposto, foram utilizados dois processos secundários escalares, ignorando-se a correlação entre eles, de modo que o número de equações ficasse igual ao de incógnitas. Os valores numéricos dos parâmetros envolvidos foram:

$$R = Q = \lambda = g = 1 \quad , \quad (2.98)$$

$$s_1 = 2 \quad ; \quad s_2 = 0,5 \quad . \quad (2.99)$$

Neste caso, verifica-se que:

$$\hat{R} = (32 \hat{Z}_{1_\infty} - 5 \hat{Z}_{2_\infty}) / 3 \quad , \quad (2.100)$$

$$\hat{Q} = (25 \hat{Z}_{2_\infty} - 64 \hat{Z}_{1_\infty}) / 3 \quad . \quad (2.101)$$

2.3.2- RESULTADOS E CONCLUSÕES

A Tabela 2.2 mostra os resultados obtidos para várias frequências fundamentais de discretização do ruído branco no domínio da frequência, e em função do número de termos da expansão. A Figura 2.1 mostra estes resultados na forma gráfica e dá uma visão da relação que o número de termos da expansão e a frequência de discretização devem satisfazer no exemplo analisado para uma dada precisão na aproximação analítica de \hat{Z}_∞ . Verifica-se também que o efeito médio quadrático das flutuações em \hat{Z}_∞ cai com o valor da frequência fundamental de discretização.

De modo geral estes resultados atestam a viabilidade da aproximação utilizada, pois os erros diminuem quando $\omega_0 \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$. Quanto ao método adaptativo propriamente dito, a Figura 2.2 mostra que as estimativas se aproximam dos valores corretos com o aumento de T.

Este exemplo simplificado está longe de pretender explorar extensivamente todos os aspectos envolvidos no método proposto, mas apenas ilustra um caso em que o procedimento funciona e que portanto, pode ser uma ferramenta viável para estimar parâmetros estatísticos de um filtro contínuo.

TABELA 2.2

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO DO FILTRO ADAPTATIVO

ω_0	N	\bar{Q}	ϵ_Q	τ_Q	\bar{R}	ϵ_R	τ_R
0,04	500	1,193	-0,178	0,722	0,769	-1,503	2,336
	600	1,168	-0,174	0,722	0,788	-1,508	2,336
	700	1,145	-0,166	0,722	0,805	-1,517	2,336
	800	1,127	-0,167	0,722	0,818	-1,515	2,336
	1000	1,106	-0,168	0,722	0,833	-1,512	2,336
	1500	1,077	-0,169	0,722	0,855	-1,512	2,336
0,02	500	1,297	-0,526	0,660	0,696	-1,699	1,903
	750	1,187	-0,571	0,660	0,773	-1,721	1,903
	1000	1,128	-0,576	0,660	0,821	-1,715	1,903
	1500	1,070	-0,579	0,660	0,864	-1,713	1,903
0,01	500	1,522	-0,580	0,515	0,533	-1,223	1,332
	750	1,329	-0,534	0,515	0,680	-1,259	1,332
	1000	1,217	-0,548	0,515	0,763	-1,250	1,332
	1500	1,105	-0,553	0,515	0,846	-1,246	1,332
0,005	500	1,942	-0,301	0,324	0,212	-0,582	0,810
	750	1,689	-0,250	0,324	0,424	-0,645	0,822
	1000	1,512	-0,271	0,324	0,563	-0,624	0,820
	1500	1,314	-0,283	0,324	0,712	-0,615	0,817
	2000	1,212	-0,291	0,324	0,790	-0,609	0,817
0,004	500	2,095	-0,229	0,273	0,088	-0,438	0,679
	1000	1,658	-0,208	0,275	0,459	-0,484	0,693
	1500	1,433	-0,224	0,281	0,634	-0,470	0,690
	2000	1,310	-0,233	0,281	0,726	-0,462	0,689
0,003	500	2,224	-0,162	0,217	-0,061	-0,304	0,540
	1000	1,866	-0,155	0,221	0,305	-0,351	0,561
	1500	1,615	-0,177	0,228	0,508	-0,329	0,557
	2000	1,466	-0,188	0,229	0,621	-0,318	0,555
0,0025	500	2,267	-0,130	0,188	-0,141	-0,240	0,488
	1000	1,996	-0,132	0,194	0,200	-0,284	0,494
	1500	1,743	-0,157	0,201	0,413	-0,255	0,490
	2000	1,579	-0,169	0,203	0,542	-0,241	0,488

$$Q = R = \lambda = 1 ; s_1 = 2 ; s_2 = 0,5$$

ϵ ... Tendenciosidade média da estimativa entre 0 e $2\pi/\omega_0$.

σ ... Rms do erro na estimativa no intervalo de 0 a $2\pi/\omega_0$.

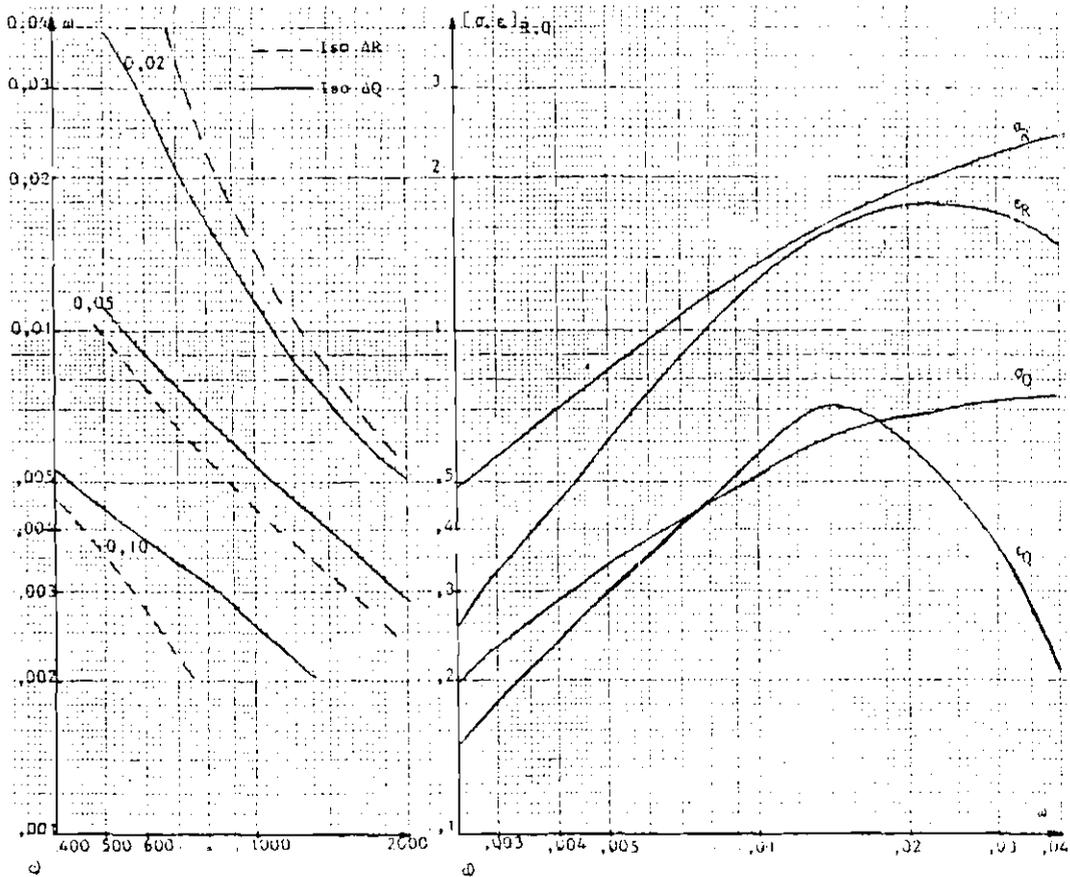
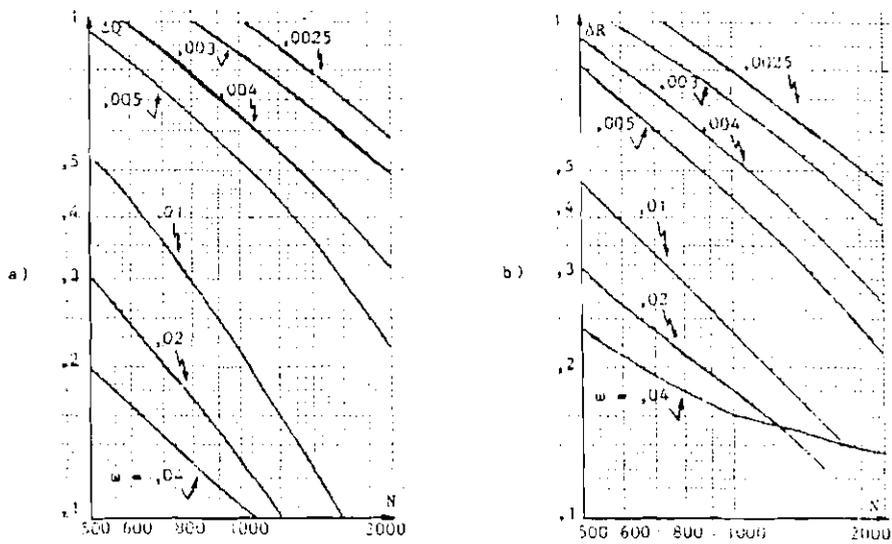


Fig. 2.1 - Desempenho do filtro contínuo adaptativo: a) Erro na estimativa de Q; b) Erro na estimativa de R; c) Relação entre a frequência fundamental e o número de termos da série de Fourier para alcançar um dado nível de precisão; d) Desvio médio e tendenciosidade média.

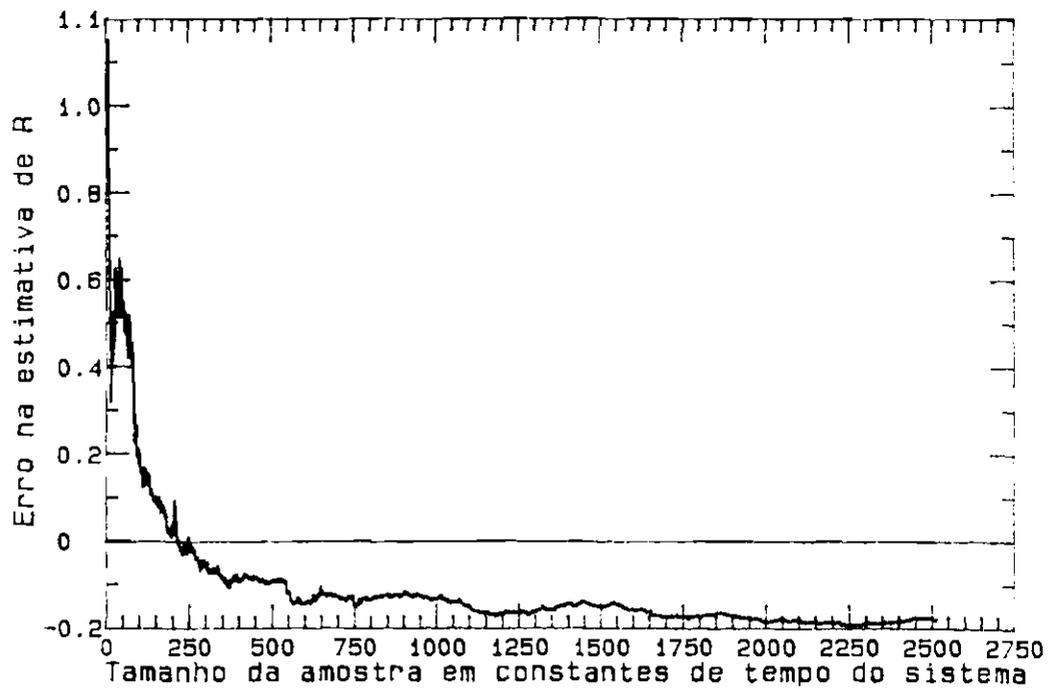
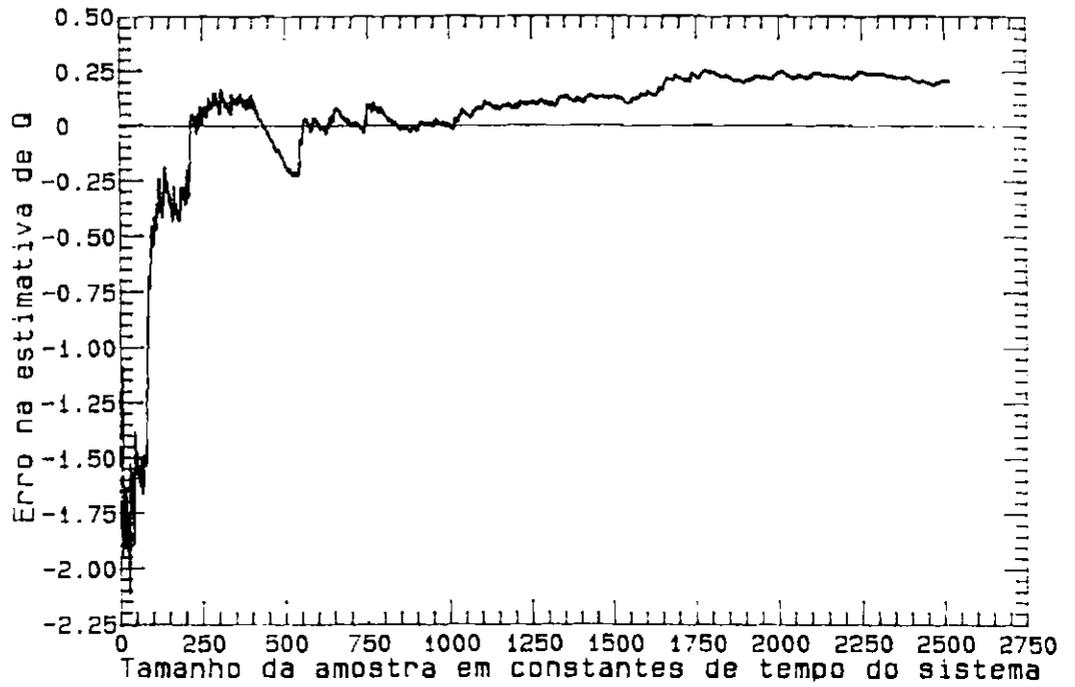


Fig. 2.2 - Desempenho do Filtro Contínuo Adaptativo no Caso Escalar.

CAPÍTULO 3

EXTENSÃO DO MÉTODO DE VALIDAÇÃO CRUZADA PARA O CASO DE SUAVIZAÇÃO CONTÍNUA DE DADOS UTILIZANDO O CONCEITO DE RESOLUÇÃO

3.1- INTRODUÇÃO

A suavização de dados é um campo da matemática mais diretamente relacionado com ajuste de curvas (parametrizadas ou não) com aplicações em pré-processamento de dados e processamento de séries temporais em geral, incluindo áreas tão abrangentes como medicina, meteorologia, tratamento de imagens, projeto de superfícies de veículos, e determinação de órbita e atitude de satélites, por exemplo (De Boor, 1978; Wertz, 1978; Wahba, 1982; Barsky and Beatty, 1983; Dias and Vijaykumar, 1985). Entretanto, pode ser elucidativo sob diversos aspectos observar sua analogia com a teoria de estimação de estados. Por exemplo, a suavização de dados pelo método de ajuste de curvas parametrizadas pode ser posta na forma de um problema de estimação de parâmetros, que por sua vez é um caso especial de estimação de estado. Orlando e Rios Neto (1984), tiram proveito desta analogia em seu procedimento de ajuste de curvas utilizando o filtro de Kalman.

Este capítulo trata do problema de suavização de dados contínuos por um método de ajuste de curvas não parametrizadas que corresponde ao de suavização por "spline" (Reinsch, 1967) quando a sequência de dados tende ao limite contínuo. Este tipo de suavização também possui uma analogia com o problema de estimação de estados, a qual será estudada com mais detalhes na seção seguinte.

3.2- FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE SUAVIZAÇÃO DE DADOS

O método proposto por Reinsch (1967) para suavização não paramétrica de uma série temporal escalar $y_i = y(t_i)$, $i=1,2,\dots,n$, consiste em obter uma função $y(t)$ que minimize o seguinte Índice de Desempenho:

$$D[g(t)] \triangleq \alpha^2 \sum_{i=1}^n [g(t_i) - y_i]^2 + \int_{t_1}^{t_n} [g^{(o)}(t)]^2 dt \quad , \quad (3.1)$$

$$g(t) \in C^{o-1}, \forall t \in [t_1, t_n], t_1 < t_2 < \dots < t_n, \quad o \in \mathbf{N}, \alpha \in \mathbf{R},$$

onde o índice (o) indica derivada de ordem o em relação a t , e α é um parâmetro que determina o grau de suavização. Em termos qualitativos, o significado deste índice de desempenho é que a função procurada deve ser aproximadamente igual à série temporal nos instantes t_i e sua derivada de ordem o deve ser aproximadamente nula. Se $\alpha \rightarrow \infty$, a solução tende a uma função "spline" interpoladora polinomial de grau $2o-1$, enquanto que se $\alpha \rightarrow 0$, a solução tende ao ajuste polinomial de mínimos quadrados grau $o-1$. No caso geral a solução é uma "spline" suavizadora polinomial de grau $2o-1$.

Uma extensão natural deste método para o caso de dados contínuos, isto é, aquele em que se conhece a função $y(t)$ em todo o intervalo $[t_1, t_n]$, consiste em obter a função $y(t)$, que minimiza o seguinte Índice de Desempenho:

$$ID[g(t)] \triangleq \int_{t_1}^{t_n} \{ \alpha^2 [g(t) - y(t)]^2 + [g^{(o)}(t)]^2 \} dt \quad , \quad (3.2)$$

$$g(t) \in C^{o-1}, \forall t \in [t_1, t_n], o \in \mathbf{N}, \alpha \in \mathbf{R}.$$

A solução geral deste problema para uma ordem o qualquer pode ser facilmente obtida pelo cálculo variacional como brevemente indicado a seguir. Da Equação 3.2 segue que a variação do Índice de Desempenho é:

$$\delta ID[g(t)] = 2 \int_{t_1}^{t_n} \{ \alpha^2 [g(t) - y(t)] \delta g(t) + g^{(o)}(t) \delta g^{(o)}(t) \} dt \quad . \quad (3.3)$$

Integrando sucessivamente por partes a parcela independente de α obtém-se :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta \text{ID}[g(t)] &= \int_{t_1}^{t_n} \{ \alpha^2 [g(t) - y(t)] \delta g(t) - g^{(o+1)}(t) \delta g^{(o+1)}(t) \} dt + \\ \delta g^{(o-1)}(t) \Big|_{t_1}^{t_n} &= \int_{t_1}^{t_n} \{ \alpha^2 [g(t) - y(t)] \delta g(t) - g^{(o+2)}(t) \delta g^{(o-2)}(t) \} \\ dt + \delta g^{(o-1)}(t) \Big|_{t_1}^{t_n} &= \int_{t_1}^{t_n} \{ \alpha^2 [g(t) - y(t)] + (-1)^o \delta g^{(2o)}(t) \} \delta g(t) dt + \\ &+ \sum_{\ell=0}^{o-1} (-1)^\ell g^{(o+\ell)}(t) \delta g^{(o-\ell-1)}(t) \Big|_{t_1}^{t_n} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dada a condição necessária de que δID seja identicamente nulo para δg arbitrário para que o ID quadrático seja mínimo, conclui-se que a solução obedece à seguinte equação diferencial linear:

$$\tilde{y}^{(2o)}(t) = (-1)^o \alpha^2 [y(t) - \tilde{y}(t)] \quad , \quad t \in [t_1, t_n] \quad , \quad (3.5)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\tilde{y}^{(\ell)}(t_1) = \tilde{y}^{(\ell)}(t_n) = 0 \quad , \quad \forall \ell = 0, o+1, \dots, 2o-1 \quad . \quad (3.6)$$

Pode-se verificar que, ao contrário do que ocorre no caso discreto, não existem condições de quina neste problema, de modo que dentre todas as funções $g(t)$ de classe C^{o-1} entre t_1 e t_n , a que minimiza o ID é de classe C^{2o-1} .

Da Equação 3.2 pode-se concluir que se $\alpha \rightarrow \infty$ então $\tilde{y} \rightarrow y$, enquanto que se $\alpha \rightarrow 0$ então a solução tende ao ajuste polinomial de mínimos quadrados, de grau $o-1$.

Uma variante deste problema é estudada por Lopes (1984) que considera sinais periódicos e não periódicos no domínio da frequência e apresenta uma solução generalizada em que se podem atribuir valores reais ao parâmetro o . No presente trabalho, entretanto, a análise se restringe ao caso mais simples em que $o = 1$, que permite verificar mais facilmente a analogia com o problema de estimação de estados e melhor se adequa aos objetivos propostos.

De acordo com as Equações 3.5 e 3,6 a solução para o caso onde a ordem é unitária é dada por:

$$\ddot{\tilde{y}}(t) = -\alpha^2 [y(t) - \tilde{y}(t)] \quad , \quad t \in [t_1, t_n] \quad , \quad (3.7)$$

$$\dot{\tilde{y}}(t_1) = \dot{\tilde{y}}(t_n) = 0 \quad . \quad (3.8)$$

Por outro lado, idêntica solução possui o seguinte problema de suavização de estados de um sistema modelado por:

$$x(t) = 0 + \text{ruído} \quad , \quad (3.9)$$

$$y(t) = x(t) + \text{ruído} \quad , \quad (3.10)$$

Em outras palavras, o estado suavizado satisfaz às Equações 3.7 e 3.8, como se mostra a seguir.

Lembrando o conhecido fato de que a suavização de estados pode ser considerada como uma combinação linear de uma filtragem "para frente" com uma filtragem "para trás" (Wax and Kailath, 1984), pode-se projetar um suavizador a ganho constante, bastante rudimentar, assim:

$$\tilde{x}(t) = [\vec{x}(t) + \overleftarrow{x}(t)] / 2 \quad , \quad (3.11)$$

onde \vec{x} e \overleftarrow{x} representam respectivamente as estimativas dos filtros ditos "para frente" e "para trás", dadas por:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{g} [y - \vec{x}] \quad , \quad \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1 \quad , \quad (3.12)$$

$$\dot{\overleftarrow{x}} = -\overleftarrow{g} [y - \overleftarrow{x}] \quad , \quad \overleftarrow{x}(t_n) = \overleftarrow{x}_n \quad , \quad t \in [t_1, t_n] \quad . \quad (3.13)$$

O sinal invertido no filtro "para trás" decorre do sentido contrário em que o tempo flui ali.

Supondo ausência de qualquer informação a priori para inicializar os dois filtros, recorre-se à hipótese de consistência entre as estimativas "para frente" e "para trás", que consiste em tomar:

$$\vec{x}_1 = \overleftarrow{x}(t_1) \quad , \quad (3.14)$$

$$\overleftarrow{x}_n = \vec{x}(t_n) \quad . \quad (3.15)$$

Isto é, uma pseudo informação a priori para o filtro "para frente" é suprida pelo filtro "para trás" e vice versa. As Equações 3.11-15 definem completamente um suavizador de estado a ganho constante para o Sistema 3.9-10. Com base nestas Equações pode-se facilmente verificar que, se os ganhos dos dois filtros forem iguais a α , então $\tilde{x}(t)$ fica idêntico a $\tilde{y}(t)$.

De fato, derivando a Equação 3.11 em relação ao tempo e substituindo no resultado as Equações 3.12 e 3.13 obtém-se:

$$\dot{\tilde{x}} = -\frac{1}{2} \alpha (\vec{x} - \overleftarrow{x}) \quad . \quad (3.16)$$

Em seguida, aplicando a mesma operação na Equação 3.16, resulta:

$$\ddot{\tilde{x}} = -\frac{1}{2} \alpha (y - \overleftarrow{x} + y - \vec{x}) = -\alpha^2 (y - \tilde{x}) \quad . \quad (3.17)$$

Das Equações 3.14-16 conclui-se imediatamente que:

$$\dot{\tilde{x}}(t_1) = \dot{\tilde{x}}(t_n) = 0 \quad , \quad (3.18)$$

o que juntamente com a Equação 3.17, verifica a identidade entre $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$. Daí se conclui que o grau de suavização α pode ser interpretado como um ganho constante para os filtros que definem o suavizador de estado.

3.3- O MÉTODO DE VALIDAÇÃO CRUZADA E O CONCEITO DE RESOLUÇÃO

Até este ponto o grau de suavização foi considerado uma constante arbitrária. Nesta seção será abordada a questão do ajuste deste parâmetro segundo um certo critério de otimização. Usualmente admite-se que $y(t)$ representa a observação de um sinal verdadeiro que se pretende restituir, corrompida por algum tipo de ruído, conforme o modelo do Sistema 3.9-10. Qualitativamente um valor adequado de α deve produzir um sinal suavizado próximo de seu valor verdadeiro.

Uma consequência imediata das últimas conclusões da seção anterior é que métodos de estimação adaptativa podem ser utilizados para ajustar o grau de suavização. Mais especificamente, supondo que os ruídos no estado e na observação nas Equações 3.9-10 sejam brancos e não correlacionados entre si, então suas densidades espectrais de potência, Q e R respectivamente, poderiam ser estimadas por algum método de filtragem adaptativa tal como o proposto no Capítulo 2. A partir destas estimativas, \hat{Q} e \hat{R} , pode-se ajustar:

$$\alpha = g^* = \sqrt{\hat{Q}/\hat{R}}, \quad (3.19)$$

que corresponde ao ganho ótimo de regime permanente do problema análogo de suavização de estados (ver Item C.1 do Apêndice C). Esta escolha de α ajuda também a mostrar de modo ainda mais elementar a analogia entre os problemas de suavização de dados e de suavização de estado. Considerando o modelo dado pelas Equações 3.9 e 3.10, o Índice de Desempenho 3.2 fica idêntico ao proposto por Bryson and Frazier (1963) para suavização de estados.

Embora este critério de ajuste possua um apelo estatístico bastante atraente e aparentemente se constitua a sequência natural do desenvolvimento apresentado, na verdade o modelo de ruído branco nele embutido não se afina com o objetivo principal do trabalho. Por esta razão um outro tipo de esquema é proposto, baseado no método de validação cruzada (Wahba, 1975) para o problema de suavização de uma série temporal via "spline". Os resultados assim obtidos

estabelecem uma base adequada para analisar melhor a questão da resolução de um sinal na presença de ruído colorido.

A idéia heurística por trás do método de validação cruzada é que se o suavizador captar bem as propriedades do sinal verdadeiro, então o resultado deve se ajustar bem a qualquer ponto omitido da série temporal. Baseado nesta noção, o ajuste de α para o caso de medidas discretas pode ser feito de modo a minimizar o seguinte Índice de Desempenho:

$$ID(\alpha) \triangleq \sum_j [\bar{y}_{\alpha,j}^0(t_j) - y_j]^2, \quad (3.20)$$

onde $y_{\alpha,j}^0$ representa a solução do suavizador quando se omite o termo y_j , ou seja, quando se exclui o j -ésimo termo da somatória no Índice de Desempenho 3.1. Este método é estudado por Craven and Wahba (1979) e Utreras Dias (1980) e tem se revelado eficaz para o ajuste automático do grau de suavização.

Propõe-se agora estender assim esta idéia ao caso de sinais contínuos: se o suavizador captar bem as propriedades do sinal verdadeiro, então o resultado deve se ajustar bem a qualquer grão omitido do sinal observado. A noção de grão como o menor elemento distinguível em uma fotografia ou imagem e que define sua resolução, é empregada aqui para designar o menor segmento de um sinal que contém alguma informação relevante independente dos demais grãos. Embora esta definição não seja matematicamente precisa ela traz consigo a motivação heurística suficiente para os objetivos do trabalho, segundo a qual, se o segmento omitido for muito menor que um grão, a suavização tenderia a ajustá-lo melhor com um grau de suavização irrealisticamente elevado, visto que a informação omitida seria completamente correlacionada com o restante do sinal. Por outro lado, se o segmento omitido for muito maior que um grão, o ajuste tenderia a ser ótimo com α irrealisticamente pequeno, pois a informação omitida seria praticamente sem nenhuma correlação com o restante do sinal. Com a omissão de um grão, almeja-se obter o equilíbrio entre estes extremos. Este aspecto tornará a ser abordado oportunamente neste capítulo.

Segundo a idéia proposta, deve minimizar o seguinte Índice de Desempenho:

$$ID(\alpha) \triangleq \frac{\int_{t_1 + \frac{\Delta}{2}}^{t_n - \frac{\Delta}{2}} \sigma_{\Delta}^2(t_*, \alpha) dt_*}{t_n - t_1 - \Delta}, \quad t_n - t_1 > \Delta, \quad (3.21)$$

onde $\sigma_{\Delta}^2(t_*, \alpha)$ representa o desvio médio quadrático entre os sinais observado e suavizado no grão omitido:

$$\sigma_{\Delta}^2(t_*, \alpha) \triangleq \frac{1}{\Delta} \int_{t_* - \frac{\Delta}{2}}^{t_* + \frac{\Delta}{2}} [\tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t) - y(t)]^2 dt \quad (3.22)$$

onde t_* indica o instante central do grão e Δ o tamanho do grão, que determina a resolução do sinal. A função $\tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t)$ é a que minimiza o Índice de Desempenho 3.2 quando se exclui do integrando o termo proporcional a α^2 entre $t_* - \Delta/2$ e $t_* + \Delta/2$. Este problema recai no caso de minimização do Índice de Desempenho 3.2 na forma completa quando se utiliza o artifício matemático de substituir formalmente o sinal de medidas $y(t)$ pelo próprio sinal suavizado $\tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t)$ no grão ausente. Daí percebe-se facilmente que a solução satisfaz a relações análogas às Equações 3.5 e 3.6

$$\dot{\tilde{y}}_{\alpha, t_*, \Delta}^0 = \begin{cases} \alpha^2 (\tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0 - y), & t \in [t_1, t_* - \Delta/2] \cup [t_* + \Delta/2, t_n], \\ 0, & t \in [t_* - \Delta/2, t_* + \Delta/2], \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\dot{\tilde{y}}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_1) = \dot{\tilde{y}}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_n) = 0. \quad (3.24)$$

Destas equações verifica-se imediatamente que $\tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t)$ é linear no interior do grão ausente. No Apêndice D são obtidas soluções analíticas para as Equações 3.7, 3.8 e 3.21-24 para diversos tipos de sinais.

Antes de passar a alguns resultados para este problema convém abordar a seguinte questão: qual a finalidade de um procedimento que aparentemente apenas substitui uma incôgnita (α) por outra (Δ)?

Para responder a esta pergunta deve-se lembrar em primeiro lugar que é precisamente isto que ocorre em diversos outros métodos usuais de otimização de parâmetros de estimadores ou suavizadores de dados em geral. Por exemplo, o ganho ótimo de Kalman é função das covariâncias dos ruídos no estado e na observação e portanto o problema da escolha do ganho passa a ser um problema de determinação de covariâncias. Mesmo no caso de procedimentos adaptativos como os citados no item 1.3.6 ou o proposto no capítulo anterior, embora não se tenha de fornecer explicitamente nenhum parâmetro de entrada, isto é feito implicitamente ao se admitir a hipótese de que os ruídos no estado e na observação são brancos. Questões sobre qual tipo de parâmetro é o mais adequado para descrever um sistema; ou o mais facilmente quantificável a partir de observações empíricas; ou ainda qual hipótese melhor se aplica são na realidade dependentes em grande parte de aspectos circunstanciais e mesmo subjetivos. O mais importante a este respeito é que ao formalizar um procedimento sistemático para transformar um tipo de dado de entrada em outro qualquer, o especialista tem acesso a novos meios de aproveitar seu conhecimento acumulado acerca do sistema considerado.

Neste sentido, o grau de suavização, além da já citada relação com o ganho de um filtro, é um fator que determina a importância relativa entre os objetivos conflitantes de que a solução \hat{y} se aproxime dos dados e ao mesmo tempo não apresente variações bruscas. A própria idéia de otimização destes parâmetros está associada a algum critério de otimização e, sendo assim, não pode ser considerada em termos absolutos. Por outro lado a solução \hat{y} pode ser legitimamente denominada ótima segundo o critério de otimalidade definido pela Equação 3.2, qualquer que seja o valor de α utilizado.

Da mesma forma, o parâmetro Δ pode ser interpretado como a resolução do sinal suavizado, \hat{y} , que será ótimo (segundo o critério de otimização 3.21) qualquer que seja o valor de Δ . Assim, em termos qualitativos, quando se atribui um valor pequeno para Δ (resolução fina), objetiva-se obter um sinal que descreve de modo ótimo os detalhes do sinal de medidas. No caso oposto onde Δ é grande (resolu

ção grosseira), objetiva-se um sinal suave que transmita de modo ótimo as características do sinal de medidas como que visto à distância.

Deste modo pode-se dizer que, matematicamente, Δ , bem como α , é estritamente um parâmetro. Entretanto, assim como α está associado à idéia intuitiva de grau de suavização que de algum modo contribui para sua interpretação física ou geométrica, Δ está sendo aqui associado à idéia bastante difundida de resolução, que traz consigo elementos capazes de fornecer interpretações a diversos aspectos do problema da suavização de dados.

Tudo isso conduz ao segundo aspecto a ser ressaltado de que o objetivo maior de se estudar este método neste trabalho é que ele tem implicações elucidativas sobre a questão da taxa de amostragem na presença de sinais coloridos e serve de motivação para a proposta principal do trabalho, feita no próximo capítulo. Mais especificamente, o raciocínio induzido por trás dos exemplos numéricos analisados na próxima seção é que se com uma dada resolução o grau de suavização ajustado minimizar a variância do erro de suavização de um sinal corrompido por ruídos coloridos de diferentes tipos, então, lembrando que a equivalência entre a suavização de dados e a suavização ótima de estado foi estabelecida com base no modelo de ruído branco, fica lançada a possibilidade (a ser averiguada no próximo capítulo) de, associando resolução com taxa de amostragem (dado que não faz sentido processar medidas com intervalo de amostragem menor que a resolução) obter um resultado ótimo para sistemas onde o modelo do ruído é colorido a partir de um filtro baseado no modelo de ruído branco.

3.4- AJUSTE DO GRAU DE SUAUIZACÃO

Nesta seção apresentam-se resultados comparativos para três classes de sinais perpétuos ($t_1 \rightarrow -\infty$, $t_n \rightarrow \infty$). Não se tratam propriamente de resultados sobre o desempenho real da aplicação do método de validação cruzada, mas sim do desempenho esperado para cada classe de sinais em função dos parâmetros de seus modelos teóricos. O propósito em se analisar estes casos em função de parâmetros que supostamente

numa aplicação real não seriam sabidos, é que isto permite obter uma avaliação sobre as circunstâncias em que os resultados são equivalentes aos de suavização ótima de estados.

Apoiado nesta equivalência é que são definidos precisamente no contexto deste trabalho os conceitos de resolução verdadeira e grão. A resolução verdadeira Δ^* de um sinal de medidas é o valor de Δ para o qual o grau de suavização α ajustado pelo método de validação cruzada minimiza a variância do erro da suavização. Por sua vez, define-se grão de um sinal como um segmento do próprio sinal contido em um intervalo Δ^* .

3.4.1- PRIMEIRO CASO: PROCESSO BROWNIANO CORROMPIDO POR RUÍDO BRANCO

O primeiro tipo de sinal estudado é descrito pelo Sistema 3.9-10, onde os ruídos no estado e na observação são brancos, não tendenciosos, não correlacionados entre si e com densidades espectrais de potência Q e R respectivamente, isto é:

$$\dot{x}(t) = 0 + w(t) \quad , \quad E[w(t) w(\tau)] = Q \delta(t-\tau) \quad , \quad (3.25)$$

$$y(t) = x(t) + v(t) \quad , \quad E[v(t) v(\tau)] = R \delta(t-\tau) \quad . \quad (3.26)$$

Este caso é mais simples de ser analisado, pois é descrito por apenas dois parâmetros: R e Q . A solução pelo esquema de validação cruzada leva a (ver Apêndice D):

$$E[ID(\alpha)] = \frac{Q}{\alpha} \left[\frac{1+u}{3} - (1+u)^{-2} \right] + \frac{R}{4} \alpha \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{u}{1+u} \right)^2 \right] + E\{v^2(t_*)\} \quad (3.27)$$

onde:

$$u \triangleq \frac{1}{2} \alpha \Delta \quad (3.28)$$

enquanto que a variância do erro de suavização é dada por (ver Apêndice C):

$$E[(\bar{y} - x)^2] = \frac{1}{4} (R\alpha + Q/\alpha) \quad , \quad (3.29)$$

cujo mínimo ocorre em $\alpha = \sqrt{Q/R}$.

Analisando as Equações 3.27-29 percebe-se que no limite $\Delta \rightarrow 0$, a solução esperada pelo método de validação cruzada, que minimiza a Equação 3.27, é também a de mínima variância. Donde se conclui que, no contexto do método de validação cruzada, em uma observação de um processo browniano corrompida por um ruído branco a resolução tende a zero. Esta conclusão tem interesse apenas formal, pois como já foi mencionado, o modelo de ruído branco não é realista, e além disso a Equação 3.27 não é limitada e portanto o método sequer poderia ser implementado nesta situação. Não obstante ela serve para apoiar a idéia básica do método de validação cruzada.

Os próximos exemplos mostram a habilidade do método em tratar do caso de ruído colorido. A análise se torna um pouco mais complexa devido ao maior número de parâmetros envolvidos. Mesmo assim podem-se estabelecer relações qualitativas de interesse.

3.4.2- SEGUNDO CASO: PROCESSOS ESTACIONÁRIOS DE GAUSS-MARKOV DE PRIMEIRA ORDEM

O segundo caso abordado trata da classe de sistemas modelados por:

$$\dot{x} = -\lambda x + w \quad , \quad E[w(t) w(\tau)] = 2\lambda \sigma_x^2 \delta(t-\tau) \quad , \quad (3.30)$$

$$\dot{v} = -\lambda_v v + \eta \quad , \quad E[\eta(t) \eta(\tau)] = 2\lambda_v \sigma_v^2 \delta(t-\tau) \quad , \quad (3.31)$$

isto é, x e v são processos estacionários de Gauss-Markov de primeira ordem, tais que:

$$\text{Cov}_{x,x}(t, t+\Delta) = E[x(t) x(t+\Delta)] = \sigma_x^2 \exp(-\lambda|\Delta|) \quad , \quad (3.32)$$

$$\text{Cov}_{v,v}(t, t+\Delta) = E[v(t) v(t+\Delta)] = \sigma_v^2 \exp(-\lambda_v|\Delta|) \quad . \quad (3.33)$$

e y permanece modelado como a soma de x e v, como na Equação 3.26.

No Apêndice D calcula-se a expressão analítica do valor esperado do Índice de Desempenho 3.21 em função de quatro parâmetros adimensionais: o grau de suavização relativo, p; a resolução relativa, ψ ; a cor (isto é, frequência) relativa do ruído, β ; e a amplitude relativa do ruído, ε , definidos por:

$$p \triangleq \lambda/\alpha \quad , \quad (3.34)$$

$$\psi \triangleq \frac{1}{2} \lambda \Delta \quad , \quad (3.35)$$

$$\beta \triangleq \lambda_v / \lambda \quad , \quad (3.36)$$

$$\varepsilon \triangleq \sigma_v / \sigma_x \quad . \quad (3.37)$$

Com base naquela expressão, reescrita aqui:

$$\sigma_x^{-2} E[\text{ID}(\alpha)] = \zeta(p, \psi) + \varepsilon^2 \zeta(\beta p, \beta \psi) \quad ,$$

$$\begin{aligned} \zeta(p, \psi) \triangleq & 1 - \frac{2/\psi}{1+p} + \frac{1/\psi}{\psi+p} + \frac{1/2}{1+p} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\psi}{1+\psi} \right)^2 \right] + \\ & + \exp(-2\psi) \left\{ \frac{p-1}{p+1} \cdot \frac{1/\psi}{\psi+p} + \frac{1/2}{(1+p)^2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi}{1+\psi} \right)^2 \right] \right\} \quad , \end{aligned} \quad (3.38)$$

pode-se ajustar por inspeção numérica por computador, o valor do parâmetro p que minimiza o índice de desempenho esperado do método de validação cruzada.

As Figuras 3.1 a 3.6 mostram os resultados obtidos para diversos valores de β em função de ε e de ψ . Cada figura mostra três tipos de regiões, conforme o valor obtido de p ótimo. Na região inferior de cada uma destas figuras, onde ψ é pequeno, p ótimo é nulo. A interpretação disto é que para resoluções muito finas qualquer flutuação espúrea do sinal observado é considerada uma variação autêntica no sinal verdadeiro, e o suavizador fica inativo, isto é, $\bar{y}=y$. Na região, onde ψ é grande, p ótimo é infinito. Neste caso a interpretação é que para níveis grosseiros de resolução, já não é mais possível distinguir o sinal verdadeiro do ruído de observação, e o suavizador satura, isto é, $\bar{y}=0$.

Na região intermediária encontram-se valores finitos positivos para p ótimo, o que significa ser possível distinguir, até certo grau, entre sinal verdadeiro e ruído de observação. Neste caso o suavizador é dito ativo. É nesta faixa que existe a possibilidade de se determinar a curva de resolução verdadeira do sinal em função de ε e de β , em que o erro do suavizador, $\bar{y}-x$, é de mínima variância, estabelecendo a consistência entre os métodos de suavização de estados e de validação cruzada.

Antes de analisar a questão da resolução coerente, convém observar uma interessante relação entre estes resultados recém comentados e o teorema de Shanon, conhecido como o teorema fundamental da amostragem (ver, por exemplo, Papoulis, 1965, Bendat and Piersol, 1971; e Brown, 1983). Este famoso teorema afirma que se um sinal $g(t)$ é de banda limitada então ele pode ser completamente reproduzido a partir de uma série temporal com taxa de amostragem maior ou igual à frequência de Nyquist (o dobro da maior frequência do sinal). Mais especificamente, se existir uma frequência W finita tal que a transformada de Fourier do sinal, $F[g(t)]$, satisfaça a:

$$F[g(t)] = \begin{cases} \text{função não trivial de } \omega, & \text{se } |\omega| \leq 2\pi W, \\ 0 & \text{, se } |\omega| > 2\pi W, \end{cases} \quad (3.39)$$

então $g(t)$ pode ser calculado em qualquer instante pela série:

$$g(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(i/T) \frac{\text{sen}(2\pi\omega t - i\pi)}{2 \pi\omega t - i\pi} \quad (3.40)$$

Este importante teorema, embora se aplique a uma ampla classe de funções $g(t)$, trata da situação ideal em que se conhecem os valores precisos de $g(t)$ nos instantes de amostragem. Conseqüentemente o resultado se apresenta em termos absolutos: se a Condição 3.39 é satisfeita para a taxa de amostragem do sinal $g(t)$ então ele pode ser completamente reproduzido pela Equação 3.40. Na presente abordagem, entretanto, o sinal observado está corrompido por um ruído desconhecido. De acordo com as Equações 3.32 e 3.33, o sinal observado é de fato um processo estocástico estacionário cuja função densidade espectral de potência é dada por:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= F[\text{Cov}_{x,x}(t, t+\Delta) + \text{Cov}_{v,v}(t, t+\Delta)] \\ &= \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} \sigma_x^2 + \frac{2\lambda_v}{\lambda_v^2 + \omega^2} \sigma_v^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Embora $S(\omega)$ não seja de banda limitada, na prática pode ser considerada assim, pois cai assintoticamente a zero conforme ω cresce em relação a λ e a λ_v . Pode-se traçar então um paralelo entre os resultados mostrados nas Figuras 3.1-6 e o teorema da amostragem.

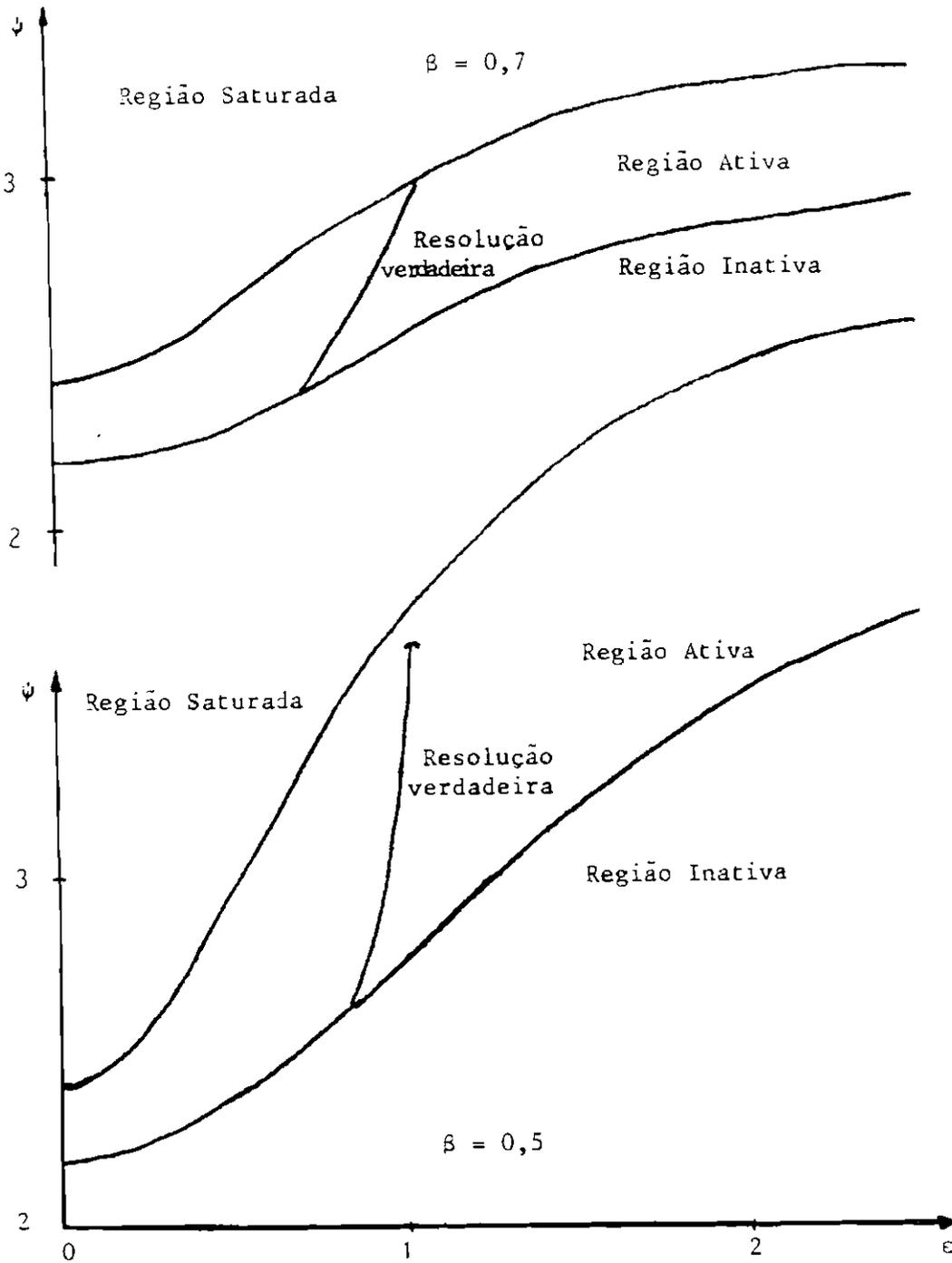


Fig. 3.1 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov: $\beta=0,5$ e $\beta=0,7$.

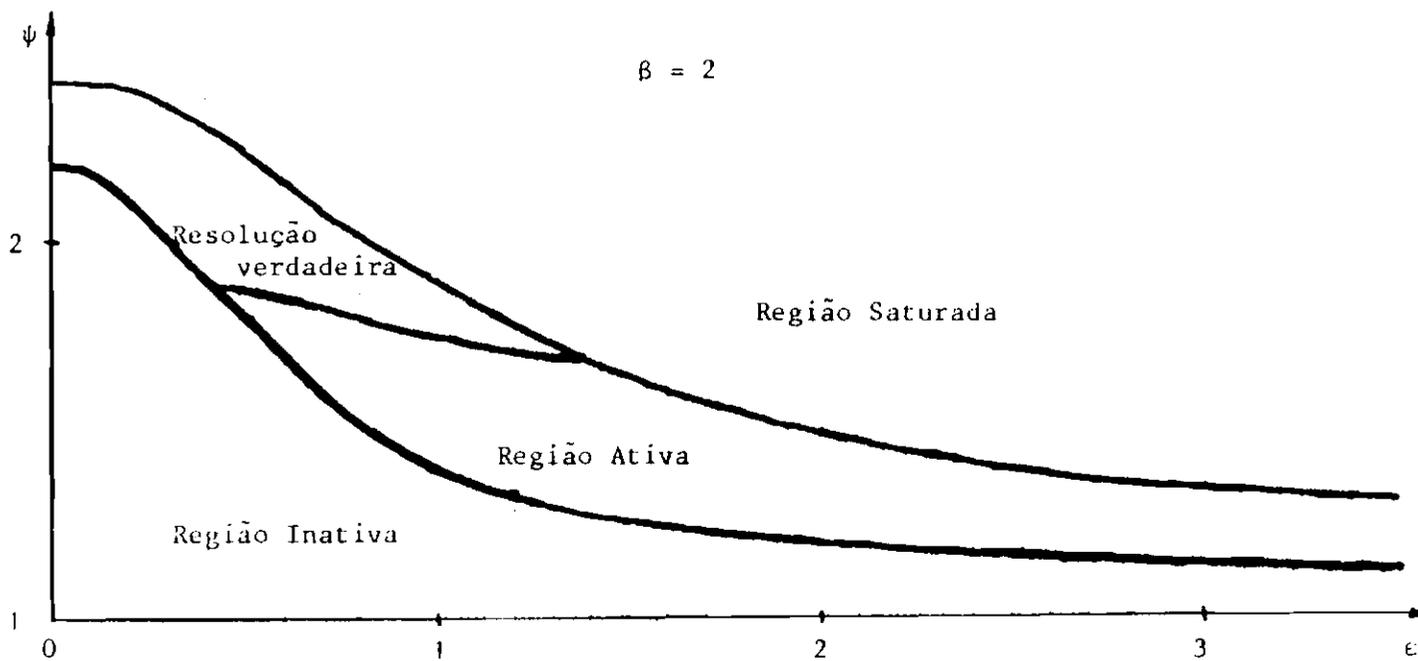


Fig. 3.2 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov: $\beta=2$.

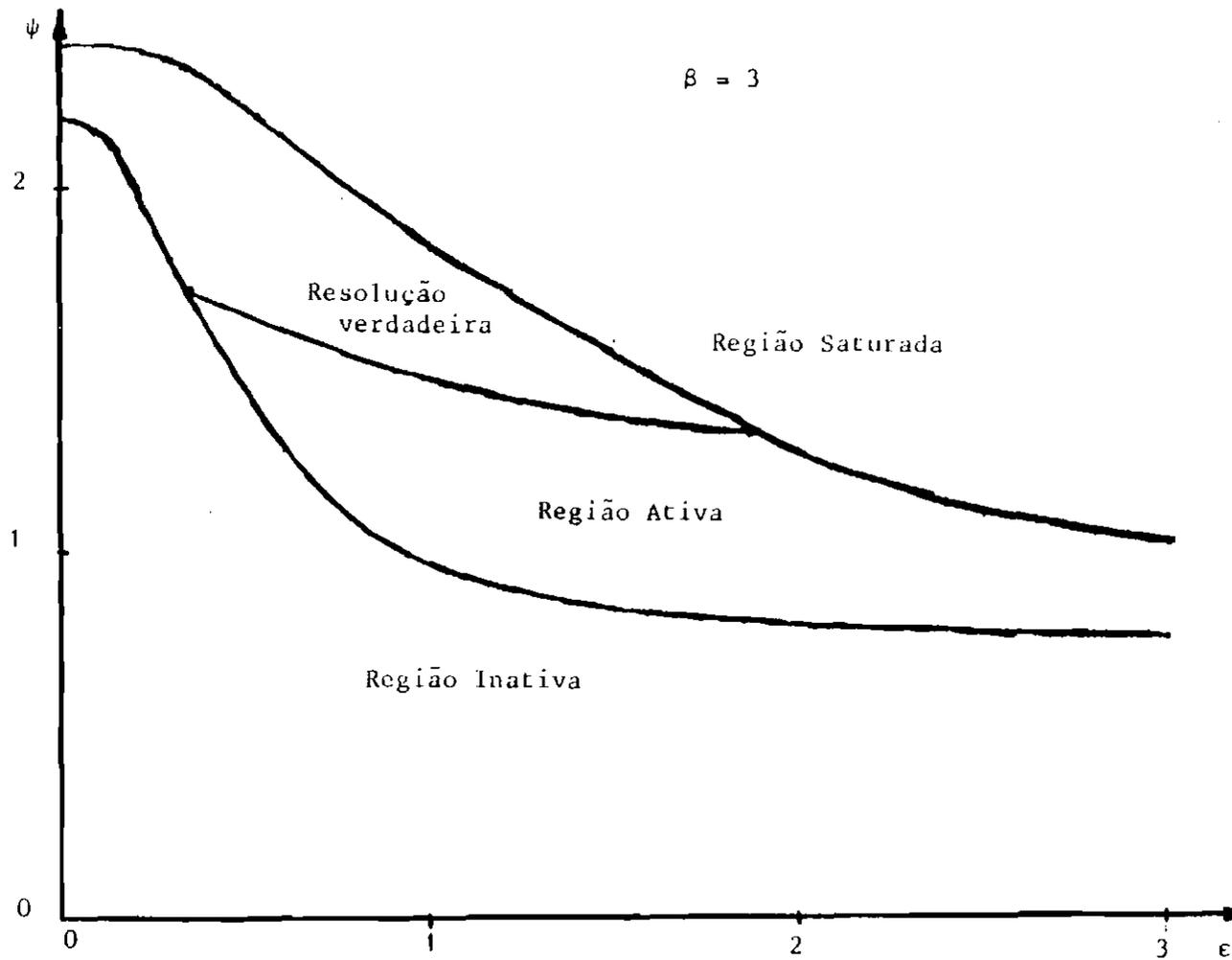


Fig. 3.3 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov: $\beta=3$.

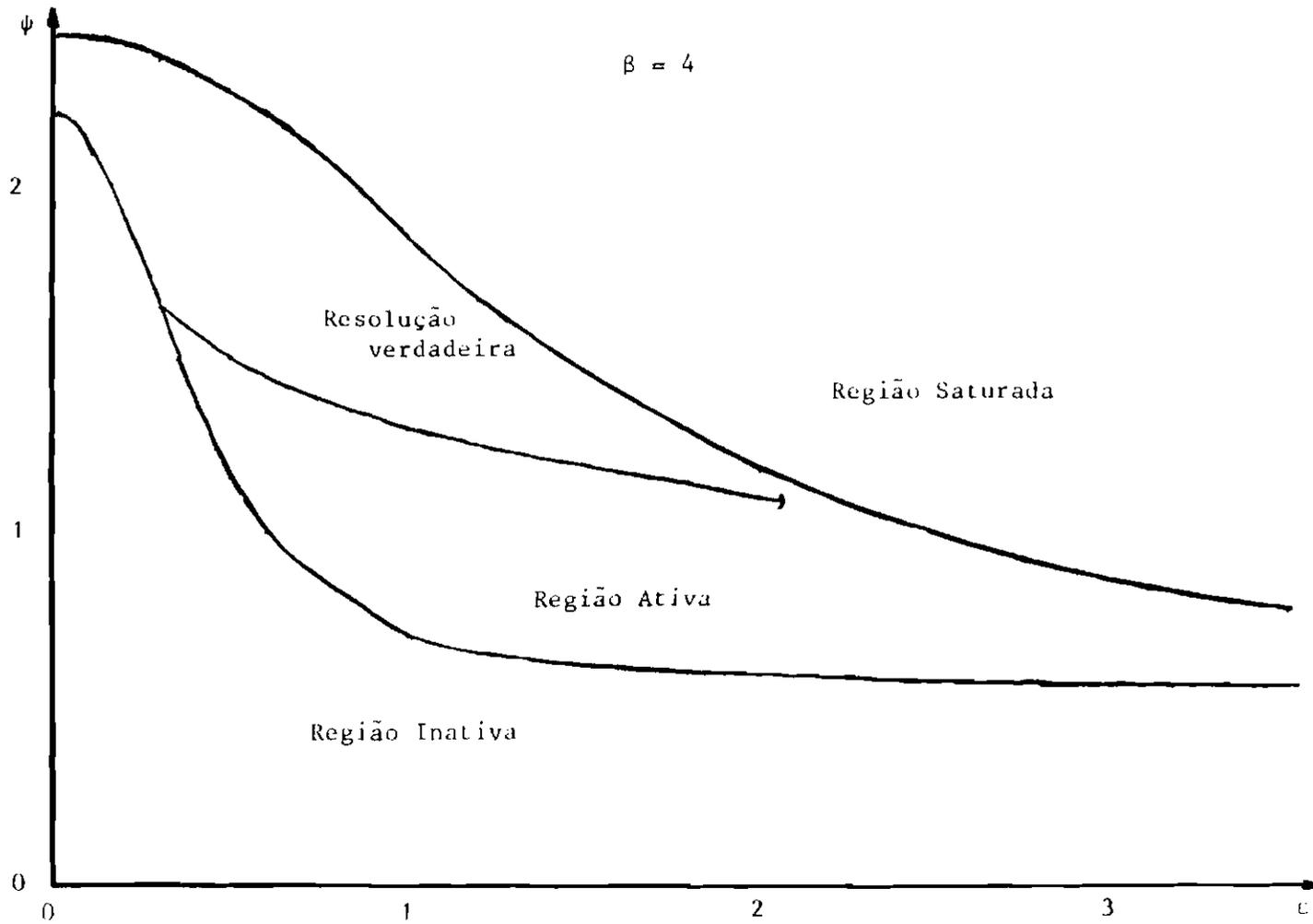


Fig. 3.4 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov: $\beta=4$.

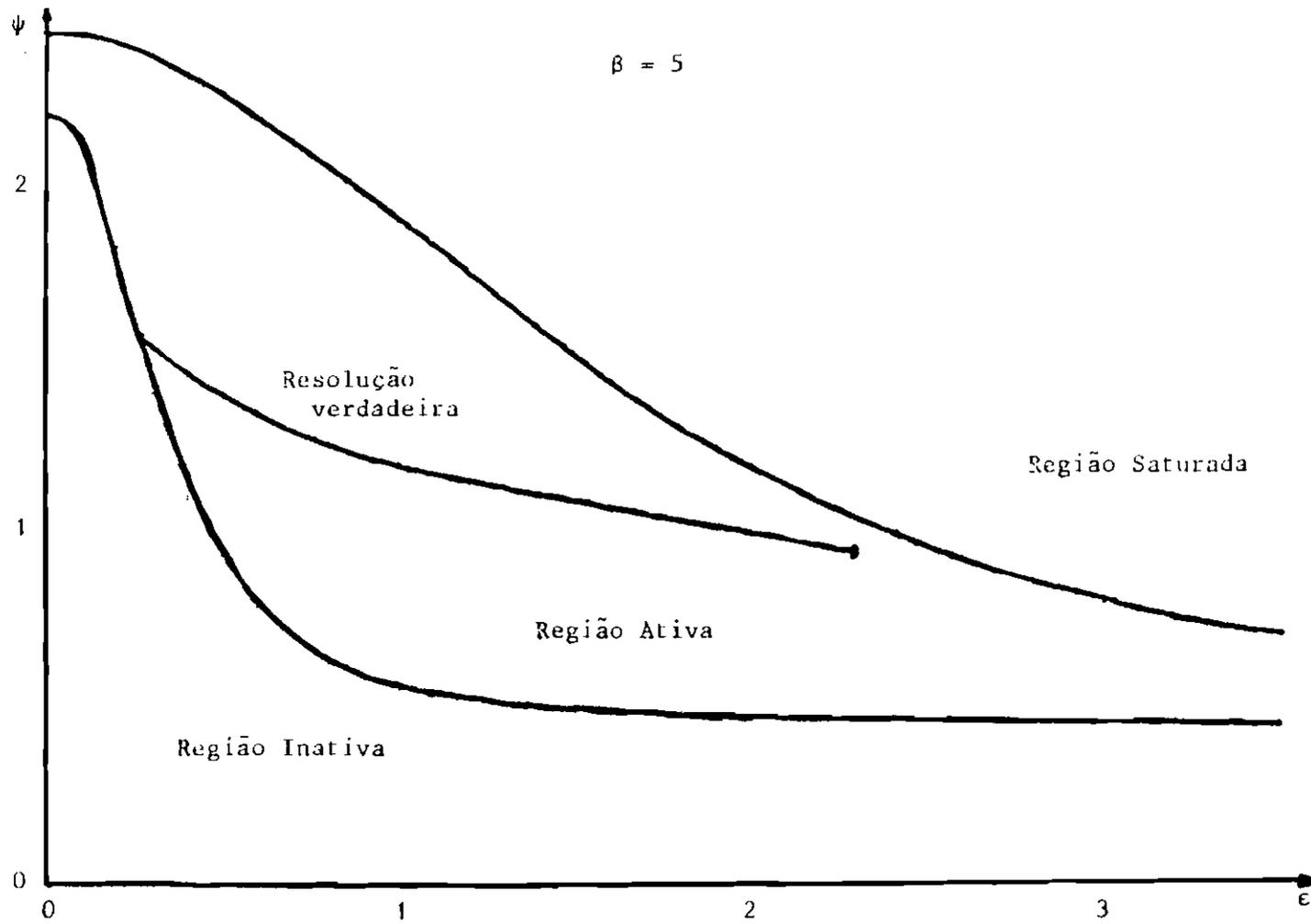


Fig. 3.5 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov: $\beta=5$.

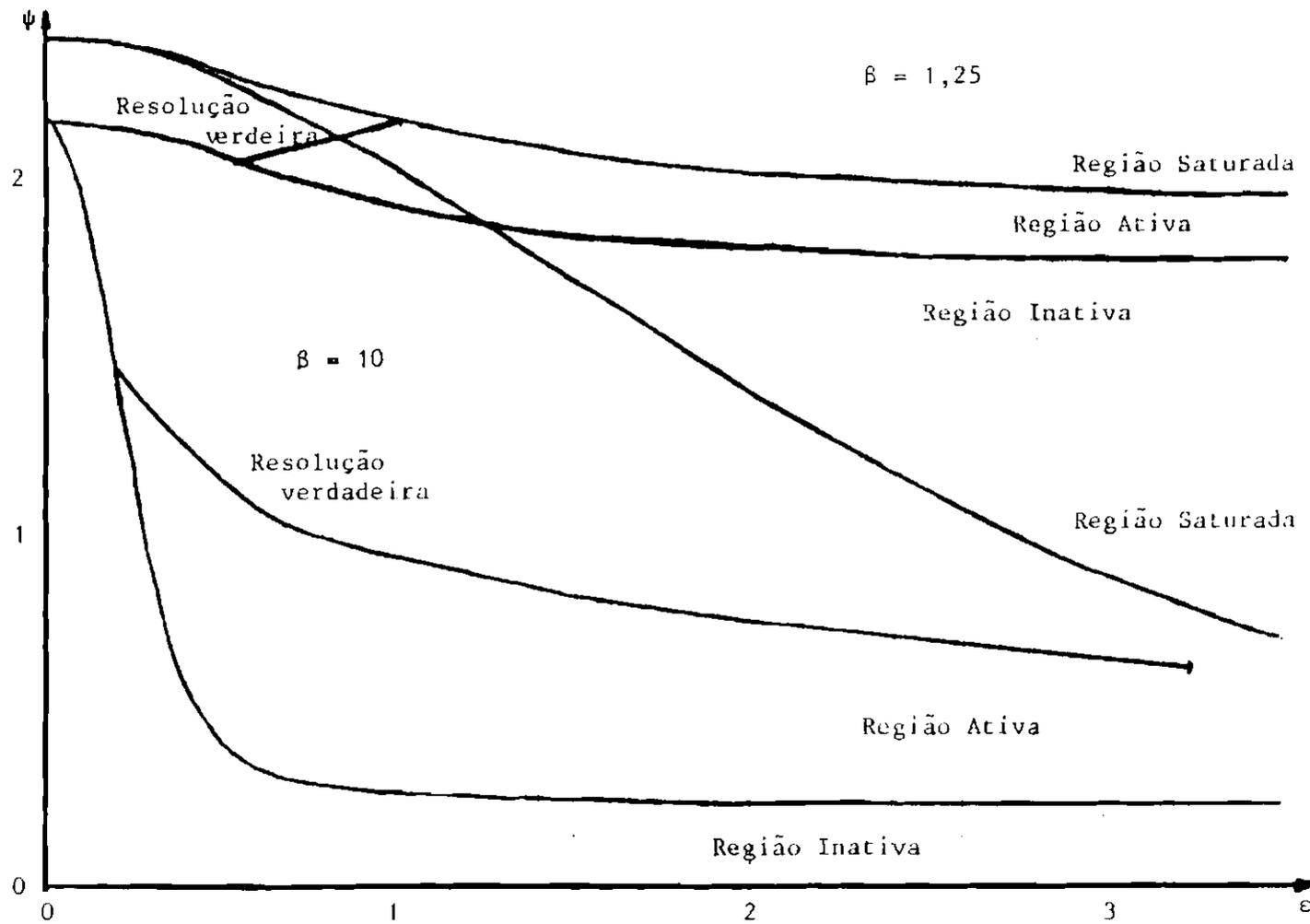


Fig. 3.6 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov: $\beta=1,25$ e $\beta=10$.

Observando aquelas figuras verifica-se que as fronteiras entre as regiões inativa, ativa e saturada ocorrem sistematicamente em $\psi=2,19$ e em $\psi=2,42$, respectivamente, quando $\epsilon \rightarrow 0$, e em $\psi = 2,19/\beta$ e em $\psi=2,42/$ quando $\epsilon \rightarrow \infty$. Portanto, as frequências ω_1 e ω_2 dadas por:

$$\omega_1 = \begin{cases} \frac{\lambda}{2 \times 2 \times 2,19} = \frac{0,72}{2\pi} \lambda, & \epsilon \rightarrow 0, \\ \frac{0,72}{2\pi} \lambda_v, & \epsilon \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\omega_2 = \begin{cases} \frac{\lambda}{2 \times 2 \times 2,42} = \frac{0,65}{2\pi} \lambda, & \epsilon \rightarrow 0, \\ \frac{0,65}{2\pi} \lambda_v, & \epsilon \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.43)$$

podem ser interpretadas como frequências de corte tais que se $\omega_1 > 1/2\Delta$ então todo o sinal observado é considerado verdadeiro e portanto, completamente reproduzido; e se $\omega_2 < 1/2\Delta$ então o sinal observado é considerado completamente ruidoso e não é recuperado o sinal verdadeiro. A faixa intermediária representa uma região extra, sem paralelo no teorema da amostragem, onde parte do sinal observado é considerado ruído e parte é reconstituído como sinal verdadeiro. A interpretação de frequência de corte se estende a qualquer valor de ω , onde $S(\omega)$ depende simultaneamente de λ e de λ_v . Os casos particulares considerados apenas facilitam a análise por dependerem apenas de λ ou de λ_v separadamente.

Após estas considerações sobre a analogia entre a frequência de amostragem e a resolução do sinal, retorna-se à questão da resolução verdadeira do sinal. Se o método de validação cruzada estendido ao caso contínuo permite que um processo estocástico seja modelado apenas por uma característica (aqui denominada de resolução), então, para que esta modelagem seja coerente com o modelo estocástico do sinal é necessário que o grau de suavização obtido pelo referido método seja idêntico ao obtido pelo método de mínima variância do

erro, que leva em conta o modelo estocástico. Em outras palavras, o grau de suavização obtido pelo método de validação cruzada com a resolução verdadeira deve minimizar a variância do erro do suavizador.

A Figura 3.7 condensa os resultados das demais figuras relativos à classe de sinais de Gauss-Markov de primeira ordem. Esta figura apresenta as três regiões referentes ao suavizador de mínima variância em função de β e de ϵ . No interior da região ativa destacam-se as curvas de iso-resolução verdadeira. Nota-se que apenas parte da região ativa é coberta pelas curvas de iso-resolução verdadeira, indicando que a equivalência entre as modelagens não se verifica em qualquer situação. Em particular não foi possível obter a equivalência para situações próximas da saturação do suavizador, e sempre com $\epsilon = 1$, que não corresponde a uma situação muito comum na prática. Quanto à relação entre os parâmetros das duas modelagens confrontadas, verifica-se que a resolução do sinal torna-se mais fina com o aumento da frequência relativa do ruído.

Considerando que o método de validação cruzada ignora o modelo estocástico do sinal e se baseia em um argumento heurístico ao qual se acrescentou, para o caso contínuo, a noção de grão de informação em um sinal, a consistência entre os diferentes aspectos qualitativos mencionados nos resultados apresentados confere significado ao conceito de resolução atribuído ao parâmetro Δ . Estes resultados reforçam aqueles obtidos para o caso de ruído branco no sentido de confirmar o conceito de resolução de um sinal como uma característica que permite uma descrição alternativa para a sua modelagem, que substitui, para efeitos práticos, o conhecimento do kernel de covariância do sinal verdadeiro e do ruído de observação.

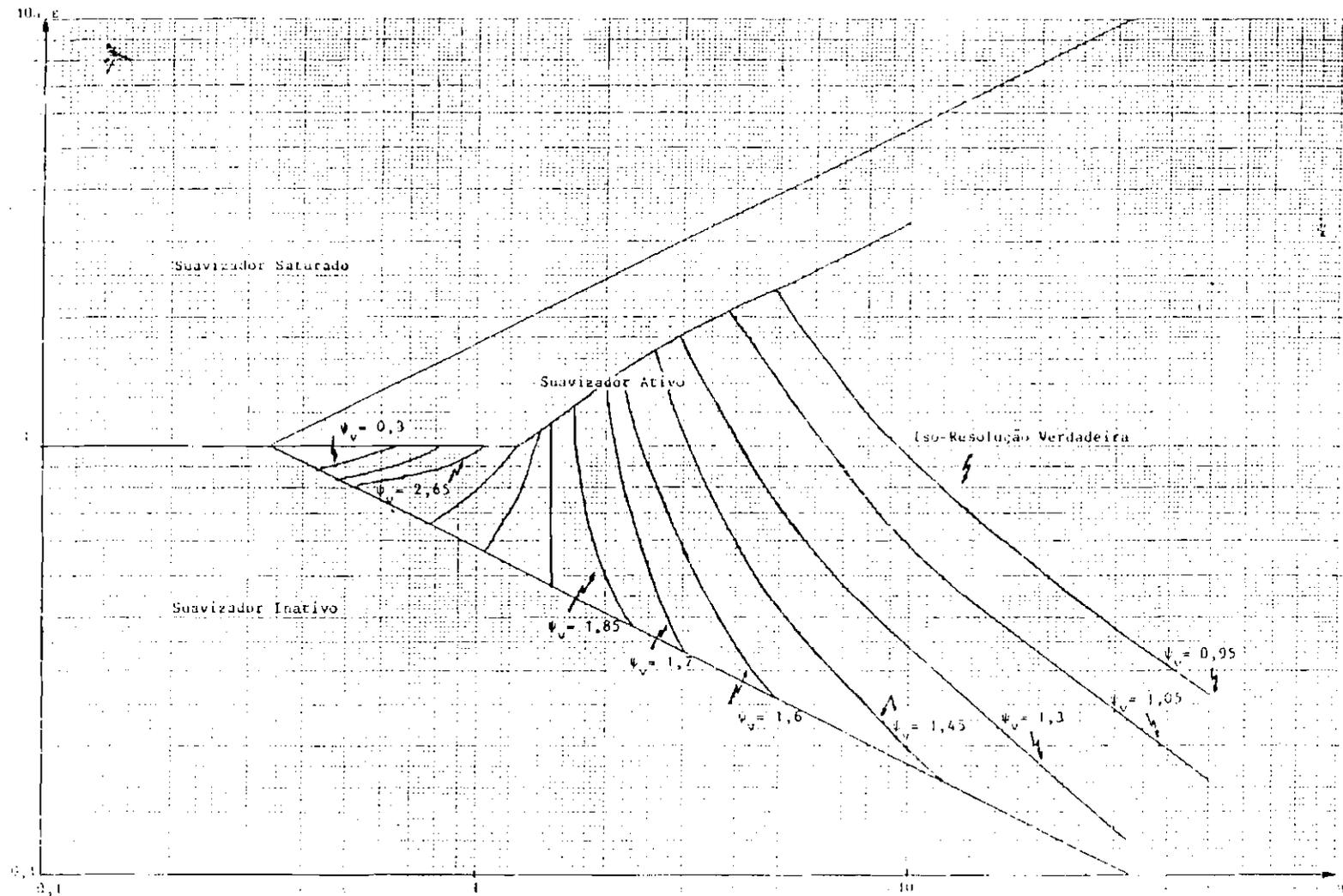


Fig. 3.7 - Mapeamento dos parâmetros do sistema com modelo de Gauss-Markov quanto ao desempenho do suavizador linear.

3.4.3- TERCEIRO CASO: PROCESSOS ESTACIONÁRIOS PERIÓDICOS

A última classe de sinais analisados para estudar o desempenho do método de validação cruzada é o processo estacionário periódico caracterizado por:

$$\text{Cov}_{x,x}(t,t+\Delta) = \sigma_x^2 \cos(\lambda\Delta) \quad , \quad (3.44)$$

$$\text{Cov}_{v,v}(t,t+\Delta) = \sigma_v^2 \cos(\lambda_v\Delta) \quad . \quad (3.45)$$

Analogamente ao caso anterior, as expressões analíticas do método de validação cruzada são obtidas no Apêndice D para o caso periódico. As Figuras 3.8-12 mostram os resultados para diversos valores de β . Este caso revela um outro aspecto ainda mais nítido de semelhança com o teorema da amostragem, analisado a seguir.

De acordo com o modelo estocástico dado pelas Equações 3.44 e 3.45, x e v são processos estacionários periódicos:

$$x(t) = a_x \cos(\lambda t) + b_x \text{sen}(\lambda t) \quad , \quad (3.46)$$

$$v(t) = a_v \cos(\lambda_v t) + b_v \text{sen}(\lambda_v t) \quad , \quad (3.47)$$

onde a_x , b_x , a_v e b_v são parâmetros aleatórios não correlacionados e não tendenciosos, com variâncias dadas por:

$$E[a_x^2] = E[b_x^2] = \sigma_x^2 \quad , \quad (3.48)$$

$$E[a_v^2] = E[b_v^2] = \sigma_v^2 \quad . \quad (3.49)$$

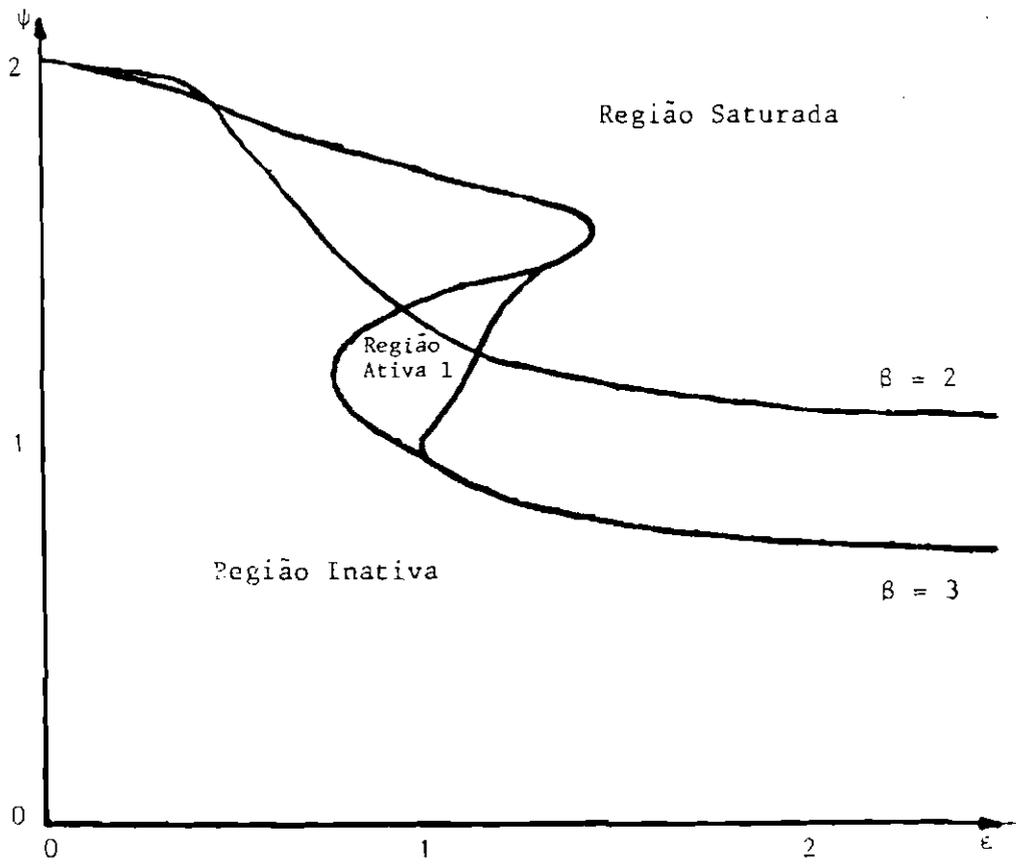


Fig. 3.8 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo estacionário periódico: $\beta=2$ e $\beta=3$.

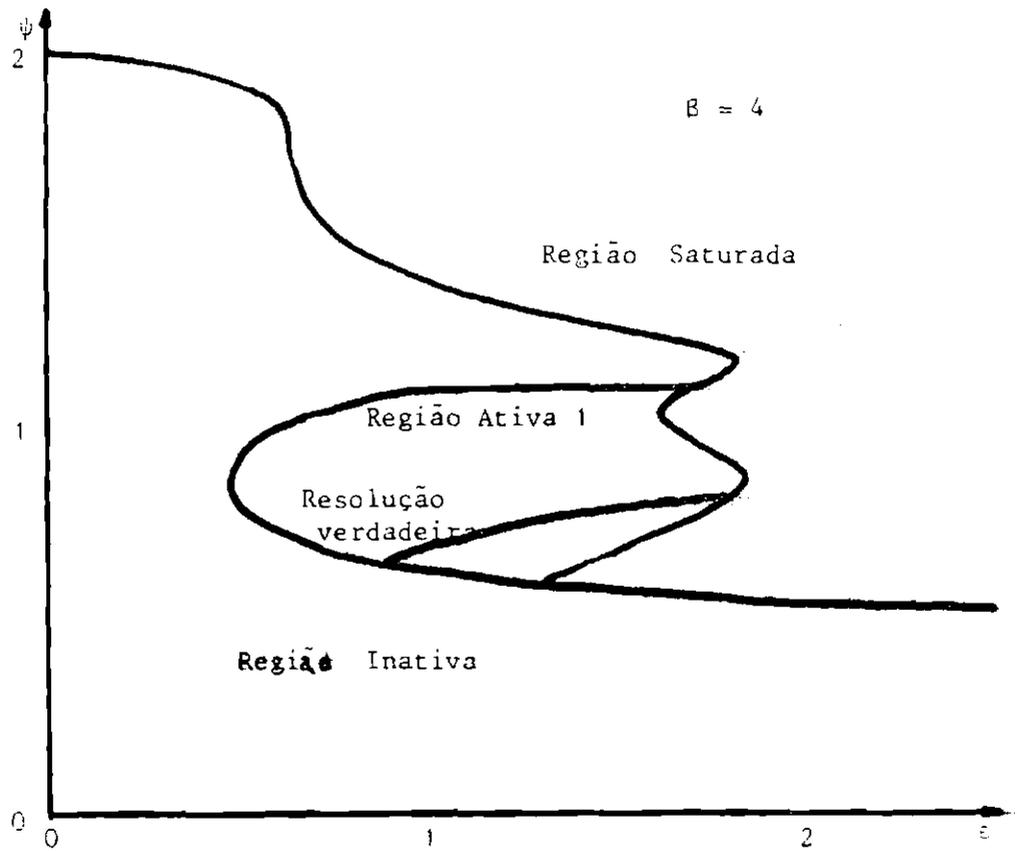


Fig. 3.9 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo estacionário periódico: $\beta=4$,

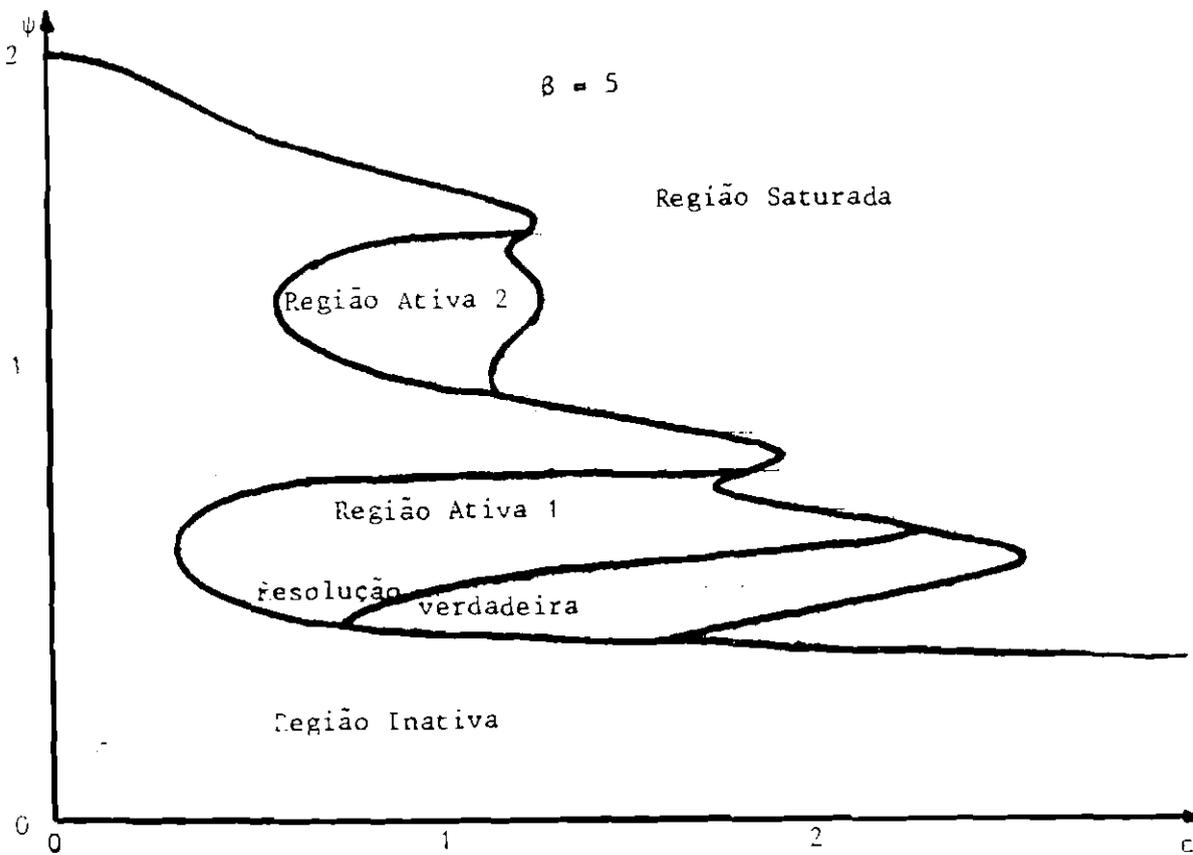


Fig. 3.10 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo estacionário periódico: $\beta=5$.

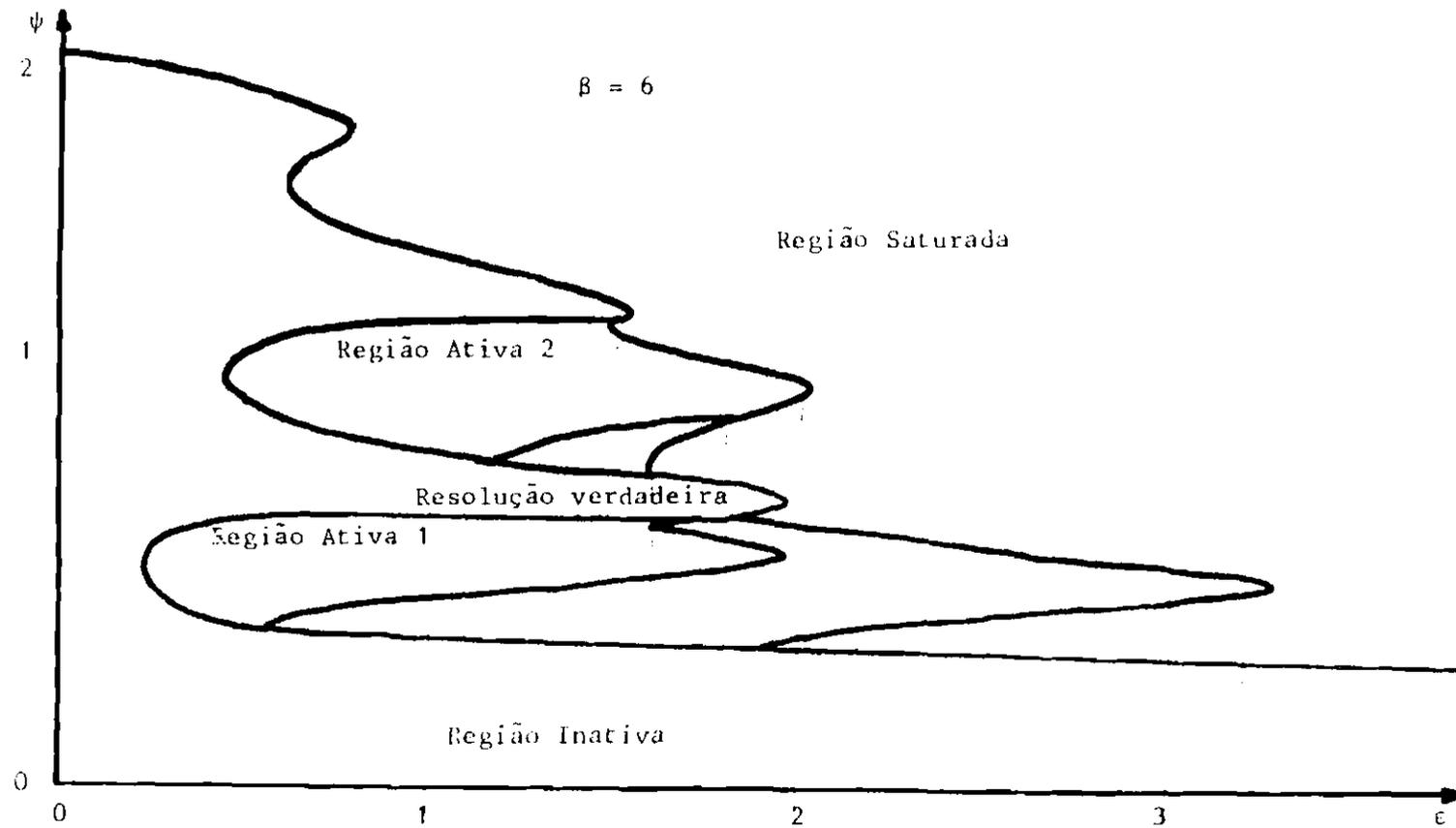


Fig. 3.11 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo estacionário periódico: $\beta=6$.

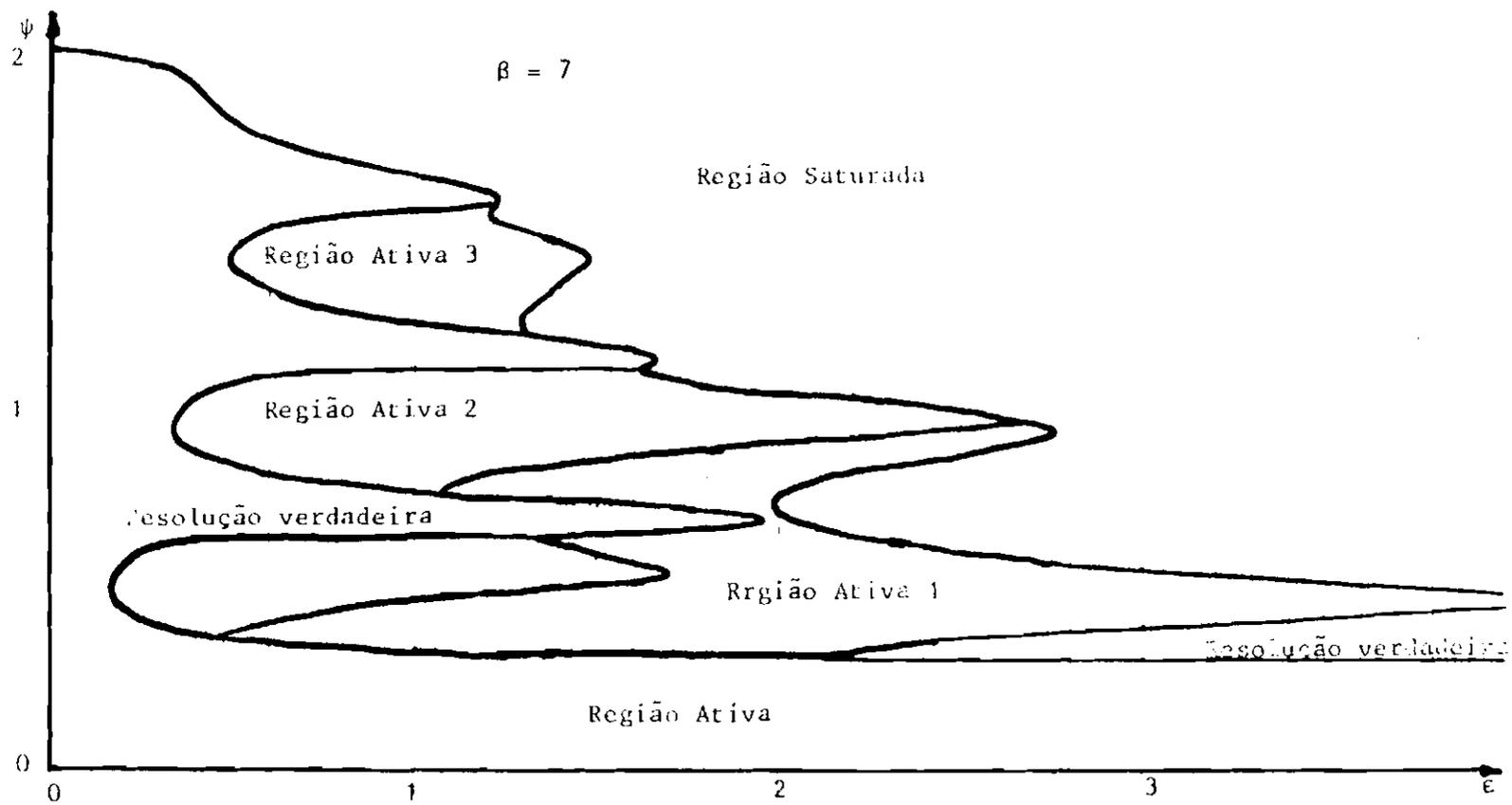


Fig. 3.12 - Desempenho do suavizador linear em função dos parâmetros do sistema com modelo estacionário periódico: $\beta=7$.

Das Figuras 3.8-12 verifica-se que quando $\epsilon \rightarrow 0$, onde predomina a frequência λ , o suavizador passa abruptamente de inativo a saturado em $\psi = 1,99$. No extremo oposto em que $\epsilon \rightarrow \infty$, e portanto predomina a frequência λ_v , a passagem de inativo a saturado ocorre em $\psi = 1,99/\beta$. Isto equivale a uma frequência de corte dada por:

$$\omega = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda}{2 \times 2 \times 1,99} = \frac{0,79}{2\pi} \lambda, \text{ se } \epsilon \rightarrow 0, \\ \frac{0,79}{2\pi} \lambda_v, \text{ se } \epsilon \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Se qualitativamente há uma analogia direta com o teorema da amostragem, quantitativamente ocorre uma aparente divergência, pois nos exemplos considerados neste ítem o sinal é completamente recuperável com Δ maior que o valor máximo equivalente indicado pelo teorema. Entretanto isto pode ser interpretado como um indicador de que o suavizador extrai alguma informação adicional do modelo dinâmico implicitamente suposto no Índice de Desempenho 3.2 ($\dot{x}=0$).

Um outro aspecto diferente em relação ao caso anterior é que o regime ativo do suavizador aparece aqui confinado a certas regiões que formam espécies de bolhas separando regiões inativas de saturadas. Evidentemente que a equivalência entre a modelagem estocástica e o conceito de resolução fica confinada às tais bolhas, cujo tamanho e quantidade aumentam com a cor relativa do ruído, β . A Figura 3.13 mostra as regiões onde a suavização pode ser ativa e a região onde existe a equivalência entre os dois métodos. Verifica-se que a resolução verdadeira fica mais fina quando a cor relativa do ruído (β) aumenta. A região de equivalência tende a ser menos restritiva quando β aumenta e ϵ diminui, o que corresponde aos casos mais comuns de aplicação (ruído de alta frequência e razão sinal/ruído alta).

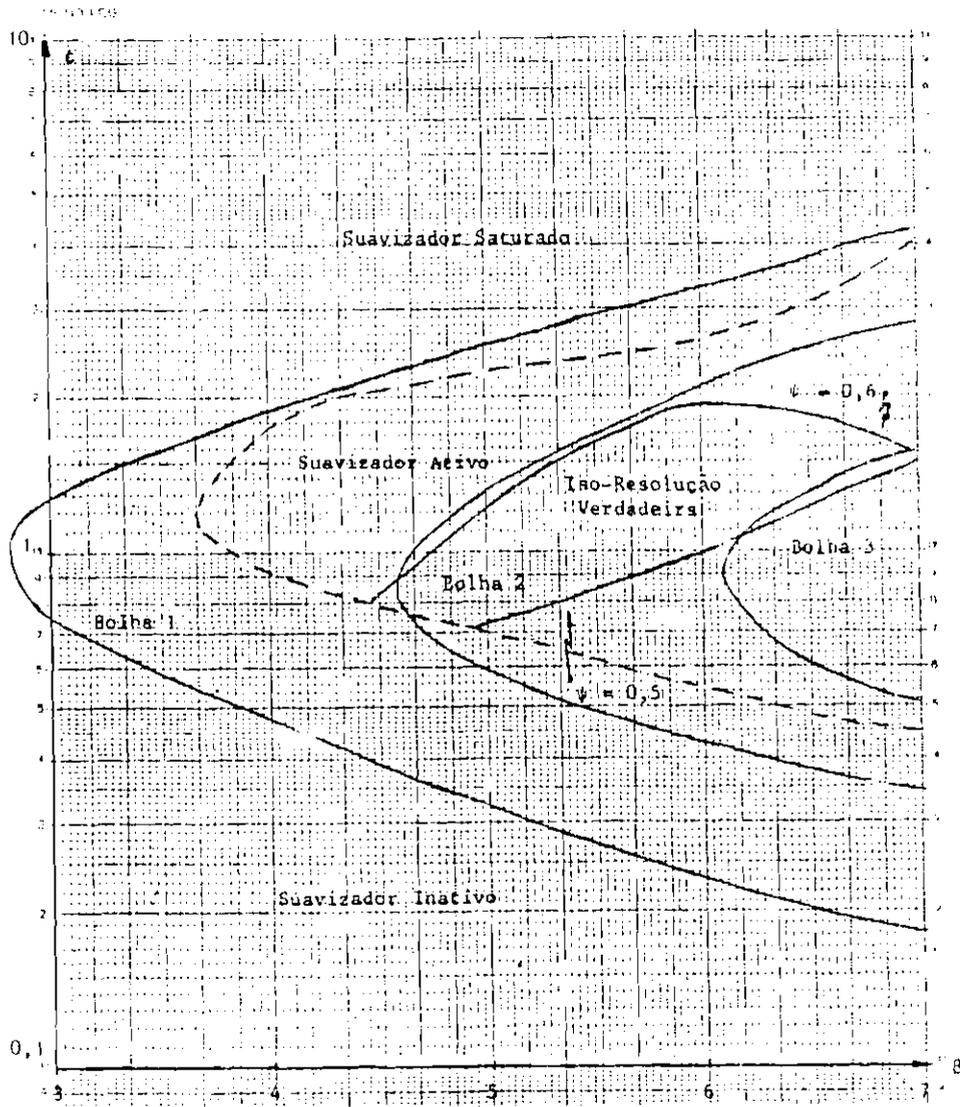


Fig. 3.13 - Mapeamento dos parâmetros do sistema com modelo estacionário periódico quanto ao desempenho do suavizador linear.

3.4.4- CONCLUSÃO

De modo geral os resultados apresentados nesta seção contribuem para firmar o conceito de resolução como um modo alternativo e versátil de descrever as características de um sinal, independentemente do tipo de sinal. No caso de sinais estocásticos mostrou-se que em certas regiões (especialmente quando os ruídos são quase brancos) existe equivalência entre o modelo de resolução e o estocástico. Estes resultados cruzados entre modelagens distintas servem para verificar o nível de consistência de um tipo de modelagem em função do outro. Entretanto a idéia em si de resolução não precisa ser equivalente a qualquer outro tipo de modelagem para afirmar sua autenticidade. É suficiente que ela atenda com sucesso a algum tipo de objetivo. Por exemplo, ela bem pode se aplicar a sinais determinísticos, para os quais sequer faz sentido uma suavização de estados baseada em modelos estocásticos. Para ilustrar a versatilidade desta modelagem, mostra-se no Apêndice D que os resultados dos casos estudados permanecem idênticos se um outro tipo de modelo estocástico é suposto, onde x e v são processos não estacionários tais que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E[x(t) x(t+\delta)] dt = \frac{\sigma_x^2}{\lambda} \begin{cases} \exp(-\lambda\tau) & , \text{ no Ítem 3.4.2 ,} \\ \cos(\lambda\tau) & , \text{ no Ítem 3.4.3 ,} \end{cases} \quad (3.51)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} E[v(t) v(t+\delta)] dt = \frac{\sigma_v^2}{\lambda_v} \begin{cases} \exp(-\lambda_v\tau) & , \text{ no Ítem 3.4.2 ,} \\ \cos(\lambda_v\tau) & , \text{ no Ítem 3.4.3 ,} \end{cases} \quad (3.52)$$

Este tipo de modelo descreve bem fenômenos efêmeros, onde:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E[x^2(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} E[v^2(t)] = 0 \quad , \quad (3.53)$$

e foi utilizado em Lopes (1984) para estudar o problema de suavização de sinais não periódicos no domínio da frequência.

A modelagem estocástica é adequada aos métodos de estimação de estados, conquanto exija uma quantidade grande de informação sobre os sinais (a rigor, todo o kernel de covariância dos ruídos). A modelagem por resolução é adequada ao método de validação cruzada e sua principal característica é que representa um conceito mais elementar de descrição de sinais. Além disso estes resultados sugerem, em analogia ao teorema da amostragem, que em sinais relativamente pouco correlacionados (isto é, β grande), a taxa de amostragem pode ser grande, enquanto que em sinais relativamente muito correlacionados (β pequeno) a resolução é grosseira e conseqüentemente a taxa de amostragem equivalente é pequena. Estas conclusões servem de motivação para o capítulo seguinte.

CAPÍTULO 4

ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA PELO MÉTODO DAS MALHAS

4.1 - INTRODUÇÃO

A dependência linear entre as covariâncias do resíduo e dos ruídos nos modelos dinâmico e de observações já foi explorada no Capítulo 2 para formular o estimador adaptativo projetado ali com base em um modelo onde os ruídos são brancos. De outro lado, no Capítulo 3 foi explorada a analogia entre as idéias de resolução e de ruído colorido. Estas idéias são agora canalizadas para propor um estimador adaptativo para sistemas onde os ruídos são coloridos, utilizando um tipo particular de modelo de ordem reduzida no qual os ruídos passam a ser considerados brancos a partir da escolha apropriada da taxa de amostragem. O procedimento é inspirado no método da malha reduzida (Lopes, 1985) para estimar a variância do ruído em séries temporais escalares, cuja idéia básica consiste em comparar o resíduo médio quadrático de uma espécie de suavização da série temporal completa com o de uma malha alternada desta série. O algoritmo aqui proposto, além de estimar as covariâncias dos ruídos brancos, permite determinar o limite de validade do modelo com ruídos brancos em termos de taxa de amostragem. O método representa a principal contribuição do trabalho.

Na próxima seção é apresentado um exemplo de sistema onde os ruídos são coloridos para ilustrar o fato de que o modelo de ruído branco aproxima bem o sistema até uma certa taxa de amostragem, conforme a idéia de resolução do processo de observação. Na terceira seção, introduz-se o procedimento de estimação adaptativa pelo método das malhas, através de um sistema escalar ilustrativo. A formulação geral do método (incluindo sistemas não lineares) é apresentada na quarta seção.

4.2 - A QUESTÃO DA TAXA DE AMOSTRAGEM

Em aplicações práticas de estimação de estados é usual supor que as perturbações do sistema podem ser modeladas por ruídos brancos (ou seja, que o "modelo é branco", em contraste com o "modelo colorido", para efeito de compactação de nomenclatura). Sabe-se que, em geral esta hipótese de trabalho infelizmente não é correta. Se fosse, bastaria aumentar a taxa de amostragem para reduzir ilimitadamente a incerteza do estimador, já que as covariâncias dos ruídos são fixadas pelas incertezas de equipamentos sensores e perturbações ambientais que absolutamente nada variam com a taxa de amostragem. Na realidade, entretanto, o modelo branco pode ser considerado um caso particular de modelo de ordem reduzida do sistema, cujo modelo real é colorido. Para ilustrar as implicações desta aproximação e verificar suas condições de validade, é feito um estudo comparativo nesta seção entre as soluções de estimadores baseados nos modelos branco e colorido. O exemplo utilizado é bastante simples mas didático no sentido de permitir tirar conclusões qualitativas especialmente com relação à influência da taxa de amostragem nos resultados da filtração.

4.2.1 - O FILTRO LINEAR CONTÍNUO-DISCRETO PARA O CASO DE RUÍDO ESTACIONÁRIO DE GAUSS-MARKOV DE PRIMEIRA ORDEM

Seja $X(t)$ um processo estocástico que representa o estado de um sistema regido pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B W(t) \quad , \quad X(t_0) = X_0 \quad (4.1)$$

$$\dot{W}(t) = -\lambda_w W(t) + \xi(t) \quad , \quad E[\xi(t) \xi'(\tau)] = Q_c \delta(t-\tau) \quad , \quad (4.2)$$

$$X \in \mathbb{R}^n \quad , \quad W \in \mathbb{R}^q \quad ,$$

onde A e B são matrizes constantes; λ_w é uma constante escalar positiva; $W(t)$ é um ruído colorido, de Gauss-Markov de primeira ordem;

e $\xi(t)$ é um ruído branco, não tendencioso, de densidade espectral de potência Q_c .

Seja $Y(t)$ um processo estacionário que representa o vetor de observações do sistema, tal que:

$$Y(t) = H X(t) + V(t) \quad , \quad Y \in \mathbb{R}^r \quad , \quad (4.3)$$

$$\dot{V}(t) = -\lambda_v V(t) + \eta(t) \quad , \quad E[\eta(t) \eta'(t)] = R_c \delta(t-\tau) \quad , \quad (4.4)$$

onde H é uma matriz constante; λ_v é uma constante escalar positiva; V é um ruído colorido de Gauss-Markov de primeira ordem; e η é um ruído branco não tendencioso e não correlacionado com ξ e nem com o estado inicial X_0 , com matriz de densidade espectral de potência R_c .

Define-se um estado estendido, X_e ; um ruído estendido, W_e ; e as matrizes A_e , B_e , Q_e e H_e por:

$$X_e \triangleq (X' : W' : V')' \quad , \quad X_e \in \mathbb{R}^{n_e} \quad , \quad n_e = n + q + r \quad , \quad (4.5)$$

$$W_e \triangleq (\xi' : \eta')' \quad , \quad W_e \in \mathbb{R}^{q_e} \quad , \quad q_e = q + r \quad , \quad (4.6)$$

$$A_e \triangleq \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & -\lambda_w I_q & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_v I_r \end{bmatrix} \quad , \quad (4.7)$$

$$B_e \triangleq \begin{bmatrix} 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}' \quad , \quad (4.8)$$

$$Q_e \triangleq \begin{bmatrix} Q_c & 0 \\ 0 & R_c \end{bmatrix} \quad , \quad (4.9)$$

$$H_e = (H : 0 : I_r) \quad , \quad (4.10)$$

onde I_i representa a matriz identidade de ordem i e 0 representa matriz nula de dimensão adequada. Pode-se então reescrever as Equações 4.1-4 assim:

$$\dot{X}_e(t) = A_e X_e(t) + B_e W_e(t) \quad , \quad E[W_e(t)W_e'(\tau)] = Q_e \delta(t-\tau) \quad , \quad (4.11)$$

$$Y(t) = H_e X_e(t) \quad , \quad (4.12)$$

que caracteriza um sistema com observações exatas. Utilizando a notação de Jazwinski (1970), as equações do filtro contínuo-discreto para este sistema são dadas pelas seguintes etapas consecutivas de propagação e atualização:

a) Propagação

$$\hat{X}_e(t|k) = \phi(t-k) \hat{X}_e(k|k) \quad , \quad t \geq k \quad , \quad (4.13)$$

$$P_e(t|k) = \phi(t-k) P_e(k|k) \phi'(t-k) + \Gamma(t-k) \quad , \quad (4.14)$$

onde a matriz de transição de estados, ϕ , e a matriz de ruído aditivo no estado, Γ , são dadas por:

$$\phi(t-k) = \exp[A_e(t-k)] \quad , \quad (4.15)$$

$$\Gamma(t-k) = \int_k^t \phi(t-\tau) B_e Q_e B_e' \phi'(t-\tau) d\tau \quad ; \quad (4.16)$$

b) Atualização

$$\hat{X}_e(k+1|k+1) = \hat{X}_e(k+1|k) + G_{k+1} [Y(k+1) - H_e X_e(k+1|k)] \quad , \quad (4.17)$$

$$P_e(k+1|k+1) = [I_{n_e} - G_{k+1} H_e] P_e(k+1|k) [I_{n_e} - G_{k+1} H_e]' \quad , \quad (4.18)$$

onde G_k é o ganho do filtro no processamento da k -ésima observação. No caso do filtro ótimo, o ganho é o ganho de Kalman G^* , dado por:

$$G_{k+1}^* = P_e(k+1|k) H_e' [H_e P_e(k+1|k) H_e'] \quad , \quad (4.19)$$

e a covariância da estimativa atualizada passa a ser:

$$P_e(k+1|k+1) = (I_{n_e} - G_{k+1}^* H_e) P_e(k+1|k) \quad . \quad (4.20)$$

A informação a priori, dada por:

$$\bar{X}_e(0|0) = \bar{X}_{e_0} \quad , \quad (4.21)$$

$$P_e(0|0) = P_{e_0} \quad , \quad (4.22)$$

serve para inicializar o processo de estimação. Como X_e é por definição um processo estacionário, a distribuição marginal de X_e pode ser tomada como informação a priori para o filtro, ou seja:

$$\bar{X}_{e_0} = \bar{X}_m = E[X_e] = 0 \quad ; \quad P_{e_0} = P_m \stackrel{\Delta}{=} \text{Cov}[X_e] = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) \quad . \quad (4.23)$$

Nesta seção será estudado mais detalhadamente o caso particular onde $X(t)$ é um processo escalar diretamente observado (isto é, $H=1$) e as constantes do sistema dadas por:

$$A = -\lambda \quad , \quad B = 1 \quad , \quad \lambda_w = \lambda_v \quad , \quad (4.24)$$

onde λ é uma constante positiva. As matrizes Φ e Γ para este caso podem ser obtidas analiticamente:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \exp(-\lambda t) & \exp(-\lambda_v t) - \exp(-\lambda t) & 0 \\ 0 & \exp(-\lambda_v t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-\lambda_v t) \end{bmatrix} \quad , \quad (4.25)$$

$$\Gamma_{1,1}(t) = \frac{\frac{1-\exp(-2\lambda_V t)}{2\lambda_V} - 2 \frac{1-\exp[-(\lambda_V+\lambda)t]}{\lambda_V+\lambda} + \frac{1-\exp(-2\lambda t)}{2\lambda}}{(\lambda - \lambda_V)^2} Q_c \quad (4.26a)$$

$$\Gamma_{1,2}(t) = \Gamma_{2,1}(t) = \frac{\frac{1-\exp(-2\lambda_V t)}{2\lambda_V} - \frac{1-\exp[-(\lambda_V+\lambda)t]}{\lambda_V+\lambda}}{\lambda_V - \lambda} Q_c \quad (4.26b)$$

$$\Gamma_{2,2}(t) = \frac{1-\exp(-2\lambda_V t)}{2\lambda_V} Q_c \quad , \quad (4.26c)$$

$$\Gamma_{3,3}(t) = \frac{1-\exp(-2\lambda_V t)}{2\lambda_V} R_c \quad , \quad (4.26d)$$

$$\Gamma_{1,3}(t) = \Gamma_{3,1}(t) = \Gamma_{2,3}(t) = \Gamma_{3,2}(t) = 0 \quad . \quad (4.26e)$$

Das Equações 4.23 e 4.26 verifica-se que a covariância marginal de X_e no exemplo considerado é dada por:

$$P_{e_m}^* = \begin{pmatrix} \frac{Q_c}{2\lambda\lambda_V(\lambda+\lambda_V)} & \frac{Q_c}{2\lambda_V(\lambda_V+\lambda)} & 0 \\ \frac{Q_c}{2\lambda_V(\lambda_V+\lambda)} & \frac{Q_c}{2\lambda_V} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_c}{2\lambda_V} \end{pmatrix} \quad , \quad (4.27)$$

donde a solução de regime permanente do filtro de Kalman para um intervalo de discretização constante $\Delta = t_{k+1} - t$ tendendo a infinito é tal que:

$$P_{\max}^* = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow \infty}} P_{e_{1,1}}^*(k|k) = \frac{2}{Q_c} \lambda_V \lambda (\lambda + \lambda_V) + \frac{2}{R_c} \lambda_V \quad , \quad (4.28)$$

$$g_{\max}^* \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow \infty}} G_{k_1}^* = \frac{2\lambda_V}{R_c} P_{\max}^* \quad . \quad (4.29)$$

4.2.2 - SOLUÇÃO NO LIMITE CONTÍNUO: O FILTRO DE DEYST

As equações do filtro contínuo de Kalman não se aplicam para o caso de observações exatas, pois na expressão do ganho de Kalman aparece explicitamente a inversa da matriz densidade espectral de potência do ruído de observação (ver Equação 2.12). A obtenção de um estimador ótimo para o sistema com observação exata definido pelas Equações 4.11 e 4.12 no limite $\Delta \rightarrow 0$, ou seja, quando as observações são processadas continuamente, é portanto um problema especial. Sua solução é dada pelo filtro de Deyst (Maybeck, 1979). Para sistemas invariantes no tempo, a matriz de covariância do erro de estimação deste filtro obedece à seguinte equação diferencial não linear:

$$\begin{aligned} \dot{P}_e(t|t) = & A_e P_e(t|t) + P_e(t|t) A_e' + B_e Q_e B_e' + \\ & - [P_e(t|t) A_e' + B_e Q_e B_e'] \mathcal{D} [A_e P_e(t|t) + B_e Q_e B_e'] , \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde a matriz \mathcal{D} é definida por:

$$\mathcal{D} = H_e' [H_e B_e Q_e B_e' H_e']^{-1} H_e . \quad (4.31)$$

A Equação 4.30 possui a forma de uma equação de Riccati, cuja solução pode ser decomposta num produto de matrizes [Maybeck, 1979]:

$$P_e(t|t) = \Pi(t) \Psi^{-1}(t) , \quad (4.32)$$

onde Π e Ψ são partições quadradas da matriz Ξ :

$$\Xi = (\Pi' : \Psi')' , \quad (4.33)$$

a qual obedece a uma equação diferencial linear:

$$\dot{\Xi}(t) = H \Xi(t) \quad , \quad \begin{cases} \bar{\pi}(t_0) = P_e(t_0^+ | t_0^+) \\ \Psi(t_0) = I_{n_e} \end{cases} \quad . \quad (4.34)$$

Pode-se verificar por substituição direta que as Equações 4.32-34 satisfazem à Equação 4.30 para H definida por:

$$H \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} [I_{n_e} - B_e Q_e B_e' \mathcal{D}] A_e & [I_{n_e} - B_e Q_e B_e'] B_e Q_e B_e' \\ A_e' & A_e - A_e [I_{n_e} - \mathcal{D} B_e Q_e B_e'] \end{bmatrix} \quad . \quad (4.35)$$

A matriz H é hamiltoniana, pois satisfaz à relação [Laub, 1979]:

$$\Omega H \Omega^{-1} = -H' \quad , \quad \Omega \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} 0 & I_{n_e} \\ -I_{n_e} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (4.36)$$

e portanto possui a seguinte propriedade: se V_i é auto-vetor de H e κ_i seu auto-valor correspondente, então $U_j = \Omega V_i$ é auto-vetor de H' e $\kappa_j = -\kappa_i$ seu auto-valor correspondente. Isto pode ser facilmente comprovado assim:

$$H V_i = \kappa_i V_i \quad , \quad (4.37)$$

donde, substituindo V_i por $\Omega^{-1} U_i$:

$$H \Omega^{-1} U_j = \kappa \Omega^{-1} U_j \quad (4.38)$$

Pré-multiplicando a Equação 4.38 por Ω e substituindo a Equação 4.36 no resultado, demonstra-se a propriedade:

$$H' U_j = -\kappa_i U_i \quad . \quad (4.39)$$

Uma consequência imediata desta propriedade é que ou H é nula ou possui auto-valores positivos e negativos, donde o sistema regido pela Equação 4.34 não é estável (o que não impede a Equação de Riccati 4.30 de ser estável!). Além disso, se H for singular então o auto-valor nulo será múltiplo, o que pode representar uma complicação adicional à solução do problema. Ainda assim, a decomposição de $P_e(t|t)$ conforme a Equação 4.32 é útil para calcular sua solução de regime permanente, como se mostra a seguir.

No caso particular do exemplo estudado nesta seção, a matriz é dada por:

$$H = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_v & 0 & 0 & Q_c & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2/R_c & -\lambda/R_c & \lambda_v \lambda/R_c & \lambda & 0 & -\lambda \\ -\lambda/R_c & 1/R_c & -\lambda_v/R_c & -1 & \lambda_v & 1 \\ \lambda \lambda_v/R_c & -\lambda_v/R_c & \lambda^2/R_c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

Os auto-valores e auto-vetores desta matriz foram calculados algebricamente e encontram-se na Tabela 4.1. Como a matriz H possui um auto-valor duplo, a solução da Equação 4.34 é dada por:

$$\Xi(t) = \{p \ V_0 \ U_0^t (t-t_0) + K + \sum_{i \neq 0} V_i U_i^t (V_i^t \ U_i^t)^{-1} \exp[\kappa_i (t-t_0)]\} \Xi(t_0), \quad (4.41)$$

onde: K é uma matriz constante, cujo valor deve satisfazer à Equação 4.41 em $t=t_0$, qualquer que seja $\Xi(t_0)$, o que implica em:

$$K = I_{n_e} - \sum_{i \neq 0} V_i U_i^t (V_i^t \ U_i^t)^{-1}; \quad (4.42)$$

e p é uma constante escalar calculada a seguir. Substituindo a Equação 4.41 e sua derivada temporal na Equação 4.34 e lembrando da Relação 4.37, conclui-se que:

$$pV_0U_0' = HK . \quad (4.43)$$

O valor de p pode ser obtido pré-multiplicando ambos os lados da Equação 4.43 por V' e pós-multiplicando por U_0 , tendo em mente que $U_0 = \Omega V_0$:

$$p = V_0' H K U_0 (V_0' V_0)^{-2} . \quad (4.44)$$

Das Equações 4.41 e 4.33, fazendo uso da regra de L'Hospital, obtem-se os seguintes limites:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{\Pi}(t)}{t-t_0} = V_0 \frac{\bar{\Pi}}{\bar{\Pi}} [pU_0' \Xi(t_0)] + \sum_{i \text{ par}} V_{i\bar{\Pi}} [\kappa_i U_i' \Xi(t_0) (V_i' U_i)^{-1}] \lim_{t \rightarrow \infty} \exp [\kappa_i (t-t_0)] , \quad (4.45)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Psi(t)}{t-t_0} = V_0 \frac{\Psi}{\Psi} [pU_0' \Xi(t_0)] + \sum_{i \text{ par}} V_{i\Psi} [\kappa_i U_i' \Xi(t_0) (V_i' U_i)^{-1}] \lim_{t \rightarrow \infty} \exp [\kappa_i (t-t_0)] , \quad (4.46)$$

onde os índices $\bar{\Pi}$ e Ψ indicam as partições dos vetores correspondentes respectivamente aos três primeiros e aos três últimos elementos de V_i . Pós-multiplicando ambos os lados da Equação 4.32 por $\Psi(t)/(t-t_0)$, passando ao limite $t \rightarrow \infty$ e substituindo as Equações 4.45 e 4.46 no resultado, verifica-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [P_e(t|t) V_0 \frac{\Psi}{\Psi} - V_0 \frac{\bar{\Pi}}{\bar{\Pi}}] [pU_0' \Xi(t_0)] + \sum_{i \text{ par}} [P_e(t|t) V_{i\Psi} - V_{i\bar{\Pi}}] [\kappa_i U_i' \Xi(t_0)] (V_i' U_i)^{-1} \exp[\kappa(t-t_0)] = 0 . \quad (4.47)$$

TABELA 4.1

AUTO-VALORES E AUTO-VETORES DA MATRIZ H DO FILTRO DE DEYST
PARA SISTEMAS COM RUÍDOS DE GAUSS-MARKOV

i	0	1	2	3	4
κ_i	0	$-\lambda_v$	α	$-\kappa_4$	$\sqrt{\lambda^2 + Q_c/R_c}^{-1}$
V_i	0	1	1	1	1
	0	$\lambda - \lambda_v$	$\lambda + \lambda_v$	$\lambda - \kappa_4$	$\lambda + \kappa_4$
	0	-1	-1	-1	-1
	1	0	0	$\frac{\lambda}{R_c \kappa_4} \frac{\lambda_v^2 - \kappa_4^2}{\lambda + \kappa_4}$	$-\frac{\lambda}{R_c \kappa_4} \frac{\lambda_v^2 - \kappa_4^2}{\lambda - \kappa_4}$
	0	0	$2(\lambda + \lambda_v) \frac{\lambda_v}{Q_c}$	$(\lambda - \kappa_4) \frac{\lambda_v - \kappa_4}{Q_c}$	$(\lambda + \kappa_4) \frac{\lambda_v + \kappa_4}{Q_c}$
	1	0	$-2 \frac{\lambda_v}{R_c}$	$\frac{\lambda_v}{R_c \kappa_4} (\lambda_v - \kappa_4)$	$-\frac{\lambda_v}{R_c \kappa_4} (\lambda_v + \kappa_4)$

Dado que $\{1; \exp(\kappa_2 t); \exp(\kappa_4 t)\}$ são funções linearmente independentes e que a solução $P_e(t|t)$ em regime permanente independe de $P_e(t_0|t_0)$, então a condição necessária e suficiente para a Equação 4.47 ser válida é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_e(t|t) \begin{bmatrix} V_0 & : & V_2 & : & V_4 \\ \psi & & \psi & & \psi \\ \bar{\Gamma} & & \bar{\Gamma} & & \bar{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 & : & V_2 & : & V_4 \\ \bar{\Gamma} & & \bar{\Gamma} & & \bar{\Gamma} \end{bmatrix} . \quad (4.48)$$

Resolvendo este sistema linear para os valores de \underline{d} dos na Tabela 4.1, encontra-se finalmente:

$$P_d \hat{=} \lim_{t \rightarrow \infty} P_{e,1,1}^*(t|t) = \frac{Q_c}{(\lambda_V + \kappa_4)^2} \left[\frac{1}{2\lambda_V} + \frac{1}{\lambda + \kappa_4} \right] \quad (4.49)$$

que representa a covariância do erro da melhor estimativa possível do estado escalar x em regime permanente para o sistema considerado.

4.2.3 - SOLUÇÃO PARA O MODELO BRANCO

Se no exemplo analisado nesta seção os ruídos escalares w e v fossem considerados brancos, isto é, se:

$$E[w(t)w(\tau)] = Q \delta(t-\tau) , \quad (4.50)$$

$$E[v(t_i)v(t_j)] = R \delta_{i-j} , \quad (4.51)$$

então a variância do erro de estimação do filtro de Kalman em regime permanente seria dada por:

$$P_p = g_p R , \quad (4.52)$$

onde o índice inferior p indica que se trata de uma pseudo-grandeza, no sentido de que o modelo branco utilizado não é correto. O assim chamado pseudo-ganho de Kalman é, no regime permanente, dado por:

$$g_p^* = \{ [(1-\phi^2 + \gamma Q/R) + 4\phi^2 \gamma Q/R]^{1/2} - (1-\phi^2 + \gamma Q/R) \} / (2\phi^2) , \quad (4.53)$$

onde:

$$\phi \stackrel{\Delta}{=} \exp(-\lambda\Delta) \quad , \quad (4.54)$$

$$\gamma \stackrel{\Delta}{=} [1 - \exp(-2\lambda\Delta)] / (2\lambda) \quad . \quad (4.55)$$

No caso limite $\Delta \rightarrow \infty$, verifica-se que:

$$P_{P_{\max}} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\Delta \rightarrow \infty} P_P = [(2\lambda/Q) + (1/R)]^{-1} \quad , \quad (4.56)$$

$$g_{P_{\max}} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\Delta \rightarrow \infty} g_P = P_{P_{\max}} / R \quad . \quad (4.57)$$

Comparando as Equações 4.56 e 4.28 verifica-se que a condição de equivalência entre Q_C e Q para que os modelos estacionários branco e colorido possuam a mesma distribuição marginal é dada por:

$$Q = Q_C / [\lambda_V (\lambda_V + \lambda)] \quad , \quad (4.58)$$

$$R = R_C / (2\lambda_V) \quad . \quad (4.59)$$

Embora as Equações 4.58 e 4.59 garantam a equivalência dos modelos branco e colorido no limite $\Delta \rightarrow \infty$, o mesmo não ocorre para qualquer Δ . De fato, conforme Δ se aproxima de zero, mantendo-se válidas as equações 4.58 e 4.59, a verdadeira covariância do erro de estimação quando se supõe o modelo branco no cálculo do ganho diverge da pseudo-covariância. Esta covariância verdadeira, denotada por P_V , pode ser calculada fazendo a primeira componente do ganho no modelo colorido igual ao pseudo-ganho e anulando as demais na Equação 4.18.

4.2.4 - ANÁLISE DO EFEITO DA TAXA DE AMOSTRAGEM NOS FILTROS COM MODELOS BRANCO E COLORIDO

As expressões obtidas nos itens anteriores desta seção foram implementadas em computador digital e resultados numéricos foram obtidos para alguns conjuntos representativos de parâmetros λ, λ_V, R_C

e Q escolhidos por um critério especificado mais adiante neste ítem. As Figuras 4.1-6 mostram a incerteza relativa e o ganho do filtro em função dos seguintes parâmetros adimensionais: intervalo de discretização normalizado, $\bar{\Delta}$; incerteza marginal relativa, ϵ_m , e cor relativa do ruído, β , definidos por:

$$\bar{\Delta} \triangleq \lambda \Delta, \quad (4.60)$$

$$\epsilon_m^2 \triangleq P_{e_{0,1,1}} / P_t = Q_c / [R_c \lambda^2 (1 + \beta)], \quad (4.61)$$

$$\beta \triangleq \lambda_v / \lambda, \quad (4.62)$$

onde P_t representa a variância do erro do estimador trivial $\hat{x}_t = y$:

$$P_t \triangleq P_{e_{0,3,3}} = R_c / (2\lambda_v). \quad (4.63)$$

O intervalo de discretização normalizado mede o tempo entre atualizações do filtro em unidades de constantes de tempo do sistema. A incerteza marginal ϵ_m dá uma medida relativa da precisão da estimativa a priori baseada no fato de que o sistema é estacionário (ver Equação 4.23), em comparação com a precisão das observações. Valores pequenos de ϵ_m indicam que instantaneamente o modelo dinâmico retém mais informação sobre o estado que as observações e vice-versa. A cor relativa do ruído determina a taxa de decaimento da correlação do ruído. Se β se aproxima de zero, o ruído tende a um erro tendencioso, pobre em inovações. Se β tende a infinito, o ruído se torna branco, rico em inovações.

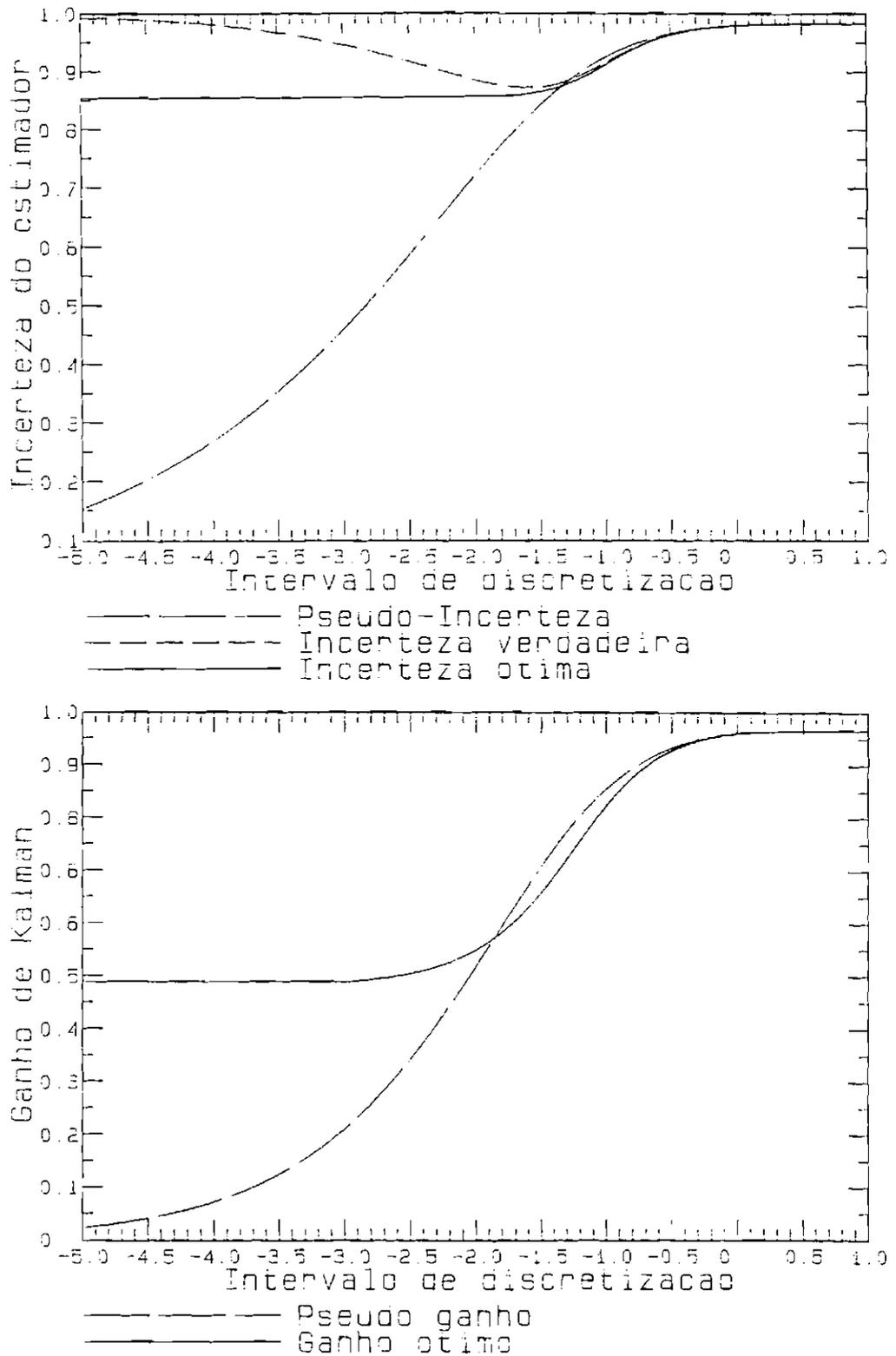


Fig. 4.1 - Desempenho do filtro de Kalman com modelo de ordem reduzida em um sistema com ruidos de Gauss-Markov: caso 1.

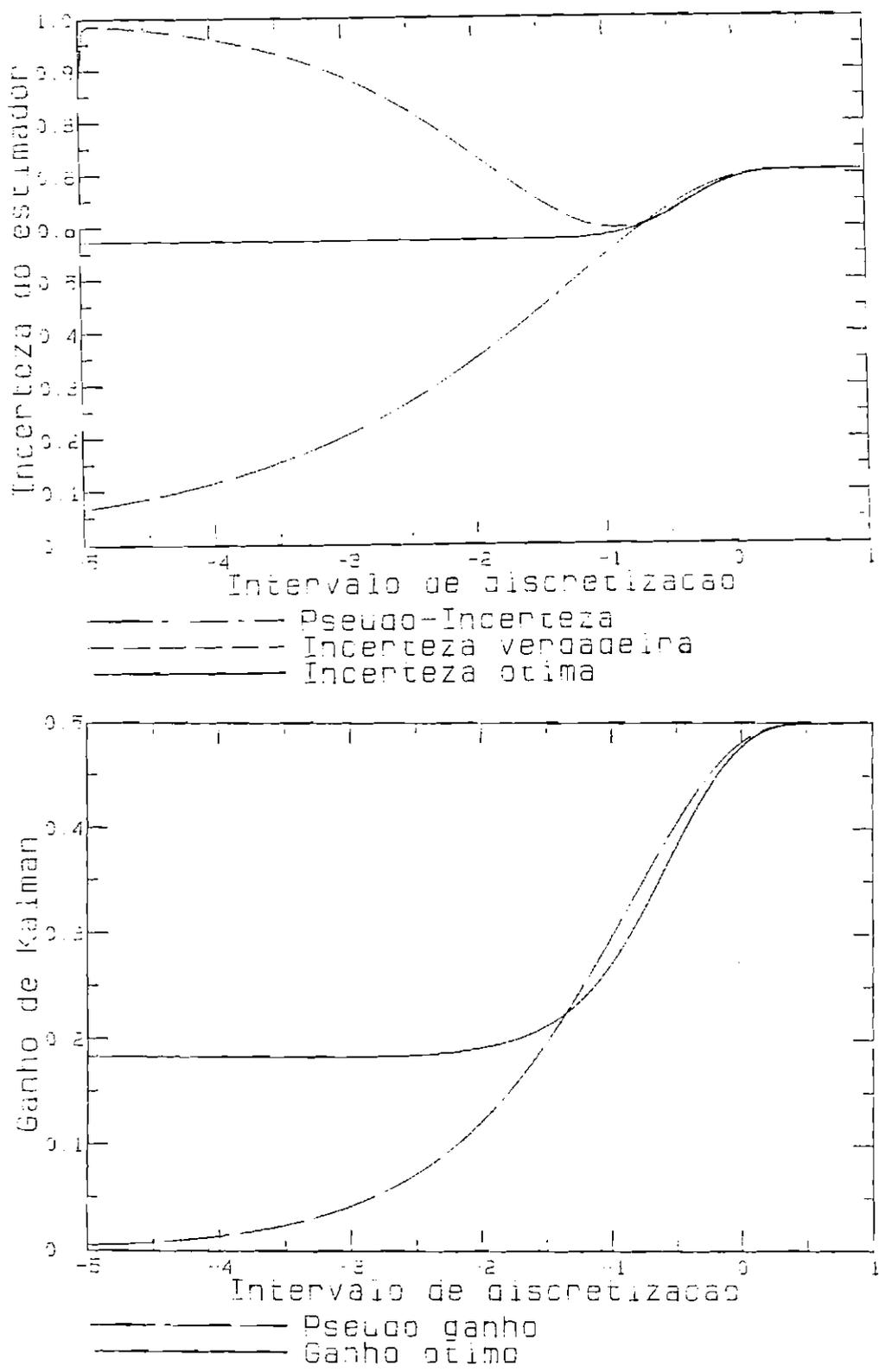


Fig. 4.2 - Desempenho do filtro de kalman com modelo de ordem reduzida em um sistema com ruídos de Gauss-Markov: caso 2.

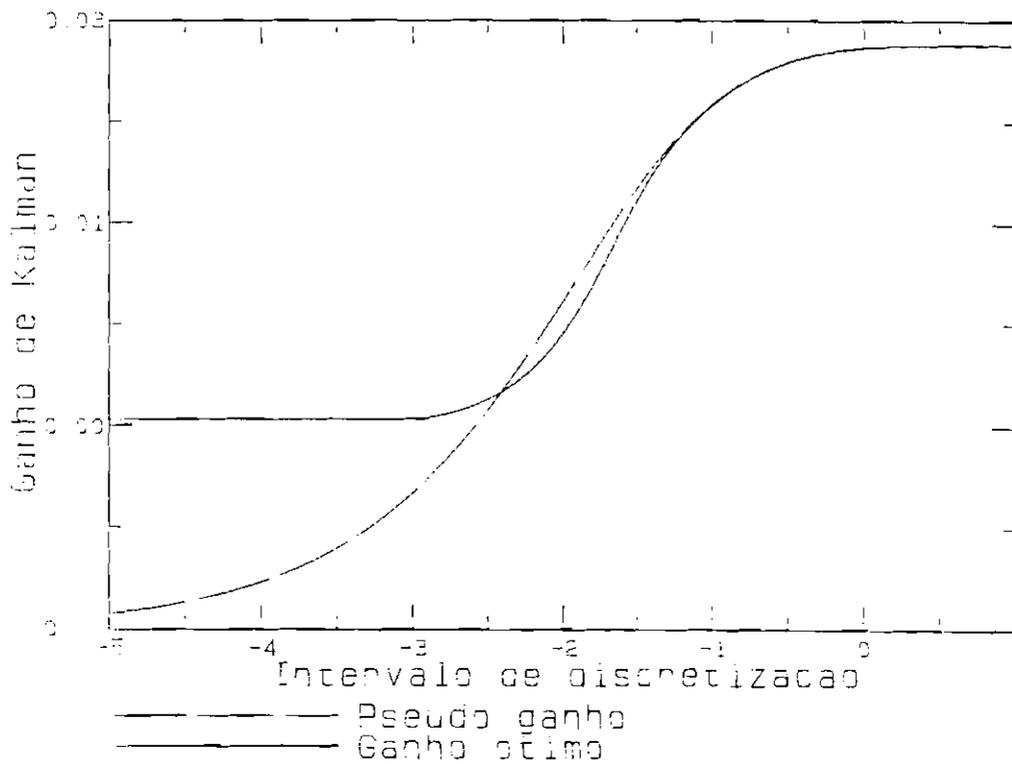
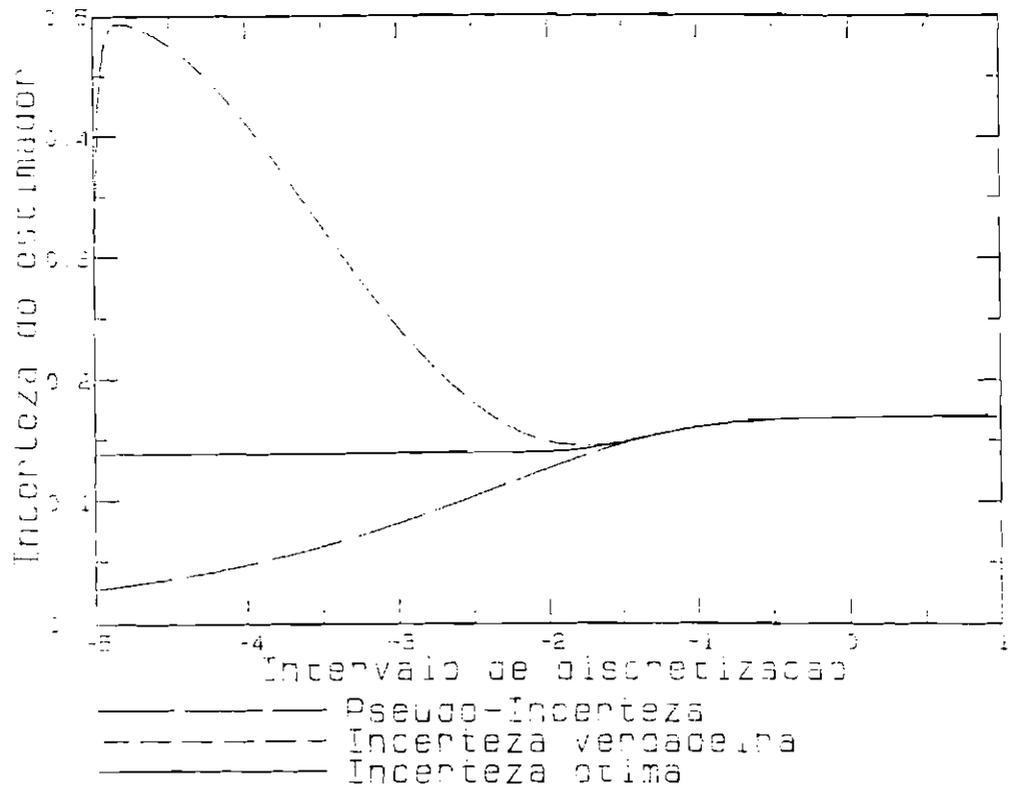


Fig. 4.3 - Desempenho do filtro de Kalman com modelo de ordem reduzida em um sistema com ruídos de Gauss-Markov: caso 3.

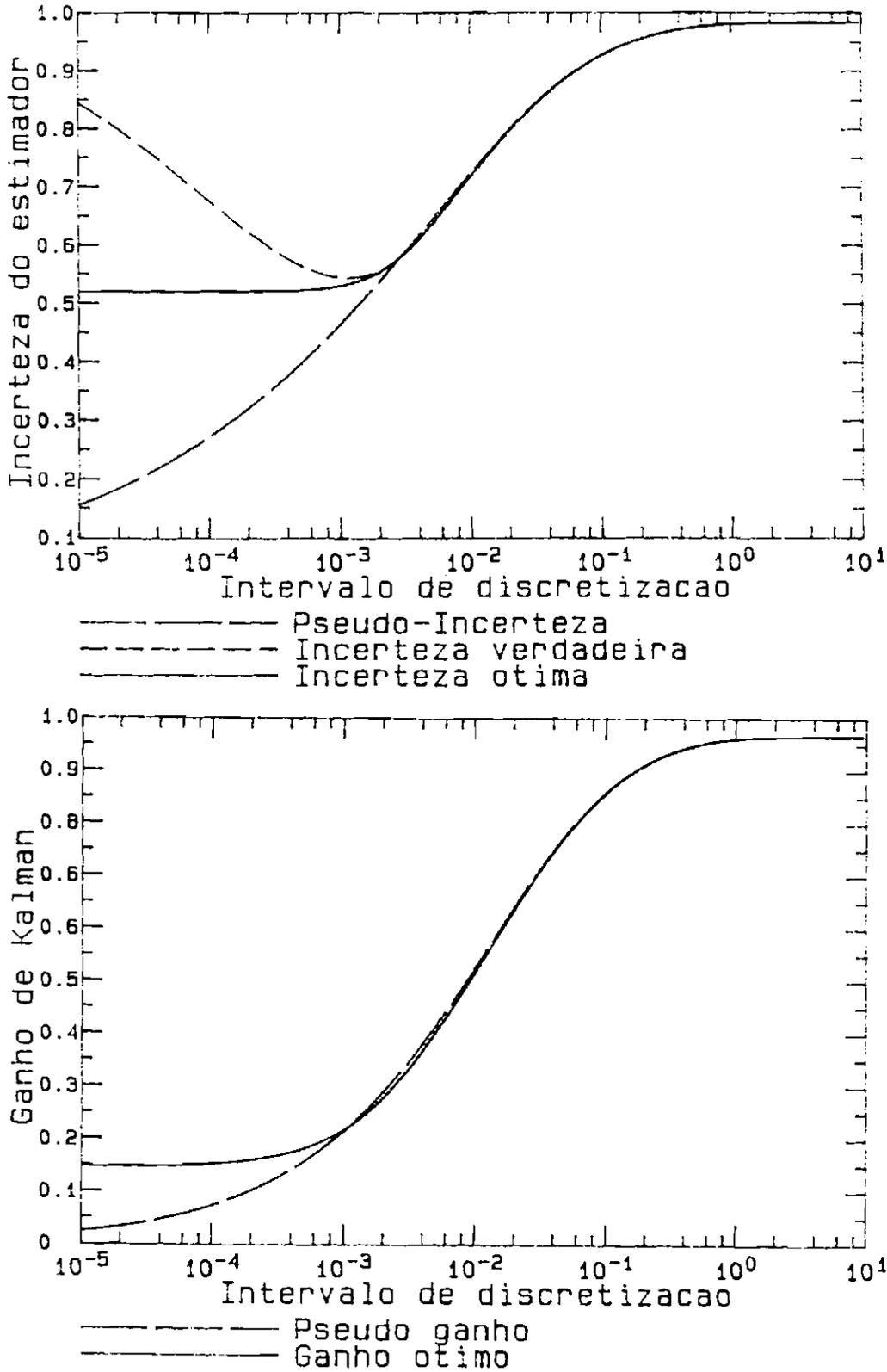


Fig. 4.4 - Desempenho do filtro de Kalman com modelo de ordem reduzida em um sistema com ruídos de Gauss-Markov: caso 4.

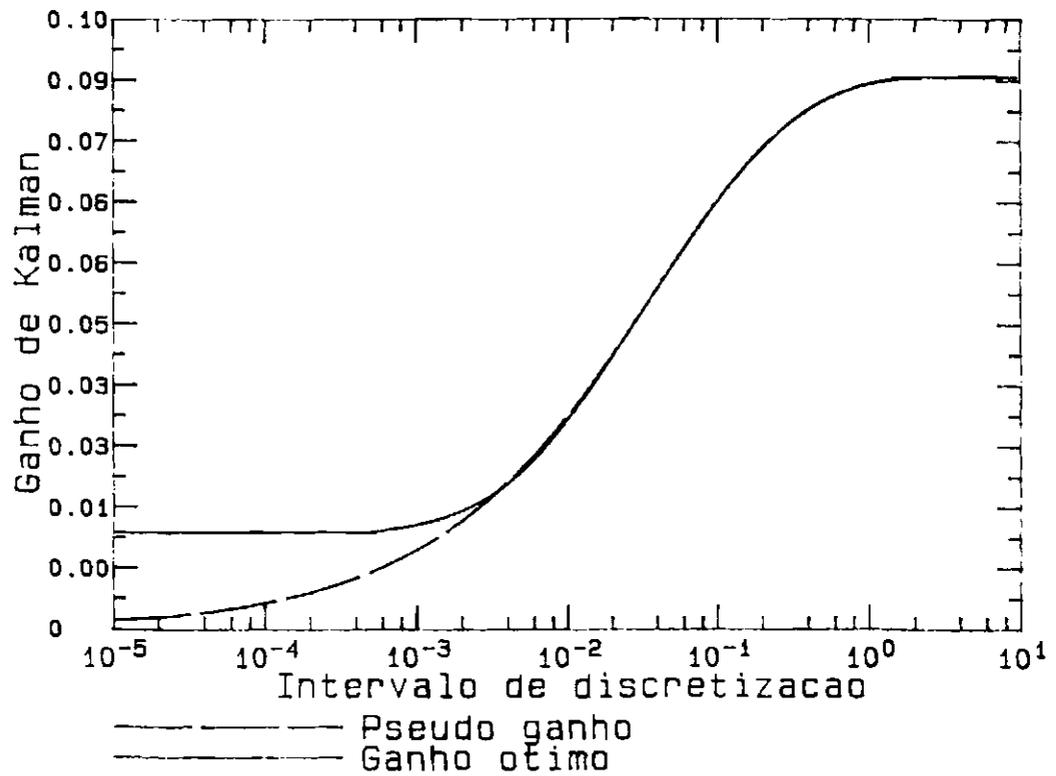
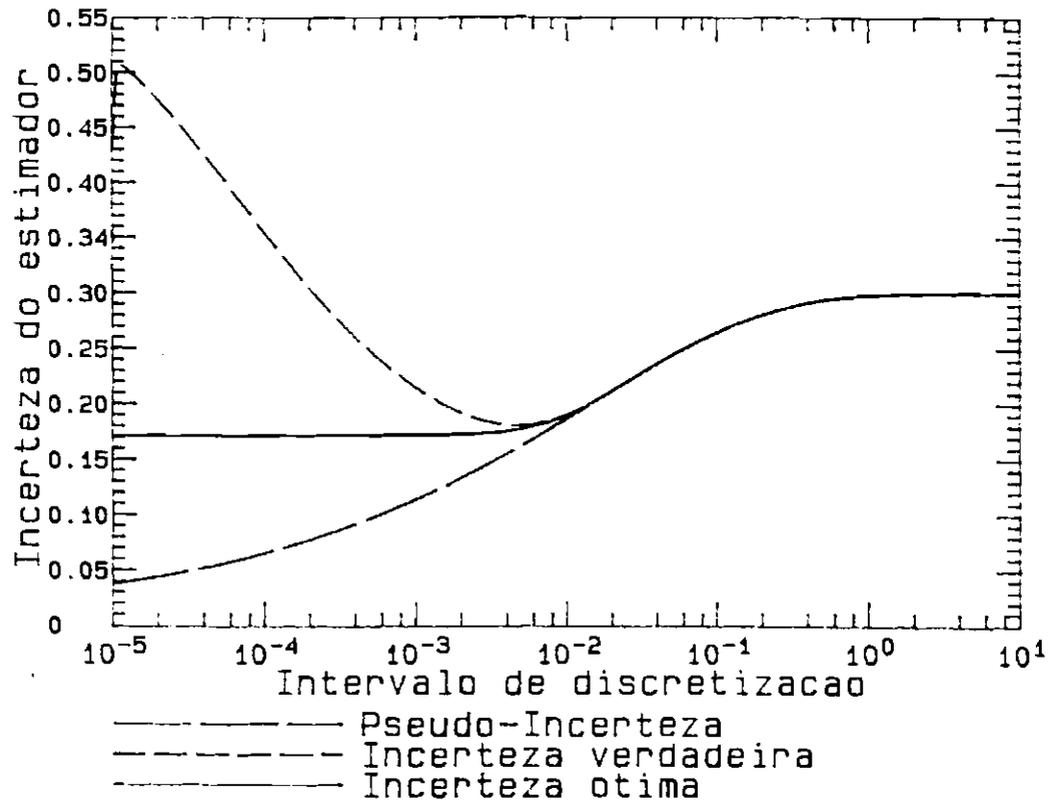


Fig. 4.5 - Desempenho do filtro de Kalman com modelo de ordem reduzida em um sistema com ruídos de Gauss-Markov: caso 5.

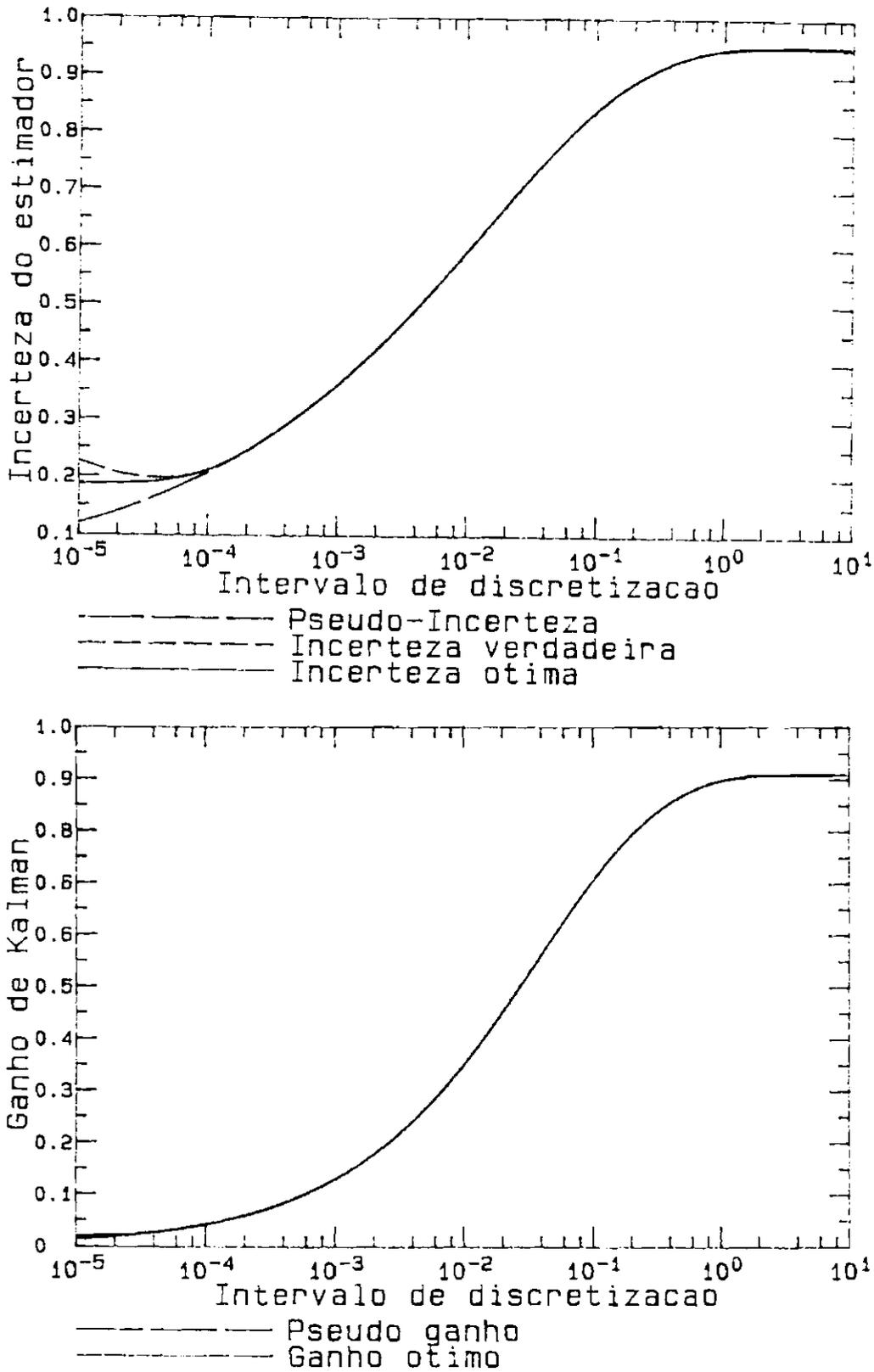


Fig. 4.6 - Desempenho do filtro de Kalman com modelo de ordem reduzida em um sistema com ruídos de Gauss-Markov: caso 6,

Nos gráficos de incerteza aparecem três tipos de curvas: a pseudo-incerteza, ε_p ; a incerteza verdadeira, ε_v ; e a incerteza ótima, ε^* . Nos gráficos de ganho, dois tipos de curvas são contrapostos: o pseudo-ganho, g_p^* ; e o ganho ótimo g^* . A pseudo-incerteza é definida matematicamente por:

$$\varepsilon_p^2 \stackrel{\Delta}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} [P_p(k|k) / P_t] \quad , \quad (4.64)$$

e representa a incerteza prevista pelo filtro de Kalman em regime permanente quando se aproxima o sistema pelo modelo branco. O pseudo-ganho é o ganho de Kalman em regime permanente para este caso. A incerteza verdadeira é aquela calculada com base no modelo colorido quando se projeta o ganho do filtro de Kalman com base no modelo branco em regime permanente:

$$\varepsilon_v^2 \stackrel{\Delta}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} [P_t^{-1} P_{e_{1,1}}(k|k) | G_K = (g_p^*; 0; 0)'] \quad . \quad (4.65)$$

A incerteza ótima é aquela prevista pelo filtro de Kalman baseado no modelo colorido em regime permanente:

$$\varepsilon^{*2} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} [P_{e_{1,1}}^*(k|k) / P_t] \quad , \quad (4.66)$$

enquanto que o ganho ótimo refere-se à primeira componente do ganho de Kalman em regime permanente neste caso:

$$g^* = \lim_{k \rightarrow \infty} G_{1k}^* \quad , \quad (4.67)$$

com G dado pela Equação 4.19.

À luz destas definições, as Figuras 4.1-6 evidenciam alguns fatos relacionados a seguir, que poderiam ser considerados elementares, ou intuitivamente previsíveis, mas que elucidam objetivamente a questão das condições de validade do modelo branco na presença de ruídos coloridos.

O primeiro fato notado é que a pseudo-incerteza cai assintoticamente a zero com a redução do intervalo de amostragem. Acima de um certo intervalo de discretização crítico, Δ^* , este comportamento é compatível com a incerteza real e é praticamente igual à incerteza ótima, o que torna o modelo branco válido nesta região. Entretanto, para $\Delta < \Delta^*$, a pseudo-incerteza se torna ilusoriamente menor que a incerteza ótima, o que leva o pseudo-ganho a um valor menor que o ganho ótimo. Com isto o filtro se fecha para novas informações e conseqüentemente a incerteza real aumenta, caracterizando uma divergência limitada.

Em todos os casos examinados (ver Figuras 4.1-6), o intervalo de discretização crítico Δ^* ficou sistematicamente um pouco acima da constante de tempo do ruído colorido, independentemente do valor de ϵ_m :

$$1 < \beta \Delta^* < 3 \quad . \quad (4.68)$$

Isto significa que não adianta aumentar a taxa de amostragem das observações além da faixa de frequências do ruído. Considerando Δ como a resolução do processo de observações, este resultado corrobora a noção desenvolvida no capítulo anterior de que um ruído colorido pode ser alternativamente caracterizado pela resolução do sinal observado. De fato, a incerteza obtida pelo modelo branco com $\Delta = \Delta^*$ é praticamente igual a incerteza ótima do bem mais sofisticado filtro de Deyst, onde o modelo colorido é considerado e a totalidade da informação contida no processo de observação é extraída. Ou seja, na prática é inútil tentar discernir fragmentos internos a um grão.

Para usufruir ao máximo da relativa simplicidade do modelo branco em uma aplicação prática é portanto necessário determinar Δ^* . Conforme se mostra na seção seguinte, determinar a resolução da observação não só é uma tarefa viável como bem mais simples do que, por exemplo, estimar o "kernel" de covariância dos ruídos num caso genérico.

Neste ponto convém fazer uma ressalva para o fato de que numa aplicação seria possível utilizar $\Delta < \Delta^*$ e ainda assim evitar a divergência do filtro através de técnicas adaptativas. Neste caso, valores artificialmente elevados de Q e/ou reduzidos de R seriam ajustados para aumentar o pseudo-ganho. Entretanto, a incerteza verdadeira evidentemente jamais poderá ser menor que a incerteza ótima (como bem se pode notar em todos os exemplos apresentados), o que significa que com este expediente apenas se conseguiria aumentar inutilmente a carga computacional do processamento em comparação com o caso $\Delta = \Delta^*$ (desde que se possa determinar Δ^*). Um inconveniente adicional em se super-estimar o valor de Q é que isto pode levar a distorções nos modelos de propagação de incertezas por períodos maiores que Δ .

É também oportuno salientar que estes problemas não devem ser atribuídos propriamente a deficiências dos estimadores adaptativos, cuja função primordial é evitar a divergência, pois isto eles o fazem com sucesso. Não obstante, se os ruídos no estado e nas observações podem ser interpretados como distúrbios imprevisíveis, de origem física, no ambiente do sistema e em seus elementos sensores, então, em princípio, suas coriâncias nada têm a ver com a taxa em que as observações são eventualmente processadas em algum filtro. O ponto básico que está sendo questionado aqui é o uso (talvez abuso) de estimadores adaptativos para solucionar um problema que basicamente se deve à escolha inadequadamente alta da taxa de amostragem, alterando artificialmente a covariância dos ruídos (com consequências desfavoráveis), quando simplesmente manter $\Delta > \Delta^*$ sanaria a dificuldade. Havendo, por algum motivo, real necessidade de estimativas com taxa de amostragem superior, a idéia aqui defendida não impõe restrições a isto, desde que se mantenha o cálculo do ganho e da covariância do estimador com base em $\Delta = \Delta^*$.

O segundo aspecto a ser destacado refere-se a qualidade dos resultados, no que se refere à eficiência do filtro em termos de precisão obtida. Três situações diferentes podem ocorrer conforme

indica a Tabela 4.2, em função da relevância da filtragem e da relevância do uso de $\Delta=\Delta^*$ na precisão dos resultados. Para esclarecer melhor este ponto definem-se a incerteza máxima, ϵ_{\max} , e a incerteza de Deyst, ϵ_d :

$$\epsilon_{\max} \triangleq \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \epsilon^*(\Delta) = \epsilon_m^2 (1 + \epsilon_m^2)^{-1}, \quad (4.69)$$

$$\epsilon_d \triangleq \lim_{\Delta \rightarrow 0} \epsilon^*(\Delta) = \epsilon_m^2 (1 + \beta) [1 + 2\beta / (1 + \bar{\kappa}_4)] / (\beta + \bar{\kappa}_4), \quad (4.70)$$

onde $\bar{\kappa}_4$ é definido por:

$$\bar{\kappa}_4 \triangleq \kappa_4 / \lambda = \sqrt{1 + \frac{Q_c}{\lambda^2 R_c}} = [1 + \epsilon_m^2 (1 + \beta)]^{1/2} \quad (4.71)$$

A idéia aqui utilizada considera irrelevante a filtragem sempre que a incerteza da estimativa não é significativamente melhor que a das observações, isto é, quando $\epsilon_d \cong 1$, o que corresponde ao caso A (ver Figura 4.1). Não há aí portanto qualquer proveito no uso de um filtro. A outra idéia utilizada na estruturação dos casos da Tabela 4.2 considera que mesmo se a filtragem produzir uma sensível melhora na precisão, porém tal se deva apenas à informação a priori (marginal) $\bar{x}_0 = 0$, isto é, se $\epsilon_d \cong \epsilon_{\max} < 1$, então o uso de $\Delta=\Delta^*$ é irrelevante. Esta situação é representada pelo caso B (ver as Figuras 4.2-3) e constitui uma espécie trivial de filtragem. Neste contexto é que o interesse deste trabalho se volta especialmente para o caso C, onde a obtenção de níveis de incerteza substancialmente melhores que o trivial depende da escolha apropriada de Δ (ver as Figuras 4.4-6).

O critério de escolha dos parâmetros ϵ_m e β para as Figuras 4.1-6 foi o de varrer as diferentes configurações possíveis, visando explorar as relações qualitativas existentes. A Figura 4.7 mostra um gráfico do comportamento de ϵ_d e $\text{dev} \triangleq \epsilon_d / \epsilon_{\max}$ em função de ϵ_m e β , que mapeia esquematicamente todos os tipos de configuração. O objetivo desta figura é, portanto facilitar a interpretação das anteriores. Nela podem-se ver bolas cujos números estão associados aos casos das Figuras 4.1-6 e às coordenadas a seus parâmetros.

TABELA 4.2

CLASSIFICAÇÃO DAS CONFIGURAÇÕES DOS PARÂMETROS DE UM SISTEMA
EM TERMOS DO DESEMPENHO DO FILTRO DE KALMAN
LEVANDO EM CONTA A TAXA DE AMOSTRAGEM

Filtragem Uso de Δ^*	Irrelevante	Relevante
Irrelevante	Caso A (Figura 4.1)	Caso B (Figura 4.2-3)
Relevante	-----	Caso C (Figura 4.4-6)

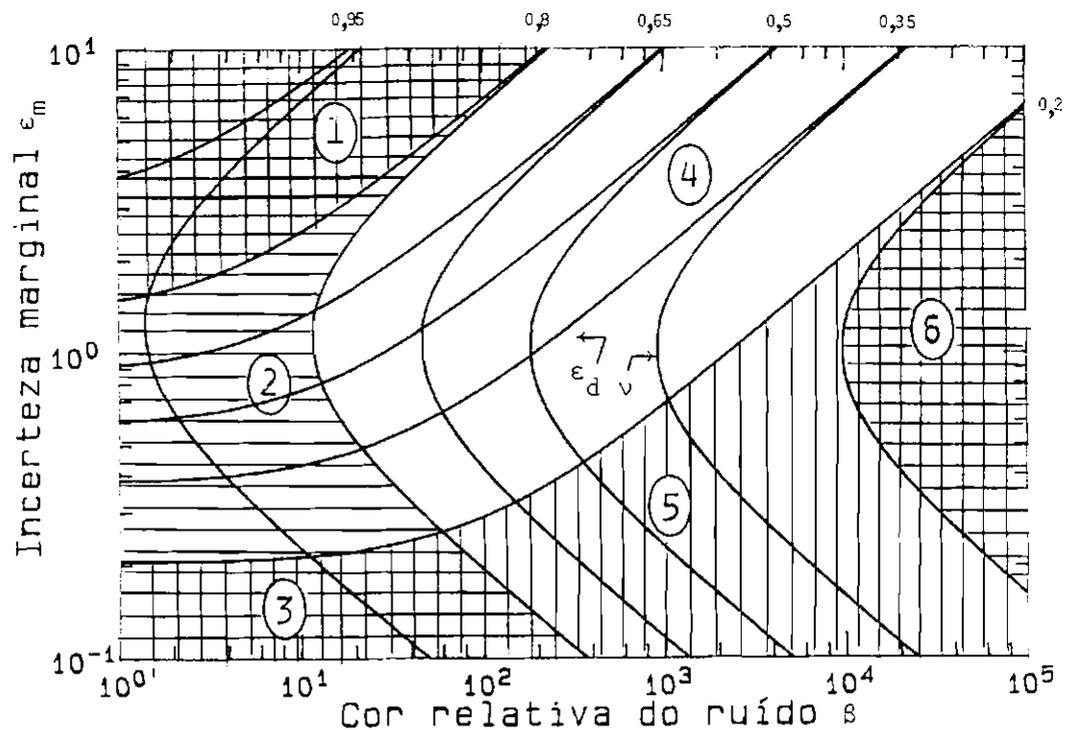


Fig. 4.7 - Mapeamento dos parâmetros do sistema com ruídos de Gauss-Markov quanto ao desempenho do filtro de Kalman.

Para traçar o referido gráfico, utilizaram-se as seguintes relações, obtidas a partir das Equações 4.69-71:

$$\beta = \varepsilon_m^2 (1-\nu^2) \left[\left(1 + \sqrt{1 + \nu^2 \varepsilon_{\max}^2} \right) / (\nu^2 \varepsilon_{\max}^2) \right]^2, \quad (4.72)$$

$$\varepsilon_m^2 = \left[\left(\sqrt{1 + \varepsilon_d^2} - 1 \right)^2 + \varepsilon_d^2 \right] / (1 - \varepsilon_d^2). \quad (4.73)$$

A Figura 4.1 exemplifica o tipo de configuração onde a informação a priori é relativamente pobre e os ruídos são coloridos a tal ponto que o modelo dinâmico não consegue extrair do passado informação adicional sobre o presente. Assim, a incerteza na estimativa é praticamente igual a da observação ($\varepsilon_d \cong \nu \cong 1$), e por isso tanto a escolha do intervalo de amostragem como a própria filtragem são irrelevantes. Nas Figuras 4.2-3 a situação dos ruídos permanece como no caso anterior, mas a informação a priori é gradativamente enriquecida. São casos onde a filtragem é relevante mas não a escolha do intervalo de discretização ($\varepsilon_d < 1, \nu \cong 1$). Estes três primeiros casos não são de interesse para a aplicação do método proposto neste capítulo.

A Figura 4.4 mostra um caso onde a informação a priori não é significativa em comparação com a da observação instantânea mas os ruídos não são muito correlacionados no tempo de modo que a dinâmica consegue suprir o presente de informações redundantes passadas. Daí tanto a filtragem quanto a escolha do intervalo de discretização tornam-se relevantes ($\varepsilon_d < 1, \nu < 1$). O caso seguinte, mostrado na Figura 4.5, representa a melhoria na precisão da filtragem devido apenas ao incremento na qualidade da informação a priori ($\varepsilon_d \ll 1, \nu < 1$). A escolha de Δ é também relevante e a filtragem apresenta excelentes resultados.

Finalmente, a Figura 4.6 mostra o caso de maior interesse para o uso de um procedimento de escolha do Δ adequado. Os ruídos sendo quase brancos fazem com que grande redundância de informação sobre o presente seja obtida de observações passadas através da dinâmica. Com isso, obtém-se $\varepsilon_d \ll 1$ e $\nu \ll 1$. Neste caso é notório que o

uso de Δ/Δ^* em um filtro baseado no modelo branco acarretaria uma perda significativa de precisão na estimativa.

De modo geral, quanto mais brancos forem os ruídos, para uma incerteza marginal fixa, mais relevantes são a escolha da taxa de amostragem e o ganho de precisão obtido pela filtragem. Por outro lado, mantendo fixa a cor dos ruídos, a relevância da filtragem será maior quanto menor for a incerteza marginal. Porém a relevância da escolha da taxa de amostragem cresce até atingir um máximo quando a incerteza marginal é da mesma ordem que a da observação instantânea, e depois passa a diminuir.

Em termos conceituais estes fatos observados podem ser interpretados assim: quanto menos correlacionados no tempo forem os ruídos, para uma incerteza marginal fixa, mais informação redundante sobre o estado presente é extraída das observações passadas pelo modelo dinâmico até a frequência de amostragem ser da ordem da frequência de corte dos ruídos. A partir daí, o filtro satura e a incerteza da estimativa não pode mais melhorar. Já a ação da incerteza marginal contribui sempre para reduzir a incerteza da estimativa, porém esta influência é preponderante sobre a informação acumulada pela dinâmica apenas enquanto é grande em relação à incerteza da observação instantânea. Quando esta relação se inverte, o efeito de redução da incerteza passa a ser preponderante sobre a incerteza trivial, tendendo assim a reduzir a relevância de uma escolha adequada de Δ .

4.2.5 - EXTENSÃO DA ANÁLISE PARA O CASO DE DINÂMICA COM RUÍDO BRANCO

Embora o exemplo particular estudado nesta seção tenha permitido tirar conclusões qualitativas sobre as condições de validade da aproximação de um modelo verdadeiro (colorido) por um modelo reduzido (branco) e do papel da escolha da taxa de amostragem nesta questão, não se pode garantir até que ponto estas conclusões são de caráter geral no problema de estimação de estados. Por outro lado, o estudo deste problema para o filtro estendido de Kalman no caso geral

onde o estado e as observações são vetoriais, o sistema é não linear e é arbitrário o "kernel" de covariância dos ruídos, atinge uma amplitude muito além dos objetivos deste trabalho. Ainda assim, visando dar alguma noção do grau de generalidade das conclusões do ítem anterior, apresenta-se neste ítem uma extensão daquela análise para o caso onde o ruído dinâmico é branco e apenas o ruído de observação é colorido.

Neste caso, as matrizes Φ , Γ e P_{e_0} são dadas por:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \exp(-\lambda t) & 0 \\ 0 & \exp(-\lambda_v t) \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} [1 - \exp(-2\lambda t)] Q / (2\lambda) & 0 \\ 0 & [1 - \exp(-2\lambda_v t)] R_c / (2\lambda_v) \end{bmatrix}, \quad (4.75)$$

$$P_{e_0} = \begin{bmatrix} Q / (2\lambda) & 0 \\ 0 & R_c / (2\lambda_v) \end{bmatrix}, \quad (4.76)$$

donde a incerteza marginal é dada por:

$$\epsilon_m^2 = \beta Q/R_c \quad (4.77)$$

A matriz H para o cálculo da incerteza de Deyst é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} -\lambda R_c & \lambda_v Q & R_c Q & -R_c Q \\ \lambda R_c & -\lambda_v Q & -R_c Q & R_c Q \\ \lambda^2 & \lambda_v \lambda & \lambda R_c & -\lambda R_c \\ \lambda \lambda_v & \lambda_v^2 & -\lambda_v Q & \lambda_v Q \end{bmatrix} (R_c + Q), \quad (4.78)$$

e seus auto-valores e auto-vetores estão dados na Tabela 4.3. A partir destes dados e lembrando que, analogamente à Equação 4.48, $P_e^*(t|t)$ é tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_e^*(t|t) \begin{bmatrix} V_0 & : & V_2 \\ \Psi & & \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 & : & V_2 \\ \Pi & & \Pi \end{bmatrix} , \quad (4.79)$$

pode-se obter:

$$P_d = \left\{ \frac{\lambda_v}{R} \left[1 + \frac{\lambda_v}{\kappa_2} \right] + \frac{\lambda}{Q} \left[1 + \frac{\lambda}{\kappa_2} \right] \right\}^{-1} \quad (4.80)$$

donde:

$$\varepsilon_d^2 = \frac{P_d}{P_0} = \frac{2\varepsilon_m^2}{1 + \varepsilon_m^2 + \sqrt{1 + \beta\varepsilon_m^2}} , \quad (4.81)$$

Lembrando que $v = \varepsilon_d / \varepsilon_{\max}$, e dado que:

$$\varepsilon_{\max}^2 = \frac{\varepsilon_m^2}{1 + \varepsilon_m^2} \quad (4.82)$$

segue da Equação 4.81 que:

$$v^2 = \frac{2(1 + \varepsilon_m^2)}{1 + \varepsilon_m^2 + \sqrt{1 + \beta\varepsilon_m^2}} . \quad (4.83)$$

Das Equações 4.80-83 deduzem-se as seguintes expressões analíticas que relacionam ε_m e β para ε_d constante e para v constante:

$$\varepsilon_m^2 = \varepsilon_d^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{\beta + \beta^{-1}}{2}}{1 - \varepsilon_d^{-2}} \right\} \quad (4.84)$$

$$\beta = c + \sqrt{c^2 - 1} , \quad (4.85)$$

onde:

$$c = 2 \nu^{-2} (\epsilon_m + \epsilon_m^{-1})^2 (\nu^{-2} - 1) + 1. \quad (4.86)$$

Das Equações 4.80, 4.81 e 4.83 percebe-se que a curva de ϵ_d constante é simétrica em relação ao eixo ϵ_m em um gráfico di-log, e a curva de ν constante é simétrica em relação aos eixos ϵ_m e β , ou seja:

$$\epsilon_d(\beta, \epsilon_m) = \epsilon_d(\beta^{-1}, \epsilon_m^{-1}), \quad (4.87)$$

$$\nu(\beta, \epsilon_m) = \nu(\beta^{-1}, \epsilon_m^{-1}) = \nu(\beta, \epsilon_m^{-1}) = \nu(\beta^{-1}, \epsilon_m) \quad (4.88)$$

A Figura 4.8 mostra o mapeamento das diferentes configurações em função dos parâmetros β e ϵ_m , analogamente ao que foi feito para o caso anterior. Verifica-se uma acentuada semelhança entre os dois casos analisados para $\beta > 1$. Isto aliás é uma simples consequência do fato de que quando o ruído colorido tende a ser branco, a diferença entre os dois casos desaparece. Por outro lado, para $\beta < 1$, ocorre uma diferença qualitativa. Devido a simetria em relação ao eixo ϵ_m , surgem regiões onde a escolha da taxa de amostragem é relevante quando $\beta \ll 1$, ao contrário do caso anterior. Esta interessante ocorrência se explica pelo simples fato de que neste caso, os processos v e x são ambos estacionários de Gauss-Markov e de mesma ordem. Visto que se observa apenas a soma exata destes dois processos o sistema caracterizado pelas constantes λ e λ_v fica virtualmente indistinguível daquele em que se trocam λ por λ_v e/ou Q por R_c . Outra peculiaridade notada é que se $\lambda_v = \lambda$ (donde $\beta=1$) então o sistema deixa de ser observável e a incerteza entra em regime permanente tão logo a primeira observação tenha sido processada. Portanto, o desempenho do filtro fica independente da taxa de amostragem e $\epsilon_d = \epsilon_{\max}$, ou seja $\nu=1$ para qualquer valor de incerteza marginal ϵ_m . Esta situação se caracteriza pela ausência de contraste entre as cores do ruído e do estado.

TABELA 4.3

AUTO-VALORES E AUTO-VETORES DA MATRIZ H DO FILTRO DE DEYST
PARA SISTEMA COM RUÍDO BRANCO E DE GAUSS-MARKOV

i	0	1	2
κ_i	0	$-\kappa_2$	$\sqrt{\lambda^2 R_c + \lambda_v^2 Q} / (R_c + Q)$
V_i	0	-1	-1
	0	1	1
	1	$-\frac{\lambda}{Q} \left[1 - \frac{\lambda}{\kappa_2} \right]$	$-\frac{\lambda}{Q} \left[1 + \frac{\lambda}{\kappa_2} \right]$
	1	$\frac{\lambda_v}{R_c} \left[1 - \frac{\lambda_v}{\kappa_2} \right]$	$\frac{\lambda_v}{R_c} \left[1 + \frac{\lambda_v}{\kappa_2} \right]$

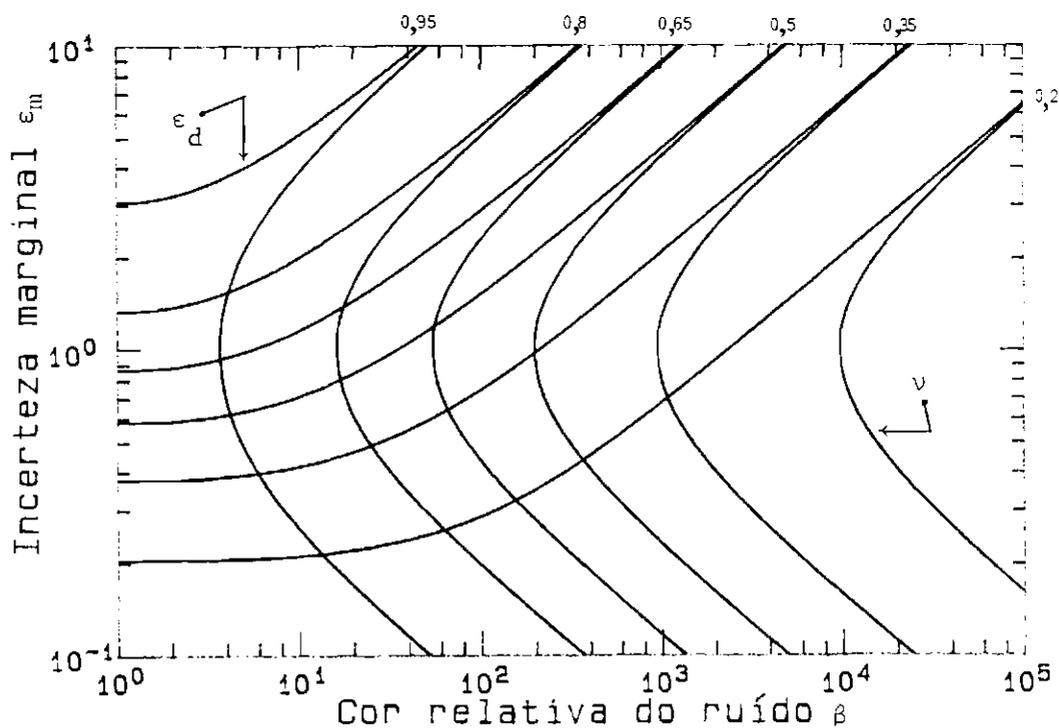


Fig. 4.8 - Mapeamento dos parâmetros do sistema com ruído de Gauss-Markov na observação e ruído branco no estado, quanto ao desempenho do filtro de Kalman.

4.3 - INTRODUÇÃO AO MÉTODO DAS MALHAS

Conforme exemplificado na seção anterior, o modelo branco funciona bem até uma certa taxa de amostragem da ordem da frequência de corte do ruído de observação. Entretanto, a função densidade espectral de potência do ruído não é geralmente conhecida em aplicações práticas. Por esta razão, a determinação da máxima taxa de amostragem tolerável para o uso de modelo branco deve se basear em algum outro tipo de informação. Nesta seção será analisado o efeito da taxa de amostragem na covariância do resíduo para um exemplo com estado escalar diretamente observado, análogo ao estudado na seção anterior. A finalidade disto é mostrar que a análise de resíduo torna possível não somente estimar a variância de cada ruído do modelo branco equivalente como ainda detectar o limite máximo de validade deste modelo quanto à taxa de amostragem.

4.3.1 - ANÁLISE DE RESÍDUO

Sejam um processo estocástico escalar $x(t)$ e sua observação $y(t)$ modeladas por:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + w(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad , \quad (4.89)$$

$$y(t) = x(t) + v(t) \quad , \quad (4.90)$$

onde λ é uma constante positiva, x_0 é o estado no instante inicial t_0 , e $w(t)$ e $v(t)$ são processos estacionários de Gauss-Markov de primeira ordem, caracterizados por:

$$\begin{aligned} E[w(t) w(t+\delta)] &= Q_c \exp(-\lambda_w |\delta|) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda + \lambda_w) Q \exp(-\lambda_w |\delta|) \quad , \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} E[v(t) v(t+\delta)] &= \frac{R_c}{2\lambda_v} \exp(-\lambda_v |\delta|) \\ &= R \exp(-\lambda_v |\delta|) \quad , \end{aligned} \quad (4.92)$$

onde: λ_w e λ_v são constantes positivas; Q é a densidade espectral de potência do ruído branco equivalente ($\lambda_w \rightarrow \infty$); e R é a variância da sequência branca equivalente ($\lambda_v \rightarrow \infty$) para o caso contínuo-discreto. Discretizando o sistema para a aplicação do filtro contínuo-discreto, obtém-se:

$$x_k = \phi x_{k-1} + w_k, \quad (4.93)$$

$$y_k = x_k + v_k, \quad (4.94)$$

onde w_k e v_k são sequências gaussianas não tendenciosas caracterizadas por:

$$w_k \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \exp[-\lambda(t_k - \tau)] w(\tau) d\tau, \quad (4.95)$$

$$v_k \triangleq v(t_k), \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} E[w_k w_i] &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \exp[-\lambda(t_k + t_i - \tau - \tau')] (\lambda_w + \lambda) Q \\ &\quad \exp[-\lambda_w |\tau - \tau'|] d\tau' d\tau \\ &= \begin{cases} Q \gamma_0 & , \text{ se } k = i \\ Q \gamma_c a^{|i-k|} & , \text{ se } k \neq i \end{cases} \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$E[v_k v_i] = R b^{|k-i|}, \quad (4.98)$$

onde $\phi, \gamma_0, \gamma_c, a$ e b são dados respectivamente por:

$$\phi = \exp(-\lambda \Delta), \quad (4.99)$$

$$\gamma_0 = \gamma + \phi (a - \phi) / (\lambda_w - \lambda), \quad (4.100)$$

$$\lambda_c = \frac{1}{2} (1 - a \phi) (1 - \phi/a) / (\lambda - \lambda_w), \quad (4.101)$$

$$a = \exp(-\lambda_w \Delta) \quad , \quad (4.102)$$

$$b = \exp(-\lambda_v \Delta) \quad , \quad (4.103)$$

e o intervalo fixo de discretização Δ e o parâmetro γ são dados por:

$$\Delta = t_k - t_{k-1} \quad , \quad (4.104)$$

$$\gamma = (1 - \phi^2) / (2\lambda) \quad . \quad (4.105)$$

O filtro contínuo discreto a ganho constante para este sistema é dado por:

$$\hat{x}(k|k-1) = \phi \hat{x}(k-1|k-1) \quad , \quad \hat{x}(0|0) = \hat{x}_0 \quad , \quad (4.106)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + g \rho_k \quad , \quad (4.107)$$

onde \hat{x}_0 é a estimativa a priori, g é o ganho constante e ρ_k é o resíduo no instante t_k :

$$\rho_k = y_k - \hat{x}(k|k-1) \quad . \quad (4.108)$$

Definindo o erro do estimador no instante t_k com base nas observações até o instante t_i :

$$\Delta x(k|i) \stackrel{\Delta}{=} x(t_k) - \hat{x}(k|i) \quad , \quad (4.109)$$

podem-se obter das Equações 4.93, 4.94 e 4.106-108:

$$\Delta x(k|k-1) = \phi \Delta x(k-1|k-1) + w_k \quad , \quad (4.110)$$

$$\Delta x(k|k) = \Delta x(k|k-1) - g \rho_k \quad , \quad (4.111)$$

$$\rho_k = x(k|k-1) + v_k \quad . \quad (4.112)$$

Eliminando $\Delta x(k|k-1)$ das Equações 4.111-112 resulta:

$$\rho_k = [\Delta x(k|k) + v_k] / (1 - g) \quad . \quad (4.113)$$

Substituindo as Equações 4.110 e 4.113 na Equação 4.111 obtém-se:

$$\Delta x(k|k) = (1-g) [\phi \Delta x(k-1|k-1) + w_k] - g v_k \quad . \quad (4.114)$$

Em regime permanente tem-se:

$$\Delta x_\infty \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta x(k|k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} [(1-g)\phi]^j [-g v_{k-j} + (1-g)w_{k-j}], \quad (4.115)$$

$$P_\infty \triangleq E[\Delta x_\infty^2] = \sum_{j=0}^{\infty} [(1-g)\phi]^{2j} [g^2 R + (1-g)^2 Q \gamma_0] + \\ + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-1} [(1-g)\phi]^{i+j} [g^2 R b^{j-1} + (1-g)^2 Q \gamma_c a^{j-1}], \quad (4.116)$$

$$\Sigma \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} E[\rho_k^2] = \{P_\infty + R - 2 \sum_{j=0}^{\infty} [(1-g)\phi]^j g R b^j\} / (1-g)^2, \quad (4.117)$$

Resolvendo as somatórias nas Equações 4.116-117 obtém-se:

$$P_\infty = \frac{g^2 R + (1-g)^2 \gamma_0 Q}{1 - [(1-g)\phi]^2} + \frac{2(1-g)\phi}{1 - [(1-g)\phi]^2} \frac{g^2 b R}{1 - (1-g)\phi b} + \frac{(1-g)^2 \gamma_c a Q}{1 - (1-g)\phi a}, \quad (4.118)$$

$$\Sigma = R + \frac{\phi^2 g^2 R + \gamma_0 Q}{1 - [(1-g)\phi]^2} + \frac{2\phi}{1 - [(1-g)\phi]^2} \left\{ \frac{(1-g)\phi^2 - 1}{1 - (1-g)\phi b} g b R + \frac{(1-g)\gamma_c a Q}{1 - (1-g)\phi a} \right\}. \quad (4.119)$$

4.3.2 - ESTIMATIVA DAS VARIÂNCIAS DOS RUÍDOS E DA TAXA DE AMOSTRAGEM ADEQUADA PELO MÉTODO DAS MALHAS

Os resultados obtidos no item anterior consideram o caso de modelo colorido. A covariância prevista para o resíduo no caso de modelo branco pode ser obtida como um caso particular daquelas

expressões, fazendo $\lambda_w \rightarrow \infty$ e $\lambda_v \rightarrow \infty$ no cálculo de γ_0 , γ_c , a e b , e substituindo na Equação 4.119, o que resulta em:

$$\sum_{\infty}^0 \Delta \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\substack{\lambda_v \rightarrow \infty \\ \lambda_w \rightarrow \infty}} \sum_{\infty} = R + \frac{\phi^2 g^2 R + \gamma Q}{1 - [(1-g)\phi]^2} \quad . \quad (4.120)$$

Ainda segundo o modelo branco, no caso de não serem processadas todas as observações, mas apenas uma malha alternada de observações, a covariância do resíduo em regime permanente seria dada pela expressão análoga à Equação 4.120, trocando Δ por 2Δ no cálculo de ϕ e de γ :

$$\sum_{\infty}^0 (2\Delta) = R + \frac{\phi^4 g^2 R + \gamma_a Q}{1 - [(1-g)\phi^2]^2} \quad , \quad (4.121)$$

onde:

$$\gamma_a = (1 - \phi^4) / (2\lambda) \quad . \quad (4.122)$$

Como a covariância dos resíduos pode ser estimada pela covariância amostral acumulada por um longo intervalo de tempo, percebe-se que as Equações 4.120-121 servem para estimar R e Q caso o modelo branco seja válido. Mais especificamente, tem-se:

$$\tilde{R} = \{ \gamma_a [1 - \phi^2(1-g)^2] \tilde{\Sigma}_1 - \gamma [1 - \phi^4(1-g)^2] \tilde{\Sigma}_2 \} / c \quad , \quad (4.123)$$

$$\tilde{Q} = \{ [1 + \phi^2(2g-1)] [1 - \phi^4(1-g)^2] \tilde{\Sigma}_2 - [1 + \phi^4(2g-1)] [1 - \phi^2(1-g)^2] \tilde{\Sigma}_1 \} / c \quad , \quad (4.124)$$

onde \tilde{R} e \tilde{Q} representam as estimativas de R e Q respectivamente, e:

$$c \stackrel{\Delta}{=} \gamma_a [1 + \phi^2(2g-1)] - \gamma [1 + \phi^4(2g-1)] \quad , \quad (4.125)$$

$$\tilde{\Sigma}_1 \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \rho_{k_0+k}^2 \quad , \quad (4.126)$$

$$\hat{\Sigma}_2 \triangleq \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N [\bar{p}_{k_0+2k-1}^2 + \bar{p}_{k_0+2k}^2] \quad (4.127)$$

onde k_0 é suficientemente grande de modo a garantir que o processo tenha entrado em regime permanente. $\hat{\Sigma}_1$ e $\hat{\Sigma}_2$ representam as variâncias amostrais do resíduo para o filtro da malha completa e da malha alter_nada de observações, respectivamente. As duas parcelas na somatória da Equação 4.127 representam o resíduo quadrático nas malhas alternadas ímpar e par. A Figura 4.9 ilustra o esquema de processamento destas malhas.

Os estimadores \hat{R} e \hat{Q} não exigem o conhecimento dos parâmetros λ_w e λ_v , porém envolvem dois tipos de erros. O primeiro refere-se ao erro na estimativa da covariância dos resíduos, que diminui quando o tamanho da amostra, N , aumenta. O segundo se deve à incorreção no modelo dos ruídos, e diminui quando Δ aumenta. Pode-se verificar que:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow \infty}} \hat{R} = R \quad , \quad (4.128)$$

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow \infty}} \hat{Q} = Q \quad . \quad (4.129)$$

Na prática, o primeiro tipo de erro pode ser contornado utilizando um valor de N grande o suficiente para que $\hat{\Sigma}_1$ e $\hat{\Sigma}_2$ se estabilizem. Quanto ao segundo tipo de erros, as Figuras 4.10-15 mostram a sua evolução em função de Δ para casos correspondentes àqueles analisados na seção anterior. Estes resultados mostram que para frequências amostrais maiores que a frequência de corte do ruído de observação as estimativas \hat{R} e \hat{Q} divergem, enquanto que para frequências menores as estimativas ficam próximas dos valores reais R e Q . Isto confirma os resultados obtidos na seção anterior. Além disso estas figuras mostram o desempenho comparativo dos filtros ótimo, verdadeiro e "pseudo", bem como seus ganhos, analogamente às Figuras 4.1-6. Naquelas figuras, entretanto, os valores de R e de Q utilizados no cálculo do pseudo-

ganho e da pseudo-incerteza eram os corretos, enquanto que nestas, foram utilizados os valores estimados. Por esta razão apenas o ganho ótimo e a incerteza ótima coincidem nos dois conjuntos de figuras, pois embora o cálculo da incerteza verdadeira se baseie sempre nos valores corretos de R e Q, os pseudo-ganhos de Kalman são diferentes.

A Figura 4.16 mostra resultados de simulação para um sistema corrompido por ruídos brancos. As Figuras 4.17-19 mostram resultados semelhantes obtidos pelos estimadores adaptativos relacionados no ítem 1.3.6, descritos por Mehra (1967). Comparando estes resultados com aqueles verifica-se que o método das malhas apresentou desempenho semelhante ao dos demais métodos.

De modo geral, os resultados apresentados neste ítem sugerem que o método das malhas, além de ser uma alternativa válida para estimar as covariâncias dos ruídos no estado e nas observações, serve também para determinar o valor mínimo tolerável de Δ para o uso de um modelo branco. Enquanto o intervalo entre observações não fere a hipótese de modelo branco Q e R são bem estimados e o desempenho do filtro é equivalente ao do filtro ótimo. A partir de um certo $\Delta = \Delta^*$, entretanto, o aumento da taxa de amostragem fica incompatível com o modelo de ruído branco, acarretando a divergência do pseudo-filtro e, conseqüentemente, das estimativas \hat{R} e \hat{Q} e do filtro adaptativo como um todo. Além disso, justamente por ser Δ^* a resolução do sistema, pouca precisão é perdida em relação ao filtro de Deyst, onde o modelo é colorido e $\Delta \rightarrow 0$. É esta a idéia básica do procedimento de determinação de Δ^* pelo método das malhas.

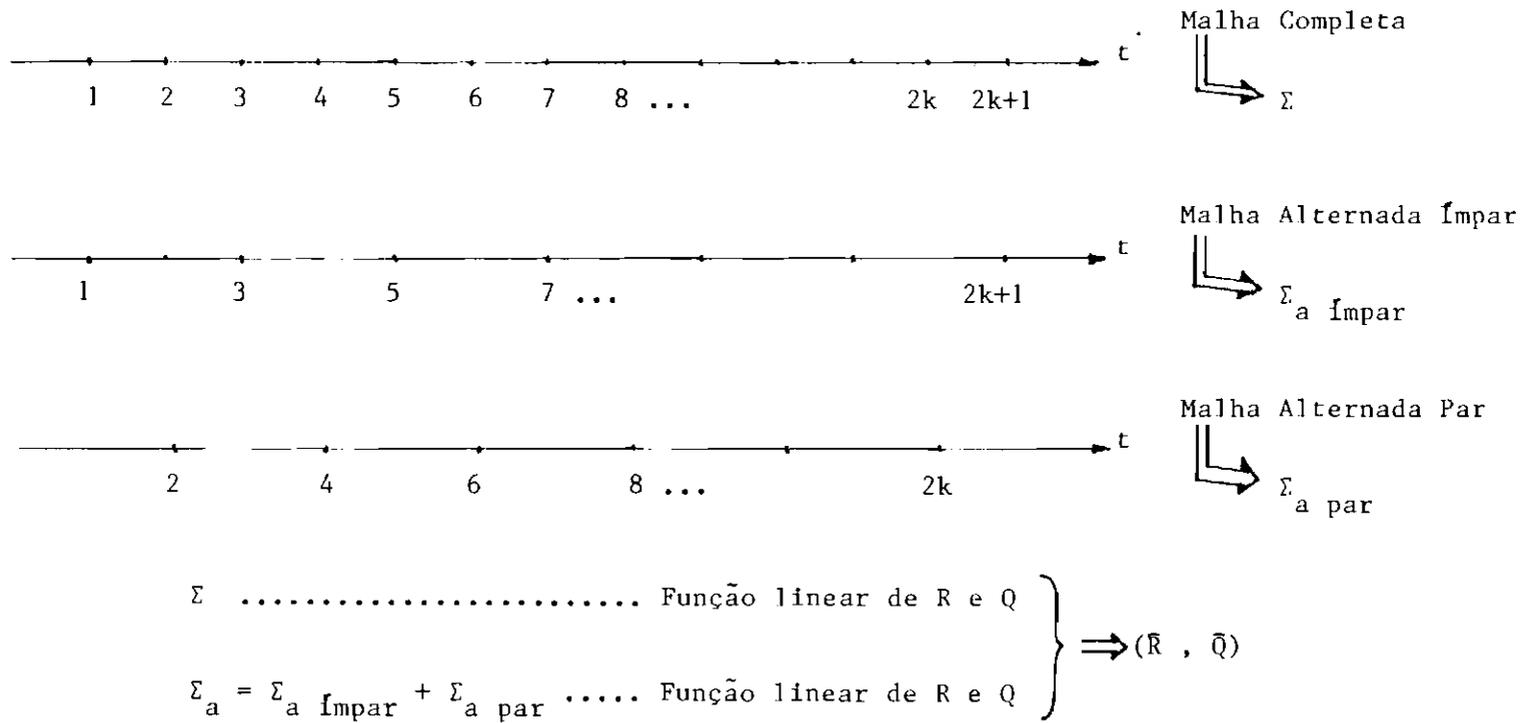
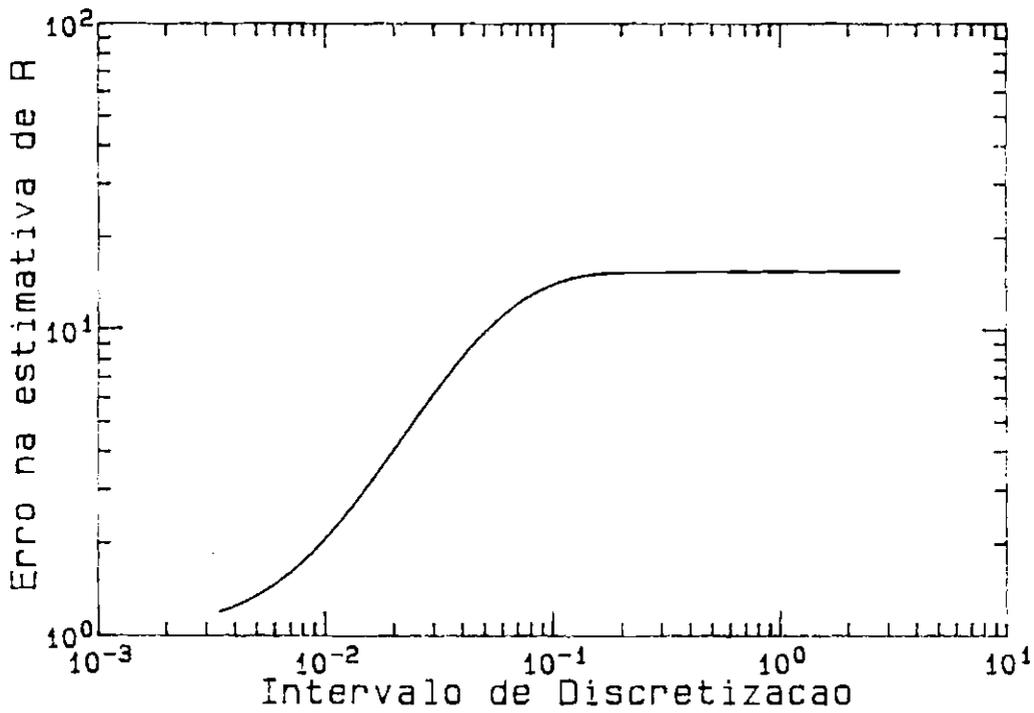
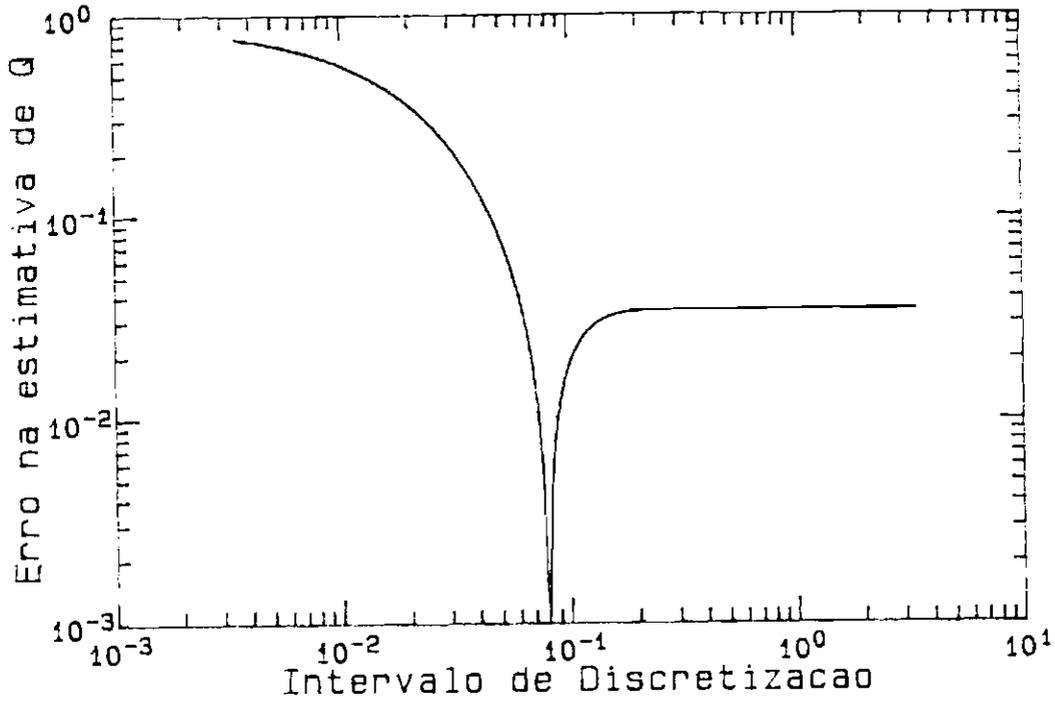


Fig. 4.9 - Esquema de processamento paralelo das observações no método das malhas.



4.10 - Incerteza relativa nas estimativas das variâncias dos ruídos no estado e nas observações pelo método das malhas: Caso 1.

(continua)

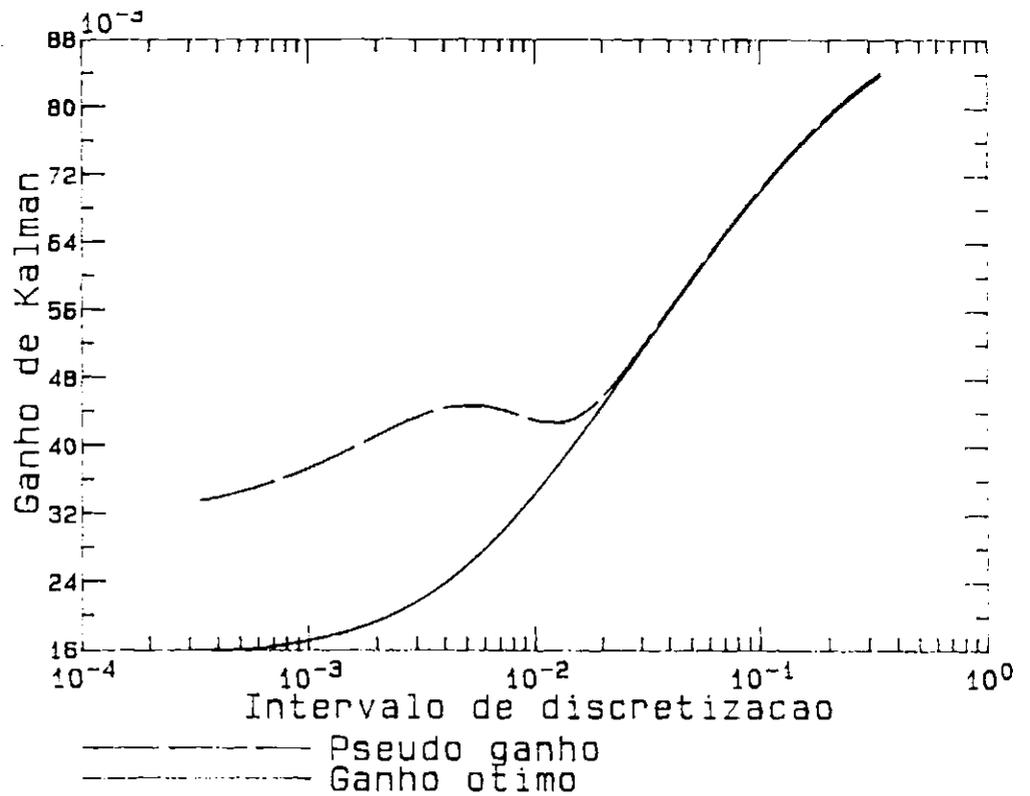
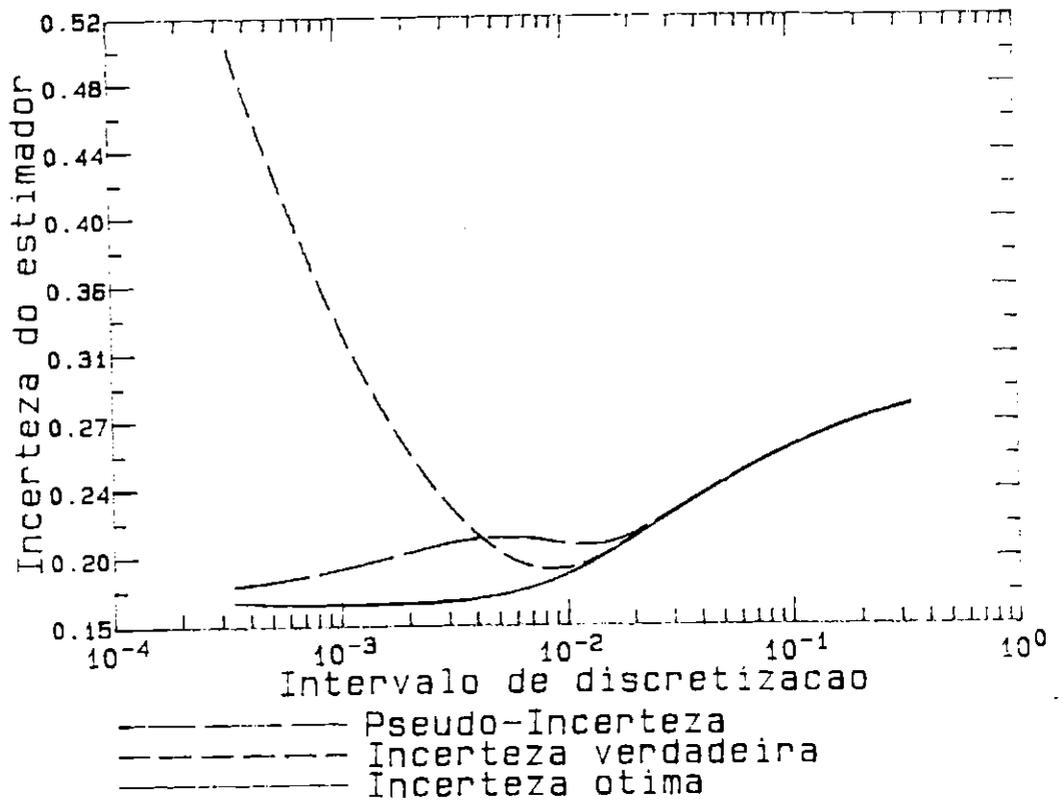


Fig. 4.10 - (Conclusão).

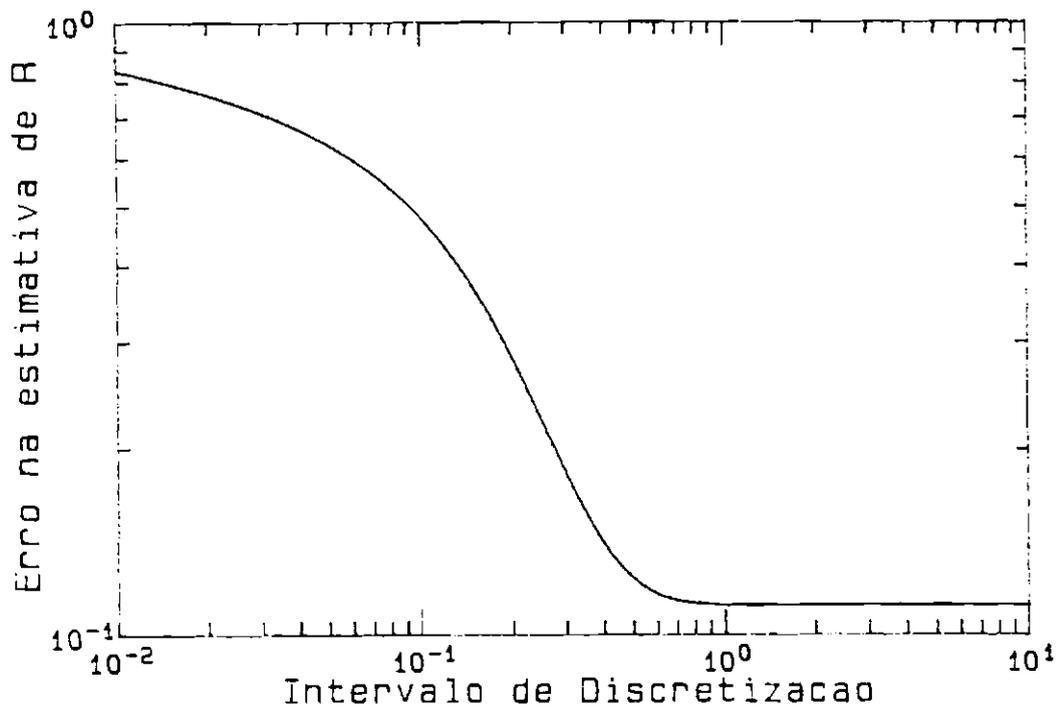
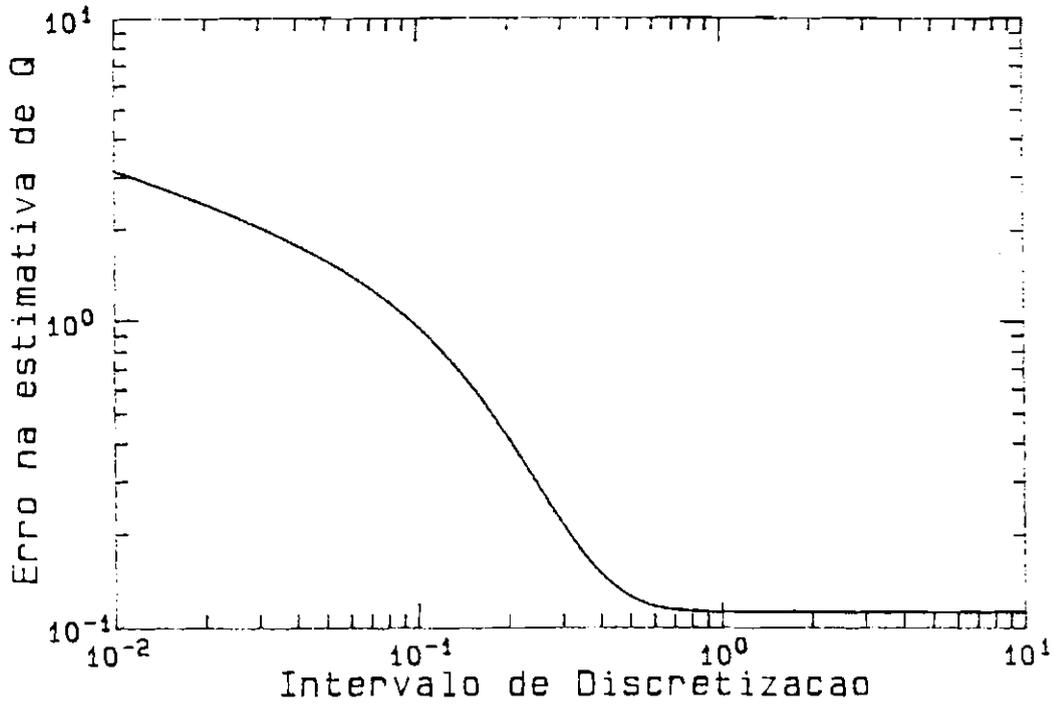


Fig. 4.11 - Incerteza relativa nas estimativas das variâncias dos ruídos no estado e nas observações pelo método das malhas; Caso 2. (continua)

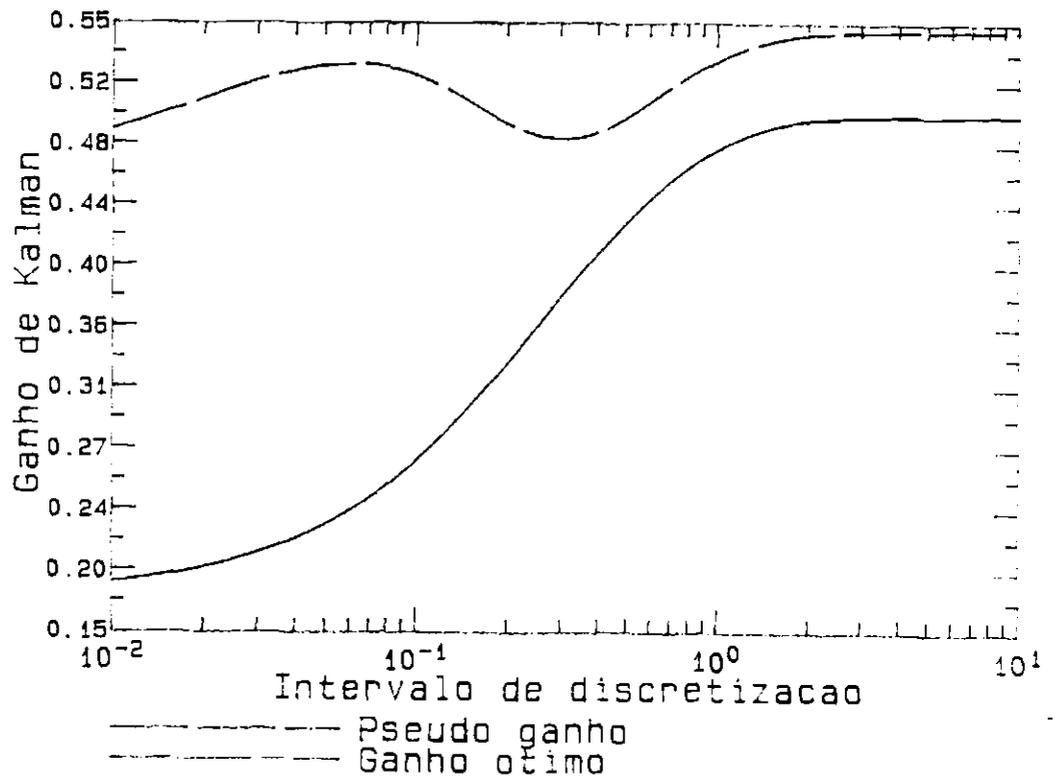
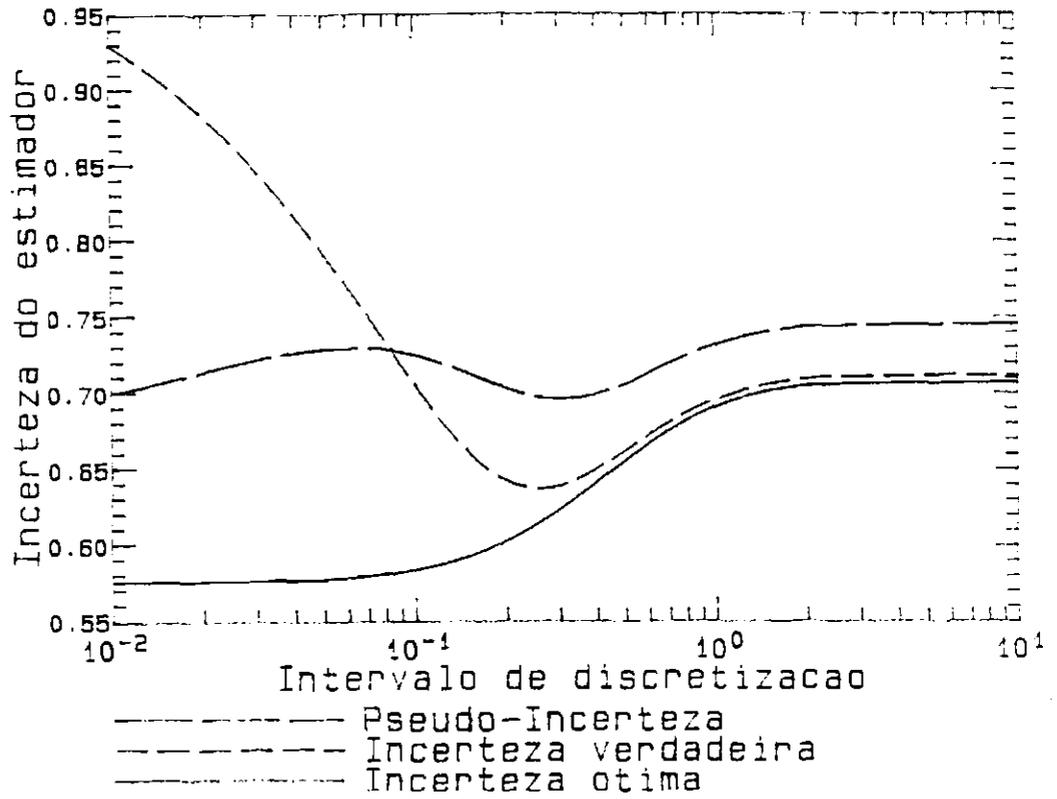


Fig. 4.11 - (Conclusão).

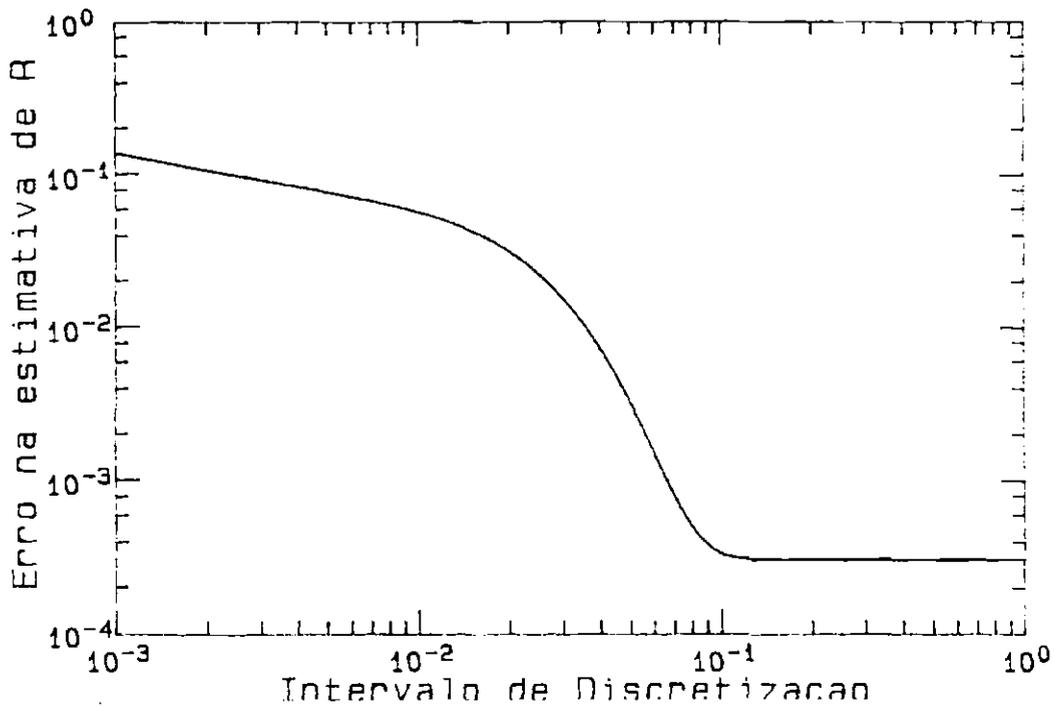
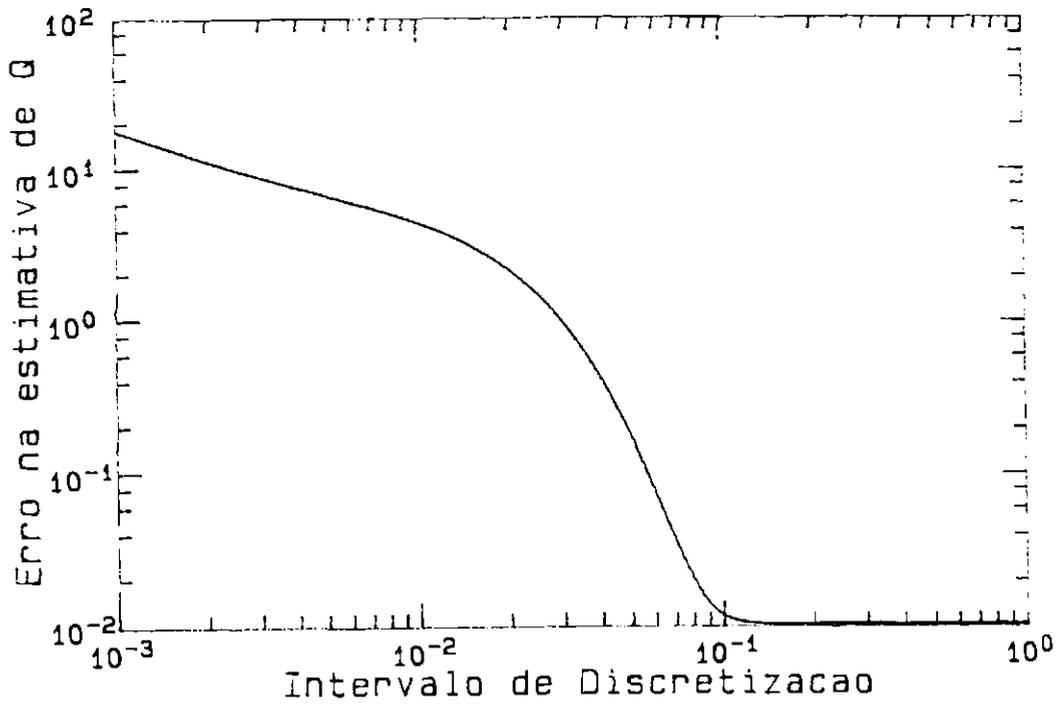


Fig. 4.12 - Incerteza relativa nas estimativas das variâncias dos ruídos no estado e nas observações pelo método das malhas; Caso 3, (continua)

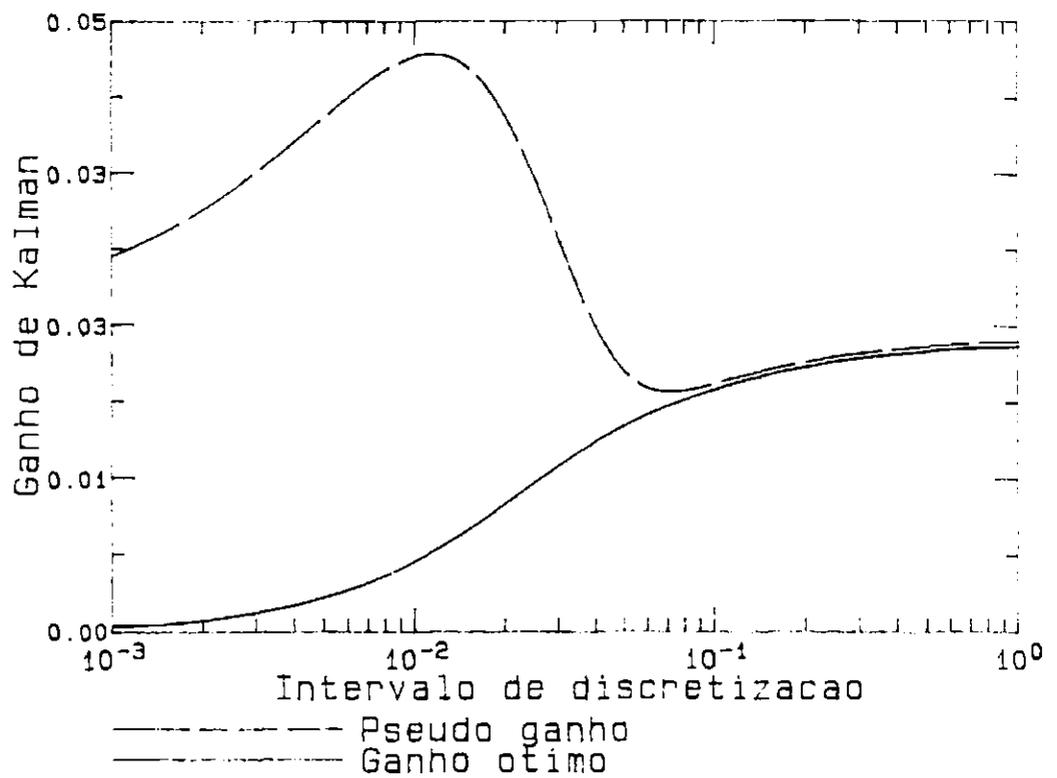
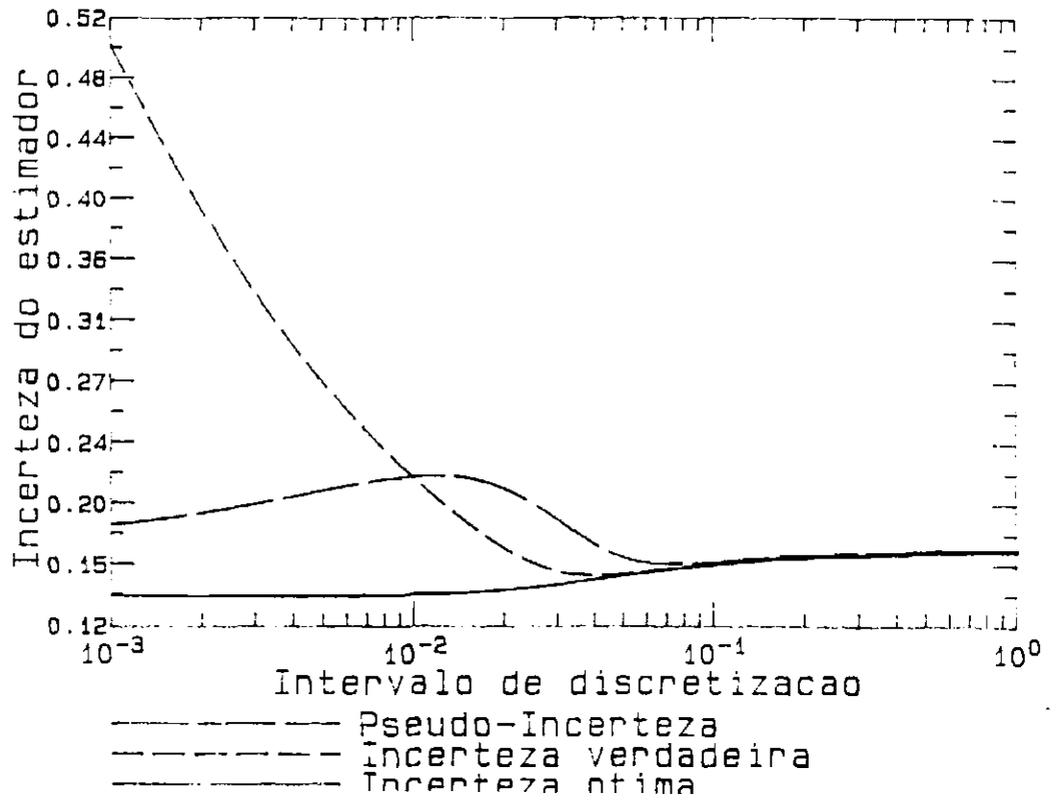


Fig. 4.12 - (Conclusão).

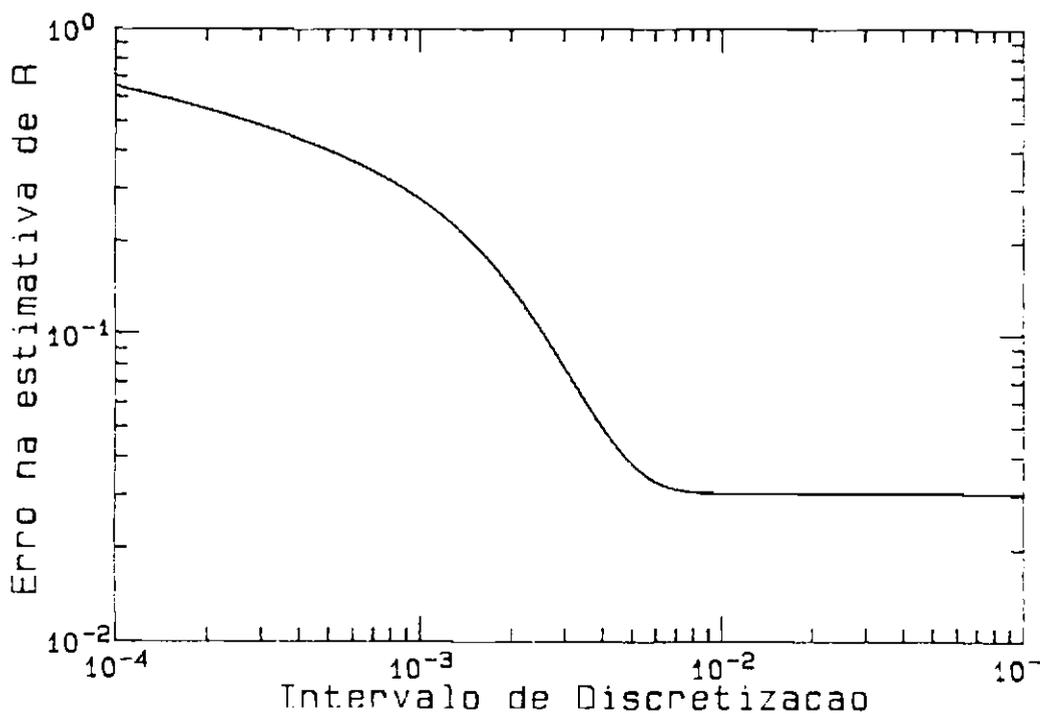
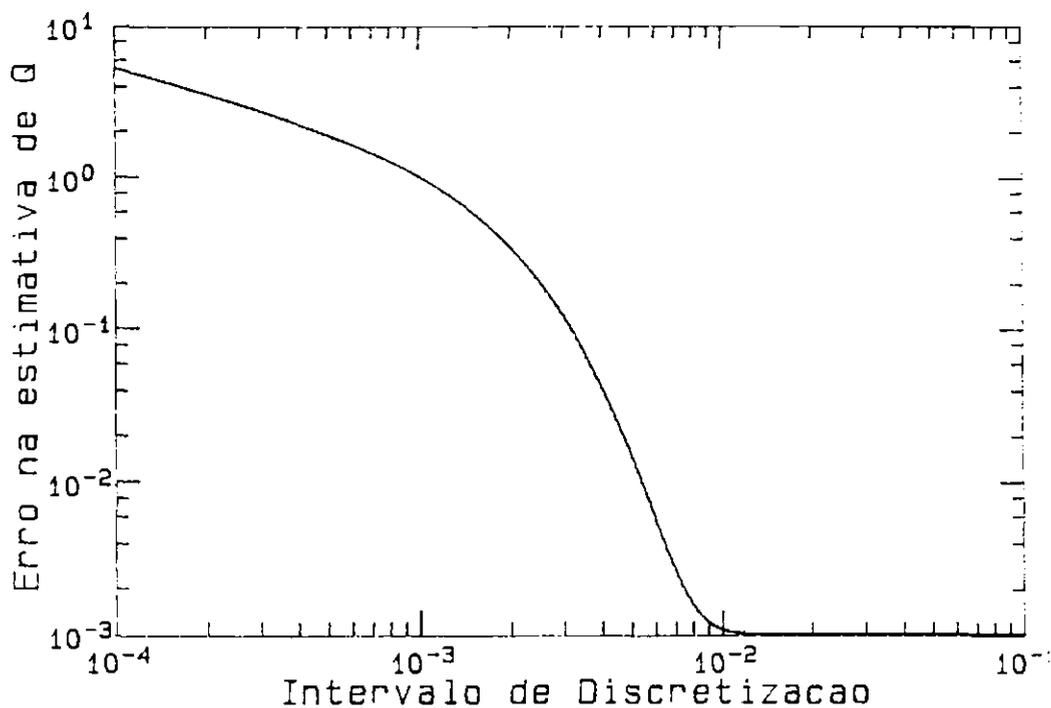


Fig. 4.13 - Incerteza relativa nas estimativas das variâncias dos ruídos no estado e nas observações pelo método das malhas: Caso 4.
(continua)

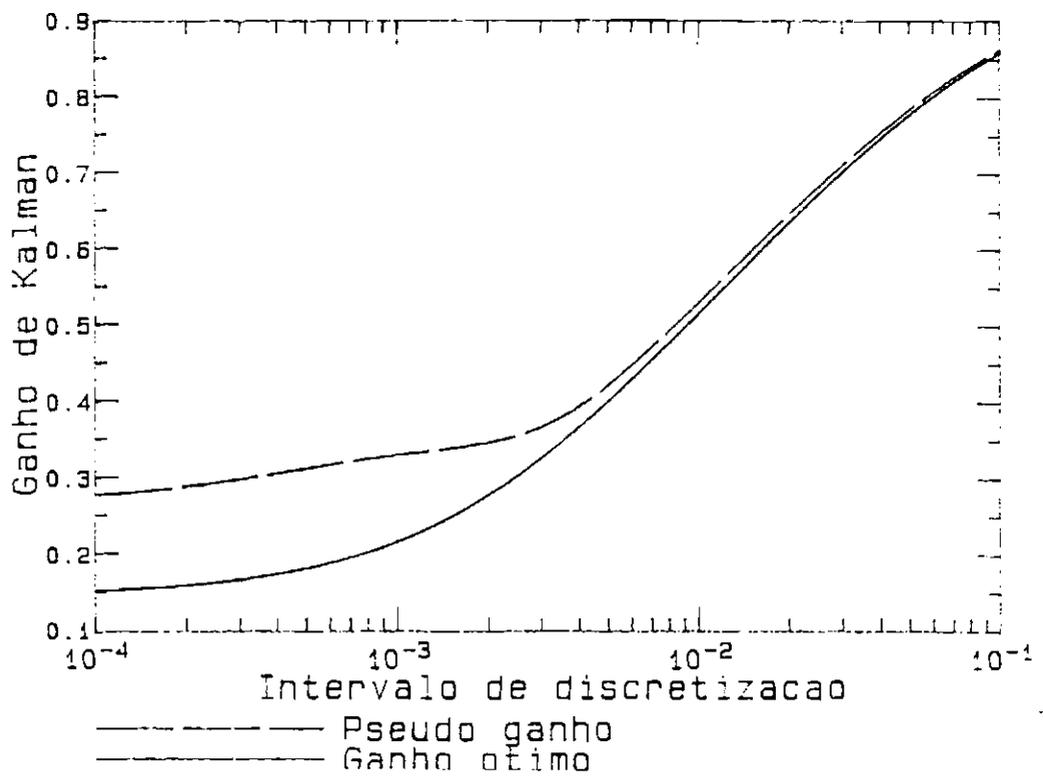
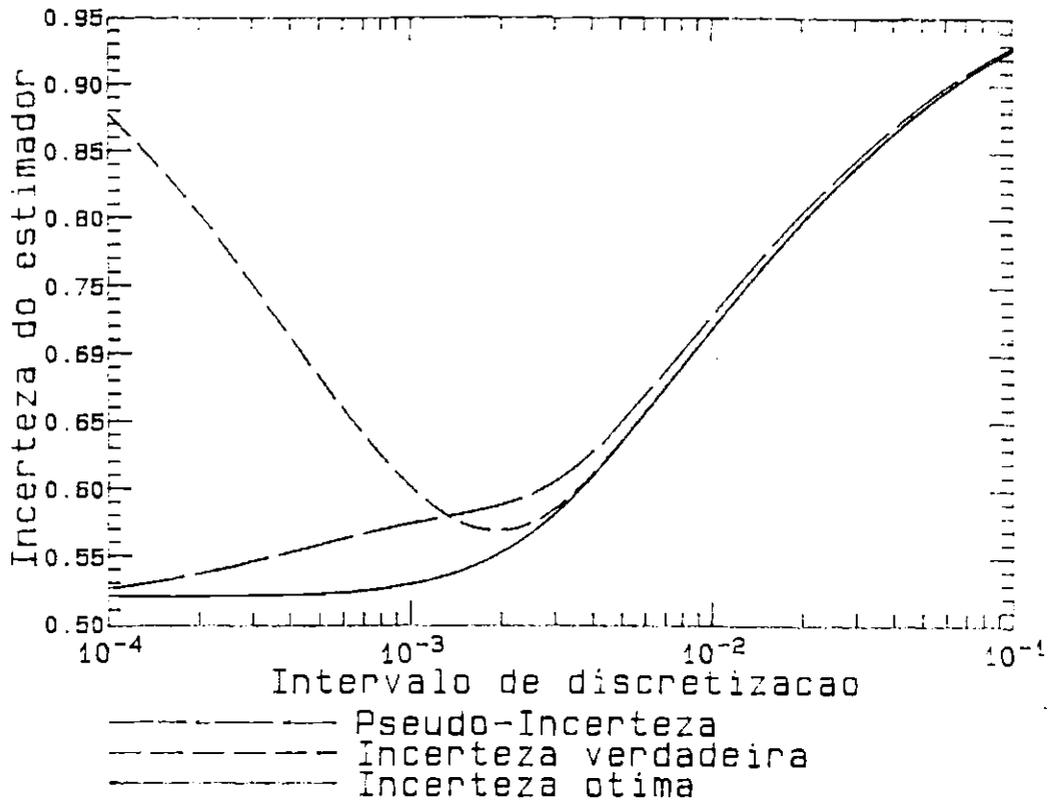


Fig. 4.13 - (Conclusão).

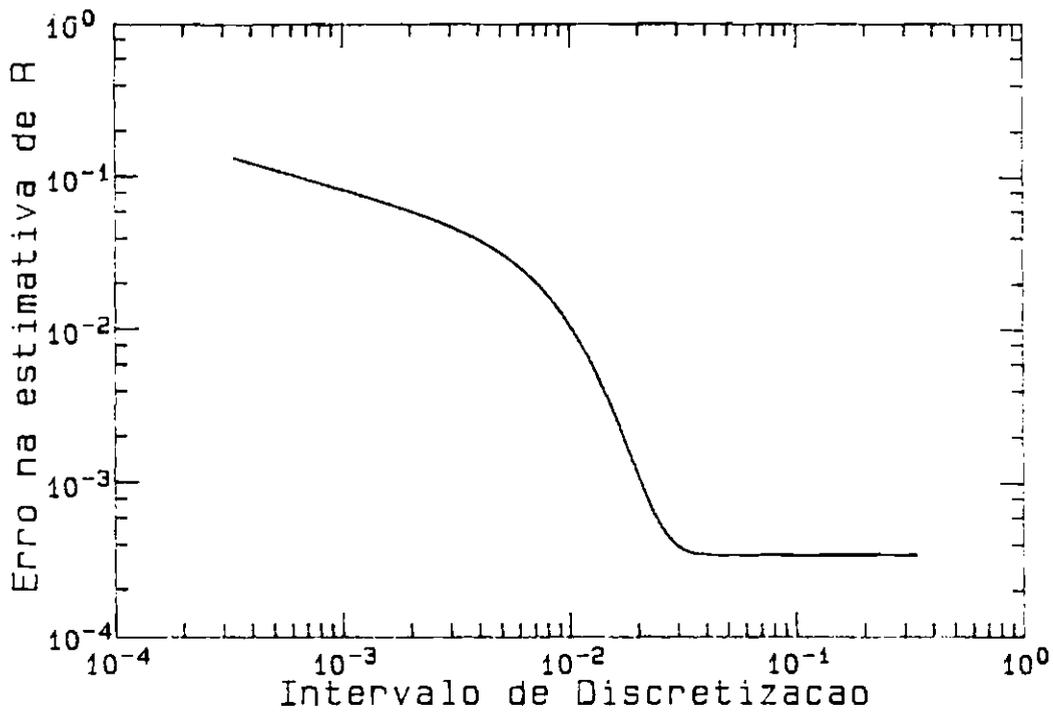
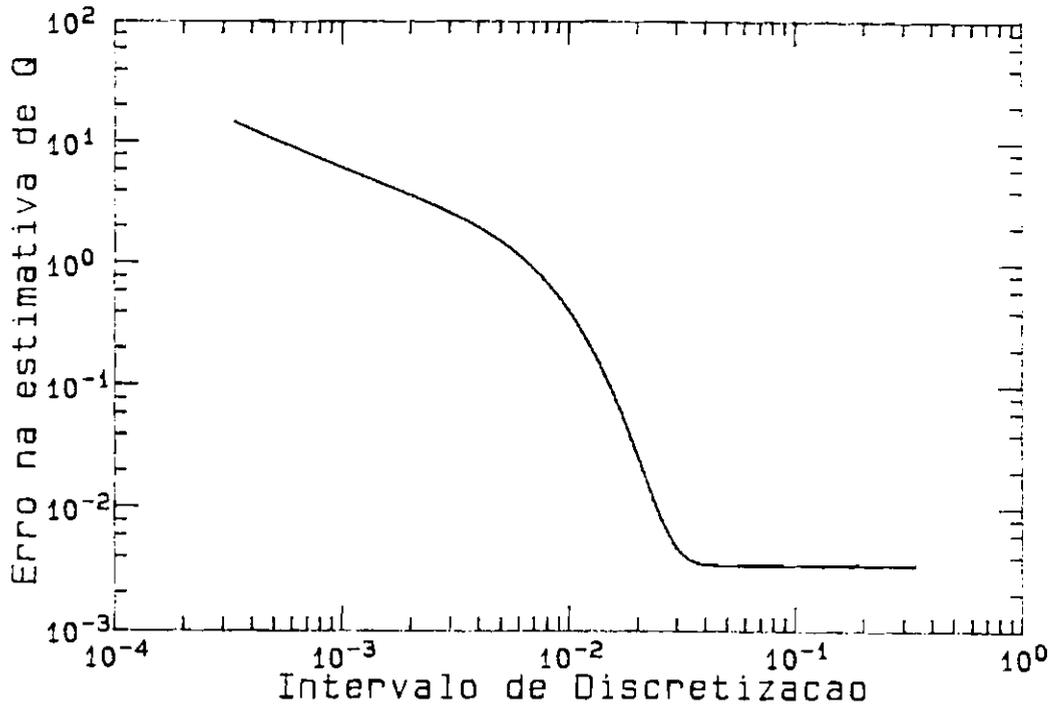


Fig. 4.14 - Incerteza relativa nas estimativas das variâncias dos ruídos no estado e nas observações pelo método das malhas: Caso 5. (continua)

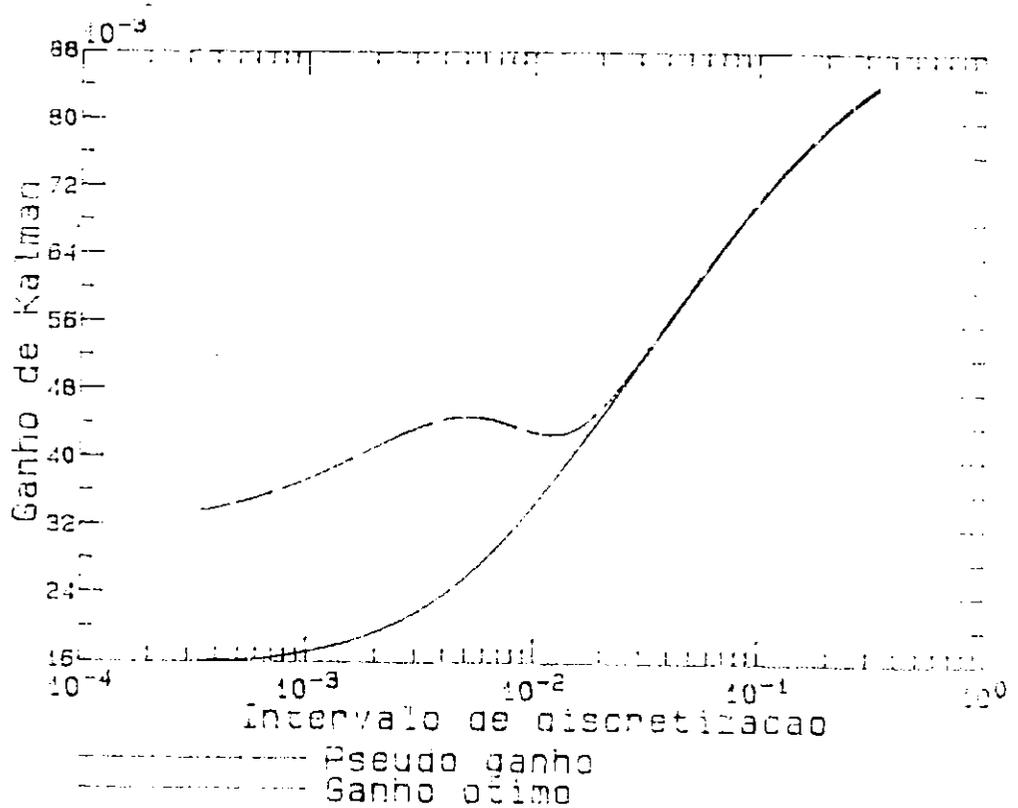
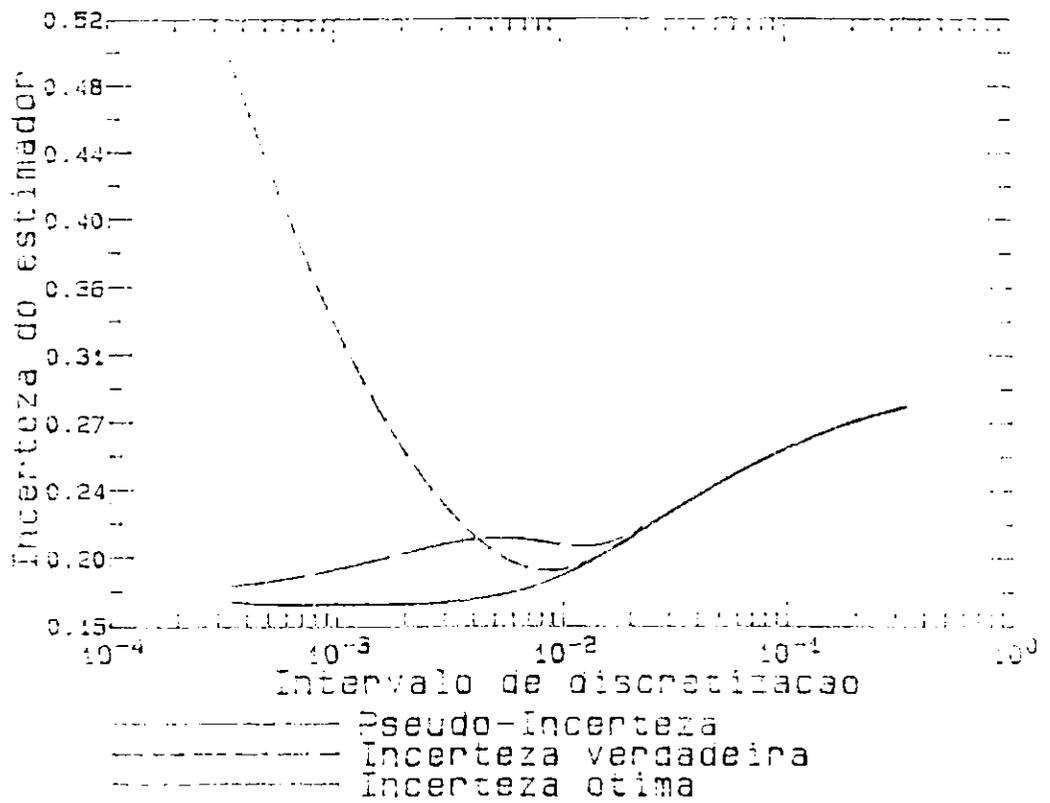


Fig. 4.14 - (Conclusão).

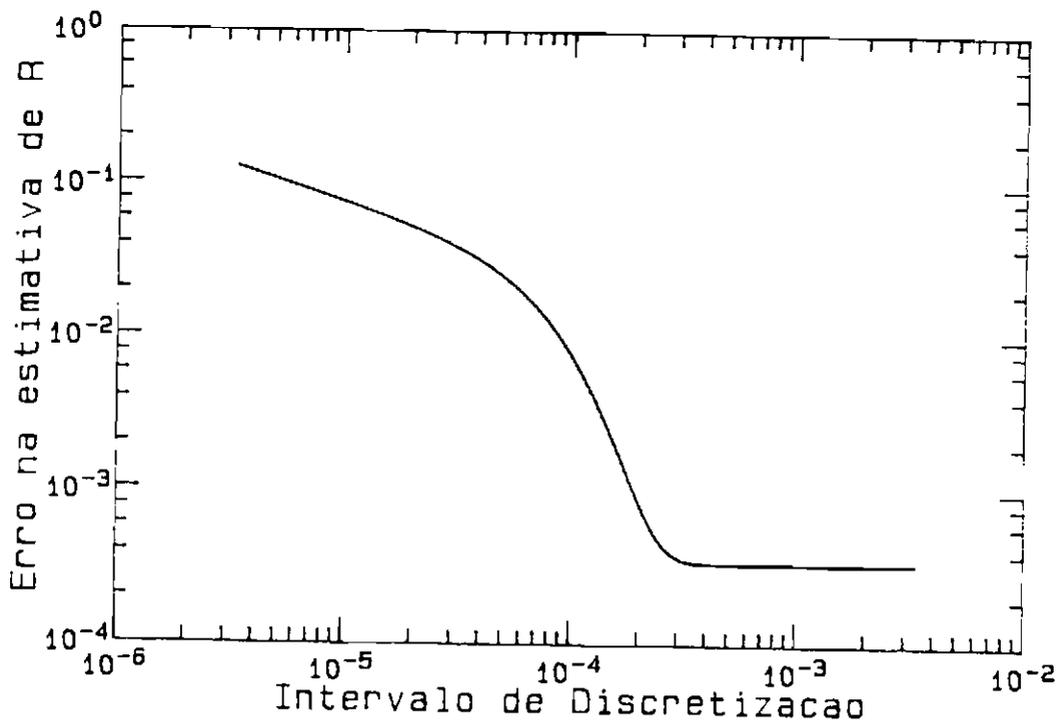
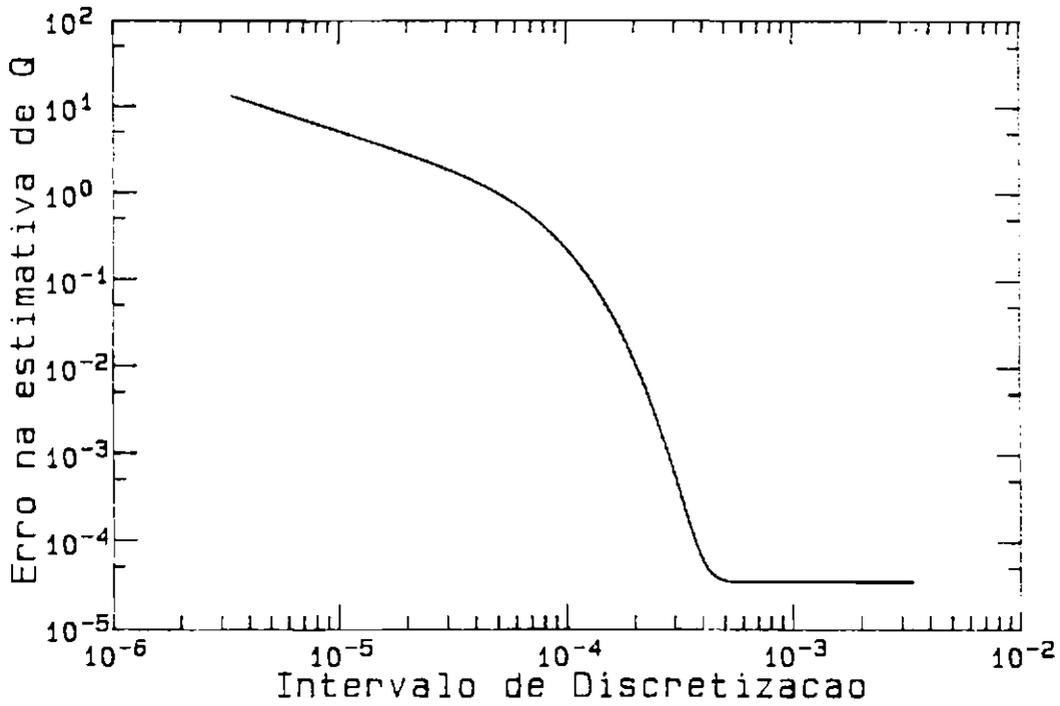


Fig. 4.15 - Incerteza relativa nas estimativas das variâncias dos ruídos no estado e nas observações pelo método das malhas; Caso 6. (continua)

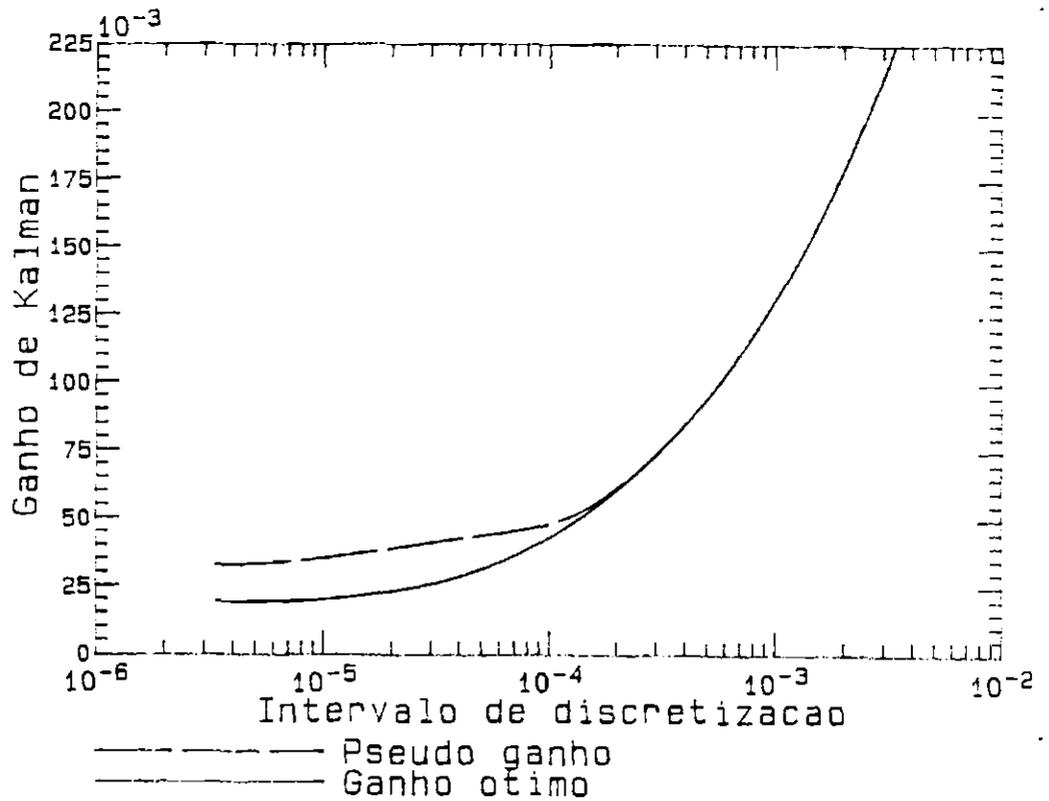
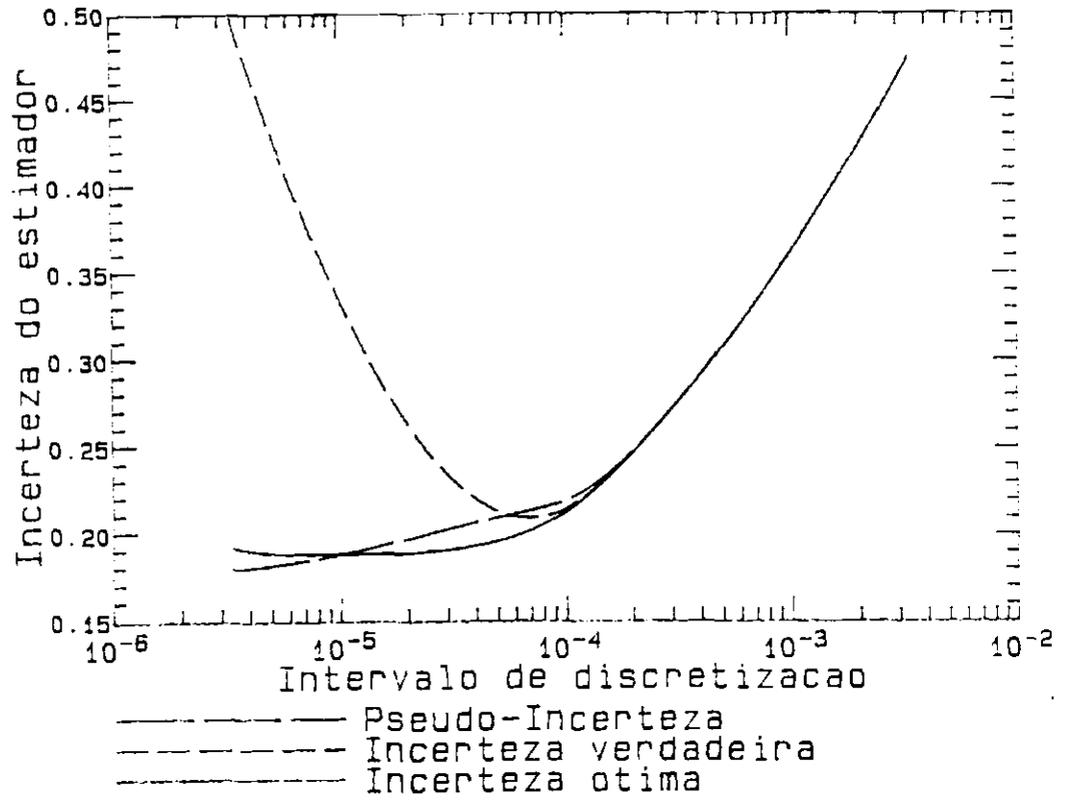


Fig. 4.15 - (Conclusão).

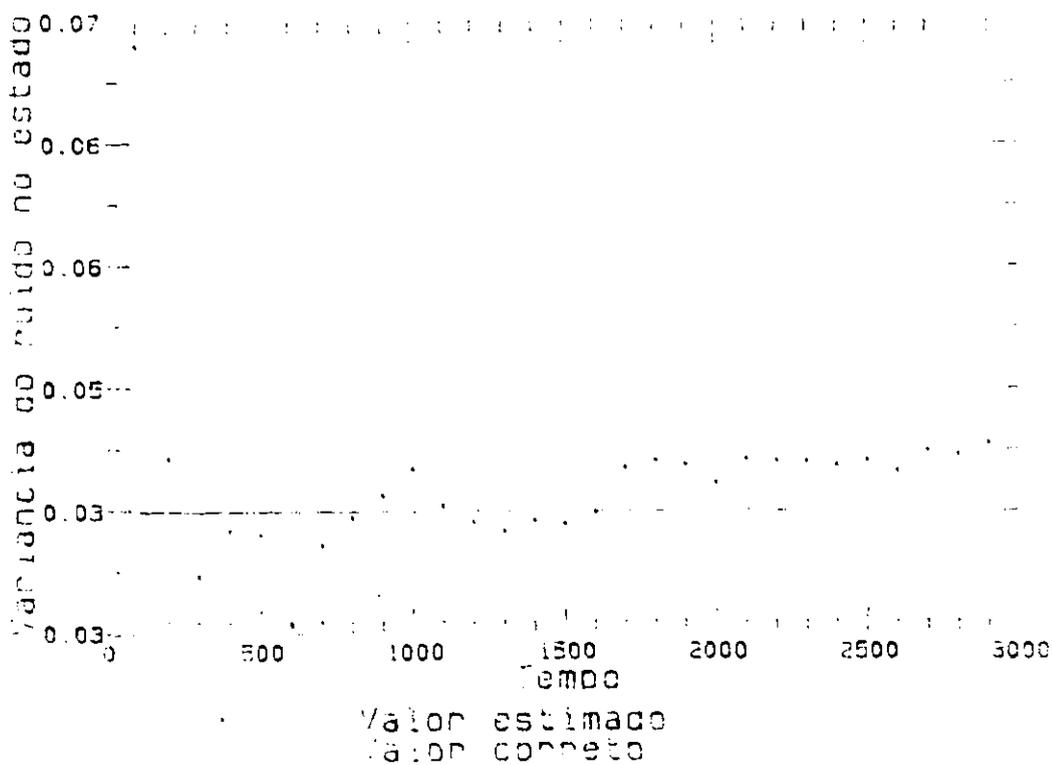
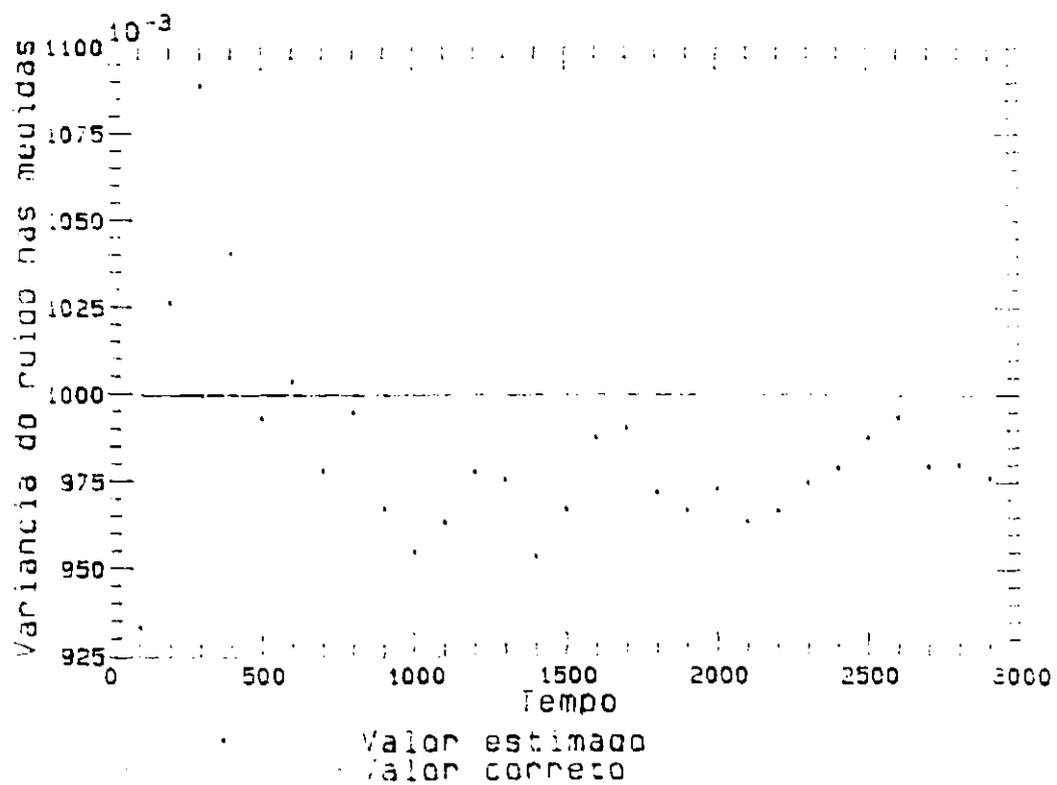


Fig. 4.16 - Desempenho real (simulado) do método das malhas em um sistema com ruído branco: $\phi=0,995$; $R=1$; $Q=0,04$.

(continua)

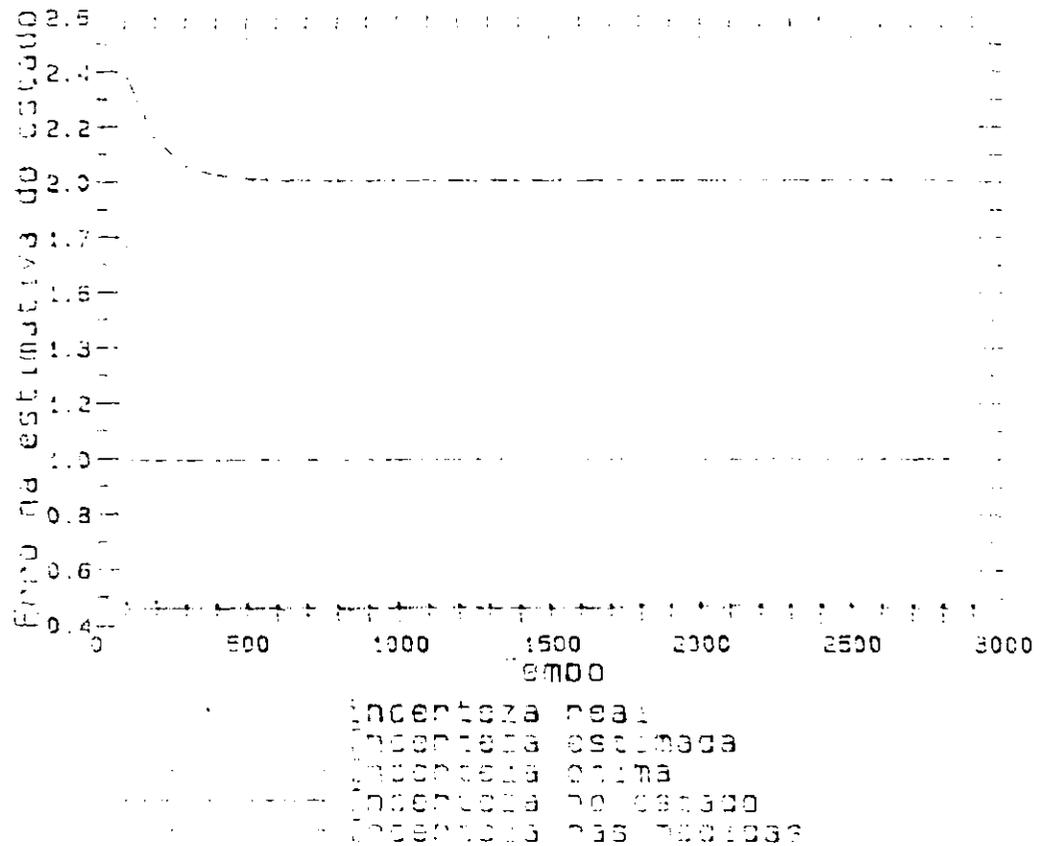
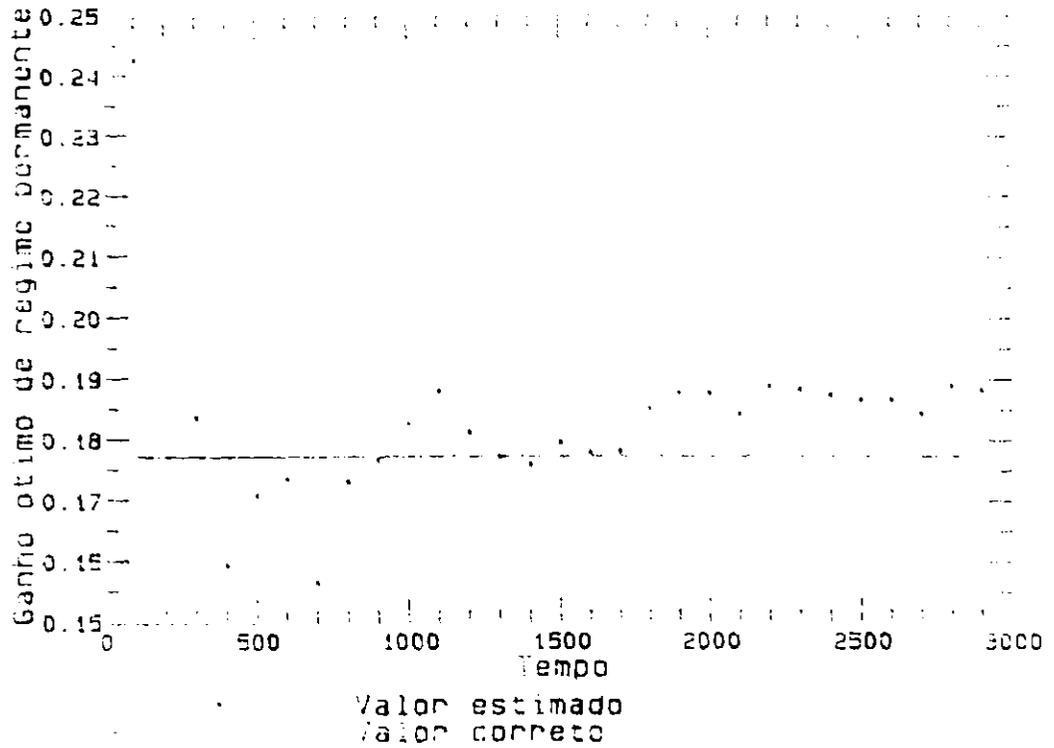


Fig. 4.16 - (Conclusão).

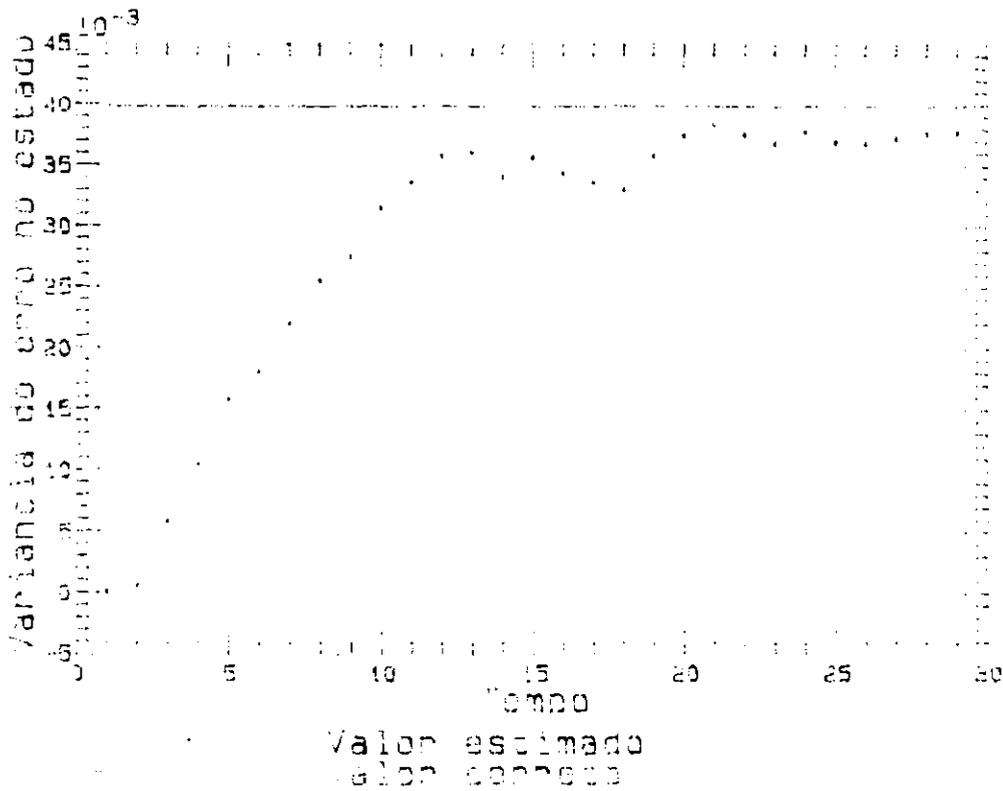
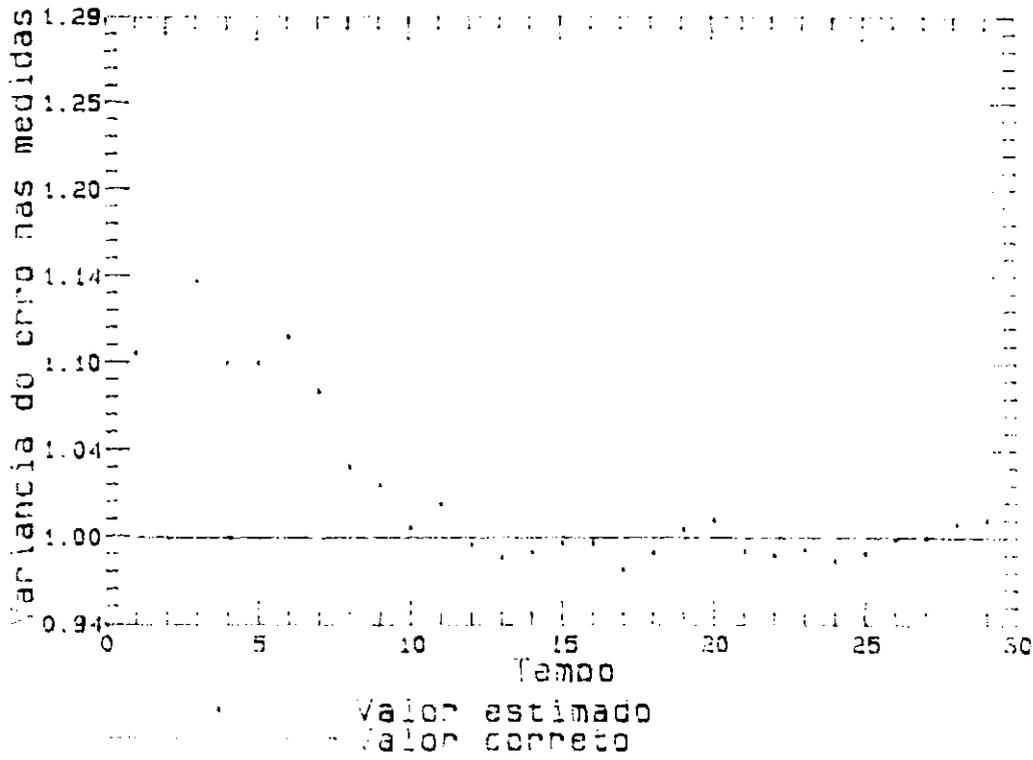


Fig. 4.17 - Desempenho real (simulado) do método da máxima verossimilhança no sistema com ruído branco: $\theta=0,995$; $R=1$; $Q=0,04$.
(continua)

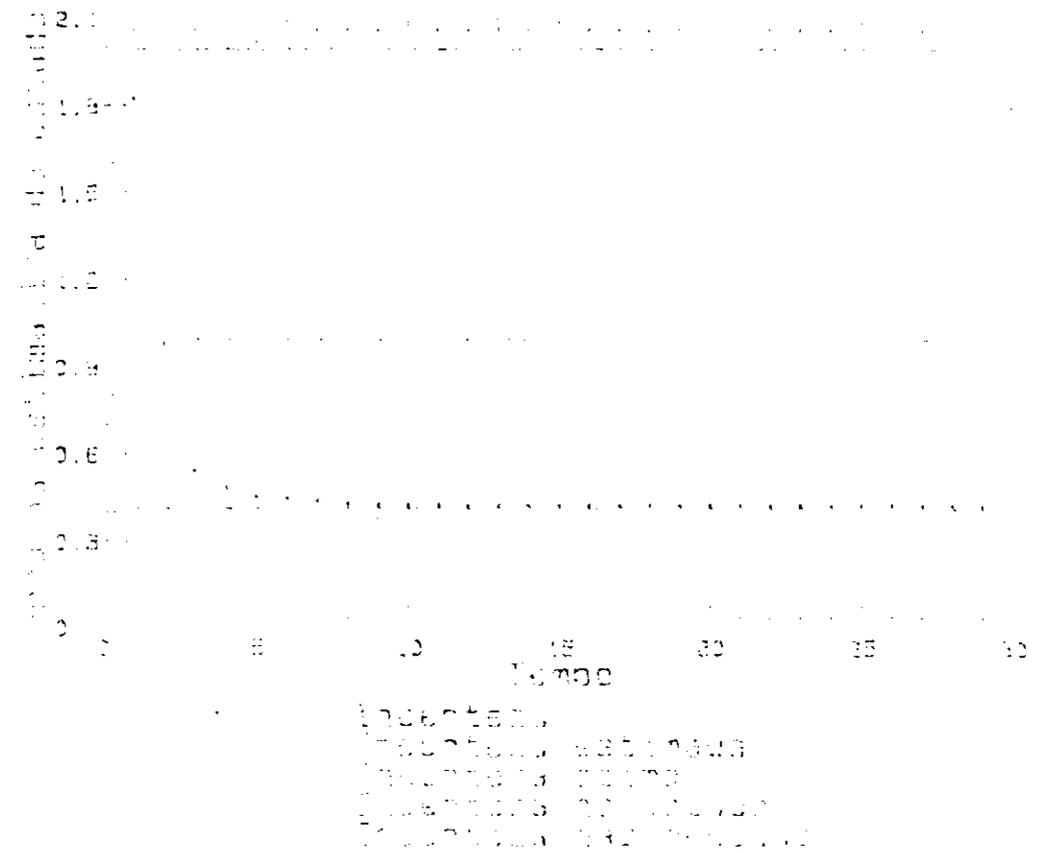
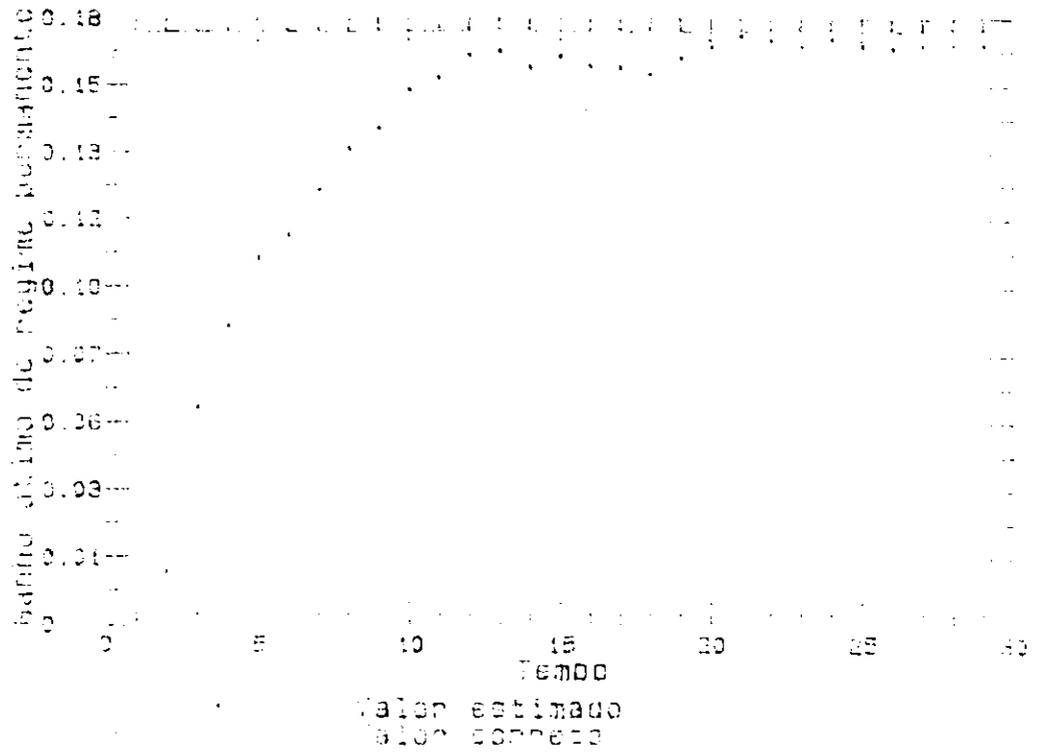
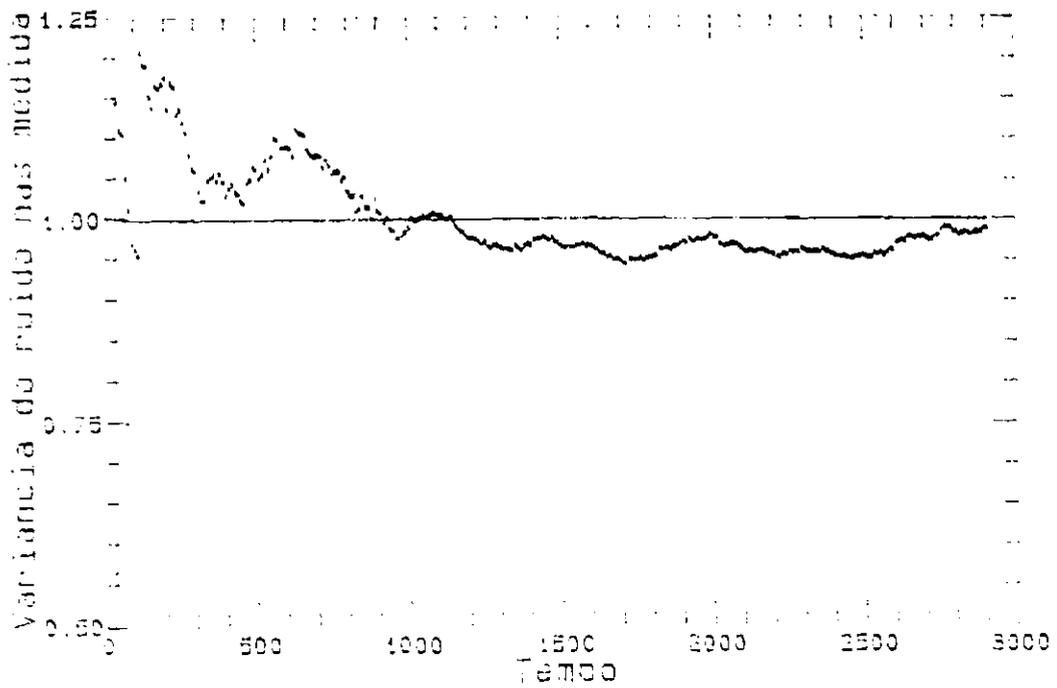
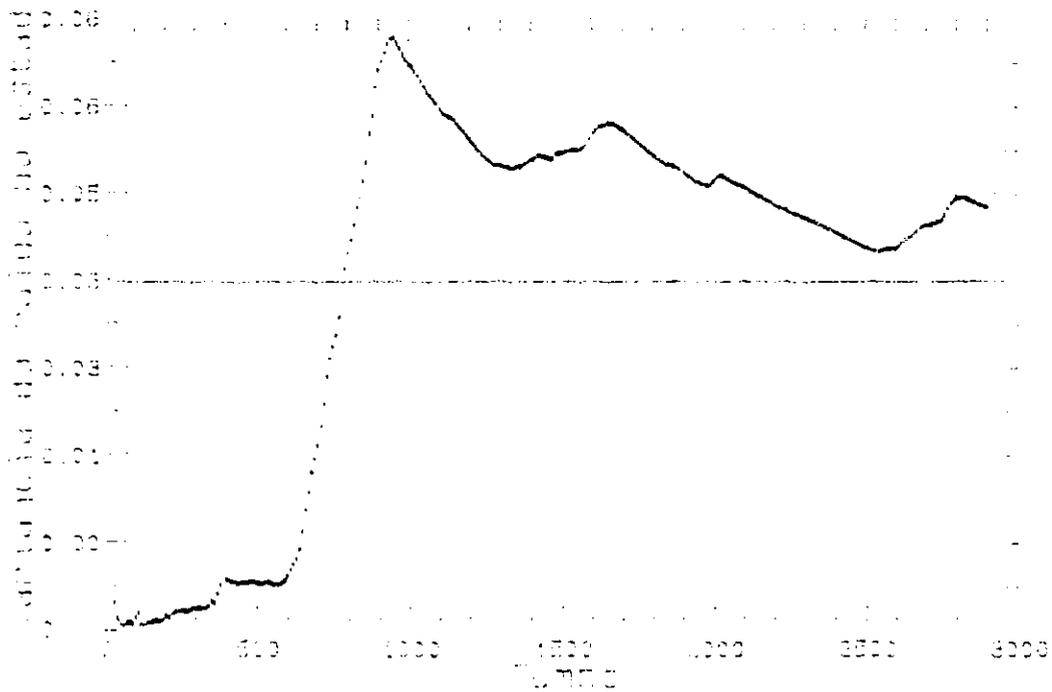


Fig. 4.17 - (Conclusão).



Valor estimado
Valor nominal



Valor estimado
Valor nominal

Fig. 4.18 - Desempenho real (simulado) do método de correlação da saída no sistema com ruído branco: $\phi=0,995$; $R=1$; $Q=0,04$.

(continua)

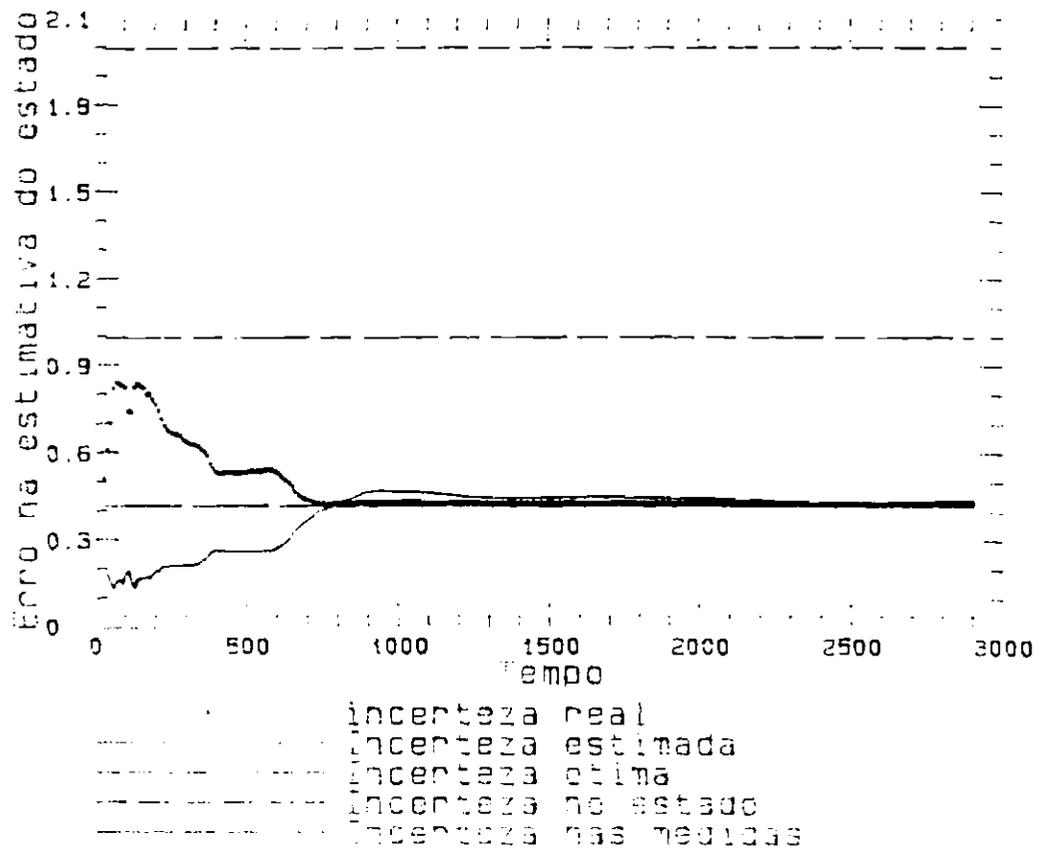
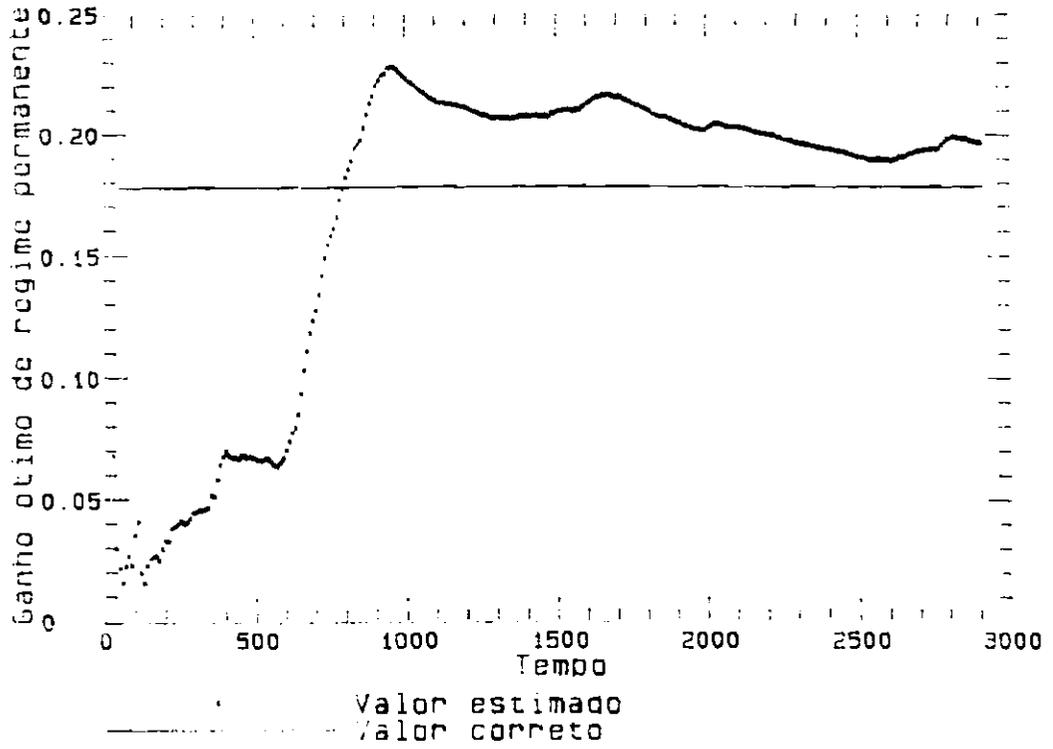


Fig. 4.18 - (Conclusão).

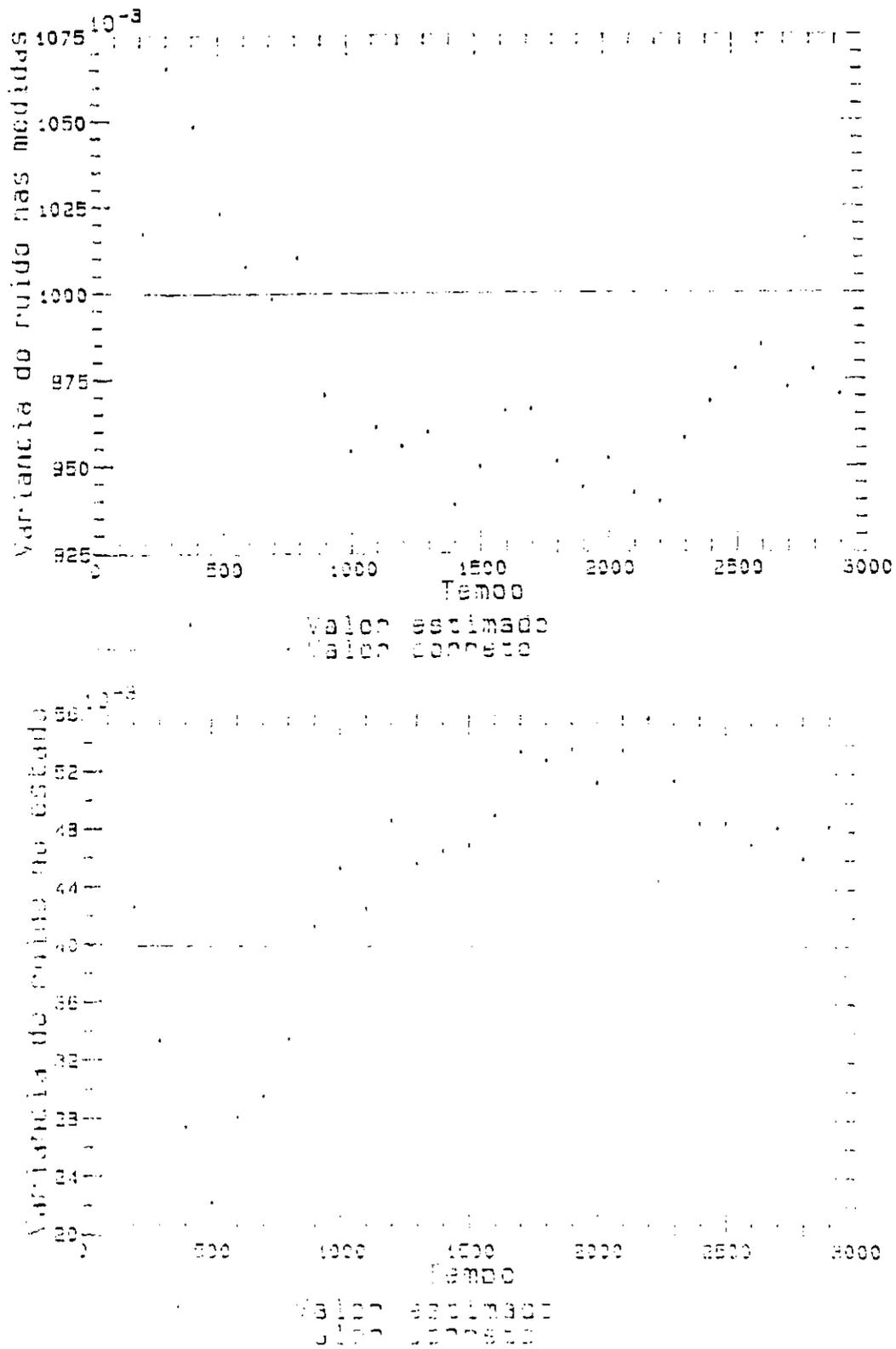


Fig. 4.19 - Desempenho real (simulado) do método correlação do resíduo sistema com ruído branco: $\phi=0,995$; $R=1$; $Q=0,04$.

(continua)

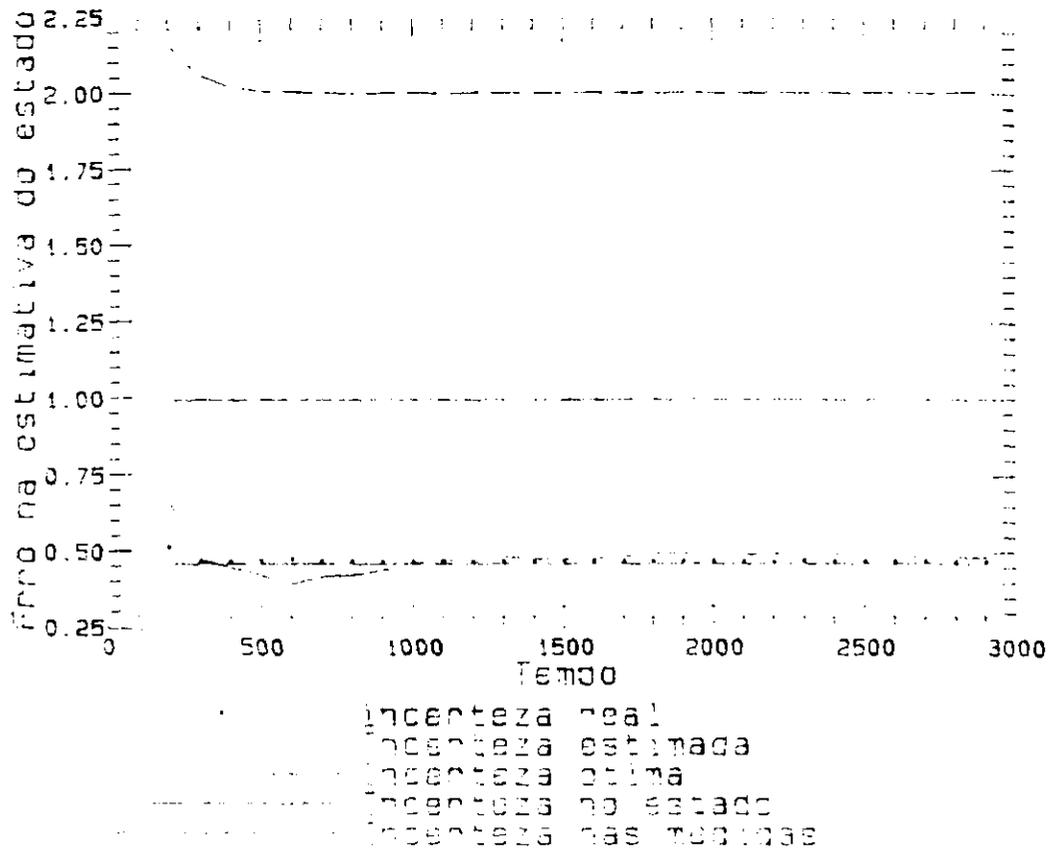
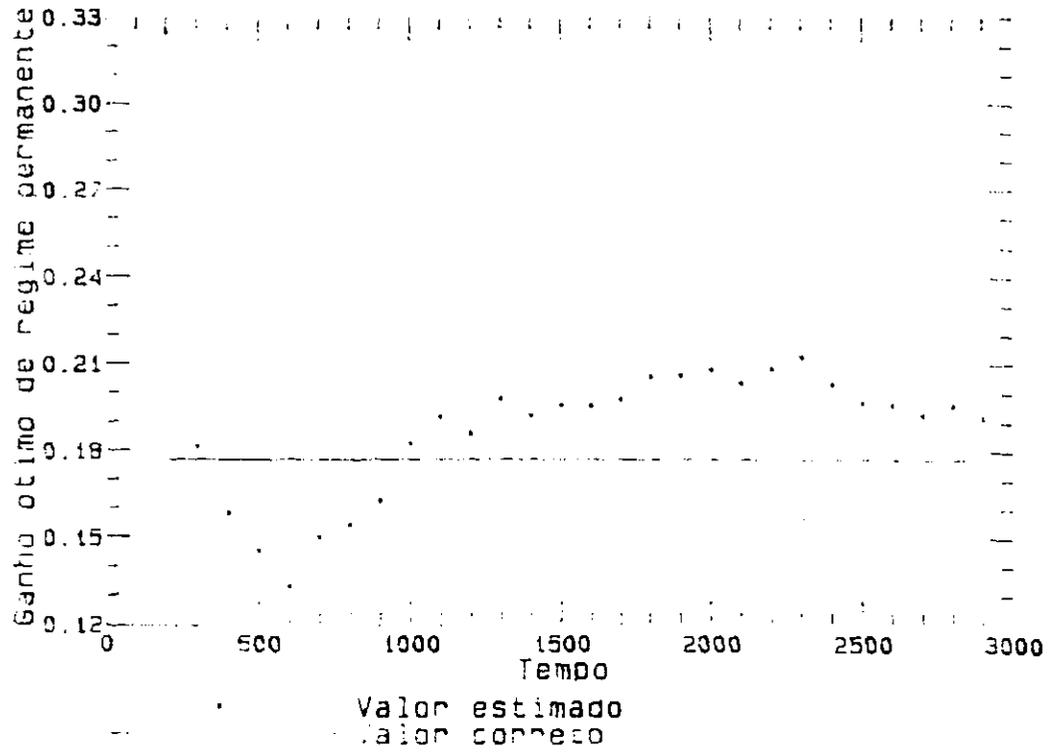


Fig. 4.19 - (Conclusão).

4.4 - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DAS MALHAS

Nesta seção, o método das malhas, introduzido na seção anterior por meio de um exemplo ilustrativo, é formalizado para aplicação no caso geral. O problema prático a ser resolvido pelo método proposto pode ser descrito como a seguir. Dado um sistema físico e medidas de grandezas relacionadas a este sistema, obtidas por equipamentos sensores, deseja-se obter uma estimativa do estado de um dado sistema dinâmico que represente este sistema físico, utilizando o filtro de Kalman. Em particular tem-se em mente aplicações onde a dinâmica é contínua e as medidas, ou observações do estado, são discretas, tais como usualmente ocorre na área de mecânica orbital. Em benefício da simplicidade algorítmica é comum supor na modelagem estocástica do sistema ruídos brancos no estado e nas observações. Pode-se mostrar que em certos casos particulares de ruídos coloridos esta simplificação não altera as características de estabilidade e convergência do filtro (Souza and Fernandes, 1985). Não obstante, distúrbios ambientais e interferências não modeladas são frequentemente melhor representadas por ruídos coloridos. Além do impacto que esta distorção de modelagem acarreta, a própria faixa de incerteza destes ruídos pode ser parcial ou mesmo totalmente desconhecida. O objetivo do método das malhas é solucionar pois estes dois aspectos específicos do problema em questão:

- 1) Estimar as matrizes de covariância dos ruídos brancos no estado e nas observações;
- 2) Detectar se a taxa de amostragem disponível de observações é compatível com o modelo de ruído branco utilizado e, caso não seja, determinar qual a máxima taxa de amostragem ainda compatível com o referido modelo.

Embora o desenvolvimento inicial do método bem como o cálculo de seu desempenho tenham sido realizados até aqui com base em análises de sistemas lineares e escalares, em princípio o método proposto pode ser ao menos formulado em termos mais gerais abrangendo

sistemas vetoriais e não lineares (utilizando neste caso o filtro estendido de Kalman). A comprovação prática de sua eficácia neste caso geral deve aguardar ainda resultados de futuros estudos aplicados. Entretanto, no Capítulo 5 é feita uma breve aplicação para o caso bidimensional linear que fornece algum subsídio incentivador para esta questão.

A seguir, descrevem-se primeiramente o modelo dinâmico e de observação, bem como as equações do filtro estendido de Kalman para o caso contínuo-discreto, mais usual em sistemas da mecânica orbital. Depois, formula-se o estimador de covariâncias dos ruídos brancos equivalentes na dinâmica e nas observações. Um esquema para a determinação da taxa de amostragem adequada para o sistema é então proposto. Finalizando a seção são comentados aspectos operacionais concernentes à aplicação do método.

4.4.1 - O FILTRO ESTENDIDO CONTÍNUO-DISCRETO DE KALMAN

Considera-se um sistema cujo estado $X(t) \in \mathbb{R}^n$ é um processo estocástico vetorial do qual são conhecidas uma estimativa a priori não tendenciosa, \hat{X}_0 , e uma amostra sequencial de observações, $[Y_k \in \mathbb{R}^n, k=1,2,\dots]$, e cujo modelo de trabalho é descrito por:

$$\dot{X}(t) = f[X(t),t] + B(t) W(t) \quad , \quad X(t_0) = X_0 \quad , \quad (4.130)$$

$$Y_k = h[X(t_k),t_k] + V_k \quad , \quad (4.131)$$

onde: X_0 é uma variável aleatória vetorial gaussiana com esperança \hat{X}_0 e matriz de covariância P_0 , que caracteriza o estado no instante inicial t_0 ; f é uma função vetorial do tempo e do estado, finita e contínua por trechos, em geral não linear; h é uma função vetorial do tempo e do estado; $W \in \mathbb{R}^q$ é um ruído branco gaussiano e não tendencioso; e V é uma sequência gaussiana branca e não tendenciosa; W e V não correlacionados entre si e nem com o estado inicial, caracterizados pelas seguintes estatísticas:

$$E[W(t) W'(\tau)] = Q(t) \delta(t-\tau) \quad , \quad (4.132)$$

$$E[V_k V_i'] = R_k \delta_{i-k} \quad . \quad (4.133)$$

As equações do filtro estendido contínuo-discreto de Kalman são:

a) Inicialização:

$$\hat{X}(0|0) = \hat{X}_0 \quad , \quad (4.134)$$

$$P(0|0) = P_0 \quad ; \quad (4.135)$$

b) Propagação de t_{k-1} até t_k :

$$\dot{\hat{X}}(t|k-1) = f[\hat{X}(t|k-1), t] \quad , \quad t \in [t_k, t_{k-1}] \quad , \quad (4.136)$$

$$P(t|k-1) = \Phi(t, k-1) P(k-1|k-1) \Phi'(t, k-1) + \Gamma(t, k-1) \quad , \quad (4.137)$$

onde Φ é a matriz de transição do sistema linearizado e Γ é a contribuição acumulada do ruído no estado desde o instante $k-1$:

$$\dot{\Phi}(t, k-1) = \hat{F}[X(t|k-1), t] \Phi(t, k-1) \quad , \quad \Phi(k-1, k-1) = I_n \quad , \quad (4.138)$$

$$\Gamma(t, k-1) = \int_{t_{k-1}}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B'(\tau) \Phi'(t, \tau) d\tau \quad , \quad (4.139)$$

e F é a matriz derivada parcial de f em relação ao estado;

c) Atualização:

$$\hat{X}(k|k) = \hat{X}(k|k-1) + G_k \rho_k \quad , \quad (4.140)$$

$$P(k|k) = [I_n - G_k H_k'] P(k|k-1) [I_n - G_k H_k']' + G_k R_k G_k' \quad , \quad (4.141)$$

onde: G_k é o ganho do filtro para a k -ésima observação (arbitrário, em princípio); ρ é o resíduo definido por:

$$\rho_k \triangleq Y_k - h[\hat{X}(k|k-1), t_k] \quad ; \quad (4.142)$$

e H_k é a matriz derivada parcial de h em relação ao estado. Desprezando os erros de linearização, o resíduo ρ é uma sequência gaussiana não tendenciosa, caracterizada pela matriz de covariância Σ :

$$\Sigma_k \triangleq E[\rho_k \rho_k'] = H_k P(k|k-1) H_k' + R_k \quad . \quad (4.143)$$

Nota-se que até aqui as equações completas do filtro são válidas para um ganho arbitrário, não necessariamente ótimo, para o qual o cálculo da estimativa \hat{X} independe do conhecimento das covariâncias Q e R .

Utilizando agora o ganho ótimo de Kalman, dado por:

$$G_k^* = P(k|k-1) H_k' [H_k P(k|k-1) H_k' + R_k]^{-1} \quad , \quad (4.144)$$

a Equação 4.141 passa a ser:

$$P(k|k) = P(k|k-1) - G_k H_k P(k|k-1) \quad , \quad (4.145)$$

e a estimativa \hat{X} e a matriz de covariância do erro de estimação, P , passam a ser (desprezando os erros de linearização), respectivamente, a esperança e a covariância de X , condicionadas à informação a priori e às observações até o instante k . Neste caso o conhecimento das matrizes R e Q passa a ser necessário para calcular a estimativa \hat{X} .

4.4.2 - ESTIMAÇÃO DA COVARIÂNCIA DOS RUÍDOS NO ESTADO E NAS OBSERVAÇÕES

Consideram-se as matrizes $Q(t)$ e R_k expressas por somatórias de matrizes convenientemente escolhidas $Q_i(t)$ e $R_i(k)$ multiplicadas por parâmetros escalares a serem determinados, q_i e r_i , conforme o seguinte modelo (Bélanger, 1974):

$$Q(t) = Q_0(t) + \sum_{i=1}^{Nq} q_i Q_i(t), \quad Nq < (\ell+1)\ell/2, \quad (4.146)$$

$$R_k = R_0(k) + \sum_{i=1}^{Nr} r_i R_i(k), \quad Nr < (m+1)m/2, \quad (4.147)$$

Este tipo de modelagem dá ao problema de estimação das covariâncias R e Q flexibilidade suficiente para incorporar eventuais informações parciais sobre suas estruturas, tais como diagonalidade ou não correlação entre erros de sensores distintos e variação funcional da intensidade dos ruídos.

Substituindo as Equações 4.146-147 no algoritmo de filtragem do ítem anterior e considerando os ganhos G_k arbitrários (isto é, não necessariamente o ganho de Kalman), verifica-se que a matriz de covariância dos resíduos, Σ_k , é uma função linear dos parâmetros q_i e r_i :

$$\Sigma_k = \Sigma_{0k} + \sum_{i=1}^{Nq} q_i \frac{\partial \Sigma_k}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{Nr} r_i \frac{\partial \Sigma_k}{\partial r_i} \quad (4.148)$$

onde Σ_{0k} é o valor de Σ_k para $q_i = r_i = 0$, e a derivada parcial de S em relação a qualquer parâmetro q_i ou r_i pode ser obtida pelo mesmo algoritmo descrito no ítem anterior simplesmente atribuindo ao tal parâmetro o valor unitário e anulando todos os demais. Explicitamente:

a) Inicialização:

$$\frac{\partial P(0|0)}{\partial q_i} = \frac{\partial P(0|0)}{\partial r_i} = 0, \quad i=1, \dots, Nq; j=1, \dots, Nr; \quad (4.149)$$

b) Propagação:

$$\frac{\partial P(t|k-1)}{\partial q_i} = \phi(t, k-1) \frac{\partial P(k-1|k-1)}{\partial q_i} \phi'(t, k-1) + \frac{\partial \Gamma(t, k-1)}{\partial q_i}, \quad (4.150)$$

$$\frac{\partial P(t|k-1)}{\partial r_i} = \phi(t, k-1) \frac{\partial P(k-1|k-1)}{\partial r_i} \phi'(t, k-1), \quad (4.151)$$

$$\frac{\partial \Gamma(t, k-1)}{\partial q_i} = \int_{t_{k-1}}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) Q(\tau) B'(\tau) \Phi'(t, \tau) d\tau \quad , \quad (4.152)$$

$$\frac{\partial \Sigma_k}{\partial q_i} = H_k \frac{\partial P(k|k-1)}{\partial q_i} H_k' \quad , \quad (4.153)$$

$$\frac{\partial \Sigma_k}{\partial \kappa_i} = H_k \frac{\partial P(k|k-1)}{\partial \kappa_i} H_k' + R_i(k) \quad ; \quad (4.154)$$

c) Atualização:

$$\frac{\partial P(k|k)}{\partial q_i} = [I_n - G_k H_k] \frac{\partial P(k|k-1)}{\partial q_i} [I_n - G_k H_k]' \quad , \quad (4.155)$$

$$\frac{\partial P(k|k)}{\partial \kappa_i} = [I_n - G_k H_k] \frac{\partial P(k|k-1)}{\partial \kappa_i} [I_n - G_k H_k]' + G_k R_i(k) G_k' \quad . \quad (4.156)$$

Deve-se notar que a matriz de transição Φ e a derivada parcial H continuam sendo aquelas calculadas com base no estado estimado pelo algoritmo original da filtragem. Quanto ao ganho G_k , em princípio qualquer critério pode ser utilizado para sua escolha, inclusive o uso da Equação 4.144 visando obter um ganho aproximadamente ótimo com base em estimadores grosseiros ou preliminares dos parâmetros q_i e κ_i . O importante é que estes ganhos uma vez calculados independem dos valores verdadeiros de q_i e κ_i e portanto são considerados constantes no cálculo das derivadas parciais de Σ_k .

Visando colocar a Equação 4.148 numa forma vetorial mais adequada utiliza-se a notação já introduzida no Capítulo 2 para "vetorizar" uma matriz (ver Equação 2.39), e definem-se:

$$\theta \triangleq (q_1 : q_2 : \dots : q_{N_q} : \kappa_1 : \kappa_2 : \dots : \kappa_{N_r})' \quad , \quad (4.157)$$

$$\sigma \triangleq \frac{1}{N} \text{vet} \left(\sum_k \Sigma_k - \Sigma_0 \right) \quad , \quad (4.158)$$

$$\Theta \triangleq \frac{1}{N} [\text{vet}(\sum_k \frac{\partial \Sigma_k}{\partial q_1}) : \dots : \text{vet}(\sum_k \frac{\partial \Sigma_k}{\partial q_N}) : \text{vet}(\sum_k \frac{\partial \Sigma_k}{\partial \mu_1}) : \dots : \text{vet}(\sum_k \frac{\partial \Sigma_k}{\partial \mu_N})] , \quad (4.159)$$

onde k varia desde um dado instante k_1 até outro instante $k_2 = k_1 + N$.
Pode-se então escrever:

$$\sigma = \Theta \Theta . \quad (4.160)$$

Esta Equação relaciona os elementos da matriz de covariância acumulada dos resíduos em função dos parâmetros q_i e μ_i a serem determinados. Ora, como as ocorrências dos resíduos são acessíveis, pode ser estimada pela covariância amostral acumulada dos resíduos na forma vetorial, $\hat{\sigma}$, definida por:

$$\hat{\sigma} \triangleq \text{vet}(\sum_k \rho_k \rho_k') / N . \quad (4.161)$$

É fácil verificar que $\hat{\sigma}$ é um estimador não tendencioso de σ . Além disso, se a sequência ρ_k for ergódica, $\hat{\sigma}$ é um estimador consistente de σ . Seria portanto possível aproximar σ por $\hat{\sigma}$ na Equação 4.160 e resolvê-la para θ . Entretanto este procedimento está sujeito a resultados pouco precisos ou mesmo a soluções não únicas, devido ao pequeno número de equações em relação ao de incógnitas.

Uma possibilidade para contornar este problema é utilizar também correlações amostrais entre resíduos de instantes distintos. Este tipo de abordagem é citado no Capítulo 1 na categoria de método de correlação de resíduos (Mehra, 1972), e foi estendido para o caso de sistemas lineares variantes no tempo por Bélanger (1974) e Alspach (1974), e aprimorado posteriormente por Dee et alii (1985). No presente trabalho, visando envolver também a questão da escolha da taxa de amostragem, o aumento do número de equações é suprido utilizando-se covariâncias amostrais de resíduos correspondentes à filtração com taxa de amostragem diferente. Este é o princípio básico do funcionamento do método das malhas formulado a seguir.

Considerando o processamento separado de duas malhas alternadas de observações, uma contendo os valores pares de k e outra os valores ímpares, pode-se escrever, analogamente às Equações 4.160 e 4.161:

$$\sigma_a = \Theta_a \theta \quad , \quad (4.162)$$

$$\hat{\sigma}_a \triangleq [\text{vet} (\sum_{k \text{ par}} \rho_k \rho_k') + \text{vet} (\sum_{k \text{ ímpar}} \rho_k \rho_k')] / N \quad (4.163)$$

onde $\hat{\sigma}_a$ é um estimador não tendencioso e consistente da covariância acumulada dos resíduos das duas malhas alternadas na forma vetorial, σ_a , e Θ_a é a derivada parcial de σ_a em relação a θ . Define-se então o seguinte estimador de mínimos quadrados ponderados com informação a priori para θ :

$$\hat{\theta} = \text{Arg Min ID}(\theta) \quad , \quad (4.164)$$

onde:

$$\text{ID}(\theta) \triangleq \|\Theta_e \theta - \hat{\sigma}_e\|_p \quad , \quad (4.165)$$

$$\|e\|_p \triangleq e' P e \quad , \quad \forall e \in \mathbb{R}^{N_q + N_r} \quad , \quad (4.166)$$

$$\Theta_e = [\Theta' : \Theta'_a]' \quad , \quad (4.167)$$

$$\hat{\sigma}_e \triangleq [\hat{\sigma}' : \hat{\sigma}'_a]' \quad , \quad (4.168)$$

e P é uma matriz de ponderação, simétrica e arbitrária, semi-positiva definida. A solução para o estimador $\hat{\theta}$ é dada por:

$$\hat{\theta} = [\Theta_e' P \Theta_e]^{-1} \Theta_e' P \hat{\sigma}_e \quad (4.169)$$

desde que $\Theta_e' P \Theta_e$ possua inversa.

4.4.3 - ESQUEMA PARA DETERMINAR A TAXA DE AMOSTRAGEM ADEQUADA

O procedimento formulado no ítem anterior permite estimar os parâmetros que definem as matrizes de covariância dos ruídos dinâmico e de observação com base nos resíduos de malhas completa e alternadas de observações. Entretanto, conforme se argumentou nas seções anteriores deste capítulo, tal estimativa só representará adequadamente as incertezas do sistema se a taxa de amostragem for menor que uma certa taxa de amostragem crítica a ser determinada. Supondo que a taxa de amostragem crítica seja menor que a disponível e que a estimativa $\hat{\theta}$ convergirá para um valor consistente com as incertezas do sistema apenas quando a taxa de amostragem utilizada for menor que a crítica, formula-se neste ítem um esquema para determinar seu valor.

Definem-se k subconjuntos da amostra de observações, referentes a malhas de espaçamento k :

$$T_i^k \triangleq [Y_{k1+i-1+jk}, j=0,1,\dots], \quad i=1,2,\dots,k \quad (4.170)$$

O procedimento proposto no ítem anterior pode ser então reaplicado considerando sucessivamente o processamento dos subconjuntos de observações referentes às malhas de espaçamento k e $k+1$, para $k=2,3,\dots$. Em cada caso obtém-se uma estimativa $\hat{\theta}^k$. Propõe-se então o seguinte esquema para determinar a taxa adequada de processamento das observações, isto é, o espaçamento ideal k^* :

$$k^* = \text{Min } k: \left\| \hat{\theta}^k - \hat{\theta}^{k+1} \right\|_{\Theta_e, P_{\Theta_e}} \leq \varepsilon \text{ ID}(\hat{\theta}^k), \quad (4.171)$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro arbitrário que determina o nível percentual a partir do qual $\hat{\theta}^k$ passa a ser considerado praticamente constante com o aumento de k em comparação com a própria incerteza em seu valor.

4.4.4 - CONSIDERAÇÕES OPERACIONAIS SOBRE A APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS MALHAS

Nos itens anteriores desta seção formalizaram-se as expressões que definem o método das malhas para calcular a taxa de amostragem conveniente para o uso de modelo branco e as covariâncias dos ruídos destes modelos. Resumidamente, este método se caracteriza pelas Equações 4.169 e 4.171. Neste item tecem-se algumas considerações operacionais concernentes à aplicação deste método a problemas práticos. Basicamente tratam-se das hipóteses de trabalho do método, e em seguida, de aspectos da implementação do algoritmo.

A hipótese fundamental do método proposto é que o modelo branco represente bem o sistema quando $\Delta \rightarrow \infty$. Mais especificamente, é suposto que existam parâmetros q_i e r_i tais que as matrizes de covariância do resíduo e do erro de estimação do filtro de Kalman projetado segundo o modelo de ordem reduzida branco tendam assintoticamente às correspondentes matrizes de covariância obtidas pelo filtro de Kalman projetado segundo o modelo real, colorido, quando Δ cresce indefinidamente. A validade desta hipótese foi constatada analiticamente para o caso particular do sistema linear estacionário analisado nas seções anteriores. Contudo nada se pode garantir para sistemas não estacionários e ainda por cima não lineares, no caso geral.

Do ponto de vista prático, esta hipótese pode ser reformulada para se adequar melhor ao problema. Primeiramente, o intervalo entre observações (Δ) não deve crescer além do limite de validade do modelo linearizado do sistema, para não degradar o desempenho do filtro estendido e suas propriedades de convergência e estabilidade (para uma análise do efeito do erro de linearização, ver por exemplo Rios Neto and Negreiros de Paiva, 1981). Por outro lado, se o sistema linearizado for localmente estável, pode-se pensar em aplicar o método por intervalos de tempo da ordem do limite de validade da linearização do sistema. Tal idéia se apóia no conceito de sistema localmente estacionário. Neste caso, a taxa de amostragem ideal seria função do tempo. Esta questão, entretanto, exige estudos posteriores mais

aprofundados, subsidiados por um acúmulo de testes experimentais explorativos. Por ora o objetivo é apenas o de levantar questões pertinentes e dar uma visão panorâmica de temas a serem melhor investigados.

O método proposto pressupõe também que as observações estejam disponíveis a uma taxa de amostragem suficientemente alta de modo que seja possível tirar o máximo proveito da aproximação do sistema pelo modelo de ordem reduzida (branco). Certamente existem limites operacionais para a taxa de aquisição e de processamento de dados em tempo real, que podem impor restrições a esta hipótese. Neste caso o método serviria apenas para validar o modelo de ruído branco em termos da taxa de amostragem disponível. Isto é, uma vez estimadas as matrizes de covariância dos ruídos brancos, Q e R , se não houvessem mudanças significativas nos valores obtidos com Δ distintos então conclui-se que o modelo é válido.

Admite-se ainda uma outra hipótese de que os ruídos no estado e nas observações sejam mutuamente não correlacionados. Esta hipótese pode ser relaxada reformulando as equações do filtro de Kalman para incluir esta generalização, como em Maybeck(1979). O caso de ruídos correlacionados entre si, embora não seja muito frequentemente utilizado na literatura de dinâmica orbital, retrata bem alguns efeitos em sistemas aeronáuticos, por exemplo, onde existem distúrbios ambientais capazes de influenciar sensores e atuadores simultaneamente. Possivelmente situação semelhante ocorra em um satélite artificial estabilizado por rotação, onde o campo residual magnético do satélite afeta o movimento de atitude e interfere na leitura do magnetômetro.

Com relação à implementação do procedimento em computador digital destacam-se alguns aspectos. Em termos de memória o algoritmo proposto requer, para cada malha processada, o armazenamento das matrizes derivadas parciais da covariância mais recente do resíduo e do acúmulo de covariâncias até o presente. Numa avaliação aproximada e conservadora, isto implica em um gasto de memória $Nq+Nr$ vezes

maior que o necessário no procedimento normal de filtragem. O mesmo se pode dizer do tempo de processamento. Ao todo, este fator se multiplica ainda pelo número de malhas processadas (k^*) até se descobrir a taxa adequada de processamento. Este nível de sobrecarga computacional torna o procedimento mais naturalmente indicado para processamento em tempo não real ou para a fase de análise preliminar, como guia para a escolha da taxa de amostragem. Apesar disso, deve-se descontar o fato de que nesta análise superficial não se considerou o uso de algoritmos otimizados ou a possibilidade de implementação em processadores paralelos. Neste sentido o procedimento conta com o aspecto favorável de seu algoritmo ser essencialmente repetitivo, de modo que sua estrutura fica simplificada.

Um outro ponto a ser abordado é que embora até aqui o intervalo entre observações tenha sido implicitamente suposto constante, conforme indica a noção de taxa de amostragem, esta é apenas uma possibilidade que eventualmente simplifica a formulação do esquema proposto, mas não é uma hipótese restritiva de trabalho. Para tratar o caso onde $t_k - t_{k-1}$ não é constante basta entender a taxa de amostragem como o inverso do intervalo mínimo admissível entre duas observações consecutivas consideradas no processamento. Neste caso, a composição das malhas incompletas deve ser feita de modo a respeitar este vínculo, ainda que isto possa acarretar em um número menor de malhas distintas possíveis. O número de malhas consideradas, que no caso de Δ constante coincide sempre com o seu espaçamento k , apenas contribui para reduzir a incerteza dos elementos da covariância amostral dos resíduos em relação aos valores correspondentes de sua distribuição teórica. Em princípio, portanto, o método funcionaria mesmo com uma única malha para cada espaçamento k .

Outro aspecto também relacionado à taxa de amostragem é que seu valor ideal pode não ser o mesmo para todos os elementos do vetor de observação. Especialmente no caso onde existam observações oriundas de sensores de tipos distintos. Neste caso, pode-se alterar o esquema de busca do Δ ideal de modo a partir de Δ máximo aceitável na

prática e ir reduzindo seu valor até que a Inequação 4.171 não seja mais satisfeita. A partir deste ponto, se passaria a reduzir apenas o Δ correspondente a observações feitas por um mesmo tipo de sensor por vez, até que deixasse de ser possível reduzir Δ associado a qualquer sensor. Por certo este esquema modificado contém ainda um aumento de complexidade do algoritmo e requer estudos mais detalhados e específicos. O objetivo aqui é, novamente, apenas mostrar os possíveis desdobramentos da idéia básica proposta.

A possibilidade de escolha da matriz de ponderação do estimador de θ oferece um grau de liberdade a mais ao problema, permitindo atribuir maior importância a elementos mais confiáveis do vetor de resíduos (termos da diagonal associados a sensores mais precisos, por exemplo) em relação aos demais. Para ilustrar a versatilidade proporcionada pela introdução desta matriz de pesos, considera-se um caso particular onde a i -ésima coluna da matriz simétrica P seja nula (daí o porquê de P ser semidefinida positiva). Verifica-se que esta escolha implica em desconsiderar o i -ésimo elemento do vetor $\hat{\sigma}_e$ na estimação de θ . Outra opção seria adotar a interpretação estatística que considera a matriz P como a inversa da covariância do erro $\hat{\sigma}_e - \theta_e \theta$. Esta abordagem, seguida por Dee et alii (1985) para o caso do método de correlação de resíduos, embora sistematize a questão da escolha de aumenta ainda mais a complexidade do algoritmo e requer estimativas a priori dos parâmetros q_i e r_i . Uma alternativa mais realista na tentativa de preservar a conveniência da interpretação estatística mas evitar uma sobrecarga computacional excessiva seria tomar a matriz P diagonal com o $\ell_{i,j}$ -ésimo elemento correspondente ao elemento i,j da matriz de covariância amostral acumulada dos resíduos $\hat{\Sigma}$, dado por:

$$P_{\ell_{i,j}, \ell_{i,j}} = \text{diag} (\hat{\sigma}_{\ell_{i,i}} \hat{\sigma}_{\ell_{j,j}})^{-1} \quad (4.172)$$

Esta espécie de normalização da covariância dos resíduos se apóia na idéia de que se um sensor é preciso, seu resíduo deve ser também preciso. Em termos gerais, a questão do critério de escolha da

matriz de ponderação é um problema comum aos métodos de mínimos quadrados em geral e não específico ao método das malhas.

Finalmente, um último comentário operacional deve ser feito com relação ao cálculo da função Γ . Segundo a Equação 4.139, seu cálculo consiste de uma quadratura que requer o conhecimento da matriz de transição do sistema linearizado entre instantes arbitrários τ e t . Isto representa uma dificuldade do filtro estendido de Kalman (que, novamente, como no caso da escolha da matriz P , não é específica ao método das malhas), visto que a referida matriz Φ é calculada sempre entre um instante de amostragem t_{k-1} e outro arbitrário τ . Teoricamente, se Φ possui inversa (o que aliás é sempre verdade para sistemas lineares), então este problema pode ser resolvido simplesmente reescrevendo a Equação 4.139 assim:

$$\Gamma(t, k-1) = \Phi^{-1}(t, k-1) \left\{ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(\tau, k-1) B(\tau) Q(\tau) B'(\tau) \Phi'(\tau, k-1) d\tau \right\} \Phi'^{-1}(t, k-1) \quad . \quad (4.173)$$

Uma outra possibilidade menos complicada para contornar esta dificuldade consiste em subdividir o intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ em N_p partes de modo que a quadratura no cálculo de Γ possa ser numericamente aproximada como se mostra a seguir:

$$P^k(j) = \Phi(t_j^k, t_{j-1}^k) P^{k(j-1)} \Phi'(t_j^k, t_{j-1}^k) + \Gamma^k(j-1) \quad , \quad j=1, 2, \dots, N_p \quad , \quad (4.174)$$

onde:

$$P^k(0) \triangleq P(k-1|k-1) \quad , \quad (4.176)$$

$$P^k(N_p) \triangleq P(k|k-1) \quad , \quad (4.176)$$

$$\Gamma^k(j) \triangleq B(t_j^k) Q(t_j^k) B'(t_j^k) \overline{dt}_k \quad , \quad (4.177)$$

$$t_j^k = t_{k-1} + j \overline{dt}_k, \quad (4.178)$$

\overline{dt}_k é o sub-intervalo de discretização do intervalo $[t_{k-1}, t_k]$:

$$\overline{dt}_k = \frac{t_k - t_{k-1}}{N_p}. \quad (4.179)$$

CAPÍTULO 5

EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS MALHAS A UM SISTEMA MULTI-VARIÁVEL

5.1 - INTRODUÇÃO

A fim de proporcionar uma visão um pouco mais próxima da realidade quanto a aplicação prática do método das malhas, apresenta-se neste breve capítulo um exemplo onde o sistema é bi-dimensional. Para efeito de motivação, o exemplo a ser considerado é interpretado como um problema simplificado de determinação de atitude. Os resultados obtidos permitem verificar que as conclusões do capítulo anterior não se aplicam somente a sistemas lineares escalares diretamente observados, e assim servem de ponto de partida para aplicações mais elaboradas.

Inicialmente, apresenta-se uma visão geral sobre o problema de determinação de atitude, que permite avaliar a necessidade em potencial de aplicações práticas de estimadores adaptativos nesta área. Em seguida, equaciona-se o problema e apresentam-se resultados numéricos sobre o desempenho do estimador adaptativo. Na última seção tecem-se comentários sobre algumas características do procedimento que não tinham sido exploradas no exemplo escalar abordado no capítulo anterior.

5.2 - ASPECTOS GERAIS DO PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DE ATITUDE

A atitude de um sólido é a sua orientação em relação a algum referencial no espaço. A determinação da atitude de um satélite artificial é uma tarefa que envolve diversos aspectos que variam em gênero e em importância relativa de acordo com o tipo de satélite e sua missão. A fim de fornecer uma visão panorâmica dos tópicos pertinentes à determinação de atitude em função dos diversos tipos de satélite, a Tabela 1.1 apresenta uma espécie de ficha de especificação sumária para satélites artificiais que abrange as principais possibilidades em cada item. Nota-se a existência de alguns vínculos, não

absolutos, entre estes itens, mas ainda assim o número de arranjos possíveis é bastante grande. Como cada possibilidade tem implicações sobre a determinação de atitude, verifica-se que, ainda que o problema teórico a ser resolvido seja o mesmo, a obtenção de uma solução real adequada é bastante dependente do caso. A seguir analisa-se o interrelacionamento dos itens listados na Tabela 1.1 e suas implicações na determinação de atitude. Para esta análise utilizou-se como obra de referência Wertz (1978).

Satélites de telecomunicações ocupam órbitas geossíncronas equatoriais onde as perturbações ambientais são bastante reduzidas. Satélites de sensoriamento remoto e meteorológicos ocupam órbitas baixas e polares, onde as perturbações do tipo gravitacional, magnética e aerodinâmica são predominantes. Devido a conveniência de repetitividade nas condições de iluminação do solo imageado, os satélites de sensoriamento remoto possuem órbitas heliossíncronas circulares. Satélites científicos por vezes possuem órbitas elípticas que permitem alcançar grandes altitudes com menos energia. Com isso eles ficam sujeitos a tipos de perturbações dinâmicas variáveis. Já os satélites espiões podem ocupar órbitas elípticas para estender sua vida útil, reduzindo à região alvo o trecho de órbita razante onde as perturbações aerodinâmicas predominam e aceleram a queda do satélite.

Grande parte dos satélites são estabilizados de modo a permitir o apontamento de sua carga útil (antena, câmara, etc.) para a Terra. Isto pode ser conseguido: com o satélite inteiro apontado para a Terra; ou com o satélite estabilizado inercialmente em 3 eixos e a carga útil com controle próprio de atitude; ou ainda com o satélite estabilizado por dupla rotação de modo que a parte da carga útil gira de modo a permanecer apontada para a Terra ao longo da órbita, enquanto que a outra gira com frequência própria. Outros tipos de satélites apontam a carga útil para direções tais como o Sol ou alguma outra estrela.

TABELA 5.1

SUMÁRIO DE ASPECTOS RELEVANTES À DETERMINAÇÃO DE ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS

FUNÇÃO	ÓRBITA	PERTURBAÇÃO	ESTABILIZAÇÃO	ATUADORES	SENSORES	CONTROLE	DETERMINAÇÃO	MODELO DINÂMICO	MODELO DE ERROS
Científico	Equatorial	Aerodinâmica	1 Eixo	Jatos de Gás	Inerciais	Malha Aberta	Autônoma	Estático	Determinístico
Meteorológico	Polar	Gravitacional	(Spin ou Dual-Spin)	Roda de Reação	(giroscópios) "rate gyros" "rate integrating"	Malha Fechada	(tempo real)	Cinemático	(Calibrável)
Sensoriamento Remoto	Heliossíncrona	Magnética	2 Eixos	Volante de Inércia	Não-Inerciais	Autônomo	Em Terra	Dinâmico	Aleatório
Telecomunicações	Geossíncrona	Radiação Solar	3 Eixos	Bobina Magnética	Terrestre	de Terra	(tempo não real)	Empírico	(Filtrável)
Experimental	Próximas	"Slosh"	Inercial	Mastro Estendível	Solar	Ativo	1 eixo	De ordem reduzida	Ruído Branco
Espião	Razantes	Painéis Flexíveis	Apontado p/ Terra		Magnético	Passivo	3 eixos		Ruído Colorido
	Circulares		Apontado p/ Sol		Estelar	Manobra			
	Excêntricas		Apontado p/ Estrela		de 1 Eixo	Aquisição			
					de 3 Eixos	Estabilização			

Em termos de precisão de determinação e controle de atitude, satélites científicos podem ter os mais rigorosos requisitos quando o objetivo é observar alguma estrela (satélites astronômicos), podendo atingir a assombrosa casa de $0,1''$, como no caso do satélite astronômico de ultravioleta OAO-3 (Wertz, 1978). Os satélites de senso reamento remoto e de telecomunicações possuem precisões de apontamento da ordem de minutos de arco. Da mesma forma os satélites meteorológicos quando estão em órbitas geossíncronas, devido à grande altitude. Porém quando estão em órbitas baixas os requisitos de precisão relaxam para a faixa de 1 grau por focalizarem regiões maiores sobre a Terra do que aquelas em geral focalizadas pelos satélites de senso reamento remoto.

Para obter níveis de precisão grosseiros é suficiente o uso de controles passivos, baseados em interações com o meio ambiente. Controles ativos baseados em reações mecânicas são mais indicados para precisões mais finas. É conveniente, em termos de economia de potên cia, haver uma combinação de controle passivo para manobras e aquisi ção de atitude ou para dessaturação do volante de inércia, e controle ativo para a estabilização fina. No caso de manobras o controle em geral pode ser feito em malha aberta seguindo comandos de terra, enquanto que para a estabilização o controle é em malha fechada. Isto requer processamento a bordo e em tempo real para determinação e controle de atitude, caso a estabilização seja feita por controle ativo digital. Como se pode notar, a cada novo ítem fica mais bem definido o contexto em que se dá a determinação de atitude em um satélite particular, e as implicações deste fato vão ficando mais estreitas.

Sensores inerciais são os mais indicados para processa mento a bordo em tempo real, especialmente quando o controle é autôno mo e com boa precisão requerida não só para apontamento mas também para estabilidade de apontamento, isto é, a capacidade de manter pequena a velocidade angular do erro de apontamento. Isto porque a saída dos giroscópios ("rate gyros" e "rate-integrating gyros") podem ser diretamente proporcionais aos erros de apontamento e de estabili

dade de apontamento, e com alta precisão. Não obstante, sensores não inerciais são sempre necessários seja para recalibrar periodicamente os sensores inerciais sujeitos a deriva, seja para determinar a atitude sem o auxílio de giros a bordo ou em terra. Em última análise, são estes sensores que limitam a precisão final da determinação da atitude. Por isso, sistemas de controle autônomos de precisão fina utilizam sensores finos (estelares, solares finos, ...) para calibrar os giros.

Para satisfazer às necessidades de processamento a bordo em tempo real o modelo dinâmico deve ser o mais simples possível ainda que sem comprometer a precisão. Isto pode ser feito convenientemente utilizando o filtro de Kalman com propagação via modelo cinemático que dispensa o conhecimento das perturbações externas e do controle (Lefferts et alii, 1982). No caso de processamento em terra surgem várias possibilidades. O uso de modelagem dinâmica é aconselhável apenas quando se conhecem os torques principais atuantes, o que corresponde tipicamente à situação em que o controle é passivo. Se o sistema de controle é autônomo pode ser difícil reconstituir a sequência de controle em terra, de modo que o uso de modelo dinâmico fica prejudicado, a menos que se utilizem esquemas de compensação dinâmica. A solução em alguns casos em que se tenha observabilidade instantânea pode ser obtida por métodos que se baseiam no modelo estático. Em outros casos pode-se tentar melhorar a precisão usando um modelo totalmente empírico para ajustar a variação da atitude no tempo (polinômios, séries trigonométricas, etc.). Ou ainda, caso se tenha acesso a medidas de giroscópios com frequência de amostragem suficientemente alta, pode-se usar o modelo cinemático, que dispensa o conhecimento de torques, conforme anteriormente mencionado. As incertezas em todos estes modelos são usualmente consideradas como ruídos brancos ou processos estacionários de Gauss-Markov de primeira ordem.

Finalmente, os erros nas medidas dos sensores podem ser classificados de acordo com a sua fonte. Desalinhamentos de sensores (seja de seus dispositivos internos em relação a seu próprio referencial, seja de seu posicionamento no satélite em relação ao referencial deste) e polarizações são erros tendenciosos constantes que podem ser

calibrados em terra ou estimados a bordo e descontados no pré-processamento de dados. Distorções na função de transferência do sensor não são constantes mas também podem ser calibradas durante ensaios em terra e corrigidas por "software" no pré-processamento de dados. Outros tipos de erros, entretanto, são imprevisíveis na fase de pré-lançamento e só podem ser filtrados (se forem ruídos) ou estimados (caso contrário) durante a vida do satélite. Interferências eletrônicas ou mecânicas podem gerar ruídos aleatórios. Outro tipo de fonte de erros aleatórios é a digitalização dos sinais dos sensores, que podem assumir características de ruído branco com distribuição uniforme, caso a frequência de amostragem seja muito menor que a de variação do sinal medido, ou pode ter o aspecto de um erro aleatório tendencioso, fixo no tempo, se a frequência de amostragem for muito maior que a de variação do sinal medido. Existem ainda erros devidos a fontes de interferência externas ao sensor, seja devido a outros equipamentos do próprio satélite, seja devido ao meio ambiente. A modelagem física destes efeitos pode ser extremamente complexa e dependente de parâmetros cujos valores reais sejam desconhecidos (como é o caso de interferências magnéticas em um magnetômetro ou efeitos de borda em um sensor de horizonte terrestre). Por isso, torna-se mais adequado modelar este tipo de erro como ruído branco ou como processo estacionário de Gauss-Markov de primeira ordem. A possibilidade de estimar erros tendenciosos e filtrar ruídos depende muito da configuração particular de sensores e da dinâmica do satélite oferecer redundância suficiente de informação sobre a atitude. Além da questão da observabilidade propriamente dita é relevante aqui o compromisso entre o aumento da carga computacional (tempo de processamento, memória e complexidade do "software") necessária para estimar estes erros e a redução que isto permite obter na incerteza final da estimativa.

Em linhas conceituais gerais, a situação propícia ao uso de um filtro para melhorar a precisão da estimativa é aquela em que o modelo dinâmico (no sentido genérico, isto é, dinâmico ou cinemático ou mesmo estático) é preciso o suficiente para permitir usar um conjunto ampliado de medidas passadas juntamente com as presentes de modo a suprir artificialmente redundância de observações independentes. A

importância de se ter um conhecimento preciso do modelo dinâmico é crítica quando os sensores de atitude não inerciais não oferecem redundância suficiente para determinar localmente todos os parâmetros auxiliares além da própria atitude. Isto inclui, por exemplo, o período noturno da órbita de satélites equipados com sensor solar e as regiões de configuração geométrica pobre das direções observadas. Por outro lado, havendo redundância suficiente de informação instantânea, podem-se estimar parâmetros do modelo dinâmico e com isso obter um modelo de propagação de atitude mais preciso.

5.3 - EQUACIONAMENTO

Considera-se nesta seção o problema de estimação adaptativa de um sistema bi-dimensional cujo modelo de avaliação é descrita por:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - 2\lambda x_2 + w, \quad E\{w(t)w(\tau)\} = Q\delta(t-\tau) \quad (5.2)$$

$$\dot{v} = -\lambda_v v + \eta, \quad E\{\eta(t)\eta(\tau)\} = R_c \delta(t-\tau) \quad (5.3)$$

$$y = H_1 x_1 + H_2 x_2 + v, \quad (5.4)$$

onde ω , λ e λ_v são constantes positivas; H_1 e H_2 são constantes não negativas; η e w são ruídos brancos não tendenciosos e não correlacionados entre si e nem com os valores iniciais x_1, x_2 e v . Neste sistema, x_1 representa o ângulo e x_2 a velocidade angular que define a atitude em torno de um eixo desacoplado em um satélite; y representa uma observação feita por um sensor de atitude e v é um ruído colorido que representa a incerteza do sensor e é agregado ao vetor de estados no modelo de avaliação.

A relação que este sistema simples possui com a dinâmica de atitude fica estabelecida associando as constantes do sistema, ω e λ respectivamente a um torque restaurador do tipo gradiente de gravidade e a um torque dissipativo do tipo histerese magnética ou arrasto aerodinâmico.

mico.

Quanto ao ruído v , ele pode ser visto como a deriva de um giro ou interferências não modeladas em um magnetômetro.

Supondo a taxa de amostragem disponível de observação suficientemente alta deseja-se aplicar o método das malhas para o seguinte modelo de trabalho:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.5)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - 2\lambda x_2 + w, \quad E\{w(t)w(\tau)\} = Q\delta(t-\tau), \quad (5.6)$$

$$y = H_1 x_1 + H_2 x_2 + v, \quad E\{v(t)v(\tau)\} = R\delta(t-\tau), \quad (5.7)$$

R e Q desconhecidos. Dois casos são tratados, quanto ao tipo de observação. Em cada caso, apenas um tipo de observação é considerado para facilitar a análise e para tornar o problema localmente não completamente observável, isto é, sem observabilidade estática ou instantânea:

- a) Sensor não inercial, medindo x_1 ($H_1 = 1, H_2 = 0$);
- b) Sensor inercial, medindo x_2 ($H_1 = 0, H_2 = 1$).

A condição de equivalência entre os modelos de avaliação e de trabalho ocorre para $\Delta \rightarrow \infty$, onde se verifica que a variância do ruído na observação é dada por:

$$\begin{aligned} E\{v_i^2\} &= \frac{Rc}{2\lambda_v} \delta_i \\ &= R \delta_i, \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde a covariância do ruído de observação do modelo branco equivalente (modelo de trabalho) é dada por:

$$R = \frac{R_c}{2\lambda_v} . \quad (5.9)$$

O objetivo do método das malhas é estimar os valores de R e Q e detectar a taxa de amostragem ideal para o uso do modelo branco.

As matrizes de transição de estados e de ruído aditivo no estado para os modelos de trabalho e de avaliação são dados respectivamente por:

$$\phi_{1,1}(\Delta) = \frac{1}{2\omega_0} \{ (\lambda + \omega_0) \exp [(\lambda - \omega_0)\Delta] - (\lambda - \omega_0) \exp [-(\lambda + \omega_0)\Delta] \}$$

$$\phi_{1,2}(\Delta) = \frac{1}{2\omega_0} \{ \exp[-(\lambda - \omega_0)\Delta] - \exp[-(\lambda + \omega_0)\Delta] \}$$

$$\phi_{2,1}(\Delta) = -\omega^2 \phi_{1,2}(\Delta)$$

$$\phi_{2,2}(\Delta) = \frac{1}{2\omega_0} \{ (\lambda + \omega_0) \exp[-(\lambda + \omega_0)\Delta] - (\lambda - \omega_0) \exp[-(\lambda - \omega_0)\Delta] \}$$

$$\Gamma_{1,1}(\Delta) = \frac{1}{4\omega_0^2} \left\{ \frac{1 - \exp[-2(\lambda - \omega_0)\Delta]}{2(\lambda - \omega_0)} + \frac{1 - \exp[-2(\lambda + \omega_0)\Delta]}{2(\lambda + \omega_0)} - \frac{1 - \exp(-2\lambda\Delta)}{\lambda} \right\}$$

$$\Gamma_{1,2}(\Delta) = \frac{Q}{8\omega_0^2} \{ \exp[-(\lambda - \omega_0)\Delta] - \exp[-(\lambda + \omega_0)\Delta] \}^2$$

$$\Gamma_{2,1}(\Delta) = \Gamma_{1,2}(\Delta)$$

$$\Gamma_{2,2}(\Delta) = \frac{Q}{4\omega_0^2} \left\{ (\lambda + \omega_0) \frac{1 - \exp[-2(\lambda + \omega_0)\Delta]}{2} - \omega^2 \frac{1 - \exp - 2\lambda}{\lambda} + \right. \\ \left. (\lambda - \omega_0) \frac{1 - \exp[-2(\lambda - \omega_0)\Delta]}{2} \right\} ,$$

$$\phi_e = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \exp(-\lambda_v \Delta) \end{pmatrix} ,$$

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \frac{1 - \exp(-2\lambda_v \Delta)}{2\lambda_v} \end{pmatrix} ,$$

se $\lambda > \omega$, onde ω_0 é a frequência própria do sistema:

$$\omega_0 = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} .$$

Caso $\lambda < \omega$ tem-se:

$$\phi(\Delta) = \exp(-\lambda\Delta) \begin{pmatrix} \cos\omega_0\Delta + \frac{\lambda}{\omega_0} \operatorname{sen}\omega_0\Delta & \frac{\operatorname{sen}\omega_0\Delta}{\omega_0} \\ \frac{\omega^2}{\omega_0} \operatorname{sen}\omega_0\Delta & \cos\omega_0\Delta - \frac{\lambda}{\omega_0} \operatorname{sen}\omega_0\Delta \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(\Delta) = \Gamma_\infty + \frac{Q}{4\omega_0^2} \exp(-2\lambda\Delta) \begin{pmatrix} \frac{\lambda \cos 2\omega_0\Delta - \omega_0 \operatorname{sen} 2\omega_0\Delta}{\omega^2} - \frac{1}{\lambda} 2 \operatorname{sen} 2\omega_0\Delta \\ 2 \operatorname{sen}^2 \omega_0\Delta \quad \lambda \cos 2\omega_0\Delta + \omega_0 \operatorname{sen} 2\omega_0\Delta - \frac{\omega^2}{\lambda} \end{pmatrix}$$

onde

$$\Gamma_\infty = \frac{Q}{4\lambda} \begin{pmatrix} \omega^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando o método das malhas a este sistema, com:

$$P = I_2 \quad ,$$

$$R_0 = Q_0 = 0 \quad ,$$

$$R_1 = Q_1 = 1 \quad ,$$

$$N_r = N_q = 1 \quad ,$$

ou seja:

$$R = r \quad ,$$

$$Q = q \quad ,$$

obtêm-se os resultados mostrados nas Figuras 5.1-2, utilizando valores arbitrários de parâmetros ω e λ .

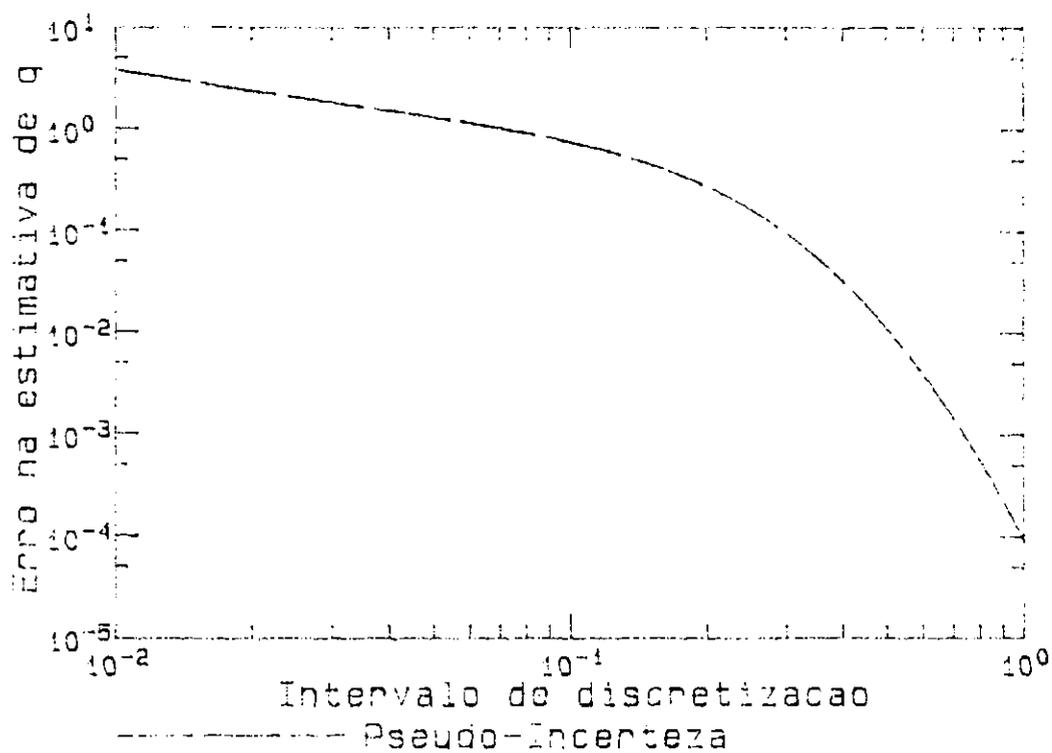
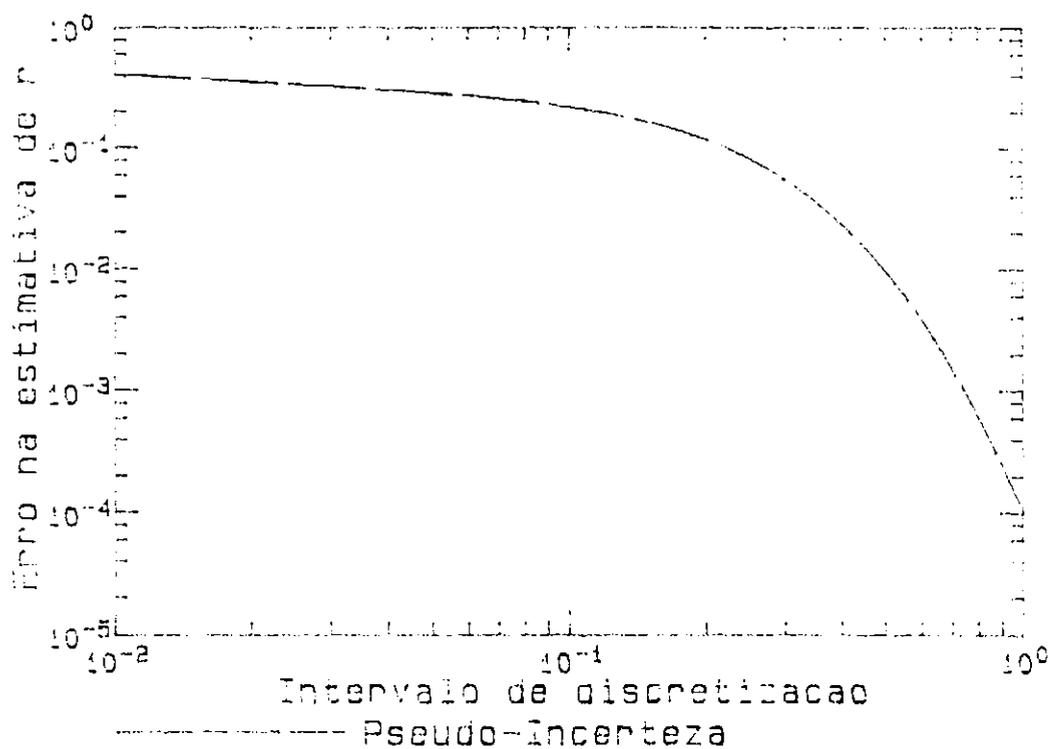


Fig. 5.1 - Desempenho do estimador adaptativo de atitude pelo método das malhas com observações angulares.

(continua)

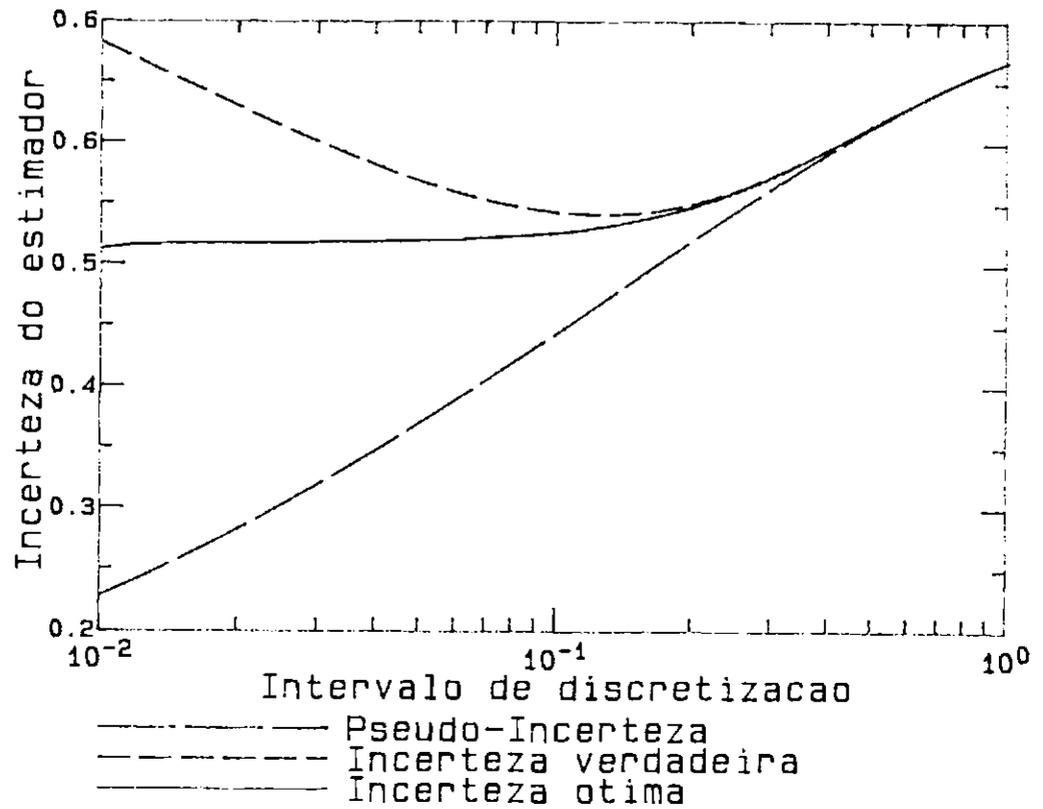
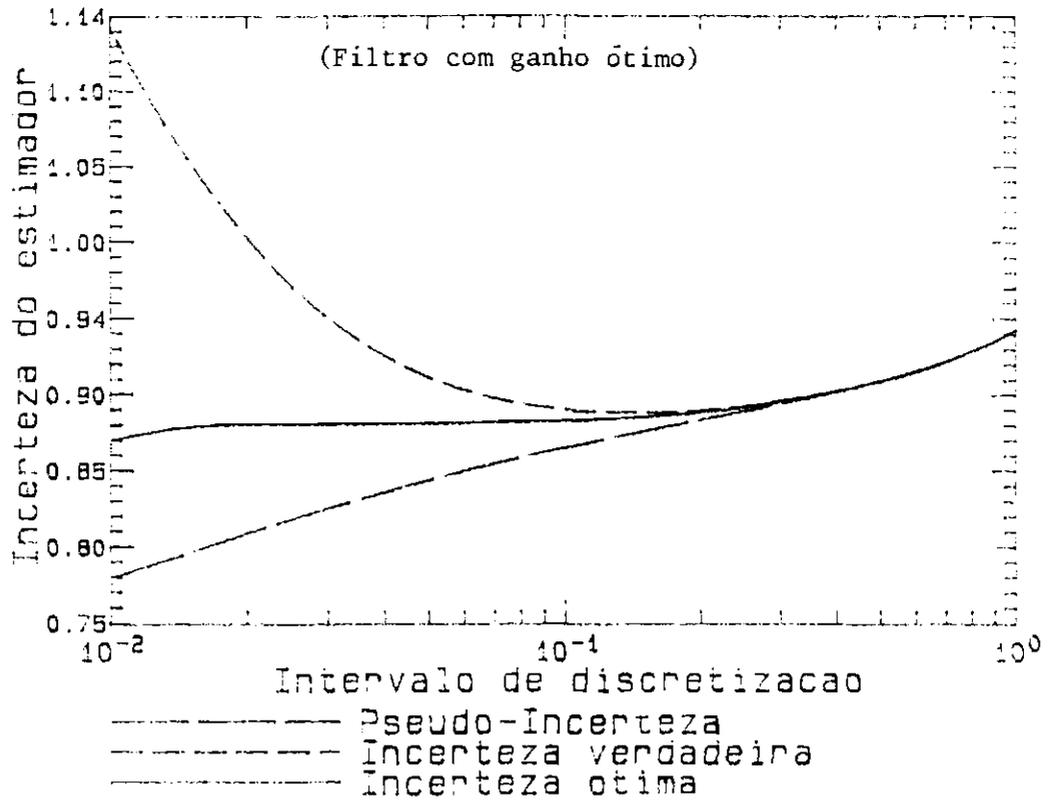


Fig. 5.1 - Continuação

(continua)

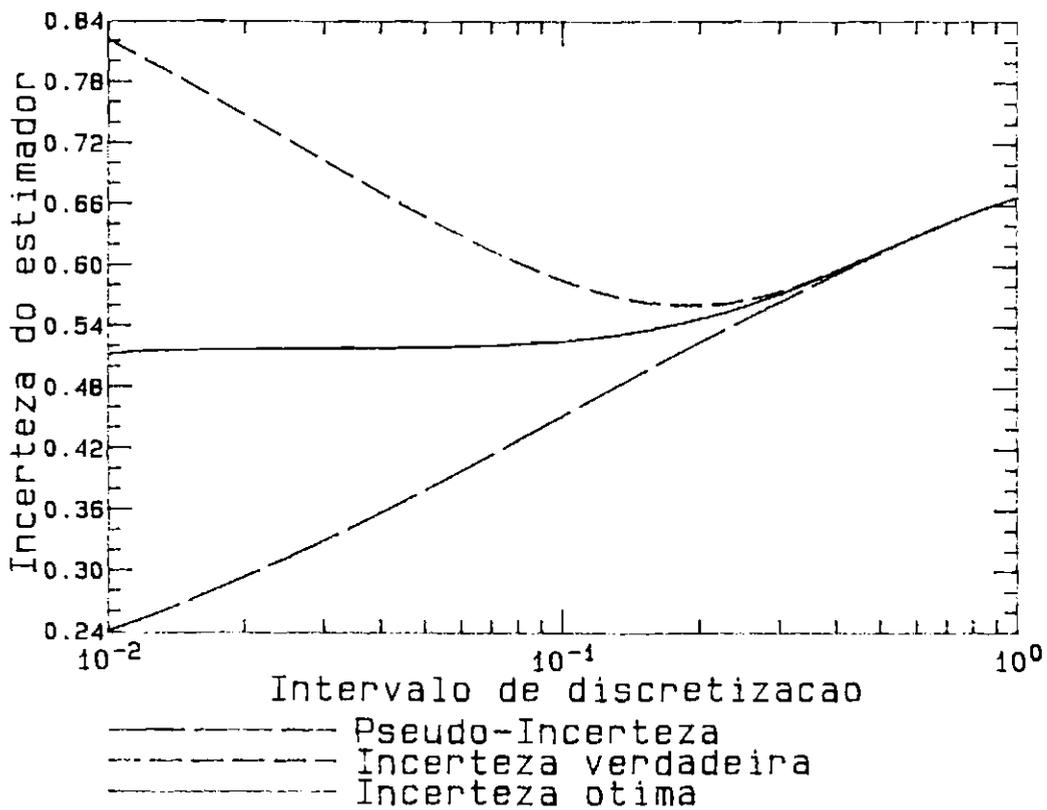
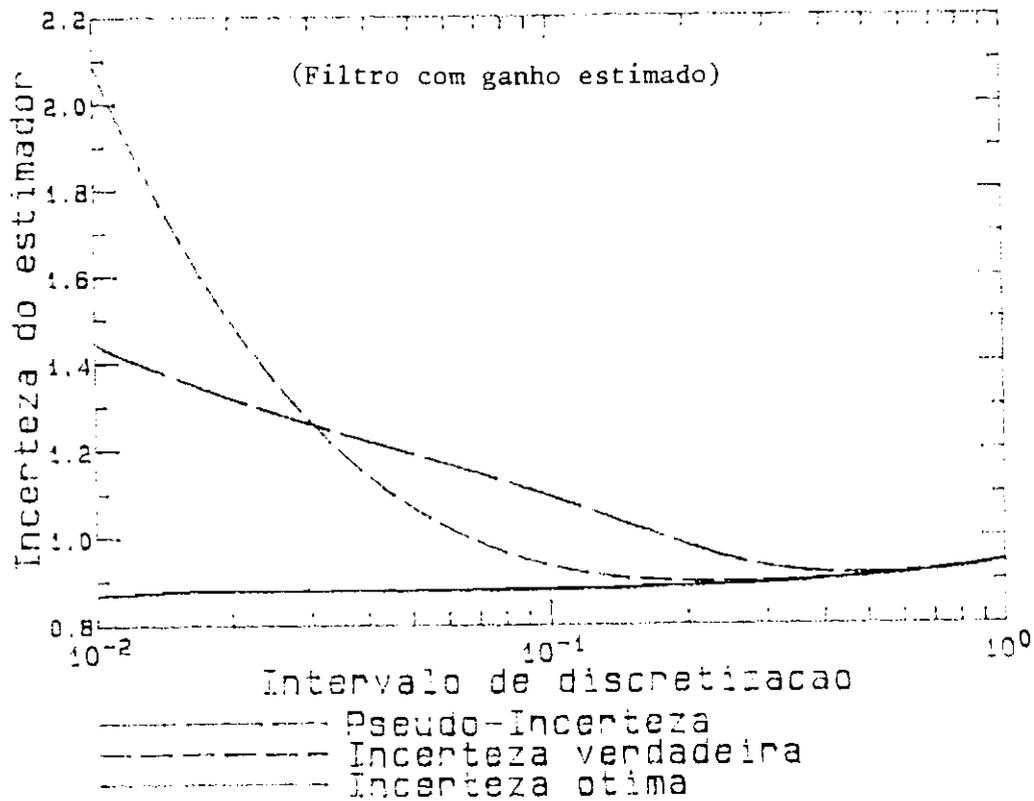


Fig. 5.1 - Conclusão.

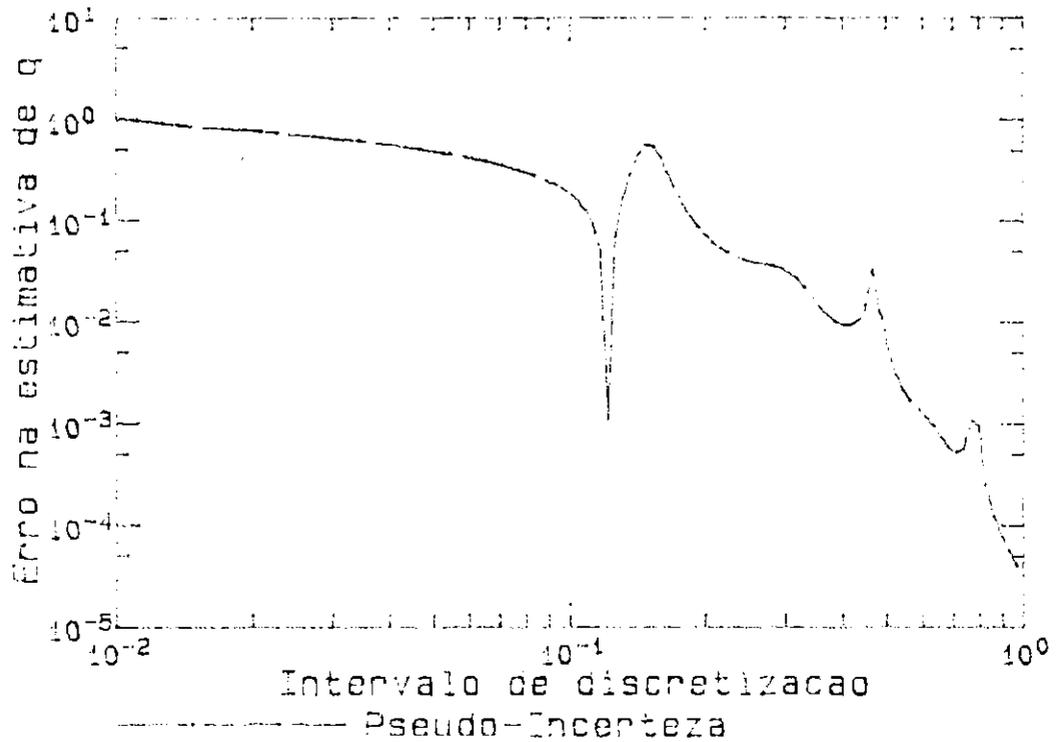
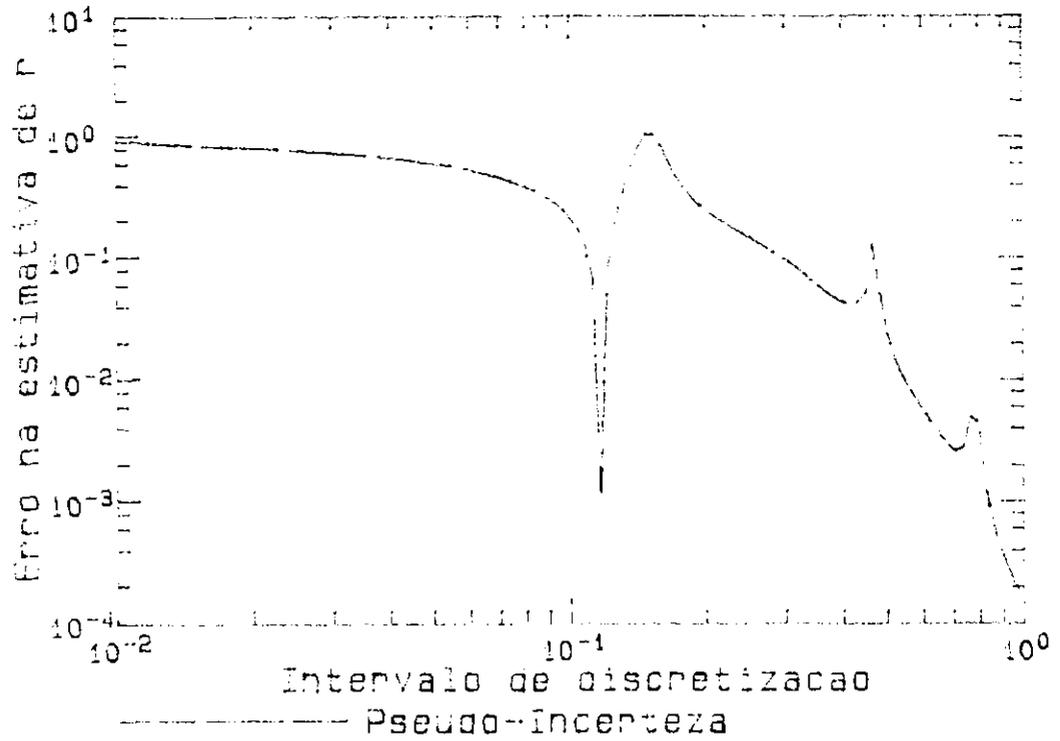


Fig. 5.2 - Desempenho do estimador adaptativo de atitude pelo método das malhas com observações de velocidade angular.

(continua)

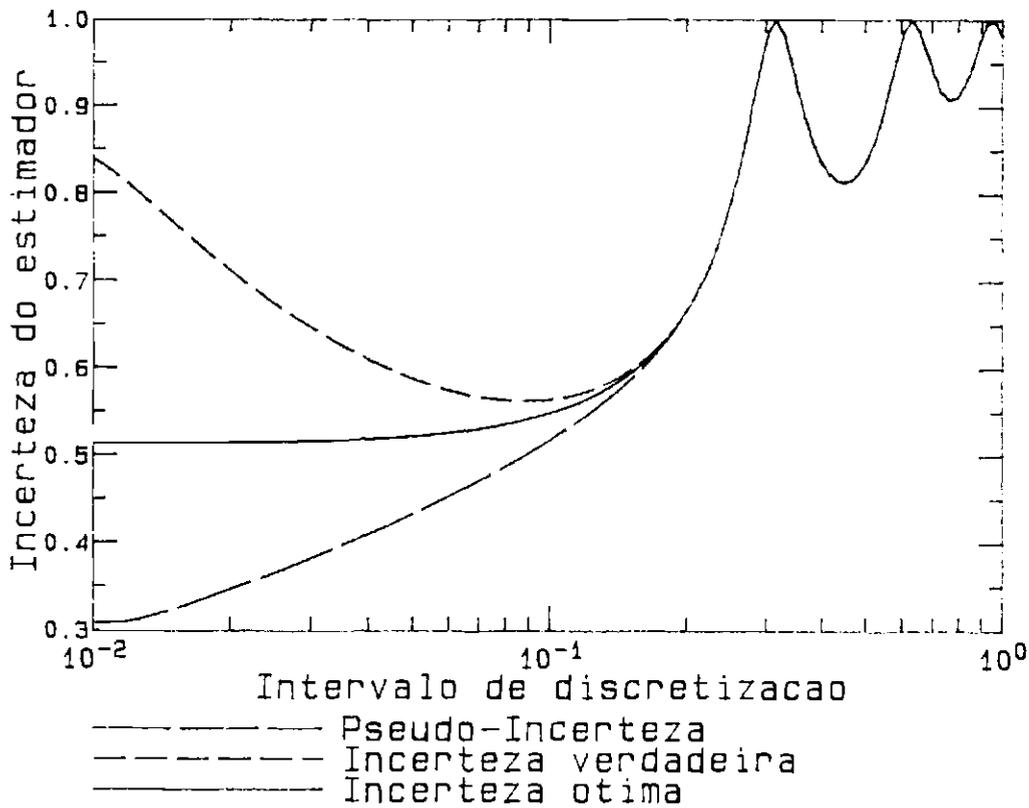
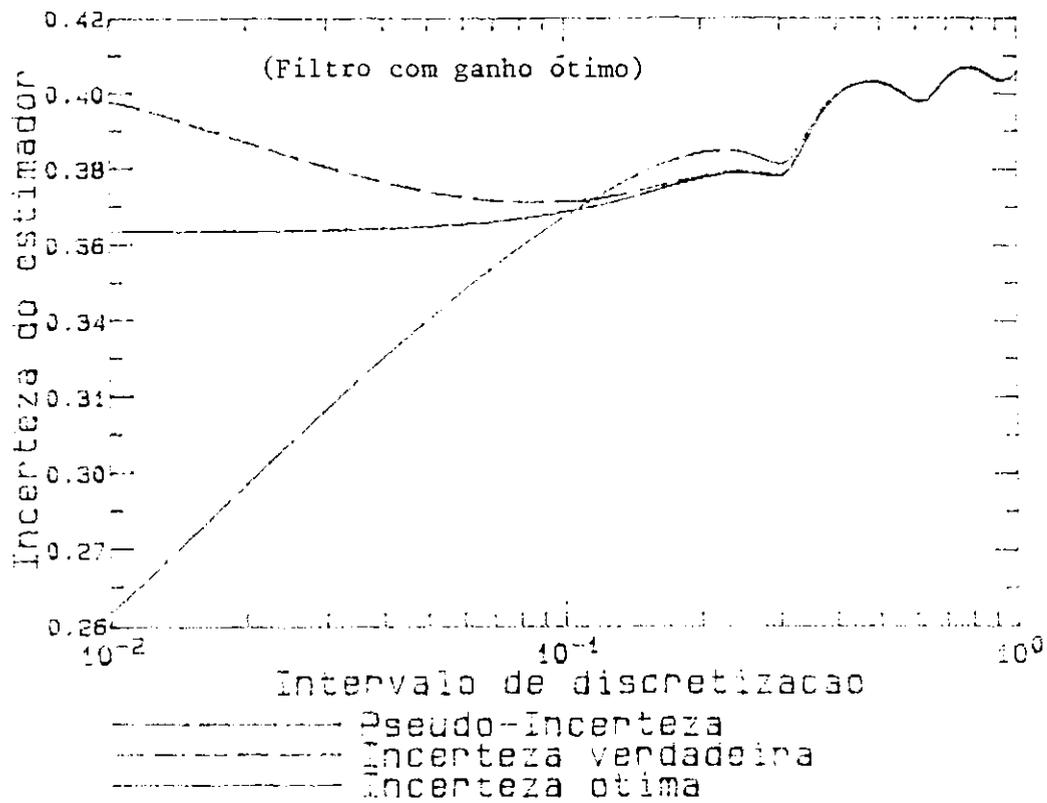


Fig. 5.2 - Continuação

(continua)

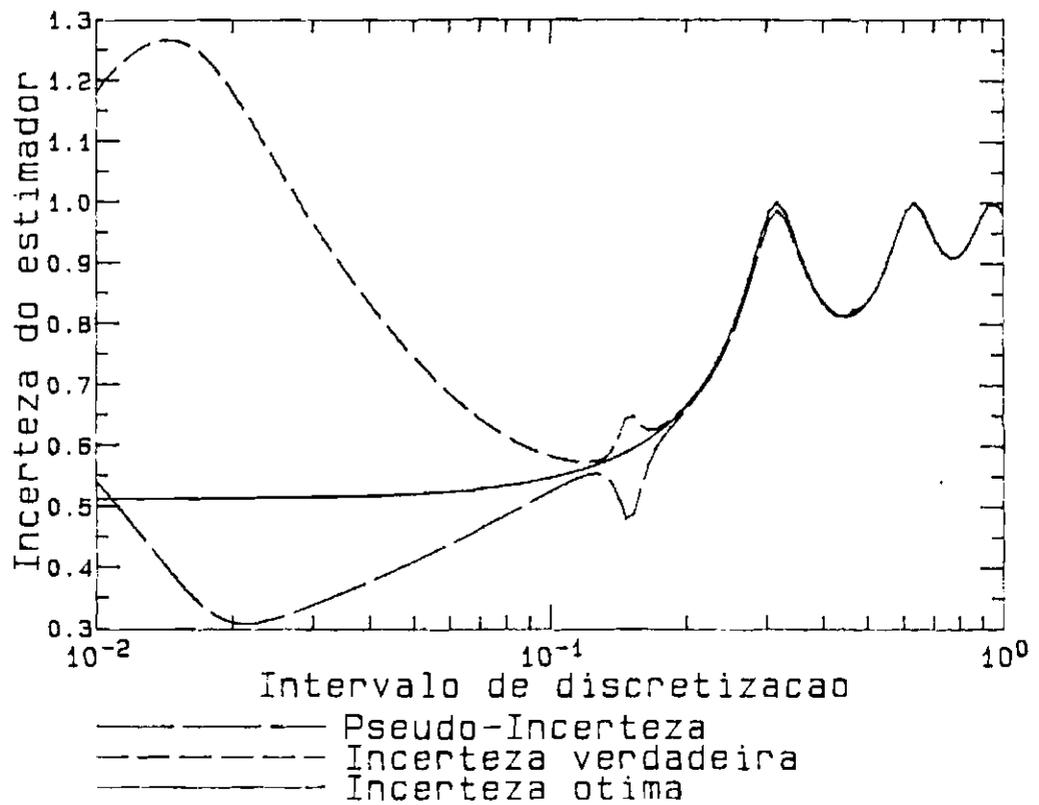
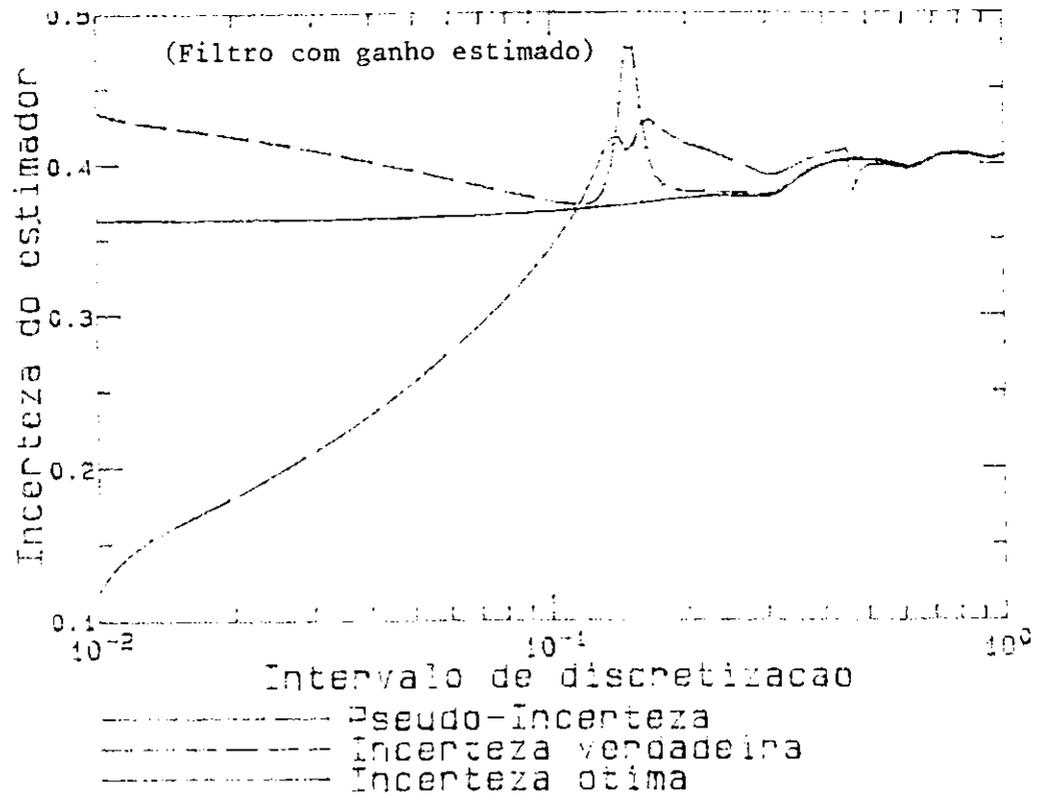


Fig. 5.2 - Conclusão.

5.4 - RESULTADOS E CONCLUSÕES

Os resultados mostrados nas Figuras 5.1 e 2 são análogos aos obtidos para o caso escalar com observação direta do estado, estudados no Capítulo 4. Isto indica que aqueles resultados não são válidos apenas para o caso escalar e podem ter aplicação em sistemas vetoriais tais como em determinação de atitude. Outro ponto a ser comentado é que os parâmetros R e Q foram estimados com base apenas num resíduo escalar. Caso ambas as observações (angular e de velocidade angular) fossem considerados simultaneamente, então haveriam 4 parâmetros a serem estimados e 6 covariâncias de resíduos. Para ilustrar a versatilidade da modelagem de ruídos de Bélanger, considera-se que Q seja conhecido e que se queira desconsiderar as covariâncias cruzadas entre ruídos bem como entre resíduos dos diferentes sensores. Para tanto basta tomar:

$$Q_0 = Q, R_0 = 0, R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$N_q = 0, N_r = 2,$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES GERAIS

6.1 - INTRODUÇÃO

Neste trabalho foram abordados alguns aspectos sobre estimação adaptativa, especialmente os relacionados com a questão da taxa de amostragem. Após uma revisão introdutória na área de estimação adaptativa em geral, três procedimentos distintos foram apresentados. Os dois primeiros, embora tragam contribuições ao tema abordado, são de cunho mais teórico, explorando as idéias que serviram de base para o terceiro, este sim, mais voltado para aplicações práticas.

No primeiro procedimento, apresentou-se uma extensão ao caso contínuo do estimador adaptativo pelo método de correlação de resíduos para processos vetoriais lineares invariantes no tempo. Para tanto foi utilizado um processo secundário guiado pelo resíduo, cujas propriedades estatísticas guardam as necessárias informações sobre o sistema para estimar as covariâncias dos ruídos no estado e nas observações. A definição deste processo é uma contribuição original do trabalho. A relação entre este caso contínuo e o problema da taxa de amostragem é que ele mostra as implicações de se levar a taxa de amostragem ao limite contínuo, onde os ruídos nas observações também passam a ser modelados como processos brancos contínuos. Exemplos numéricos simulados em computador digital por uma técnica de discretização no domínio da frequência foram apresentados para ilustrar o desempenho do procedimento no caso escalar. Para o caso multidimensional com ruídos coloridos do tipo processo estacionário de Gauss-Markov foi demonstrado que o estimador de covariâncias proposto é não tendencioso e consistente.

O segundo procedimento estendeu ao caso contínuo o método de validação cruzada para ajuste de grau de suavização de dados escalares. O uso da noção de grão de informação em um sinal contínuo para a aplicação do método de validação cruzada é também uma contribui

ção original do trabalho. Novamente surge um ponto de ligação com a questão da taxa de amostragem quando se interpreta o segmento omitido do sinal para efeito de ajuste do grau de suavização como a resolução do sinal. Estudaram-se casos particulares de sinais estocásticos corrompidos por ruídos brancos, de Gauss-Markov, e periódicos. Verificou-se que nestes casos existe uma equivalência com os resultados de suavização de estados, especialmente quando os ruídos são brancos ou quase brancos, no sentido de que sua banda de frequências seja muito mais alta que as do sistema.

Finalmente foi proposto um estimador adaptativo de estados para sistemas dinâmicos lineares multidimensionais e invariantes no tempo, baseado no processamento paralelo de malhas completa e alternadas (par e ímpar) das observações. Mostrou-se que se os ruídos no estado e nas observações puderem ser considerados brancos, então a covariância dos resíduos destas malhas formam um sistema linear nos parâmetros que determinam as covariâncias destes ruídos. Com base neste resultado formulou-se um método, denominado método das malhas, para estimar as matrizes de covariância dos ruídos no estado e nas observações e adaptar a máxima taxa de amostragem do processamento de modo a ainda ser válido o modelo de ruído branco. O uso de malhas distintas de observações para desenvolver um estimador adaptativo que leve em conta a questão da taxa de amostragem representa a principal contribuição original deste trabalho. Exemplos numéricos escalares e bidimensionais foram apresentados ilustrando o desempenho e as condições favoráveis à aplicação do método. Para o caso escalar foi feita uma análise paramétrica que permitiu estabelecer relações analíticas para classificar os sistemas quanto à relevância da filtragem e da escolha correta da taxa de amostragem.

6.2 - AVALIAÇÃO CRÍTICA DO TRABALHO

As idéias apresentadas neste trabalho ainda se encontram em um estágio de proposição de procedimentos alternativos e com novas abordagens em estimação adaptativa de estados. Por esta razão os procedimentos apresentados não foram ainda testados exaustivamente e

explorados em aplicações reais ou mesmo em simulações mais realistas em computador digital. Tão pouco foram apresentadas demonstrações de convergências ou sobre a precisão / robustez dos resultados obtidos. Os exemplos ilustrativos apresentados foram simplificados, por razões de didática adequada para esta fase de discussões em torno dos elementos básicos propostos. Trataram-se principalmente de processos lineares, escalares e diretamente observados. Entretanto, o exemplo bidimensional parcialmente observado estudado no Capítulo 5 serve para desfazer falsas concepções sobre reais restrições à aplicação do método.

Quanto à aplicação prática do procedimento, o exemplo simplificado de determinação de atitude considerou o problema reduzido ao movimento plano com dinâmica linear invariante no tempo e deu apenas uma idéia de como implementar o método em situações mais realistas. De fato o problema prático de determinação de atitude de satélites artificiais não é assim tão elementar, conquanto seja uma área com grande potencial de aplicação para o método proposto. Neste sentido o objetivo foi apenas o de introduzir motivação para o exemplo de aplicação.

Admite-se que a questão da implementação do método das malhas no caso de sistemas com muitas variáveis não é uma tarefa computacionalmente simples em termos de tempo de processamento e de memória requerida. Isto limita as aplicações do procedimento, ao menos na forma atual como está sendo proposto e dentro da realidade presente dos microprocessadores, a aplicações em tempo não real. Por outro lado, o algoritmo possui forte estrutura repetitiva, o que favorece o uso de processadores paralelos que podem amenizar esta questão.

Não obstante as limitações citadas, a quantidade de fatos observados mesmo em exemplos modestos foi significativa a ponto de mostrar as potencialidades do método para esclarecer a questão da influência da taxa de amostragem em processos estocásticos.

6.3 - PRINCIPAIS RESULTADOS

Destacam-se os seguintes principais resultados do trabalho. O primeiro é que é possível trabalhar com modelos de ruídos brancos quando o modelo real é colorido, desde que se ajuste a taxa de amostragem convenientemente. Se esta for muito elevada o filtro pode divergir, enquanto que no caso contrário, a precisão cai. Em todos os exemplos estudados houve pouca diferença entre a precisão das estimativas dos filtros quando se considera o modelo correto de ruídos coloridos no processamento da amostra completa de observações contínuas (filtro de Deyst) ou quando se considera o modelo aproximado de ruídos brancos no processamento sequencial das observações com taxa de amostragem ajustada pelo método das malhas. Entretanto não foi demonstrada a generalidade deste resultado sequer para sistemas multidimensionais lineares e invariantes no tempo.

Qualitativamente, a condição mais favorável à aplicação do método, isto é, aquela onde a escolha adequada da taxa de amostragem ideal é valiosa para obter uma acentuada redução na incerteza da estimativa, ocorre quando os ruídos, embora coloridos, forem quase brancos. Numericamente, o desempenho do método em simulações digitais foi semelhante aos de estimadores adaptativos convencionais: máxima verossimilhança; correlação de saídas; e correlação de resíduos.

O outro aspecto destacado é que o processo secundário guiado pelo resíduo em um filtro contínuo contém a informação sobre a estatística dos ruídos no sistema. De certa forma é como se os elementos do processo secundário se tornassem fotografias instantâneas da história do resíduo.

Por fim, registrou-se a existência de uma analogia entre a taxa de amostragem ideal e a resolução do sinal observado. Esta analogia ficou clara da equivalência entre resultados do método de validação cruzada, onde nenhum modelo estatístico é suposto sobre as medidas, com os resultados de suavização de estados no caso escalar para diferentes tipos de sinais coloridos. Embora esta equivalência de

resultados não tenha sido estabelecida em todo o espaço paramétrico, ela foi especialmente válida para frequências de ruídos muito maiores que as do estado, ou seja, para ruídos quase brancos.

6.4 - PERSPECTIVAS

Como um trabalho introdutório, várias questões ficaram para ser analisadas com mais profundidade. Destacam-se aqui algumas delas, que podem servir de temas para pesquisas ou aplicações futuras.

O procedimento de simulação do processo contínuo pode se basear em outras funções ortogonais eventualmente mais eficientes computacionalmente que as trigonométricas. Este desenvolvimento em série poderia ser também explorado para esclarecer a questão da relação entre os parâmetros do filtro secundário e a precisão do estimador adaptativo contínuo. Ainda no nível teórico uma linha de pesquisa seria tentar demonstrar as condições de convergência do método das malhas. Merece especial atenção o caso de ruídos quase brancos e sua possível relação com o teorema da amostragem na versão estocástica. Uma outra sugestão seria investigar a ligação dos resultados aqui encontrados com a questão da observabilidade e controlabilidade. Entretanto, a interpretação do modelo branco como um caso especial de modelo de ordem reduzida parece ser o caminho mais promissor para a obtenção de resultados teóricos por contar com o apoio de resultados cruzados com esta fértil área de pesquisa atual. Neste sentido, ver, por exemplo Asher et alii (1976).

Em termos de aplicações a perspectiva natural de continuidade do trabalho é a sua aplicação a áreas, tais como a determinação de atitude, visando estabelecer melhor as condições reais em que o procedimento se aplica. Propõe-se uma seqüência progressiva de trabalhos para alcançar este objetivo:

1. Aplicação do procedimento a um problema de determinação de atitude em três eixos, ainda com dinâmica linear estacionária e com observações lineares com taxa de amostragem constante e modelo de avaliação com ruídos coloridos de Gauss-Markov de primeira ordem na dinâmica e nas observações, via simulação digital;
2. Aplicação análoga, porém com o modelo de trabalho não linear realista mas incluindo apenas os termos predominantes nos torques atuantes e modelo de avaliação com ruídos representando realisticamente os demais distúrbios ambientais na dinâmica e nos sensores (e não mais aleatórios) ainda via simulação digital;
3. Aplicação análoga, porém com a avaliação feita via simulação híbrida, com sensores reais, simulador solar, simulador de terra, e simulador de atitude em três eixos.

Uma última linha de pesquisas ora sugerida se volta para a área de aplicações em tempo real. A idéia seria obter trabalhar pela obtenção de um algoritmo conceitualmente equivalente ao proposto aqui, porém na forma de uma série de filtros secundários paralelos cujas saídas seriam as covariâncias dos ruídos, associada ao esquema de detecção da taxa de amostragem ideal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALSPACH, D.L. A parallel filtering algorithm for linear systems with unknown time varying noise statistics. IEEE Transactions Automatic Control, AC-19(5):552-556, Oct. 1974.
- ALVES, J.B.M. Pré-tratamento do erro de observação não gaussiano em estimação linear de estado. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 4., Campinas, 14-17 set., 1982. Anais. Campinas, UNICAMP, 1982, p.106-110.
- AMARAL, S.; SIMÕES COSTA, A. Métodos para processamento de erros grosseiros múltiplos em estimadores de estado sequenciais ortogonais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 6., Belo Horizonte, 25-28 nov., 1986. Anais. Belo Horizonte, UFMG, 1986, p.24-30.
- ASHER, R.B.; HERRING, K.D.; RYLES, J.C. Bias, variance and estimation error in reduced order filters. Automatica, 12(6):589-600, Nov. 1976.
- BARSKY, B.A.; BEATTY, J.C. Local control of bias and tension in beta-splines. Computer Graphics, 17(3):193-218, July 1983.
- BASSEVILLE, M.; BENVENISTE, A.; MOUSTAKIDES, G.V. Detection and diagnosis of abrupt changes in modal characteristics of nonstationary digital signals. IEEE Transactions Information Theory, IT-32(3):412-417, May 1986.
- BÉLANGER, P.R. Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process. Automatica, 10(3):267-275, May 1974.
- BENDAT, J.S; PIERSOL, A.G. Random data: analysis and measurements procedures. New York, NY, Wiley-Interscience, 1971.

- BENVENISTE, A.; BASSEVILLE, M.; MOUSTAKIDES, G.V. The asymptotic local approach to change detection and model validation. IEEE Transactions Automatic Control, AC-32(7):583-592, July 1987.
- BROWN, R.G. Introduction to random signal analysis and Kalman filtering. New York, NY, John Wiley and Sons, 1983.
- BRYSON, A.E. Kalman filter divergence and aircraft motion estimators. Journal of Guidance and Control, 1(1):71-79, Jan./Feb. 1978.
- BRYSON, A.E.; FRAZIER, M. Smoothing for linear and nonlinear dynamic systems. Wright-Patterson, OH, AFB, Aeronautical Systems Division, 1963. (Technical Document Report, ASD-TDR-63-119). Proceedings of Optimum System Synthesis Conference, 1962.
- CARDENUTTO, N.C. Análise e simulação de um sistema inercial ("strapdown") de determinação de atitude auxiliado por estimação adaptativa da deriva. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, ago. 1984. (INPE-3257-TDL/177).
- CEBALLOS, D.C. Controlador com técnica de compensação baseada em um esquema de controle ativo sobre o efeito acumulado do desvio da modelagem. Tese de doutoramento em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, dez. 1983. (INPE-2987-TDL/152).
- CHIN, L. Advances in adaptive filtering. In: LEONDES, C.T., ed. Control and Dynamics Systems. New York, NY, Academic Press, 1979. V.15, p. 277-356. (Advances in Theory and Application).
- CRAVEN, P.; WAHBA, G. Smoothing noisy data with spline functions: estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation. Numerische Mathematik, 31:377-403, 1979.

- CRUZ, J.J.; LOPES, R.V.F. Validação do método do sorvedouro de energia para avaliar o desempenho de um amortecedor de nutação. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 10., Gramado, 21-25 set., 1987. Anais. Gramado, UFRGS, 1987, p.183-187.
- DE BOOR, C. A practical guide to splines. New York, NY, Spring Verlag, 1978.
- DEE, D.P.; COHN, S.E.; DALCHER, A.; GHIL, M. An efficient algorithm for estimating noise covariances in distributed systems. IEEE Transactions Automatic Control, AC-30(11):1057-1065, Nov. 1985.
- DORAISWAMI, R.; PEREIRA, J.L.R. A new bad data detection and identification algorithm. IEEE Transactions Reliability, R29(4): 333-335, Oct. 1980.
- DIAS, L.A.V.; VIJAYKUMAR, N.L. Noise correction on Landsat images using a spline-like algorithm. São José dos Campos, INPE, Jan. 1985. (INPE-3386-PRE/657). Presented at IV Plenary Meeting of SELPER - Remote Sensing Latinamerican Experts Society, held at Santiago, Chile, Nov. 12-16, 1984.
- FERRARESI, V.A. Utilização conjunta de sensores inerciais e não inerciais em determinação de atitude de satélites via filtro de Kalman. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, ago. 1987. (INPE-4313-TDL/280).
- FERREIRA L.D.D. Controle de satélites por aletas estabilizadoras. Tese de Doutorado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, set. 1983. (INPE-2889-TDL/112).
- FLEURY, A.T. Estimadores de estado de sistemas dinâmicos baseados no conceito de dualidade. Tese de Doutorado em Engenharia. São Paulo, USP, out. 1985.

- FLEURY, A.T.; RIOS NETO, A. Estimador de estado com o emprego de controle virtual e critérios associados de aceleração da convergência. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 6., Belo Horizonte, 25-28 nov. 1986. Anais. Belo Horizonte, UFMG, 1986, p.9-16.
- GOODWIN, G.C.; SIN, K.S. Adaptive filtering, prediction and control. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1984. 540p. (Prentice-Hall Information and System Sciences Series).
- GUEDES, U.T.V. Procedimento para estimação de atitude de um satélite estabilizado por rotação. Dissertação de mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE. No prelo.
- HANDSCHIN, E.; SCHWEPPE, F.C.; KOHLAS, J.; FIECHTER, A. Bad data analysis for power system state estimation. IEEE Transactions Power Apparatus and Systems, PAS-94(2):329-337, Mar./Apr. 1975.
- HEFFES, H. The effects of erroneous models on the Kalman filter response IEEE Transactions Automatic Control, AC-11(3):541-543, July 1966.
- JAZWINSKI, A.H. Stochastic process and filtering theory. New York, NY, Academic Press, 1970. (Mathematics in Science and Engineering, 64).
- KAILATH, T. A view of three decades of linear filtering theory. In: KAILATH, T., ed. Linear Least Squares Estimation. Dowden, Hutchinsonson and Ross, Stroudsburg, PA, 1977. p.10-45.
- _____. Linear Systems, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1980. (Prentice-Hall Information and System Sciences Series).
- KUGA, H.K. Estimação adaptativa de órbitas aplicadas a satélites a baixa atitude. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, fev. 1982. (INPE-2316-TDL/079).

- KUGA, H.K.; GUEDES, U.T.V. Cálculo de eclipses para órbitas elípticas. São José dos Campos, INPE, out. 1987. (INPE-4412-NTE/277).
- KORTMAN, C.M. Redundancy reduction - a practical method of data compression. Proceedings of the IEEE, 55(3):253-263, Mar. 1967.
- LAINIOTIS, D.G. Joint detection, estimation and system identification. Journal International Control, 19: 75-92, Aug. 1971.
- LAUB, A.J. A Schur method for solving algebraic Riccati equation. IEEE Transactions Automatic Control, AC-24(6):913-921. Dec. 1979.
- LEFFERTS, E.J.; MARKLEY, F.L.; SHUSTER, M.D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 5(5):417-429, Sept./Oct. 1982.
- LOPES, R.V.F. Determinação de atitude de satélites artificiais através de estimadores de estado. Tese de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, dez. 1982. (INPE-2608-TDL/105).
- _____ Modelagem de um amortecedor de nutação para satélites estabilizados por rotação. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 9., Florianópolis, 7-11 dez., 1987. Anais. Florianópolis, UFSC, 1987, p.761-764.
- _____ Suavização no domínio da frequência. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 5.; CONGRESSO LATINO-AMERICANO DE AUTOMÁTICA, 1., Campina Grande, 3-6 set., 1984. Anais. Campina Grande, UFPb, 1984, p.490-495.
- _____ Um estimador para a variância do erro em medidas. São José dos Campos, INPE, jun. 1985. (INPE-3553-PRE/765). Apresentado na XXXVI Reunião da SBPC, S.Paulo, 4-11 jul., 1984.

MAYBECK, P.S. Advanced applications of Kalman filters and nonlinear estimators in aerospace systems. In: LEONDES, C.T., ed. Control and Dynamics Systems. New York, NY, Academic Press, 1983. v.20, p.67-154. (Advances in Theory and Application).

Stochastic models, estimation, and control. N.York, NY, Academic Press, v.1. 1979. (Mathematics in Science and Engeneering).

MEHRA, R.K. Approaches to adaptive filtering. IEEE Transactions Automatic Control, AC-17(5):693-698, Oct. 1972.

On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. IEEE Transactions Automatic Control, AC-15(2):175-184, Apr. 1970.

MORO, J. Modelagem, análise e síntese preliminar de um sistema de controle de atitude ativo em três eixos para satélites artificiais. Tese de Doutorado em Engenharia São Paulo. USP, 1983.

MYERS, K.A.; TAPLEY, B.D. Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics. IEEE Transactions Automatic Control, AC-21(4): 520-523, Aug. 1976.

NASCIMENTO Jr., C.L. e YONEYAMA, T. Avaliação de implementações alternativas de filtros de Kalman através do método de Monte Carlo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 6., Belo Horizonte, 25-28 nov., 1986. Anais. Belo Horizonte, UFMG, 1986, p.610-613.

NEGREIROS DE PAIVA, R. Determinação de órbitas de satélites artificiais através de um estimador na presença de acalerações não modeladas, usando a transformação KS. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1980. (INPE-1998-TDL/040).

NEGREIROS DE PAIVA, R. Procedimentos de estimação de estado aplicáveis em sistemas de determinação de órbita a bordo de satélites artificiais. Tese de doutoramento em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE. No prelo.

OHNISHI, K. Direct recursive estimation of noise statistics. In: LEONDES, C.T., ed. Control and Dynamics Systems. New York, NY, Academic Press, 1980. v.16, p.249-297. (Advances in Theory and Application).

ORLANDO, V. Técnicas estocásticas aplicadas à suavização, tratamento de tendências e compressão de dados de rastreamento ou telemetria de satélites artificiais. Tese de doutoramento em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1983. (INPE-2909-TDL/148).

ORLANDO, V.; LOPES, R.V.F. Algoritmo para suavização de dados via ajuste de curvas por mínimos quadrados com detecção de dados inválidos. São José dos Campos, INPE. ago. 1985. (INPE-3621-PRE/805).

ORLANDO, V.; RIOS NETO, A. Aplicação de técnica de ruído adaptativo em estimação de estado à suavização de dados. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 5.; CONGRESSO-LATINO AMERICANO DE AUTOMÁTICA, 1., Campina Grande, 3-6 set., 1984. Anais. Campina Grande, UFPb, 1984, p.64-69.

PADILHA, O.S. Técnicas de controle auto-sintonizável implícita e explícita, com estimação de parâmetros via filtro de Kalman, aplicáveis à atitude de satélites artificiais. Dissertação de mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE. No prelo.

PAPOULIS, A. Probability random variables and stochastic processes. Tokio, McGraw-Hill Kogakusha, 1965.

- PEARSON, J.O. Estimation of uncertain systems. In: LEONDES, C.T., ed. Control and Dynamics Systems. New York, NY, Academic Press, 1973. v.10, p.255-343. (Advances in Theory and Application).
- PRICE, C.F. An analysis of the divergence problem in the Kalman filter. IEEE Transactions Automatic Control, AC-13(6):699-702. Dec. 1968.
- REINSCH, C.H. Smoothing by spline functions. Numerische Mathematik, 10:177-183, 1967.
- RIBEIRO, J.F. O uso de controle auto-sintonizado num sistema de controle de atitude ativo em três eixos de um satélite artificial de sensoriamento remoto. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, mar. 1986. (INPE-3840-TDL/213).
- RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. Estimativa adaptativa do ruído no estado para o filtro de Kalman. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 4., Campinas, 14-17 set., 1982. Anais. Campinas, UNICAMP, 1982, p. 101-105.
- RIOS NETO, A.; LOPES, R.V.F.; NEGREIROS DE PAIVA, R. Estimativa adaptativa da atitude de satélites artificiais via filtro de Kalman com compensação do modelo dinâmico. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 4., Campinas, 14-17 set., 1982. Anais. Campinas, UNICAMP, 1982, p. 164-168.
- RIOS NETO, A.; NEGREIROS DE PAIVA, R. An adaptive satellite orbit estimation scheme using an analytical approach and a dynamical model compensation technique. In: FERRAZ-MELLO, S.; NACOZY, P.E., ed. The motion of planets and natural and artificial satellites; Proceedings of a CNPq-NSF Symposium and Workshop held in Embu, Brazil, Dec. 14-18, 1981, p.133-146.

- RIOS NETO, A.; TAPLEY, B.D. Estimating the state of nonlinear dynamical systems in the presence of unmodeled accelerations. In: COBEM, 3., Rio de Janeiro, 1975. Proceedings. Rio de Janeiro, UFRJ, 1975. p. 969-982.
- SCHLEE, F.H.; STANDISH, C.J.; TODA, N.F. Divergence in Kalman filter. AIAA Journal, 5(6):1114-1120, June 1967.
- SHUSTER, M.D.; CHITRE, D.M.; NIEBUR, D.P. In-flight estimation of spacecraft attitude sensor accuracies and alignments. Journal of Guidance and Control, 5(4):339-343, July/Aug. 1982.
- SILVA, W.C.C. Determinação de expressões analíticas simplificadas para cálculo e propagação de órbitas mediante o uso da teoria de estimação de parâmetros. Tese de doutoramento em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, fev. 1982. (INPE-2320-TDL/080).
- SKELTON, R.E. Adaptive orthogonal filters for compensation of model errors in matrix-second-order systems. Journal of Guidance and Control, 4(2):214-221, Mar./Apr. 1981.
- SOUZA, C.E. and FERNANDES, J.M. Convergence properties of an optimal filter design with correlated output noise. IEEE Transactions Automatic Control, AC-30(5):487-488, May 1985.
- SOUZA, L.C.G. Controle de atitude de um satélite artificial através da extensão da teoria do regulador linear quadrático. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, out. 1987. (INPE-4407-TDL/304).
- SOUZA, M.L.O. Estudo e desenvolvimento de um sistema de controle de atitude ativo em três eixos para satélites artificiais usando atuadores pneumáticos a gás frio e volante a reação. Tese de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, fev. 1981. (INPE-2000-TDL/042).

- SMITH, G.L. Sequential estimation of observation error variances in a trajectory estimation problem. AIAA Journal, 5(11):1964-1970, Nov. 1967.
- TAPLEY, B.D.; BORN, G.H. Sequential estimation of the state and the observation error covariance matrix. AIAA Journal, 9(2):212-217, Feb. 1971.
- TAPLEY, B.D.; INGRAM, D.S. Orbit determination in the presence of unmodeled accelerations. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-18(4):369-373, Aug. 1973.
- THORTON, C.L.; BIERMAN, G.J. UDU' covariance factorization for Kalman filtering. In: LEONDES, C.T., ed. Control and Dynamics Systems. New York, NY, Academic Press, 1980. v.16, p.177-248. (Advances in Theory and Application).
- TRABASSO, L.G. Anteprojeto de uma unidade de medida inercial não giroscópica. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE. maio 1986. (INPE-3887-TDL/220).
- UTRERAS DIAZ, F. Sur le choix du parametre d'ajustement dans le lissage par fonctions splines. Numerische Mathematik, 34:15-28, 1980.
- VAROTTO, S.E.C. Determinação da atitude de satélites artificiais através da aplicação conjunta de técnicas de estimação ótima estática e dinâmica. Tese de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, out. 1987. (INPE-4415-TDL/306).
- WAHBA, G. Cross validated spline methods for direct and indirect sensing experiments. Madison, WI, University of Wisconsin, Oct. 1982. (Technical Report, 694). This report was prepared for the proceedings of the Signal Processing in the Ocean Environment Workshop, Annapolis, MD, May 1982.

- WAHBA, G. Smoothing noisy data with spline functions. Numerische Mathematik, 24:383-393, 1975.
- WAX, M.; KAILATH, T. Direct approach to two-filter smoothing formulas. International Journal of Control, 39(3):517-522, 1984.
- WERTZ, J.R. Spacecraft attitude determination and control. London, D.Reidel, 1978. (Astrophysics and Space Science Library).
- WHITE, J.E.; SPEYER, J.L. Detection filter design: spectral theory and algorithms. IEEE Transactions Automatic Control, AC-32(7):593-603, July 1987.
- WILLSKY, A.S. A survey of design methods for failure detection in dynamic systems. Automatica, 12(6):601-611, Nov. 1976.

APÊNDICE A

ERGODICIDADE DO PROCESSO SECUNDÁRIO Z(t)

Neste Apêndice demonstra-se a ergodicidade do vetor processo secundário $Z(t)$, definido no Capítulo 2 pela Equação 2.14. Para que um processo gaussiano seja ergódico é suficiente que sua densidade espectral de potência seja contínua (Bendat and Piersol, 1971). Que o processo $Z(t)$ é gaussiano é evidente da Equação 2.14, segundo a qual ele obedece a uma equação diferencial linear estocástica com termo forçante linear no resíduo, o qual é sabidamente gaussiano. Além disso, a condição inicial $Z(t_0)$ é determinística. Resta portanto verificar se a densidade espectral de potência do processo secundário não possui descontinuidades.

Antes de calcular a densidade espectral de potência de $Z(t)$, convém obter algumas relações envolvendo a função de covariância do estado estendido ΔX_e definido no item 2.1.3 pela Equação 2.18:

$$\text{Cov}_{\Delta X_e, \Delta X_e}(t, \tau) \triangleq E\{\Delta X_e(t) \Delta X_e'(\tau)\} . \quad (\text{A.1})$$

Derivando esta expressão em relação ao tempo, obtém-se com o auxílio da Equação 2.19:

$$\dot{\text{Cov}}_{\Delta X_e, \Delta X_e}(t, \tau) = M_e \text{Cov}_{\Delta X_e, \Delta X_e}(t, \tau), \quad \forall t > \tau. \quad (\text{A.2})$$

com M_e definida pela Equação 2.20. Deve-se lembrar que a condição para que a covariância de ΔX_e entre em regime permanente é que as matrizes M e S , partições da matriz M_e , sejam definidas negativas. Definindo então a covariância de regime permanente:

$$\text{Cov}_{\Delta X_e, \Delta X_e}^{\infty}(s) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Cov}_{\Delta X_e, \Delta X_e}(t + s, t). \quad (\text{A.3})$$

e derivando em relação a δ , obtêm-se:

$$\frac{d}{d\delta} \text{Cov}_{\Delta X_e, \Delta X_e}^{\infty}(\delta) = M_e \text{Cov}_{\Delta X_e, \Delta X_e}^{\infty}(\delta), \quad \forall \delta > 0 \quad (\text{A.4})$$

Desenvolvendo a Equação A.4 em termos dos componentes de ΔX_e chega-se a:

$$\frac{d}{d\delta} \text{Cov}_{\Delta X, \Delta X}^{\infty}(\delta) = M \text{Cov}_{\Delta X, \Delta X}^{\infty}(\delta), \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d}{d\delta} \text{Cov}_{\Delta X, Z}^{\infty}(\delta) = M \text{Cov}_{\Delta X, Z}^{\infty}(\delta), \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d}{d\delta} \text{Cov}_{Z, \Delta X}^{\infty}(\delta) = S \text{Cov}_{Z, \Delta X}^{\infty}(\delta) - G H \text{Cov}_{\Delta X, \Delta X}^{\infty}(\delta), \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{d}{d\delta} \text{Cov}_{Z, Z}^{\infty}(\delta) = S \text{Cov}_{Z, Z}^{\infty}(\delta) - G H \text{Cov}_{\Delta X, Z}^{\infty}(\delta), \quad \forall \delta > 0. \quad (\text{A.8})$$

Da Definição A.1 conclui-se que:

$$\text{Cov}_{\Delta X_e, \Delta X_e}^{\infty}(\tau, t) = \text{Cov}_{\Delta X_e, \Delta X_e}^{\infty}(t, \tau), \quad (\text{A.9})$$

e, conseqüentemente, da Definição A.3 segue que:

$$\text{Cov}_{\Delta X_e, \Delta X_e}^{\infty}(-\delta) = \text{Cov}_{\Delta X_e, \Delta X_e}^{\infty}(\delta) \quad (\text{A.10})$$

ou seja:

$$\text{Cov}_{\Delta X, \Delta X}^{\infty}(-\delta) = \text{Cov}_{\Delta X, \Delta X}^{\infty}(\delta), \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Cov}_{\Delta X, Z}^{\infty}(-\delta) = \text{Cov}_{Z, \Delta X}^{\infty}(\delta), \quad (\text{A.12})$$

$$\text{Cov}_{Z, \Delta X}^{\infty}(-\delta) = \text{Cov}_{\Delta X, Z}^{\infty}(\delta) \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Cov}_{Z, Z}^{\infty}(-\delta) = \text{Cov}_{Z, Z}^{\infty}(\delta). \quad (\text{A.14})$$

A partir destes resultados pode-se então calcular $F_{Z,Z}(\omega)$. Pela definição de densidade espectral de potência tem-se:

$$S_{Z,Z}(\omega) \triangleq F[\text{Cov}_{Z,Z}^{\infty}(s)] = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Exp}(-j\omega s) \text{Cov}_{Z,Z}^{\infty}(s) ds, \quad (\text{A.15})$$

onde j representa a unidade imaginária. Utilizando a Equação A.14, pode-se reescrever a Equação A.15 assim:

$$S_{Z,Z}(\omega) = J(\omega) + J'(-\omega), \quad (\text{A.16})$$

onde $J(\omega)$ é dado por:

$$J(\omega) \triangleq \int_0^{\infty} \text{Exp}(-j\omega s) \text{Cov}_{Z,Z}^{\infty}(s) ds. \quad (\text{A.17})$$

Integrando por partes com o auxílio da Equação A.8 obtém-se:

$$J(\omega) = \frac{\text{Exp}(-j\omega s)}{-j\omega} \text{Cov}_{Z,Z}^{\infty}(s) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\text{Exp}(-j\omega s)}{j\omega} [S \text{Cov}_{Z,Z}^{\infty}(s) + G H \text{Cov}_{\Delta X,Z}^{\infty}(s)] ds \quad (\text{A.18})$$

A solução da Equação A.6, dado que $\text{Cov}_{\Delta X,Z}^{\infty}(0) = C_{\infty}'$, é:

$$\text{Cov}_{\Delta X,Z}^{\infty}(s) = \text{Exp}(Ms) C_{\infty}', \quad \forall s \geq 0. \quad (\text{A.19})$$

Pode-se então reescrever a Equação A.18 assim:

$$\begin{aligned} J(\omega) &= \{ Z_{\infty} + SJ(\omega) - GH \int_0^{\infty} \text{Exp}[(M - j\omega I_n)s] ds C_{\infty}' \} / (j\omega) = \\ &= \{ Z_{\infty} + SJ(\omega) + GH (M - j\omega I_n)^{-1} C_{\infty}' \} / (j\omega). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Resolvendo esta expressão em $J(\omega)$ obtém-se:

$$J(\omega) = -(S - j\omega I_m)^{-1} [Z_{\infty} + GH (M - j\omega I_n)^{-1} C_{\infty}'], \quad (\text{A.21})$$

e portanto:

$$S_{Z,Z}(\omega) = -\{(S - j\omega I_m)^{-1} [Z_\infty + GH(M - j\omega I_n)^{-1} C'_\infty] + [Z_\infty + C_\infty(M' + j\omega I_n)^{-1}H'G'](S' + j\omega I_m)^{-1}\} . \quad (A.22)$$

Como as matrizes M e S são definidas negativas, segue que de fato $S_{Z,Z}(\omega)$ não possui descontinuidades e portanto, $Z(t)$ é um processo gaussiano ergódico.

APÊNDICE B

EXPRESSÃO ANALÍTICA PARA A ESTIMATIVA DA VARIÂNCIA
DO PROCESSO SECUNDÁRIO NO CASO ESCALAR

Neste Apêndice deduz-se a Expressão 2.86 para o estimador \tilde{Z}_∞ da variância do processo secundário $Z(t)$ em função dos coeficientes da expansão de $Z(t)$ em série de Fôurier, no caso escalar.

De acordo com a Definição 2.30, \tilde{Z}_∞ é dado no caso escalar por:

$$\tilde{Z}_\infty(T) \triangleq \int_{t_1}^{t_1+T} z^2(t) \frac{dt}{T}, \quad (B.1)$$

onde t_1 é suficientemente maior que o instante inicial t_0 de modo a garantir que a variância de $z(t)$ tenha entrado em regime permanente. Por outro lado, em regime permanente, o próprio processo secundário $z(t)$, pode ser simulado analiticamente em série de Fôurier:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{\infty} [a_{z_i} \cos i\omega_0 t + b_{z_i} \text{sen } i\omega_0 t] \sqrt{\omega_0/\pi}, \quad (B.2)$$

onde a_z e b_z são sequências gaussianas brancas, caracterizadas na Tabela 2.1. Considerando apenas os N primeiros termos da Expressão B.2 e substituindo na Equação B.1 resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_\infty(T) &= \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^N (a_{z_i} \cos i\omega_0 t + b_{z_i} \text{sen } i\omega_0 t) \right\}^2 \frac{\omega_0 dt}{\pi T} \\ &= \int_0^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{z_i} \cos i\omega_0 t + b_{z_i} \text{sen } i\omega_0 t) (a_{z_j} \cos j\omega_0 t + \\ &\quad b_{z_j} \text{sen } j\omega_0 t) \frac{\omega_0 dt}{\pi T} \end{aligned} \quad (B.3)$$

Definindo as seguintes funções auxiliares:

$$J_1(t) \triangleq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{z_i} a_{z_j} + b_{z_i} b_{z_j}) \cos [(i-j)\omega_0 t], \quad (B.4)$$

$$J_2(t) \triangleq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (b_{z_i} a_{z_j} - a_{z_i} b_{z_j}) \sen [(i-j)\omega_0 t], \quad (B.5)$$

$$J_3(t) \triangleq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{z_i} a_{z_j} - b_{z_i} b_{z_j}) \cos [(i+j)\omega_0 t], \quad (B.6)$$

$$J_4(t) \triangleq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{z_i} b_{z_j} + b_{z_i} a_{z_j}) \sen [(i+j)\omega_0 t], \quad (B.7)$$

pode-se reescrever a Equação B.3 assim:

$$\tilde{Z}_{\infty}(T) = \int_0^T \{J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + J_4(t)\} \frac{\omega_0 dt}{2\pi T} \quad (B.8)$$

Tomando $k = i-j$ e notando que os elementos das somatórias em J_1 e J_2 são simétricos em relação ao eixo $i=j$ pode-se reagrupar estas somatórias as sim:

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \sum_{i=1}^N (a_{z_i}^2 + b_{z_i}^2) + 2 \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} (a_{z_i} a_{z_j} + b_{z_i} b_{z_j}) \cos[(i-j)\omega_0 t] \\ &= \sum_{i=1}^N (a_{z_i}^2 + b_{z_i}^2) + 2 \sum_{i=2}^N \sum_{k=1}^{i-1} (a_{z_i} a_{z_{i-k}} + b_{z_i} b_{z_{i-k}}) \cos k\omega_0 t \\ &= \sum_{i=1}^N (a_{z_i}^2 + b_{z_i}^2) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=k+1}^N (a_{z_i} a_{z_{i-k}} + b_{z_i} b_{z_{i-k}}) \cos k\omega_0 t, \end{aligned} \quad (B.9)$$

$$\begin{aligned}
 J_2(t) &= 2 \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} (b_{z_i} a_{z_j} - a_{z_i} b_{z_j}) \text{sen} [(i-j)\omega_0 t] \\
 &= 2 \sum_{i=2}^N \sum_{k=1}^{i-1} (b_{z_i} a_{z_{i-k}} - a_{z_i} b_{z_{i-k}}) \text{sen} k\omega_0 t \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=k+1}^N (b_{z_i} a_{z_{i-k}} - a_{z_i} b_{z_{i-k}}) \text{sen} k\omega_0 t .
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Quanto às funções J_3 e J_4 , tomando $k=i-j$ e $\ell=i+j$, obtêm-se:

$$J_3(t) = \sum_{\ell=2}^{2N} \sum_{k=-k_0}^{k_0, 2} \left(\frac{a_{z_{\ell+k}}}{2} \frac{a_{z_{\ell-k}}}{2} - \frac{b_{z_{\ell+k}}}{2} \frac{b_{z_{\ell-k}}}{2} \right) \cos \ell \omega_0 t, \tag{B.11}$$

$$J_4(t) = \sum_{\ell=2}^{2N} \sum_{k=-k_0}^{k_0, 2} \left(\frac{a_{z_{\ell+k}}}{2} \frac{b_{z_{\ell-k}}}{2} + \frac{b_{z_{\ell+k}}}{2} \frac{a_{z_{\ell-k}}}{2} \right) \text{sen} \ell \omega_0 t, \tag{B.12}$$

onde

$$k_0 \triangleq N-1 - |\ell - (N+1)|, \tag{B.13}$$

e os limites de cada somatória, bem como o fato de que k varia com passo duplo, podem ser melhor visualizados na Figura B.1.

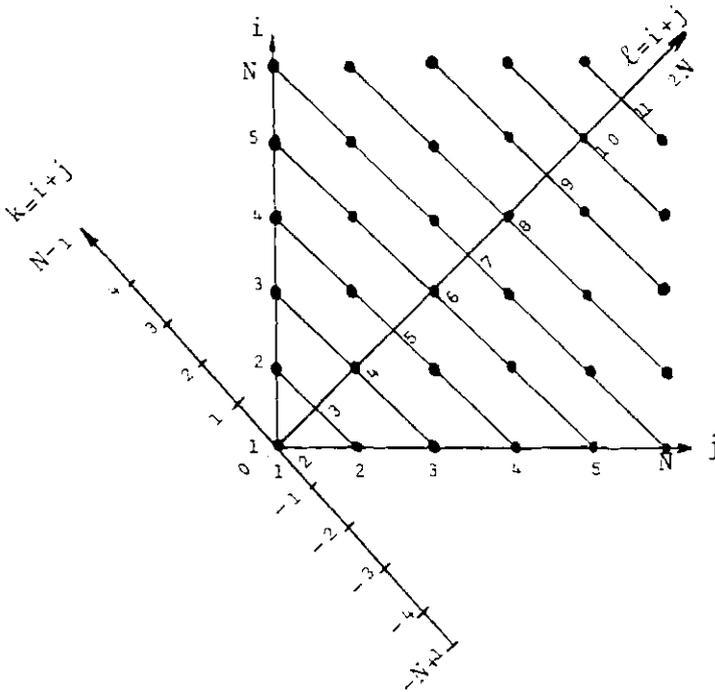


Fig. B.1 - Relação Geométrica entre os índices i, j e l, k .

Definindo então a correlação amostral direta, \vec{C} , e inversa, \overleftarrow{C} , respectivamente por (ver Figura B.2):

$$\vec{C}_{u_1, u_2}(k) \triangleq \sum_{i=k+1}^N u_1(i) u_2(i-k), \quad (B.14)$$

$$\overleftarrow{C}_{u_1, u_2}(\ell) \triangleq \sum_{k=-k_0}^{k_0, 2} \frac{u_1(\ell+k)}{2} \frac{u_2(\ell-k)}{2}, \quad (B.15)$$

onde u_1 e u_2 representam sequências aleatórias, as Equações B.9 a B.12 podem ser escritas com uma notação mais compacta:

$$J_1(t) = \vec{C}_{a_z, a_z}(0) + \vec{C}_{b_z, b_z}(0) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (\vec{C}_{a_z, a_z}(k) + \vec{C}_{b_z, b_z}(k)) \cos k\omega_0 t, \quad (B.16)$$

$$J_2(t) = 2 \sum_{k=1}^{N-1} [\vec{C}_{b_z, a_z}(k) - \vec{C}_{a_z, b_z}(k)] \sin k\omega_0 t, \quad (B.17)$$

$$J_3(t) = \sum_{\ell=2}^{2N} [\overleftarrow{C}_{a_z, a_z}(\ell) - \overleftarrow{C}_{b_z, b_z}(\ell)] \cos \ell\omega_0 t, \quad (B.18)$$

$$J_u(t) = \sum_{\ell=2}^{2N} [\hat{C}_{a_2, b_2}(\ell) + \hat{C}_{b_2, a_2}(\ell)] \text{sen } \ell\omega_0 t, \quad (\text{B.19})$$

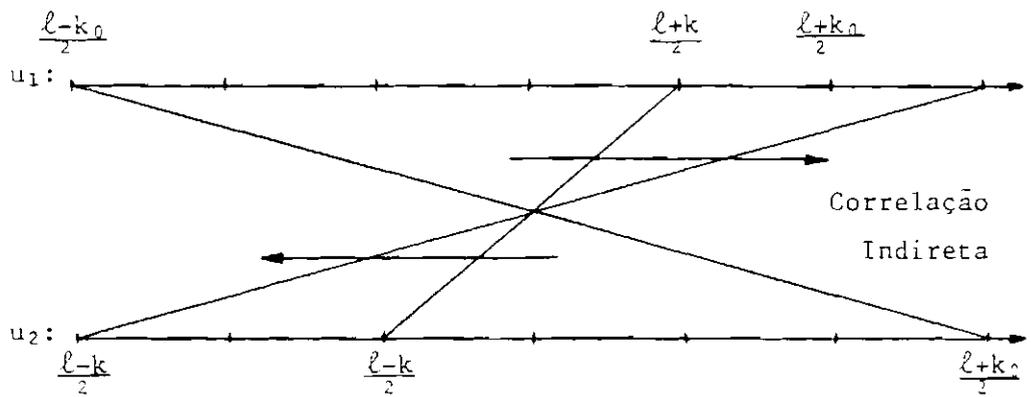
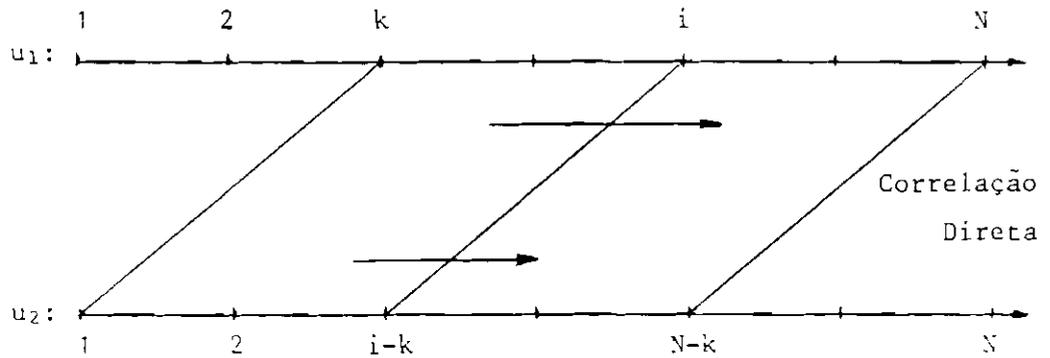


Fig. B.2 - Esquema das correlações direta e inversa entre duas Sequências aleatórias quaisquer u_1 e u_2 .

Substituindo as Equações B.16 a B.19 na Equação B.8 e resolvendo a integral obtém-se finalmente:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_\infty(t) = & \frac{\omega_0}{2\pi} \left[\vec{C}_{a_z, a_z}(0) + \vec{C}_{b_z, b_z}(0) \right] + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k\pi T} \\ & \left\{ \left[\vec{C}_{a_z, a_z}(k) + \vec{C}_{b_z, b_z}(k) \right] \text{sen } k\omega_0 T + \left[\vec{C}_{b_z, a_z}(k) - \vec{C}_{a_z, b_z}(k) \right] \right. \\ & \left. (1 - \cos k\omega_0 T) \right\} + \sum_{\ell=2}^{2N} \left\{ \left[\vec{C}_{a_z, a_z}(\ell) - \vec{C}_{b_z, b_z}(\ell) \right] \frac{\text{sen } \ell\omega_0 T}{2\ell\pi T} + \right. \\ & \left. \left[\vec{C}_{a_z, b_z}(\ell) + \vec{C}_{b_z, a_z}(\ell) \right] \frac{(1 - \cos \ell\omega_0 T)}{2\ell\pi T} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

que é o resultado final a que se refere a Equação 2.86.

APÊNDICE C

VARIÂNCIA DO ERRO DO SUAVIZADOR LINEAR

Seja $x(t)$ um processo estocástico escalar e $y(t)$ sua observação corrompida por um ruído $v(t)$, não tendencioso e não correlacionado com $x(t)$ conforme o seguinte modelo:

$$y(t) = x(t) + v(t) . \quad (C.1)$$

Neste Apêndice calcula-se a variância do erro (em relação ao sinal verdadeiro, x) do seguinte suavizador linear, solução das Equações 3.7-8 para o caso de sinais perpétuos:

$$\bar{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha|\tau|) y(t-\tau) d\tau, \quad (C.2)$$

onde α é o ganho do suavizador (ou grau de suavização). Três tipos de modelos são analisados em correspondência aos exemplos de aplicação do Capítulo 3. No primeiro o sinal verdadeiro é um processo browniano e o ruído é um processo gaussiano branco. No segundo, o sinal e o ruído são processos estacionários de Gauss-Markov de primeira ordem. No terceiro caso, o sinal e o ruído também são processos estacionários, porém periódicos. Nos três casos, a covariância do erro do suavizador, definida por:

$$\tilde{\sigma}^2 \triangleq E\{[\bar{y}(t) - x(t)]^2\} = E\{\bar{y}^2(t)\} + E\{x^2(t)\} - 2E\{x(t)\bar{y}(t)\}, \quad (C.3)$$

é calculada em função das características estatísticas x e de v .

Lembrando que o sinal e o ruído não são correlacionado, pode-se reescrever a Equação C.3 assim:

$$\tilde{\sigma}^2 = E\{\bar{v}^2(t)\} + E\{\bar{x}^2(t)\} + E\{x^2(t)\} - 2E\{x(t)\bar{x}(t)\} \quad (C.4)$$

onde $\tilde{v}(t)$ e $\tilde{x}(t)$ são dados por:

$$\tilde{v}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha|\tau|) v(t-\tau) d\tau, \quad (C.5)$$

$$\tilde{x}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha|\tau|) x(t-\tau) d\tau. \quad (C.6)$$

C.1 - SINAL BROWNIANO E RUÍDO BRANCO

No primeiro caso abordado, o sinal verdadeiro $x(t)$ é um processo browniano e o ruído $v(t)$ é um processo gaussiano branco, respectivamente caracterizados por:

$$E\{x(t+\Delta)x(t)\} = \begin{cases} \sigma_x^2(t), & \forall \Delta \geq 0, \\ \sigma_x^2(t) - Q\Delta, & \forall \Delta < 0, \end{cases} \quad (C.7)$$

$$E\{v(t+\Delta)v(t)\} = R\delta(\Delta). \quad (C.8)$$

A partir das Equações C.5 e C.8 obtêm-se:

$$\begin{aligned} E\{\tilde{v}^2(t)\} &= \frac{\alpha^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha(|\tau| + |\tau'|)] E\{v(t-\tau)v(t-\tau')\} d\tau' d\tau \\ &= \frac{\alpha^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\alpha|\tau|) R d\tau = \frac{R}{4}. \end{aligned} \quad (C.9)$$

Por outro lado, das Equações C.6-7 obtêm-se:

$$E\{x^2(t)\} = \sigma_x^2(t), \quad (C.10)$$

$$\begin{aligned} E\{x(t)\tilde{x}(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha|\tau|) E\{x(t)x(t-\tau)\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\alpha}{2} \exp(\alpha\tau) \sigma_x^2(t) d\tau + \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha\tau) [\sigma_x^2(t) - Q\tau] d\tau \\ &= \sigma_x^2(t) - \frac{Q}{2\alpha}, \end{aligned} \quad (C.11)$$

$$E\{\tilde{x}^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{4} \exp[-\alpha(|\tau| + |\tau'|)] E\{x(t-\tau) x(t-\tau')\} d\tau' d\tau . \quad (C.12)$$

Notando que o integrando da Equação C.12 é simétrico em relação ao eixo $\tau = \tau'$, isto é, τ e τ' são comutáveis, pode-se reescrever essa expressão assim:

$$E\{\tilde{x}^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\alpha^2}{2} \exp[-\alpha(|\tau| + |\tau'|)] [\sigma_x^2(t) - Q\tau] d\tau' d\tau \\ = J_1 + J_2 + J_3 , \quad (C.13)$$

onde:

$$J_1 \triangleq \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\tau} \exp[\alpha(\tau + \tau')] [\sigma_x^2(t) - Q\tau] d\tau' d\tau \\ = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^0 \exp(2\alpha\tau) [\sigma_x^2(t) - Q\tau] d\tau = \frac{\sigma_x^2(t)}{4} + \frac{Q}{8\alpha} , \quad (C.14)$$

$$J_2 \triangleq \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 \frac{\alpha^2}{2} \exp[-\alpha(\tau - \tau')] [\sigma_x^2(t) - Q\tau] d\tau' d\tau \\ = \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha\tau) [\sigma_x^2(t) - Q\tau] d\tau = \frac{1}{2} \left[\sigma_x^2(t) - \frac{Q}{\alpha} \right] \quad (C.15)$$

$$J_3 \triangleq \int_0^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{\alpha^2}{2} \exp[-\alpha(\tau + \tau')] [\sigma_x^2(t) - Q\tau] d\tau' d\tau \\ = \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{2} [\exp(-\alpha\tau) - \exp(-2\alpha\tau)] [\sigma_x^2(t) - Q\tau] d\tau \\ = \frac{\sigma_x^2(t)}{4} - \frac{3Q}{8\alpha} . \quad (C.16)$$

Substituindo as Equações C.14-16 na Equação C.13 resulta:

$$E\{\tilde{x}^2(t)\} = C_x^2(t) - \frac{3}{4} \frac{Q}{\alpha} \quad . \quad (C.17)$$

Agora, substituindo as Equações C.9-11 e C.17 na Equação C.4 obtém-se a expressão final para $\tilde{\sigma}^2$, que independe de t:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{4} \left(\alpha R + \frac{Q}{\alpha} \right) \quad . \quad (C.18)$$

Analisando a expressão de $\tilde{\sigma}^2$ para este modelo verifica-se que o ganho do suavizador de mínima variância é dado por:

$$\alpha^* = \sqrt{Q/R} \quad . \quad (C.19)$$

C.2 - SINAIS E RUÍDOS ESTACIONÁRIOS

Antes de prosseguir a análise dos modelos particulares convêm obter a expressão geral da variância $\tilde{\sigma}^2$ para o caso onde tanto o sinal verdadeiro $x(t)$ como o ruído $v(t)$ são estacionários, isto é:

$$\text{Cov}_{x,x}(t+s,t) \triangleq E \{x(t+s) x(t)\} = C_x(|s|), \quad (C.20)$$

$$\text{Cov}_{v,v}(t+s,t) \triangleq E \{v(t+s) v(t)\} = C_v(|s|). \quad (C.21)$$

onde C_x e C_v são funções integráveis arbitrárias.

Com base nas Equações C.6 e C.20 verifica-se que:

$$E\{x^2(t)\} = C_x(0) \quad , \quad (C.22)$$

$$\begin{aligned} E\{\tilde{x}(t) x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha|\tau|) C_x(|\tau|) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \alpha \exp(-\alpha\tau) C_x(\tau) d\tau \quad , \end{aligned} \quad (C.23)$$

$$E\{\tilde{x}^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{4} \exp[-\alpha(|\tau| + |\tau'|)] C_X(|\tau - \tau'|) d\tau' d\tau \quad (C.24)$$

Notando que o integrando da Equação C.24 é simétrico em relação aos eixos $\tau = \tau'$ e $\tau = -\tau'$, pode-se reescrever essa expressão as sim:

$$E\{\tilde{x}^2(t)\} = \int_0^{\infty} \int_{-\tau}^{\tau} \alpha^2 \exp[-\alpha(\tau + |\tau'|)] C_X(\tau - \tau') d\tau' d\tau = J_4 + J_5, \quad (C.25)$$

onde:

$$\begin{aligned} J_4 &\triangleq \int_0^{\infty} \int_{-\tau}^0 \alpha^2 \exp[-\alpha(\tau - \tau')] C_X(\tau - \tau') d\tau' d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{2\tau} \alpha^2 \exp(-\alpha s) C_X(s) ds d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \int_{s/2}^s \alpha^2 \exp(-\alpha s) C_X(s) d\tau ds \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\alpha s}{2} \exp(-\alpha s) C_X(s) \alpha ds, \end{aligned} \quad (C.26)$$

$$\begin{aligned} J_5 &\triangleq \int_0^{\infty} \int_0^{\tau} \alpha^2 \exp[-\alpha(\tau + \tau')] C_X(\tau - \tau') d\tau' d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\tau} \alpha^2 \exp[-\alpha(2\tau - s)] C_X(s) ds d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \int_s^{\infty} \alpha^2 \exp[-\alpha(2\tau - s)] C_X(s) d\tau ds \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha s) C_X(s) ds. \end{aligned} \quad (C.27)$$

Substituindo a Equação C.26-27 na Equação C.25 obtêm-se:

$$E\{\bar{x}^2(t)\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (1 + \alpha s) \exp(-\alpha s) C_x(s) \alpha ds \quad . \quad (C.28)$$

Analogamente obtêm-se para $\bar{v}(t)$:

$$E\{\bar{v}^2(t)\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (1 + \alpha s) \exp(-\alpha s) C_v(s) \alpha ds \quad , \quad (C.29)$$

Substituindo agora as Equações C.22-23 e C.28-29 na Equação C.4, verifica-se que:

$$\bar{\sigma}^2 = C_x(0) + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \exp(-x) \{(-3+x) C_x\left(\frac{x}{\alpha}\right) + (1+x) C_v\left(\frac{x}{\alpha}\right)\} dx \quad (C.30)$$

Este resultado é válido para qualquer tipo de sinal estacionário e facilita a obtenção da solução para casos particulares.

C.3 - SINAL E RUÍDO DE GAUSS-MARKOV DE PRIMEIRA ORDEM

No segundo caso particular abordado, o sinal verdadeiro $x(t)$ e o ruído são processos estacionários de Gauss-Markov de primeira ordem, caracterizados por:

$$C_x(s) = \sigma_x^2 \exp(-\lambda s), \quad (C.31)$$

$$C_v(s) = \sigma_v^2 \exp(-\lambda_v s). \quad (C.32)$$

Substituindo as Equações C.31-32 na Equação C.30 obtêm-se:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= \sigma_x^2 \left\{ 1 + \int_0^\infty \exp \left[-\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right) x \right] \frac{x-3}{2} dx \right\} + \\ &\sigma_v^2 \int_0^\infty \frac{1+x}{2} \exp \left[-\left(1 + \frac{\lambda_v}{\alpha}\right) x \right] dx \\ &\sigma_x^2 \left[1 - \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-2} \right] \\ &+ \sigma_v^2 \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-2} \right], \end{aligned} \quad (C.33)$$

ou, numa forma mais compacta:

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_x^2 \psi_1(\alpha/\lambda) + \sigma_v^2 \psi_1(\lambda_v/\alpha), \quad (C.34)$$

onde:

$$\psi_1(e) \triangleq (1 + e/2) (1 + e)^{-2} \quad (C.35)$$

Nota-se que a expressão de $\bar{\sigma}^2$ recai no caso de sinal browniano e ruído branco se:

$$\lambda \ll \alpha \ll \lambda_v$$

$$\sigma_x^2 = \frac{Q}{2\lambda}$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\lambda_v R}{2}$$

Nesta particular condição o ganho do suavizador de mínima variância é aquele dado pela Equação C.19. Para o caso geral, entretanto, a obtenção do ganho de mínima variância é mais complicada, ainda que possa ser feita analiticamente, como se vê a seguir. Com o auxílio de uma breve análise

se gráfica, determinam-se também as condições para que a solução de mínimo local para $\alpha \geq 0$ exista e seja de mínimo absoluto.

Utilizando a notação do Capítulo 3 (ver definição de parâmetros nas Equações 3.34-37), a Equação C.34 fica assim:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &\triangleq \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_x^2} = \delta_1(p^{-1}) + \varepsilon^2 \delta_1(\beta p) \\ &= p \frac{\frac{1}{2} + p}{(1+p)^2} + \varepsilon^2 \frac{1 + \frac{\beta p}{2}}{(1+\beta p)^2}. \end{aligned} \quad (C.36)$$

Nota-se que esta expressão pode ser posta na forma de uma fração polinomial do quarto grau, com dois polos duplos e no máximo quatro zeros a cada nível de $\bar{\sigma}^2$. Por outro lado verifica-se que a derivada de $\bar{\sigma}^2$ em relação a p é dada por:

$$\frac{d\bar{\sigma}^2}{dp} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + 3p}{(1+p)^3} + \varepsilon^2 \beta \frac{3 + \beta p}{(1 + \beta p)^3} \right] \quad (C.37)$$

e pode ser posta na forma de uma fração polinomial com dois polos triplos e no máximo quatro zeros. Para completar a análise, especialmente no que se refere às assíntotas $p \rightarrow \mp \infty$, convém obter a derivada de $\bar{\sigma}^2$ em relação a p^{-1} :

$$\frac{d\bar{\sigma}^2}{dp^{-1}} = \frac{1}{2} \left[- \frac{3 + p^{-1}}{(1 + p^{-1})^3} + \varepsilon^2 \beta^{-1} \frac{(1 + 3\beta^{-1}p^{-1})}{(1 + \beta^{-1}p^{-1})^3} \right] \quad (C.38)$$

A partir das Equações C.36-38 verificam-se as seguintes propriedades de $\bar{\sigma}^2(p)$:

$$\bar{\sigma}^2 = \begin{cases} \epsilon^2 & \text{se } p = 0 \\ 1 & \text{se } p^{-1} = 0 \\ \frac{4 - 3}{(2 - \beta)^2} & \text{se } p = -2/\beta, \end{cases} \quad (\text{C.39})$$

$$\left. \frac{d\bar{\sigma}^2}{dp} \right|_{p=0} = \frac{1 - 3 \epsilon^2 \beta}{2}, \quad (\text{C.40})$$

$$\left. \frac{d\bar{\sigma}^2}{dp^{-1}} \right|_{p^{-1} = 0} = \frac{-3 + \epsilon^2 3}{2} \quad (\text{C.41})$$

Estas propriedades permitem montar o diagrama da Figura C.1.

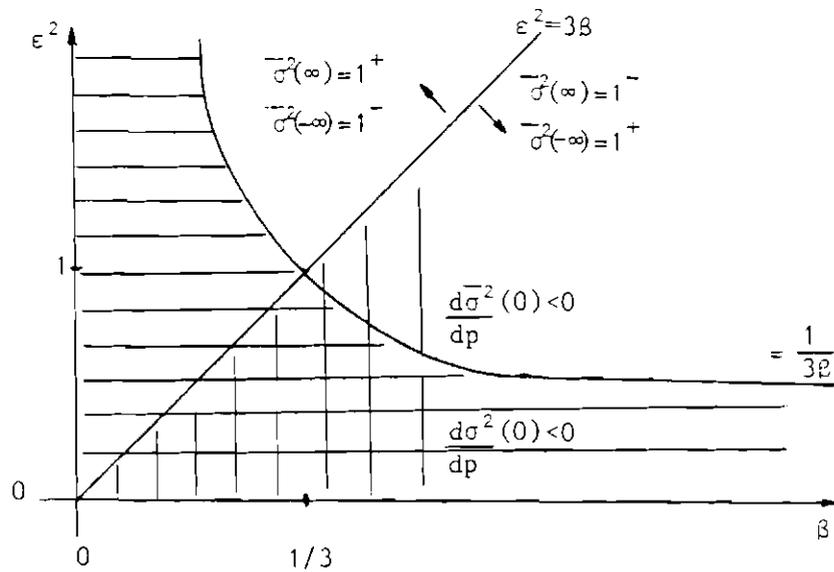


Fig. C.1 - Mapeamento das propriedades de $\bar{\sigma}^2$ no plano β - ϵ^2 .

A Figura C.2 mostra o comportamento qualitativo de $\bar{\sigma}^2$ em função de p de acordo com todas as características levantadas. Evidentemente a procura de mínimos locais ou absolutos se restringe à parte com $p \geq 0$, mas a figura abrange também a parte negativa de p para mostrar, pela análise de número máximo de zeros em $\bar{\sigma}^2$ e em sua derivada, que há no máximo um mínimo local com $p > 0$.

Desta análise gráfica verifica-se que apenas na região onde $\beta > \frac{1}{3}$ e $(3\beta)^{-1} < \epsilon < 3\beta$ ocorrem mínimos absolutos em valores positivos finitos de p . Nas demais regiões ou o mínimo absoluto ocorre em $p \rightarrow \infty$ (que equivale ao suavizador saturado) ou em $p = 0$ (que equivale ao suavizador inativo), conforme se vê na Figura 3.7.

A solução geral para o ganho do suavizador de mínima variância pode ser obtida analiticamente resolvendo a raiz positiva da seguinte equação polinomial do quarto grau:

$$\sum_{i=0}^4 c_i p^i = 0, \quad (C.42)$$

que representa o numerador da Equação C.37, onde:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 - 3 \epsilon^2 \beta \\ c_1 &= 3(1 + \beta) - \epsilon^2 \beta (9 + \beta) \\ c_2 &= 3\beta (3 + \beta) (1 - \epsilon^2) \\ c_3 &= \beta^2 (9 + \beta) - \epsilon^2 3\beta(1 + \beta) \\ c_4 &= \beta^2 (3\beta - \epsilon^2), \end{aligned} \quad (C.43)$$

se $\beta > 1/3$ e $(3\beta)^{-1} < \epsilon < 3\beta$.

Caso contrário não existe raiz positiva e a solução é dada por:

$$p^* = \begin{cases} 0, & \text{se } \epsilon^2 < 1 \\ \infty, & \text{se } \epsilon^2 > 1. \end{cases} \quad (C.44)$$

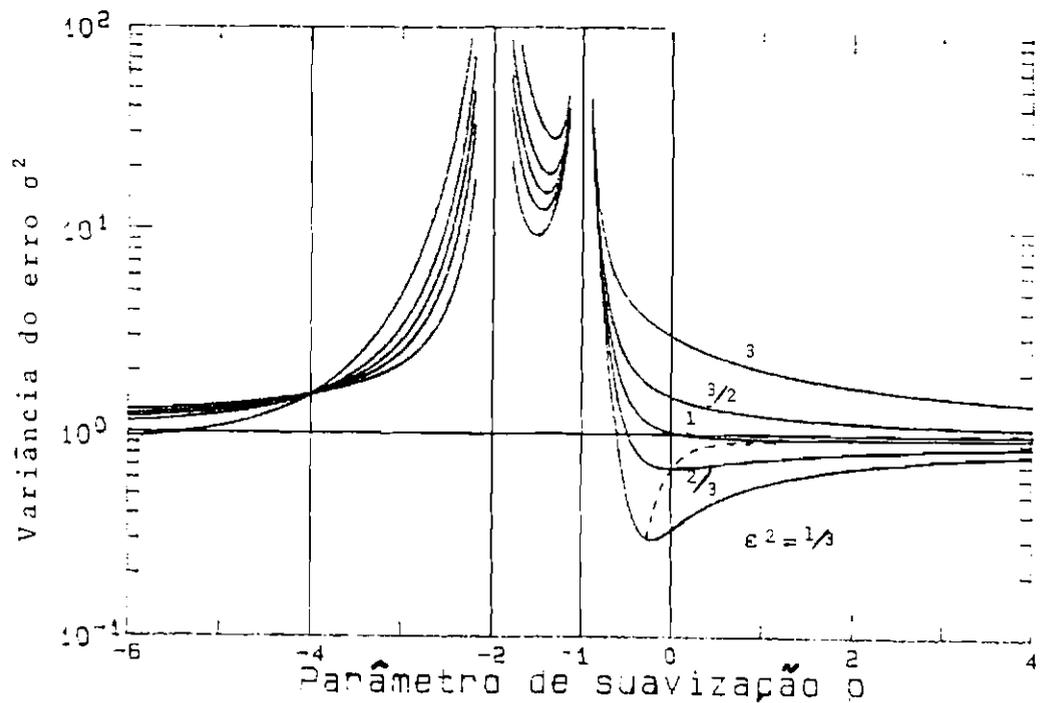
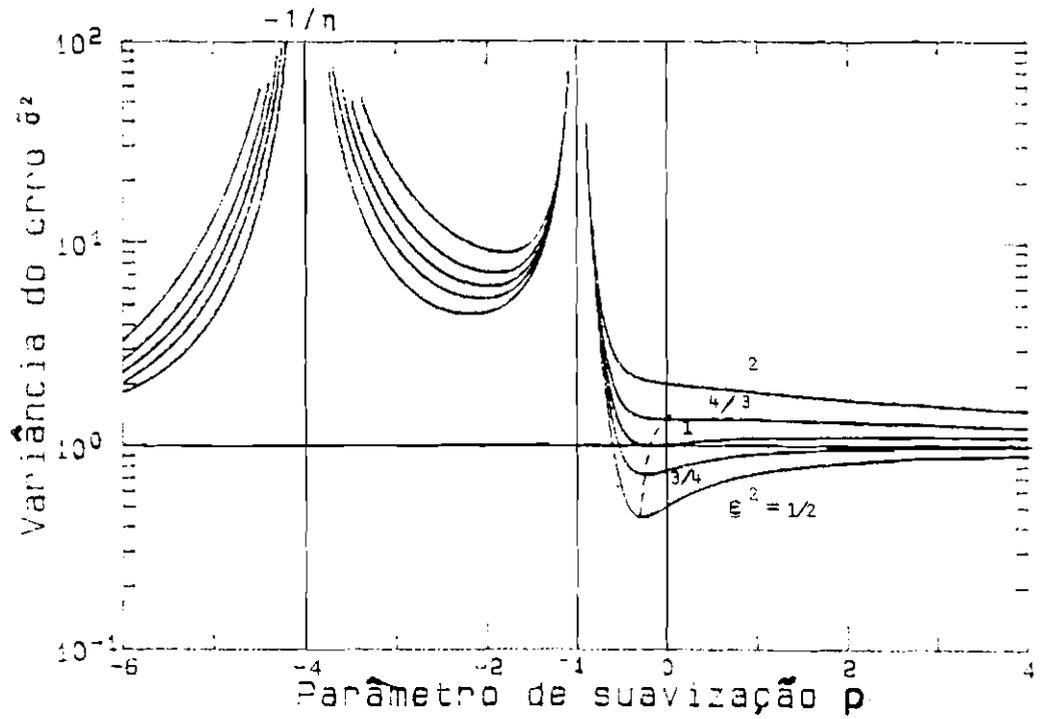


Fig. C.2 - Comportamento qualitativo do suavizador no caso de processos de Gauss-Markov de 1ª ordem: a) $\beta=0,25$; b) $\beta=0,5$; c) $\beta=1,5$; d) $\bar{\sigma}^* \times \frac{\rho^*}{1+\rho^*}$; e) $\frac{\rho^*}{1+\rho^*} \times \epsilon$; f) $\bar{\sigma}^* \times \epsilon$.

(continua)

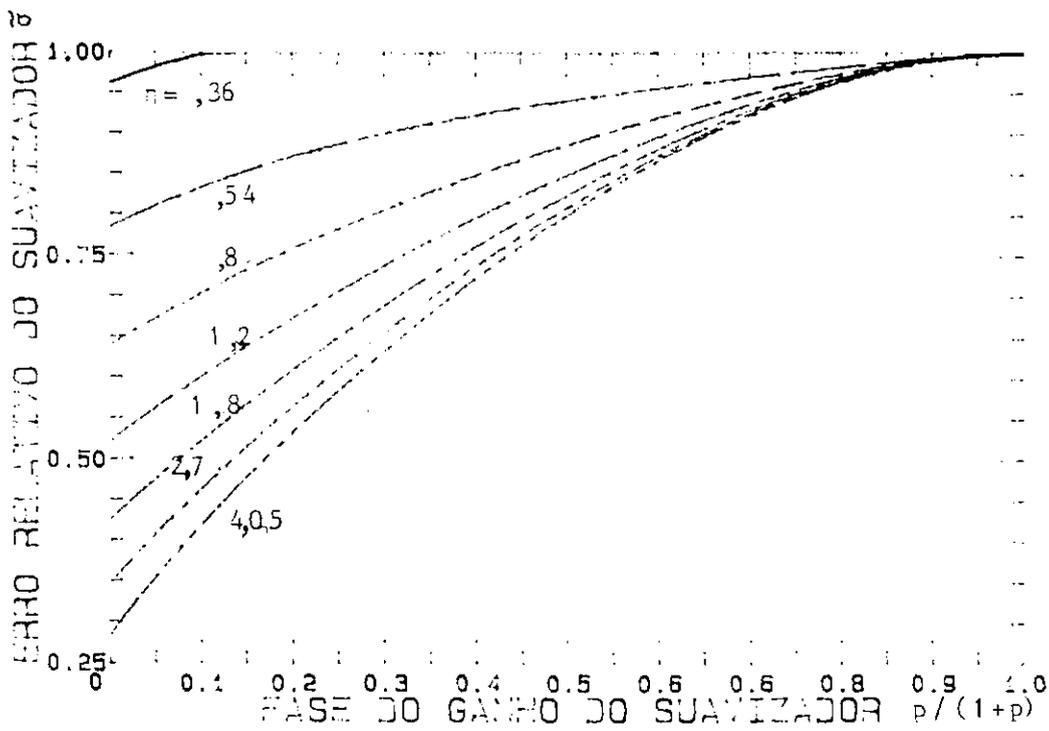
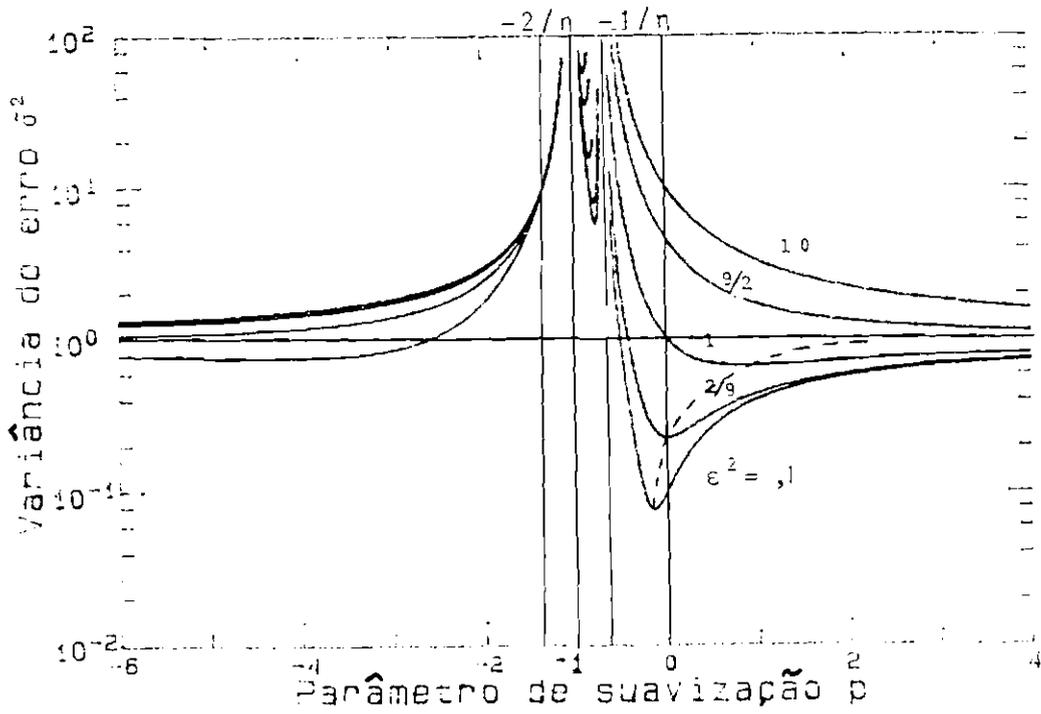


Fig. C.2 - Continuação

(continua)

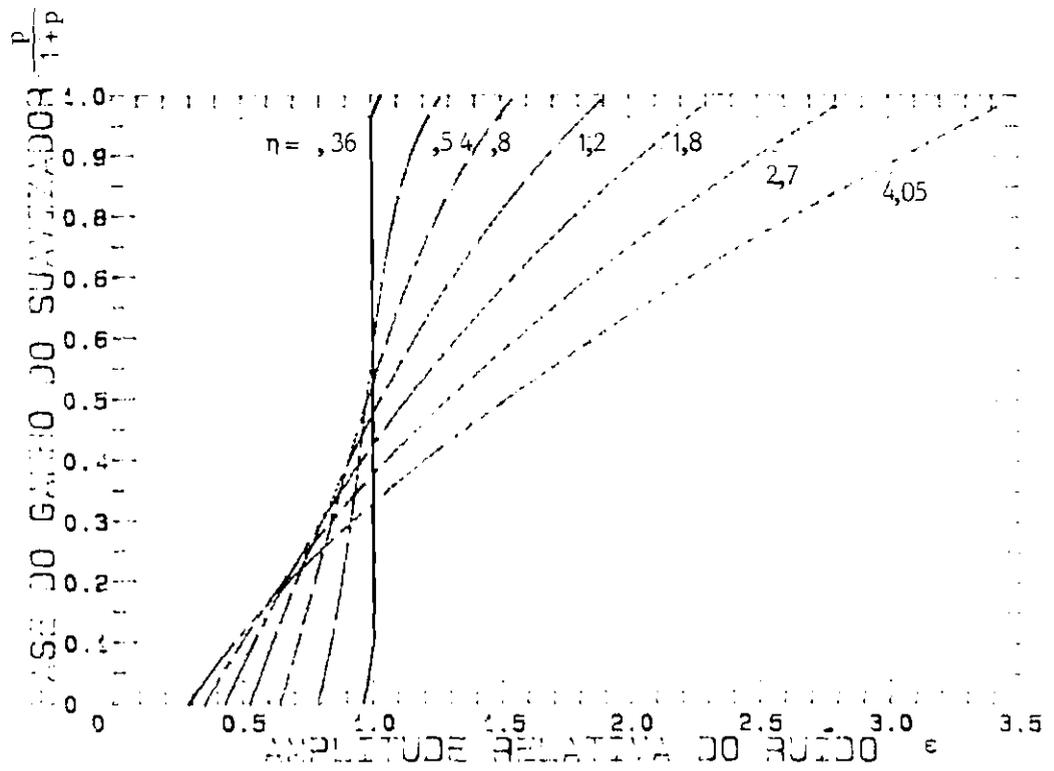
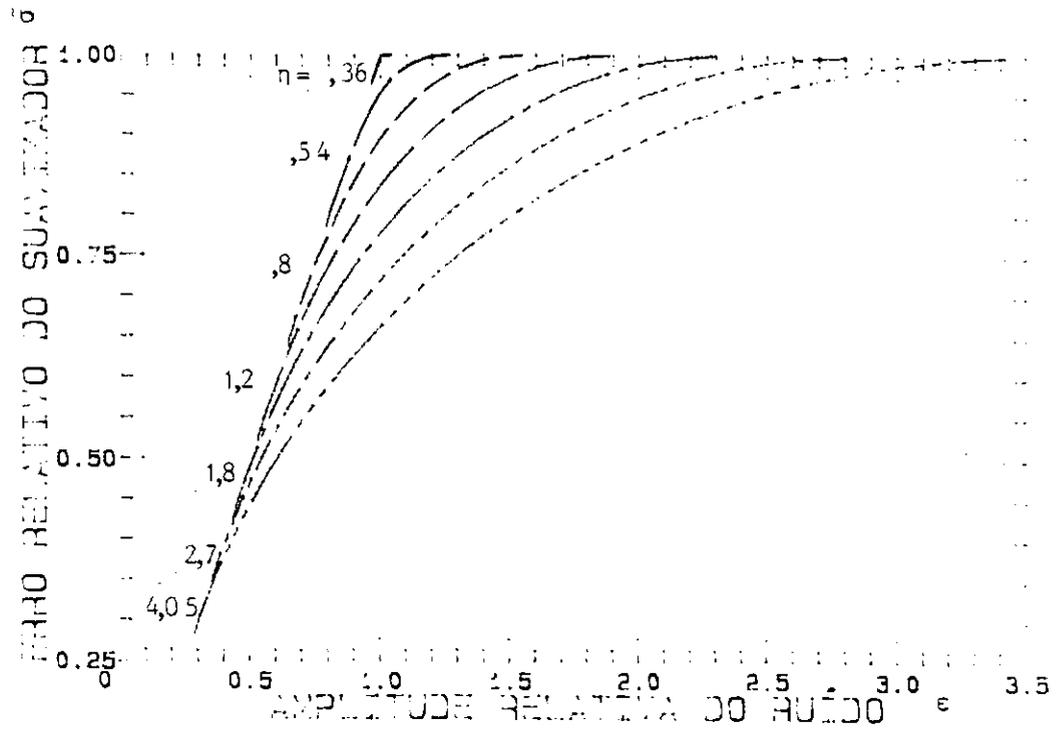


Fig. C.2 - Conclusão

C.4 - SINAL E RUÍDO ESTACIONÁRIOS PERIÓDICOS

Considera-se finalmente o modelo onde o sinal verdadeiro $x(t)$ e o ruído $v(t)$ são processos estacionários periódicos tais que:

$$C_x(\lambda) = \sigma_x^2 \cos(\lambda|\lambda|), \quad (C.45)$$

$$C_v(\lambda) = \sigma_v^2 \cos(\lambda_v|\lambda|). \quad (C.46)$$

Analogamente ao caso anterior, substituindo as Equações C.45-46 na Equação C.30, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 = \sigma_x^2 \left\{ 1 + \int_0^\infty \cos\left(\frac{\lambda}{\alpha} x\right) \exp(-x) \frac{x-3}{2} dx \right\} \\ + \sigma_v^2 \int_0^\infty \cos\left(\frac{\lambda_v}{\alpha} x\right) \exp(-x) \frac{x+1}{2} dx \end{aligned} \quad (C.47)$$

Dado que:

$$\int_0^\infty \cos(ex) \exp(-x) dx = (1 + e^2)^{-1}, \quad (C.48)$$

$$\int_0^\infty x \cos(ex) \exp(-x) dx = (1 - e^2) (1 + e^2)^{-2} \quad (C.49)$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 = \sigma_x^2 \left[1 - \frac{3/2}{1+(\lambda/\alpha)^2} + \frac{1}{2} \frac{1-(\lambda/\alpha)^2}{[1+(\lambda/\alpha)^2]^2} \right] + \sigma_v^2 \left[\frac{1/2}{1+(\lambda_v/\alpha)^2} + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \frac{1-(\lambda_v/\alpha)^2}{[1+(\lambda_v/\alpha)^2]^2} \right], \end{aligned} \quad (C.50)$$

ou, na forma mais compacta:

$$\bar{\sigma}^2 = \int_2 (p^{-1}) + \varepsilon^2 \int_2 (\beta p) , \quad (C.51)$$

onde:

$$\int_2 (e) \triangleq (1 + e^2)^{-2} . \quad (C.52)$$

Com vistas à análise gráfica, deriva-se $\bar{\sigma}^2$ em relação a p^2 e a p^{-2} :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial p^2} = 2p^2 (1 + p^2)^{-3} - 2\varepsilon^2 \beta^2 (1 + \beta^2 p^2)^{-3} , \quad (C.53)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial p^{-2}} = -2(1 + p^{-2})^{-3} + 2\varepsilon^2 \beta^2 p^{-2} (\beta^2 + p^{-2})^{-3} . \quad (C.54)$$

Das Equações C.51 e C.52-53 verificam-se as seguintes características de $\bar{\sigma}^2$:

$$\bar{\sigma}^2 = \begin{cases} \varepsilon^2 & , \text{ se } p = 0 \\ 1^- & , \text{ se } p \rightarrow \infty \end{cases} \quad (C.55)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial p^2} \right|_{p^2 = 0} = -2\varepsilon^2 \beta^2 \leq 0 , \quad (C.56)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial p^{-2}} \right|_{p^{-2} = 0} = -2 < 0 . \quad (C.57)$$

Estas características podem ser visualizadas qualitativamente na Figura C.3, e mostram que o mínimo absoluto de $\bar{\sigma}^2$ ocorre sempre em um valor estacionário, diferentemente do que se verificou no caso anterior.

Com base nesta análise, impondo a condição de estacionariedade em $\bar{\sigma}^2$, conclui-se que a solução de mínimo corresponde a uma raiz positiva do seguinte polinômio em p^2 :

$$\sum_{i=0}^4 c_i p^{2i} = 0, \quad (C.58)$$

onde os coeficientes c_i , obtidos a partir da Equação C.53, são:

$$\begin{aligned} c_0 &= -\varepsilon^2 \beta^2 \\ c_1 &= 1 - 3\varepsilon^2 \beta^2 \\ c_2 &= 3\beta^2(1 - \varepsilon^2) \\ c_3 &= \beta^2(3\beta^2 - \varepsilon^2) \\ c_4 &= \beta^6 \end{aligned} \quad (C.59)$$

Valores numéricos das raízes dos polinômios dados pelas Equações C.42 e C.58 foram obtidos, para os exemplos estudados no Capítulo 3, pela rotina SPG4 (Kuga e Guedes, 1987).

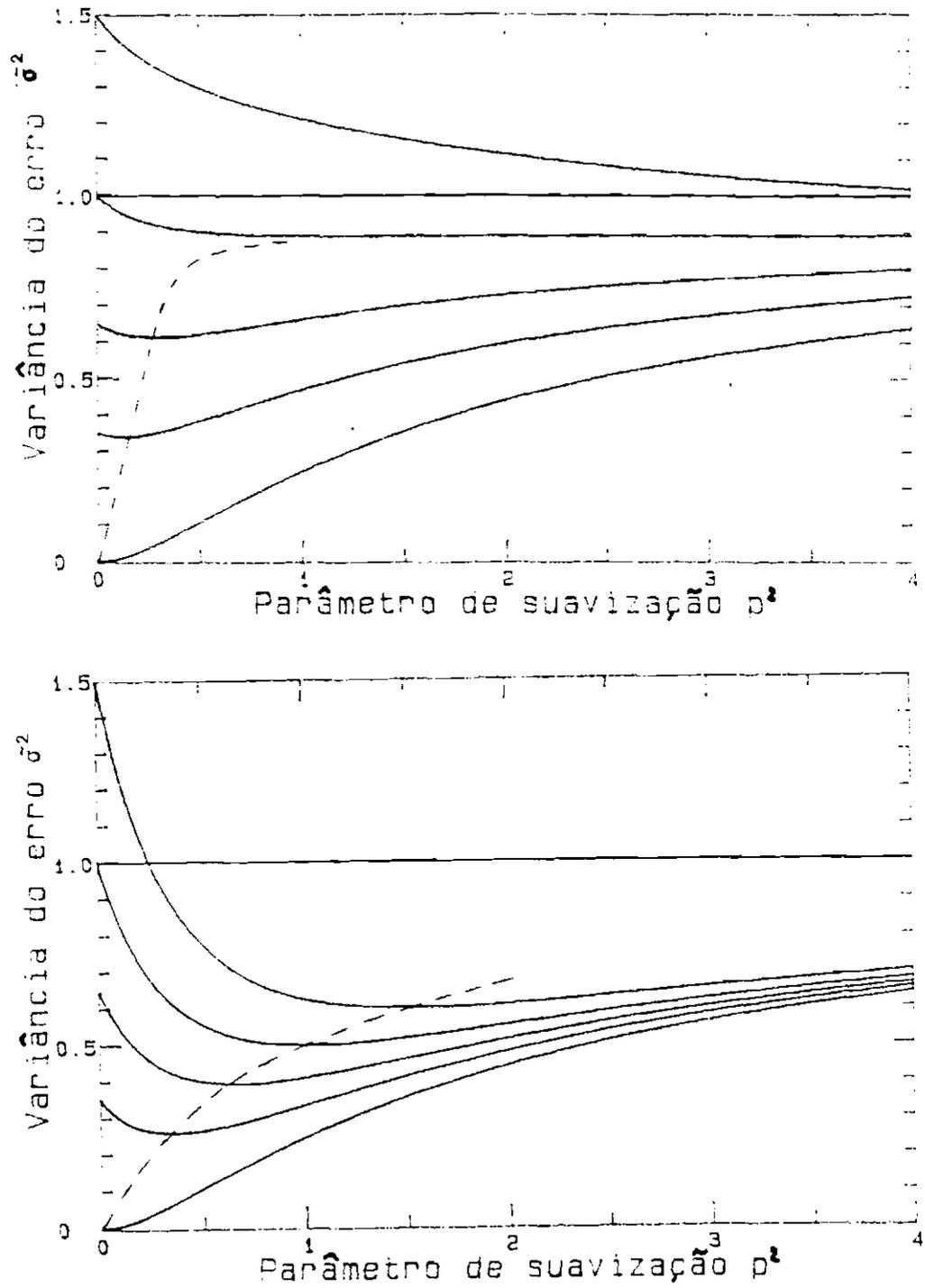


Fig. C.3 - Comportamento qualitativo do suavizador no caso de processos periódicos: a) $\beta=0,5$; b) $\beta=1$; c) $\beta=2$; d) $\bar{c}^* \times \frac{p^{*2}}{1+p^{*2}}$; e) $\frac{p^{*2}}{1+p^{*2}} \times \varepsilon$; f) $\bar{\sigma}^* \times \varepsilon$.

(continua)

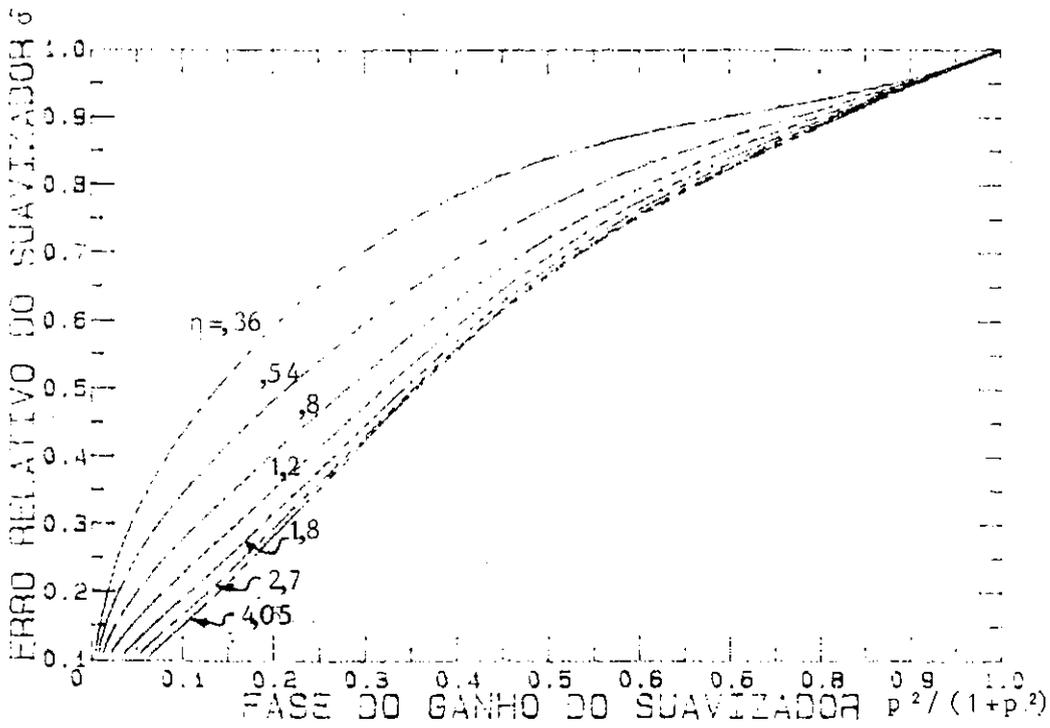
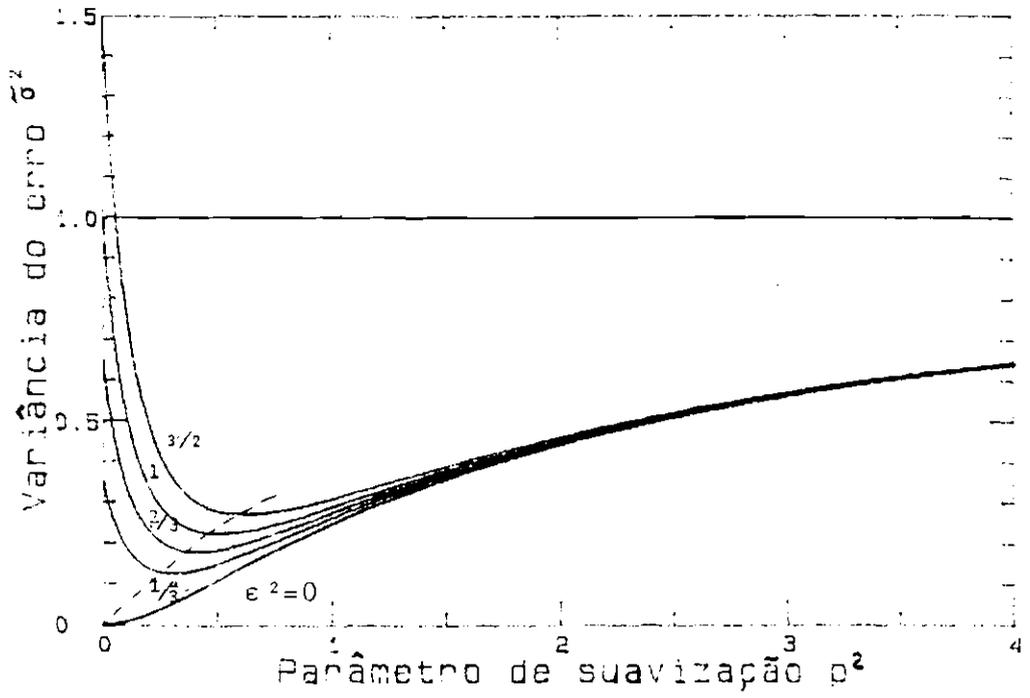


Fig. C.3 - Continuação

(continua)

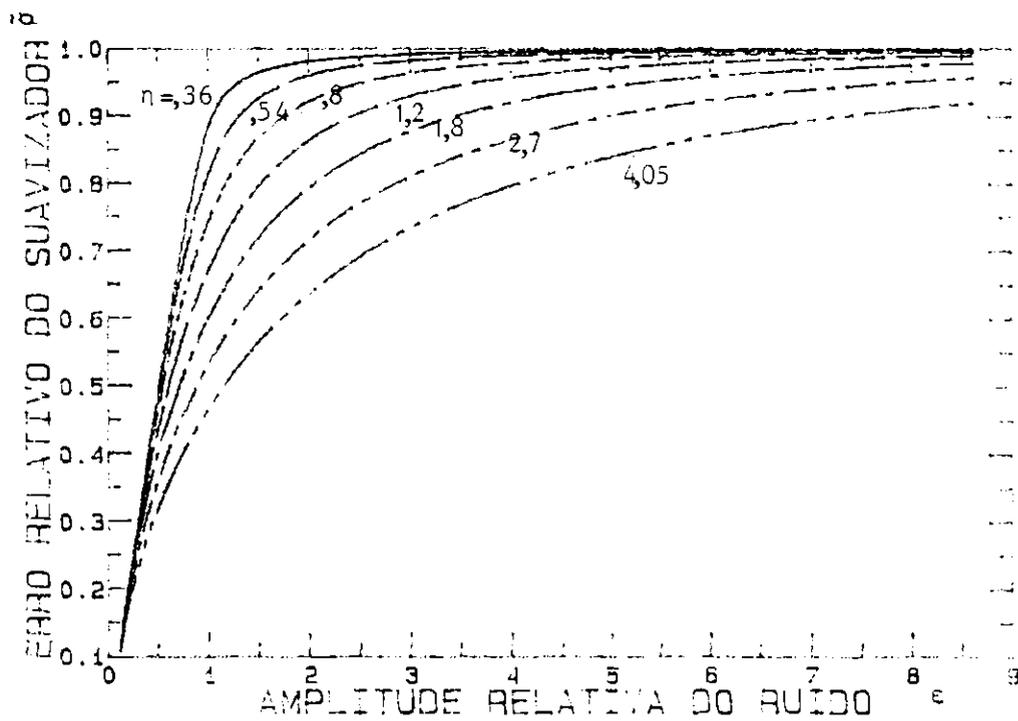
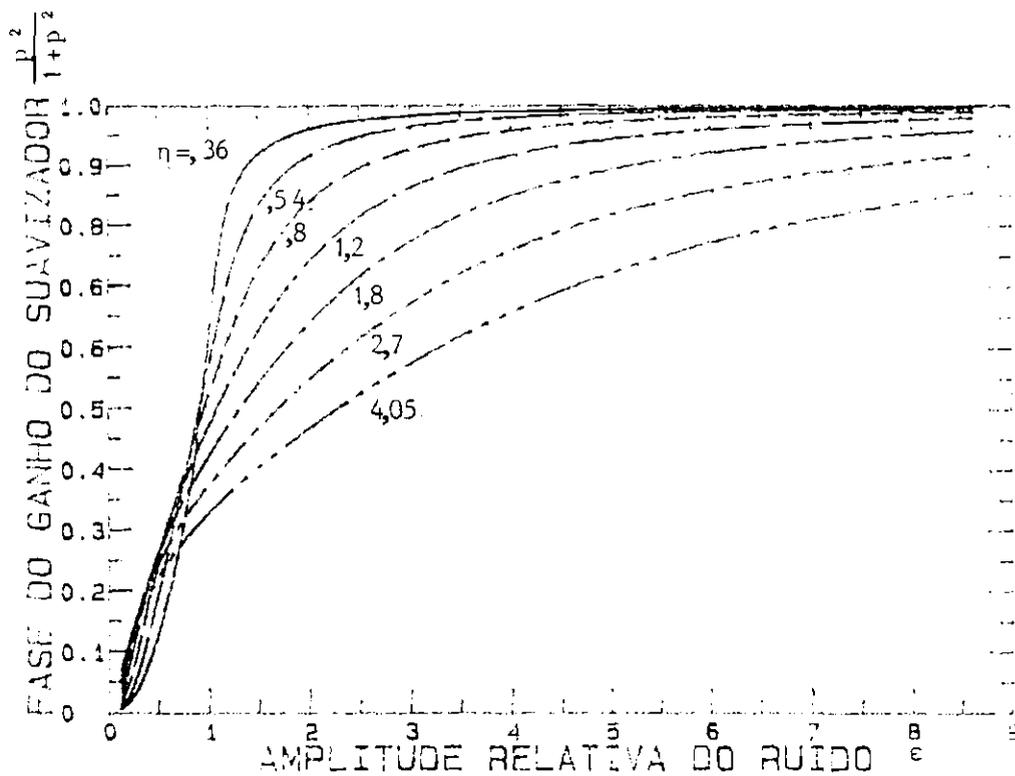


Fig. C.3 - Conclusão

APÊNDICE D

CÁLCULO DA FUNÇÃO DE VALIDAÇÃO CRUZADA

Neste Apêndice obtem-se o valor esperado da função de validação cruzada, utilizada para ajuste do grau de suavização no Capítulo 3 (ver Equação 3.21), dado um modelo estocástico para o sinal $y(t)$. São abordados especificamente três tipos de modelos, como no Apêndice C, correspondendo aos exemplos numéricos tratados no Capítulo 3: sinal verdadeiro browniano e ruído branco; sinal e ruído estacionários de Gauss - Markov de primeira ordem; e sinal e ruído estacionários periódicos.

D.1 - CÁLCULO DO RESÍDUO DA SUAVIZAÇÃO NO GRÃO AUSENTE

A solução do problema de suavização de sinais contínuos com um grão ausente satisfaz às Equações 3.23-24; que podem ser escritas na forma algébrica:

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + B y(t), \quad \forall t \in [t_1, t_* - \frac{\Delta}{2}] \cup [t_* + \frac{\Delta}{2}, t_n], \quad (D.1)$$

onde t_* indica o instante central do grão ausente e Δ seu tamanho (resolução); os vetores Y e B e a matriz A são:

$$Y \triangleq \{ \tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0 : \dot{\tilde{y}}_{\alpha, t_*, \Delta}^0 \}' , \quad (D.2)$$

$$A \triangleq \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 \end{Bmatrix} , \quad (D.3)$$

$$B \triangleq \{ 0 : -\alpha^2 \}' , \quad (D.4)$$

A solução da Equação D.1 é dada por:

$$Y(t) = \exp[A(t-t_i)] Y(t_i) + \int_{t_i}^t \exp[A(t-\tau)] B y(\tau) d\tau , \quad (D.5)$$

onde t_i é um instante arbitrário, e:

$$\exp (A t) = \begin{Bmatrix} \cosh \alpha t & \alpha^{-1} \sinh \alpha t \\ \alpha \sinh \alpha t & \cosh \alpha t \end{Bmatrix} \quad (D.6)$$

No interior do grão ausente tem-se:

$$\tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t) = \bar{y}_* + c (t - t_*), \quad \forall t \in (t_* - \frac{\Delta}{2}, t_* + \frac{\Delta}{2}), \quad (D.7)$$

onde

$$\bar{y}_* \triangleq \tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_*) = [\tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_* + \Delta/2) + \tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_* - \Delta/2)]/2, \quad (D.8)$$

$$c \triangleq \dot{\tilde{y}}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_*) = [\tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_* + \Delta/2) - \tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_* - \Delta/2)]/\Delta. \quad (D.9)$$

Avaliando a Equação D.5 com $t_i = t_1$ e $t = t_* - \Delta/2$ e levando em conta a condição de contorno dada pela Equação 3.24, resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_* - \Delta/2) &= \cosh[\alpha(t_* - \Delta/2 - t_0)] \tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_1) \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_* - \Delta/2} \alpha \sinh[\alpha(t_* - \Delta/2 - \tau)] y(\tau) d\tau, \quad (D.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \alpha \sinh[\alpha(t_* - \Delta/2 - t_0)] \tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_1) \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_* - \Delta/2} \alpha^2 \cosh[\alpha(t_* - \Delta/2 - \tau)] y(\tau) d\tau, \quad (D.11) \end{aligned}$$

donde; eliminando $\tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_1)$:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_* - \Delta/2) &= \{c \cosh[\alpha(t_* - \Delta/2 - t_1)] + \int_{t_1}^{t_* - \Delta/2} \alpha^2 \cosh[\alpha(\tau - t_1)] \\ &\quad y(\tau) d\tau\} \{\alpha \sinh[\alpha(t_* - \Delta/2 - t_1)]\}^{-1}. \quad (D.12) \end{aligned}$$

Analogamente, fazendo $t_i = t_* + \Delta/2$ e $t = t_n$ conclui-se que:

$$\bar{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_* + \Delta/2) = \{-c \cosh[\alpha(t_n - t_* - \Delta/2)] + \int_{t_* + \Delta/2}^{t_n} \alpha^2 \cosh[\alpha(t_n - \tau)] y(\tau) d\tau\} \{\alpha \sinh[\alpha(t_n - t_* - \Delta/2)]\}^{-1}. \quad (D.13)$$

Das Equações D.8-9 e D.12-13 obtém-se:

$$c = \frac{K_1 \alpha^2}{K_2} \left\{ \int_{t_* + \Delta/2}^{t_n} \frac{\cosh[\alpha(t_n - \tau)] y(\tau) d\tau}{\sinh[\alpha(t_n - t_* - \Delta/2)]} - \int_{t_1}^{t_* - \Delta/2} \frac{\cosh[\alpha(\tau - t_1)] y(\tau) d\tau}{\sinh[\alpha(t_* - \Delta/2 - t_1)]} \right\} \quad (D.14)$$

$$\bar{y}_* = \frac{\alpha}{2} \left\{ \int_{t_1}^{t_* - \Delta/2} \left(1 + \frac{K_3}{K_2} \right) \frac{\cosh[\alpha(\tau - t_1)] y(\tau) d\tau}{\sinh[\alpha(t_* + \Delta/2 - t_1)]} + \int_{t_* + \Delta/2}^{t_n} \left(1 - \frac{K_3}{K_2} \right) \frac{\cosh[\alpha(t_n - \tau)] y(\tau) d\tau}{\sinh[\alpha(t_n - t_* - \Delta/2)]} \right\}, \quad (D.15)$$

onde:

$$K_1 \triangleq \cosh[\alpha(T - \Delta)] - \cosh[2\alpha(t_* - t_c)], \quad (D.16)$$

$$K_2 \triangleq \alpha \Delta K_1 + 2 \sinh[\alpha(T - \Delta)], \quad T = t_n - t_1, \quad (D.17)$$

$$K_3 \triangleq 2 \sinh[2\alpha(t_* - t_c)], \quad (D.18)$$

$$t_c \triangleq (t_0 + t_f)/2. \quad (D.19)$$

Finalmente, o resíduo do sinal suavizado em relação ao sinal medido no grão ausente é dado por:

$$\hat{\delta}y_{\alpha, t_* \Delta}(s) \triangleq \bar{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t_* + s) - y(t_* + s), \quad \forall s \in (-\Delta/2, \Delta/2). \quad (D.20)$$

No caso particular onde o sinal $y(t)$ é eterno, isto é, $t_1 \rightarrow -\infty$ e $t_n \rightarrow \infty$, tem-se:

$$\delta y_{\alpha, t_*, \Delta}(\delta) = \frac{\alpha}{2} \left\{ \left(1 - \frac{\alpha \delta}{1 + \alpha \Delta / 2} \right) \int_{-\infty}^{t_* - \Delta / 2} \exp[-\alpha(t_* - \Delta / 2 - \tau)] y(\tau) d\tau + \left(1 + \frac{\alpha \delta}{1 + \alpha \Delta / 2} \right) \int_{t_* + \Delta / 2}^{\infty} \exp[-\alpha(\tau - t_* - \Delta / 2)] y(\tau) d\tau \right\} - y(t_* + \delta) \quad (D.21)$$

D.2 - SINAL BROWNIANO E RUÍDO BRANCO

Com base no modelo dado pelas Equações C.7-8 verifica-se, das Equações 3.22 e D.20-21 que:

$$E \{ \sigma_{\Delta}^2(t_*, \alpha) \} = \sum_{i=1}^9 J_i, \quad (D.22)$$

onde:

$$J_{1\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{4\Delta} \left(1 - \frac{\alpha \delta}{1+u} \right)^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-x-x') E\{v(t_* - \Delta/2 - x/\alpha) v(t_* - \Delta/2 - x'/\alpha)\} dx' dx d\delta = \frac{\alpha}{8} R (1 + K), \quad (D.23)$$

$$J_{2\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{4\Delta} \left(1 + \frac{\alpha \delta}{1+u'} \right)^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-x-x') E\{v(t_* + \Delta/2 + x/\alpha) v(t_* + \Delta/2 + x'/\alpha)\} dx' dx d\delta = \frac{\alpha}{8} R (1 + K) \quad (D.24)$$

$$J_{3\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} E\{v^2(t_* + \delta)\} \frac{d\delta}{\Delta} = E \{v^2(t_*)\} \quad (D.25)$$

$$J_4 \triangleq \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{4\Delta} \left[1 - \frac{\alpha s}{1+u} \right]^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-x-x') E \{ x(t_* - \Delta/2 - x/\alpha) \} \\ x(t_* - \Delta/2 - x/\alpha) \} dx' dx ds = \frac{1}{4} (1+K) \left[\sigma_x^2(t_*) - \frac{\Delta+3/\alpha}{2} Q \right], \quad (D.26)$$

$$J_5 \triangleq \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{4\alpha} \left[1 + \frac{\alpha s}{1+u} \right]^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-x-x') E \{ x(t_* + \Delta/2 + x/\alpha) \} \\ x(t_* + \Delta/2 + x'/\alpha) \} dx' dx ds = \frac{1}{4} (1+K) \left[\sigma_x^2(t_*) + \frac{\Delta+1/\alpha}{2} Q \right], \quad (D.27)$$

$$J_6 \triangleq \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} E \{ x^2(t_* + s) \} \frac{ds}{\Delta} = \sigma_x^2(t_*), \quad (D.28)$$

$$J_7 \triangleq \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\alpha s}{1+u} \right)^2 \right] \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-x-x') E \{ x(t_* - \Delta/2 - x/\alpha) x(t_* + \Delta/2 + x'/\alpha) \} \\ dx' dx ds = \frac{1}{2} (1-K) \left[\sigma_x^2(t_*) - (\Delta/2 + 1/\alpha) Q \right] \quad (D.29)$$

$$J_8 \triangleq \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{-1}{\Delta} \left[1 - \frac{\alpha s}{1+u} \right] \int_0^\infty \exp(-x) E \{ x(t_* - \Delta/2 - x) x(t_* + s) \} dx ds \\ = -\sigma_x^2(t_*) + \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{1}{\alpha} \right) Q \quad (D.30)$$

$$J_9 \triangleq \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{-1}{\Delta} \left[1 + \frac{\alpha s}{1+u} \right] \int_0^\infty \exp(-x) E \{ x(t_* + \Delta/2 + x/\alpha) x(t_* + s) \} dx ds \\ = \sigma_x^2(t_*) + K (1+u) \frac{Q}{\alpha}, \quad (D.31)$$

onde:

$$u \triangleq \alpha \Delta / 2, \quad (D.32)$$

$$K \triangleq \frac{1}{3} [u/(1+u)]^2. \quad (D.33)$$

Das Equações D.22-33 resulta:

$$E\{\sigma_{\Delta}^2(t_*, \alpha)\} = \frac{Q}{\alpha} \left[\frac{1+u}{3} - \frac{1}{12} (1+u)^{-2} \right] + R \frac{\alpha}{4} (1+K) + E\{v^2(t_*)\}, \quad (D.34)$$

que é constante para qualquer t_* , donde:

$$E\{ID(\alpha)\} = E\{\sigma_{\Delta}^2(t_*, \alpha)\} . \quad (D.35)$$

D.3 - SINAIS ESTACIONÁRIOS

Antes de passar ao cálculo para os dois últimos casos particulares abordados convém obter a expressão de esperança de $ID(\alpha)$ para sinais estacionários modelados pelas Equações C.20-21. Definindo:

$$Cov_{y,y}(t+s, t) \triangleq E\{y(t+s) y(t)\} = C_y(|s|) , \quad (D.36)$$

de acordo com este modelo tem-se:

$$C_y(|s|) = C_x(|s|) + C_v(|s|) . \quad (D.37)$$

Analogamente ao item anterior, tem-se:

$$E\{\sigma_{\Delta}^2(t_*, \alpha)\} = \sum_{i=10}^{15} J_i , \quad (D.38)$$

onde:

$$\begin{aligned} J_{10} &\triangleq \frac{1}{4\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha\Delta/2} \right)^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-x-x') C_y(x-x') dx' dx ds \\ &= \frac{1}{4} (1+K) \int_0^{\infty} \exp(-x) C_y(x/\alpha) dx , \end{aligned} \quad (D.39)$$

$$\begin{aligned}
 J_{11\Delta} &\underline{\underline{=}} \frac{1}{4\Delta} \int_{\Delta/2}^{\Delta/2} \left[1 + \frac{\alpha}{1+u} \right]^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-x-x') C_y \left(\frac{x-x'}{\alpha} \right) dx' dx ds \\
 &= \frac{1}{4} (1+K) \int_0^{\infty} \exp(-x) C_y(x/\alpha) dx , \tag{D.40}
 \end{aligned}$$

$$J_{12\Delta} \underline{\underline{=}} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} E\{y^2(t_*+\delta)\} ds = C_y(0) \tag{D.41}$$

$$\begin{aligned}
 J_{13\Delta} &\underline{\underline{=}} \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \left[1 - \left(\frac{\alpha s}{1+u} \right)^2 \right] \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-x+x') C_y \left(\frac{x'+x+\Delta}{\alpha} \right) dx' dx ds \\
 &= \frac{2}{\alpha} (1-K) \int_{\alpha\Delta}^{\infty} (x-2u) \exp(-x+2u) C_y \left(\frac{x}{\alpha} \right) dx , \tag{D.42}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{14\Delta} &\underline{\underline{=}} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \left[1 - \frac{\alpha s}{1+u} \right] \int_0^{\infty} \exp(-u) C_y \left| \frac{x+\Delta/2+\delta}{\alpha} \right| dx ds \\
 &= -\frac{1}{u} \left\{ \int_0^{2u} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{x}{1+u} - \exp(-x) \right] C_y(x/\alpha) dx + \right. \\
 &\quad \left. \int_{2u}^{\infty} \left[\frac{\exp(2u)}{1+u} - 1 \right] \exp(-x) C_y(x/\alpha) dx, \tag{D.43}
 \end{aligned}$$

$$J_{15\Delta} \underline{\underline{=}} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \left[1 + \frac{\alpha s}{1+u} \right] \int_0^{\infty} \exp(-x) C_y \left(\frac{\delta-x-\Delta/2}{\alpha} \right) dx ds = J_{14} \tag{D.44}$$

Das Equações D.38-43 obtém-se:

$$\begin{aligned}
 E\{ID(\alpha)\} &= E\{\sigma_{\Delta}^2(t_*, \alpha)\} = C_y(0) + \frac{2}{u} \left\{ \int_0^{2u} \left[\exp(-x) + \frac{x/2}{1+u} - 1 \right] \right. \\
 &C_y\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx + \int_{2u}^{\infty} \left[1 - \frac{\exp(2u)}{1+u} \right] \exp(-x) C_y\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx \left. \right\} + \frac{1}{2} \\
 &\left\{ (1+K) \int_0^{\infty} \exp(-x) C_y\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx + (1-K) \int_{2u}^{\infty} (x-2u) \right. \\
 &\left. \exp(-x+2u) C_y\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx \right\}. \tag{D.45}
 \end{aligned}$$

No limite $u \rightarrow 0$ verifica-se que $E\{ID(\alpha)\}$ tende a $\tilde{\sigma}^2$ dado pela Equação C.30 no caso sem ruído (isto é, $C_v \cong 0$), o que serve para conferir os resultados até aqui.

D.4 - SINAL E RUÍDO ESTACIONÁRIOS DE GAUSS-MARKOV DE PRIMEIRA ORDEM

Agora, com base no modelo dado pelas Equações C.31-32, obtém-se, da Equação D.45:

$$\sigma_x^{-2} E\{ID(\alpha)\} = \sigma_x^{-2} E\{\sigma_{\Delta}^2(t_*, \alpha)\} = \delta_{G-M}(p, \psi) + \varepsilon^2 \delta_{G-M}(\beta p, \beta \psi), \tag{D.46}$$

onde os parâmetros p, ψ, β e ε aparecem definidos nas Equações 3.34-37, e a função δ_{G-M} é dada por:

$$\begin{aligned}
 \delta_{G-M}(p, \psi) \triangleq & 1 + \frac{2}{\psi} \left\{ \int_0^{2\psi} \left[\exp(-x) + \frac{x/2}{1+\psi} - 1 \right] \exp(-\lambda x/\alpha) dx + \int_{2\psi}^{\infty} \left[1 - \frac{\exp(2\psi)}{1+\psi} \right] \right. \\
 &\exp[-(1+\lambda/\alpha)x] dx \left. \right\} + \frac{1}{2} \left\{ (1+K) \int_0^{\infty} \exp[-(1+\lambda/\alpha)x] dx + (1-K) \int_{2\psi}^{\infty} (x-2\psi) \exp \right. \\
 &\left. [-(1+\lambda/\alpha)x + 2\psi] dx \right\} = 1 - \frac{2/\psi}{1+p} + \frac{1/\psi}{\psi+p} + \frac{1/2}{1+p} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\psi}{\psi+p} \right)^2 \right] + \exp(-\psi) \\
 &\left\{ \frac{p-1}{p+1} \frac{1/\psi}{\psi+p} + \frac{1/2}{(1+p)^2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi}{\psi+p} \right)^2 \right] \right\}. \tag{D.47}
 \end{aligned}$$

Verifica-se que no limite $\psi \rightarrow 0$ e no caso sem ruído ($\epsilon=0$), $\sigma_x^{-2} E\{ID(\alpha)\}$ tende a $\bar{\sigma}^2$ dado pela Equação C.36, conferindo assim este resultado.

D.5 - SINAL E RUÍDO ESTACIONÁRIOS PERIÓDICOS

Analogamente ao item anterior, com base no modelo dado pelas Equações C.45-46, obtem-se da Equação D.45:

$$\sigma_x^{-2} E\{ID(\alpha)\} = \sigma_x^{-2} E\{\sigma_{\Delta}^2(t^*, \alpha)\} = \delta_{per}(\rho, \psi) + \epsilon^2 \delta_{per}(\beta\rho, \beta\psi), \quad (D.48)$$

onde a função δ_{per} é dada por:

$$\begin{aligned} \delta_{per}(\rho, \psi) \triangleq & 1 + \frac{2}{\psi} \left\{ \int_0^{2\psi} \left[\exp(-x) + \frac{x/2}{1+\psi} - 1 \right] \cos(\lambda x/\alpha) dx + \int_{2\psi}^{\infty} \left[1 - \frac{\exp(2\psi)}{1+\psi} \right] \right. \\ & \left. \exp(-x) \cos(\lambda x/\alpha) dx \right\} + \frac{1}{2} \left\{ (1+K) \int_0^{\infty} \exp(-x) \cos(\lambda x/\alpha) dx + (1-K) \right. \\ & \left. \int_{2\psi}^{\infty} (x-2\psi) \exp(-x+2\psi) \cos\left(\frac{\lambda x}{\alpha}\right) dx \right\} = 1 + (1+p^2)^{-1} \left\{ \frac{p^2+2\psi p-1}{\psi(\psi+p)} + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\psi}{\psi+p} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. [(1-p^2)\cos 2\psi - 2p\text{sen} 2\psi] \left[\frac{1/\psi}{\psi+p} + \frac{1/2}{1+p^2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi}{\psi+p} \right)^2 \right] \right] \right\}. \quad (D.49) \end{aligned}$$

também neste caso o limite de $\sigma_x^{-2} E\{ID(\alpha)\}$ quando $\psi \rightarrow 0$ confere com $\bar{\sigma}^2$ da Equação C.51 para o caso sem ruído, isto é, com $\epsilon=0$.

D.6 - SINAL E RUÍDO PERIÓDICOS

A título de verificação dos resultados, deduz-se neste item a função de validação cruzada para o caso de sinal periódico por um caminho independente daquele seguido até aqui. Sabe-se que se o sinal é periódico ele pode ser escrito assim:

$$y(t) = a_{y_0} + \sum_i [a_{y_i} \cos(\omega_i t) + b_{y_i} \text{sen}(\omega_i t)]. \quad (D.50)$$

Neste caso, as Equações 3.7-8 possuem solução dada por:

$$\bar{y}(t) = a_{y_0} + \sum_i \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega_i^2} [a_{y_i} \cos(\omega_i t) + b_{y_i} \text{sen}(\omega_i t)] , \quad (D.51)$$

considerando o sinal perpétuo.

Supondo que o sinal $x(t)$ corresponde ao termo constante e ao primeiro harmônico enquanto que o ruído $v(t)$ corresponde ao segundo harmônico este modelo coincide com aquele dado pelas Equações C.45-46 desde que a_{y_0} seja nulo e:

$$E\{a_{y_1}^2 + b_{y_1}^2\} = 2\sigma_x^2 , \quad (D.52)$$

$$E\{a_{y_2}^2 + b_{y_2}^2\} = 2\sigma_v^2 , \quad (D.53)$$

$$\omega_1 = \lambda , \quad (D.54)$$

$$\omega_2 = \lambda_v . \quad (D.55)$$

Neste caso, a variância do erro do suavizador em relação ao sinal verdadeiro é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} E\{[\bar{y}(t) - x(t)]^2\} dt &= \frac{1}{2} \left[\left\{ (a_{y_1}^2 + b_{y_1}^2) \left(\frac{\omega_1^2}{\alpha^2 + \omega_1^2} \right)^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. (a_{y_2}^2 + b_{y_2}^2) \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega_2^2} \right)^2 \right\} \right] = \sigma_x^2 \left\{ \left[\frac{p^2}{1+p^2} \right]^2 + \varepsilon^2 / (1+\beta^2 p^2)^2 \right\} , \quad (D.56) \end{aligned}$$

que confere com a Equação C.51.

Agora, para calcular a esperança da função de validação cruzada é necessário obter a solução do problema de suavização com um grão ausente. A solução geral da Equação 3.7 é:

$$\bar{y}_g(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 \exp(-\alpha t) + a_{y_0} + \sum_i \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega_i^2} [a_{y_i} \cos(\omega_i t) + b_{y_i} \text{sen}(\omega_i t)] . \quad (D.57)$$

A solução da Equação 3.23 com condições de contorno dados pela Equação 3.24, por sua vez, também possui a forma da Equação D.57 fora do grão au sente, com constantes c_1 e c_2 determinadas impondo:

$$\dot{\tilde{y}}_g (-T/2) = 0 , \quad (D.58)$$

$$\dot{\tilde{y}}_g (t_* - \Delta/2) = c , \quad (D.59)$$

para a parte anterior a $t_* - \Delta/2$ e:

$$\dot{\tilde{y}}_g (T/2) = 0 , \quad (D.60)$$

$$\dot{\tilde{y}}_g (t_* + \Delta/2) = c , \quad (D.61)$$

para a parte posterior a $t_* + \Delta/2$. Assim, tem-se:

$$\tilde{y}_{\alpha, t_*, \Delta}^0(t) = \begin{cases} \frac{c - \dot{\tilde{y}}(t)}{\alpha} \exp[-\alpha(t_* - \Delta/2 - t)] + \tilde{y}(t), & \forall t < t_* - \Delta/2, \\ \tilde{y}_* + c(t - t_*), & \forall t \in (t_* - \Delta/2, t_* + \Delta/2), \\ \frac{\dot{\tilde{y}}(t) - c}{\alpha} \exp[-\alpha(t - t_* - \Delta/2)] + \tilde{y}(t), & \forall t > t_* + \Delta/2. \end{cases} \quad (D.62)$$

Das Equações D.8-9 e D.62 segue que:

$$\tilde{y}_* = a_{y_0} + \sum_i \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega_i^2} [\cos(\omega_i \Delta/2) - \frac{\omega_i}{\alpha} \text{sen}(\omega_i \Delta/2)] \cdot [a_{y_i} \cos(\omega_i t_*) + b_{y_i} \text{sen}(\omega_i t_*)] , \quad (D.63)$$

$$c = \sum_i \frac{\alpha^2(1+u)^{-1}}{\alpha^2 + \omega_i^2} [\alpha \operatorname{sen}(\omega_i \Delta/2) + \omega_i \cos(\omega_i \Delta/2)] \cdot [-a_{y_i} \operatorname{sen}(\omega_i t_*) + b_{y_i} \cos(\omega_i t_*)] , \quad (D.64)$$

donde o resíduo no interior do grão ausente é dado por:

$$\begin{aligned} \delta y_{\alpha, t_*, \Delta}(s) = \sum_i \left\{ \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega_i^2} [\cos(\omega_i \Delta/2) - \frac{\omega_i}{\alpha} \operatorname{sen}(\omega_i \Delta/2)] - \cos(\omega_i s) \right\} \\ \cdot [a_{y_i} \cos(\omega_i t_*) + b_{y_i} \operatorname{sen}(\omega_i t_*)] + \left\{ \frac{\alpha^2(1+u)^{-1}}{\alpha^2 + \omega_i^2} s [\alpha \operatorname{sen}(\omega_i \Delta/2) + \right. \\ \left. \omega_i \cos(\omega_i \Delta/2)] - \operatorname{sen}(\omega_i s) \right\} [-a_{y_i} \operatorname{sen}(\omega_i t_*) + b_{y_i} \cos(\omega_i t_*)] . \quad (D.65) \end{aligned}$$

O resíduo médio quadrático no interior do grão ausente é dado em função de s por:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta y_{\alpha, t_*, \Delta}^2(s) dt_* = \sum_i \frac{a_{y_i}^2 + b_{y_i}^2}{2} \left\{ 1 + k_i^2 \left[\cos(\omega_i \Delta/2) - \frac{\omega_i}{\alpha} \operatorname{sen}(\omega_i \Delta/2) \right]^2 - 2k_i \left[\cos(\omega_i \Delta/2) - \frac{\omega_i}{\alpha} \operatorname{sen}(\omega_i \Delta/2) \right] \cos(\omega_i s) + \left[\frac{k_i s}{1+u} \right]^2 \right. \\ \left. [\alpha \operatorname{sen}(\omega_i \Delta/2) + \omega_i \cos(\omega_i \Delta/2)]^2 - \frac{2k_i s}{1+u} [\operatorname{sen}(\omega_i \Delta/2) + \omega_i \cos(\omega_i \Delta/2)] \operatorname{sen}(\omega_i s) \right\} . \quad (D.66) \end{aligned}$$

Calculando agora o valor esperado médio em todo o interior do grão ausente e utilizando as Equações D.52-55, chega-se ao resultado do valor esperada da função de validação cruzada que confere com a Equação D.48.

D.7 - SINAL E RUÍDO EFÊMEROS

Finalizando este Apêndice, mostra-se neste item que a solução de mínimo para o valor esperado da função de validação cruzada no caso de sinais estacionários, dada pela Equação D.45, é também a solução de mínimo para o caso de sinais efêmeros não estacionários, caracterizados por:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} E [y(t+\tau) y(t)] dt = C_y(|\tau|) . \quad (D.67)$$

De fato, isto pode ser facilmente verificado, como a seguir. Das Definições 3.21-22 e D.20 tem-se que:

$$E\{ID(\alpha)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} E\{\delta y_{\alpha, t_*, \Delta}^2(s)\} ds dt_* \quad (D.68)$$

No caso de sinais estacionários nota-se que:

$$E\{\delta y_{\alpha, t_*, \Delta}^2(s)\} = \mathcal{L}_{\Delta} \{C_y\} , \quad (D.69)$$

onde \mathcal{L} representa um operador linear. Daí, segue que

$$\sigma_{\Delta}^2(t_*, \alpha) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} E\{\delta y_{\alpha, t_*, \Delta}^2(s)\} ds = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \mathcal{L}_{\Delta} \{C_y\} ds , \quad (D.70)$$

independe de t_* e portanto:

$$E\{ID(\alpha)\} = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \mathcal{L}_{\Delta} \{C_y\} ds . \quad (D.71)$$

Por outro lado, para sinais efêmeros tem-se que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} E\{\delta y_{\alpha, t_*, \Delta}^2(s)\} dt_* = \mathcal{L}_{\Delta} \{C_y\} . \quad (D.72)$$

Ora, invertendo a ordem de integração da Equação D.68 e utilizando a Equação D.72 verifica-se que:

$$\begin{aligned}
 E\{ID(\alpha)\} &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E\{\delta y_{\alpha, t_*, \Delta}^2(s)\} dt_* ds \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \xi_s\{C_y\} ds, \quad (D.73)
 \end{aligned}$$

cujo mínimo claramente coincide com o mínimo da Equação D.71, referente ao caso estacionário.