REFERÊNCIAS

[1] PARKINSON,B.W.; GILBERT,S.W. "Global Positioning System - Ten years later." *Proceedings of IEEE*, 71(10): 1177-1186, Oct. 1983.

[2] STURZA,M.A. "GPS navigation using satellites and a precise clock." Paper published in *Navigation*, Institute of Navigation, Vol. 2: 122-132, 1984.

[3] LOPES,R.V.F.; KUGA,H.K. *Fast optimal orbit estimation from GPS measurements*. São José dos Campos, INPE, Oct. 1986 (INPE-4016-NTE/263).

[4] ———— *Optimal estimation of local orbit from GPS measurements*. São José dos Campos, INPE, Nov. 1986 (INPE-4056-NTE/265). Submitted for publication in the Journal of Guidance, Control and Dynamics.

o caso de relógio de bordo não-sincronizado, tendo a vantagem de poder considerar qualquer número n≥3 de satélites do GPS.

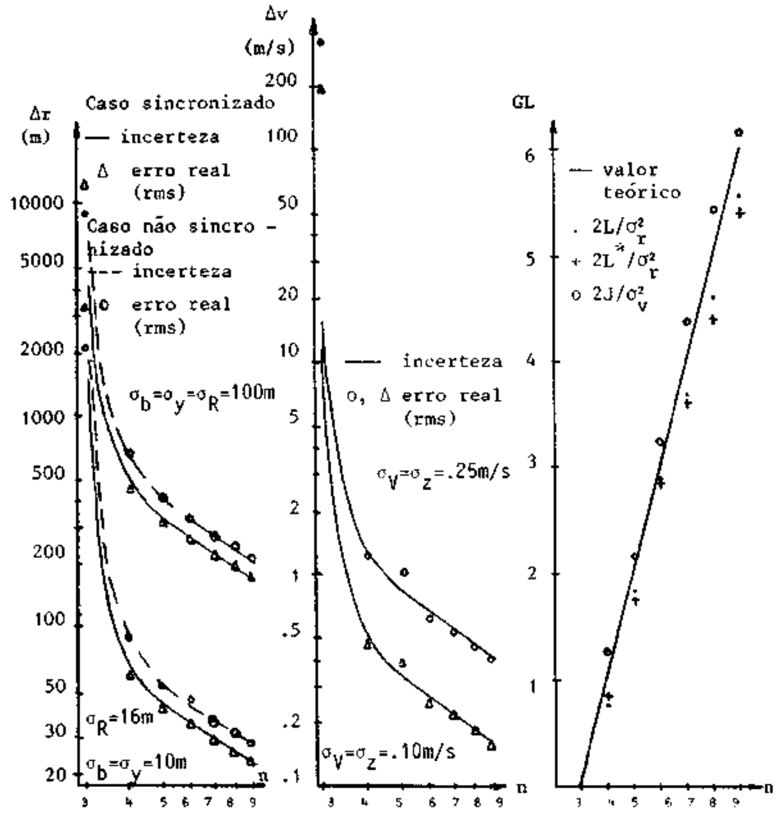

Fig.1-Gráficos do desempenho dos procedimentos nas simulações

vês da comparação direta dos valores estimados com aqueles [illegible] dos pela solução ótima. Os valores esperados de L, J e L* [illegible] nálise dos graus de liberdade do problema. No caso de erros gaussianos, as grandezas $2L\sigma_r^{-2}$, $2J\sigma_v^{-2}$ e $2L^*\sigma_{r^*}^{-2}$ têm distribuição qui-quadrada [illegible] perança é dada pelo número de graus de liberdade. Já que nenhuma hipótese sobre a distribuição dos erros foi feita durante a dedução do processamento, os valores esperados de L, J e L* são os mesmos para qualquer distribuição, o que certamente inclui a gaussiana. O cálculo do número [illegible] graus de liberdade é esquematizado na Tabela 1. Esta análise do caso de distribuição gaussiana, além de permitir o cálculo dos valores esperados de $2L\sigma_r^{-2}$, $2J\sigma_v^{-2}$ e $2L^*\sigma_{r^*}^{-2}$, também sugere o seguinte intervalo de confiança para estes valores, definido pela variância da distribuição qui-quadrada: $(n-3-\sqrt{2(n-3)}, n-3+\sqrt{2(n-3)})$.

TABELA 1 - ANÁLISE DE GRAUS DE LIBERDADE

GRANDEZA	SÍMBOLO	VALOR	
		L,J	L*
Número de termos da soma de quadrados de resíduos	NR	3n	3n
Número total de parâmetros envolvidos	NPT	[illegible]+3	3n+4
Número de vínculos dos parâmetros	NV	n	n
Número de parâmetros livres envolvidos	NPL=NPT-NV	2n+3	2n+4
Número de graus de liberdade	GL=NR-NPL	n-3	[illegible]

4-RESULTADOS E CONCLUSÕES

Alguns resultados obtidos via simulação em computador [illegible] são apresentados na Figura 1. Nesta, os erros reais representam [illegible] da diferença vetorial entre o valor estimado e o simulado, enquanto [illegible] certeza é obtida pelo traço da matriz de covariância do erro. [illegible] ral os resultados apresentados indicam que quanto maior [illegible] satélites do GPS visíveis simultaneamente pelo usuário, menor [illegible] za nas estimativas. Além disso observou-se uma perfeita [illegible] tística nos resultados. Conclui-se que o método tem características promissoras para estimação estática de órbita de satélites, inclusive [illegible]

$$u_i = (r - R_i)/|r - R_i| \; ; \; U = \sum_i a_i u_i \; , \tag{14}$$

$$\Delta y = \sum_i a_i \, [|r - R_i| - y_{\rho_i}] \; . \tag{15}$$

Vale ressaltar que as Equações 7, 8, 13 e 14 representam as soluções exatas na forma fechada do problema de determinação de órbita pelo método de mínimos quadrados. Soluções numéricas podem ser obtidas pelo método de Newton-Raphson e coincidem com os resultados do método de mínimos quadrados linearizados [4]:

$$r^{k+1} = r^k - A^{-1}(a_i) \sum_i a_i \, [r^k - (R_i + \rho_i)] \; , \tag{16}$$

no caso sincronizado; e, no caso não-sincronizado:

$$r^{k+1} = r^k - F^{-1} \, f(r^k - R_i, y_{\rho_i}) \; , \; F \triangleq A(a_i) - UU' \; . \tag{17}$$

3-ESTIMAÇÃO DE INCERTEZAS

Além de estimar a órbita é igualmente necessário e importante avaliar a incerteza nos resultados, uma vez que as medidas y_i (ou y_{ρ_i}) e z_i, e os dados R_i e V_i não são exatos. Admitindo erros aleatórios não correlacionados e não tendenciosos em y_i (ou em y_{ρ_i}), z_i, R_i e V_i com desvios padrões dados respectivamente por $\sigma_{y_i}, \sigma_{z_i}, \sigma_{R_i}$ e σ_{V_i}, e arbitrando valores inversamente proporcionais a $\sigma^2_{y_i} + \sigma^2_{R_i}$ e a $\sigma^2_{z_i} + \sigma^2_{V_i}$ para os pesos a_i e b_i respectivamente, obtêm-se as seguintes expressões para a matriz de covariância dos erros em posição e velocidade:

$$C_{rr} = \sigma^2_r \, A^{-1}(a_i) \; , \; \sigma_r = \{ \sum_i (\sigma^2_{y_i} + \sigma^2_{R_i})^{-1} \}^{-1/2} \; , \tag{18}$$

$$C_{vv} = \sigma^2_r \, A^{-1}(b_i) \; , \; \sigma_v = \{ \sum_i (\sigma^2_{z_i} + \sigma^2_{V_i})^{-1} \}^{-1/2} \; , \tag{19}$$

no caso de relógios sincronizados. No caso de relógios não-sincronizados arbitrando ao peso a* um valor inversamente proporcional ao quadrado da faixa de incerteza do erro sistemático, σ^2_b, as incertezas das estimativas passar a ser:

$$C_{rr} = \sigma^2_{r*} \, F^{-1} \; , \; \sigma_{r*} = [\, \sigma_b^{-2} + \sum_i (\sigma^2_{y_i} + \sigma^2_{R_i})^{-1} \,]^{-1/2} \; , \tag{20}$$

$$\sigma^2_{\Delta y} = \sigma^2_{r*} + U'C_{rr}U = \sigma^2_{r*} \, [\, 1 - U'A^{-1}(a_i)U \,]^{-1} \; . \tag{21}$$

O modelo de erros é útil também para estimar os valores ótimos de L, J e L*. Isto permite avaliar a coerência estatística do modelo de erros atra vos e de soma unitária, e ' indica o transposto de um vetor; e

$$\text{minimizar } J(v,\nu_i) = \frac{1}{2} \sum_i b_i \, |v-(V_i+\nu_i)|^2 \tag{4}$$

$$\text{sujeito a } \rho_i' \nu_i = y_i z_i \,, \tag{5}$$

$$\text{dados } \{ (\rho_i, y_i, V_i, z_i, b_i),\ i=1,2,\ldots,n,\ n\geq 3 \} \,, \tag{6}$$

para estimar a velocidade, onde v, V_i e ν_i são as derivadas temporais de r, R_i e ρ_i; z_i sao medidas de taxa de variação do alcance; e b_i sao pesos arbitrários positivos e de soma unitária. A solução completa é dada por [3] :

$$r = \sum_i a_i \, (R_i + \rho_i) \,, \tag{7}$$

$$\rho_i = y_i u_i \,,\ u_i = (r - R_i)/|r - R_i| \,, \tag{8}$$

$$v = \Lambda^{-1}(b_i) \sum_i b_i u_i (u_i' V_i + z_i),\ \Lambda(b_i) \triangleq \sum_i b_i u_i u_i' \,. \tag{9}$$

Levando em conta que a medida de alcance é afetada por um erro sistemático devido ao nao-sincronismo de fase entre os relógios do GPS e o do satélite usuário, as equações anteriores devem ser ligeiramente alteradas de modo a corrigir este efeito na determinação da posição. Já o cálculo da velocidade, praticamente insensível a erros em posição, permanece inafetado, visto que medidas da taxa de variação de alcance, obtidas com base no efeito Doppler, estão sujeitas a erros relacionados apenas com a sintonia em frequência dos relógios. Assim, no método estendido o problema de otimizaçao enunciado pelas equações 1 a 3 é substituído por:

$$\text{minimizar } L^*(r,\rho_i,\Delta y) = L(r,\rho_i) + \frac{1}{2} a^* \Delta y^2 \tag{10}$$

$$\text{sujeito a } \rho_i' \rho_i = (y_{\rho_i} + \Delta y)^2 \,, \tag{11}$$

$$\text{dados } \{a^*, (R_i, y_i, a_i),\ i=1,2,\ldots,n,\ n\geq 3\} \,, \tag{12}$$

onde y_{ρ_i} sao medidas de pseudo-alcance, assim chamadas por estarem afetadas pelo erro sistemático dos relógios; Δy é uma constante de correção do erro sistemático; e a^* é um peso arbitrário positivo. Os pesos devem também neste caso obedecer à condição de soma unitária, isto é $a^* + \sum_i a_i = 1$. A soluçao deste novo problema deve satisfazer [4]:

$$f(r-R_i, y_{\rho_i}) \triangleq \sum_i a_i \, (u_i - U) \, [\,|r-R_i| - y_{\rho_i}] = 0 \,, \tag{13}$$

ESTIMAÇÃO ESTÁTICA DE ÓRBITA UTILIZANDO O SISTEMA DE POSICIONAMENTO GLOBAL (GPS)

ROBERTO VIEIRA DA FONSECA LOPES
HÉLIO KOITI KUGA
Instituto de Pesquisas Espaciais-CEP 12201-CP 515-SP

1-INTRODUÇÃO

O Sistema de Posicionamento Global ("Global Positioning System" - GPS) é uma constelação de 18 satélites artificiais cujo propósito é prover pontos de referência para a determinação da posição e velocidade de veículos espaciais em qualquer ponto ao redor da Terra [1]. A grande vantagem trazida por esse sistema na determinação de órbita de satélites é que ele garante observações redundantes o suficiente para determinar a posição e velocidade sem o auxílio de modelos dinâmicos. Usualmente utilizam-se medidas simultâneas de alcance e taxa de variação de alcance em relação a três satélites do GPS para determinar a órbita [2]. Um quarto satélite pode ser incluído para sincronizar o relógio do satélite usuário com os do GPS. Recentemente os autores apresentaram um método do tipo mínimos quadrados [3] para estimação estática de órbita considerando n satélites do GPS, $n \geq 3$. Em seguida tratou-se o caso estendido que inclui a sincronização do relógio de bordo [4]. O objetivo deste trabalho é divulgar os resultados obtidos e enfatizar algumas propriedades estatísticas do método.

2-PROCEDIMENTO PARA ESTIMAR A ÓRBITA

O problema de estimação estática de órbita (posição e velocidade) usando o GPS e admitindo relógios sincronizados pode ser formulado como dois problemas separados de otimização:

$$\text{minimizar } L(r,\rho) = \frac{1}{2} \sum_i a_i \, |r-(R_i+\rho_i)|^2 \qquad (1)$$

$$\text{sujeito a } \rho_i' \rho_i = y_i^2 \; , \qquad (2)$$

$$\text{dados } \{(R_i, y_i, a_i),\ i=1,2,\ldots,n,\ n\geq 3\} \; , \qquad (3)$$

para estimar a posição, onde r é o vetor posição do satélite usuário em relação ao referencial inercial, R_i são os vetores posição dos satélites do GPS em relação ao referencial incercial; ρ_i são os vetores posição relativa do satélite em relação aos satélites do GPS, y_i são medidas de alcance em relação aos satélites do GPS, a_i são pesos arbitrários positi