1. Publicação nº	2. Versão	3. Data	5. Distribuição
INPE-2486-PRE/170		*Julho, 1982*	☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita
4. Origem *DGA/DIO*	Programa *IONO*		

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)

ANÁLISE DE INTERVALOS
TEORIA DOS ERROS

7. C.D.U.: *519.854.3*

8. Título *INPE-2486-PRE/170*	10. Páginas: *21*
ASPECTOS DA ANÁLISE NUMÉRICA DE INTERVALOS DO PONTO DE VISTA DE SUA UTILIZAÇÃO	11. Última página: *19*
	12. Revisada por *L.A. Vieira Dias*
9. Autoria *Carlos José Zamlutti* Assinatura responsável	13. Autorizada por *Nelson de Jesus Parada* *Diretor*

14. Resumo/Notas

A análise de intervalos é examinada em seu aspecto de aplicação nas soluções numéricas de problemas. O método proposto trata o problema do ponto de vista "macroscópico", evitando o complexo desenvolvimento "microscópico" que resulta da utilização da aritmética de intervalos. A finalidade da análise numérica de intervalos é a determinação do intervalo dentro do qual se encontra a solução de um problema, sabendo-se da incerteza que afeta os parâmetros envolvidos. A solução apresentada neste trabalho fundamenta-se na aplicação do teorema de Taylor de uma forma generalizada.

15. Observações *Este trabalho foi parcialmente apoiado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, através do convênio FINEP-537/CT, e submetido para apresentação no 5º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 1 a 5/08/82, João Pessoa - PB.*

ASPECTOS DA ANÁLISE NUMÉRICA DE INTERVALOS DO PONTO DE VISTA DE SUA ULITIZAÇÃO

Carlos José Zamlutti

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

12200 São José dos Campos, S.P., Brasil

RESUMO

A análise de intervalos é examinada em seu aspecto de aplicação nas soluções numéricas de problemas. O método proposto trata o problema do ponto de vista "macroscópico", evitando o complexo desenvolvimento "microscópico" que resulta da utilização da aritmética de intervalos. A finalidade da análise numérica de intervalos é a determinação do intervalo dentro do qual se encontra a solução de um problema, sabendo-se da incerteza que afeta os parâmetros envolvidos. A solução apresentada neste trabalho fundamenta-se na aplicação do teorema de Taylor de uma forma generalizada.

1. INTRODUÇÃO

O propósito da análise numérica de intervalos é determinar o intervalo dentro do qual se encontra a solução de um problema, quando os parâmetros nele envolvidos são afetados por incertezas de origens diversas.

Existem três causas de erros que originam incertezas em análise numérica:

a) arredondamento de números racionais no computador,

b) incerteza na determinação de constantes físicas,

c) truncamento nas séries numéricas.

O problema mais elementar consiste na determinação do intervalo dentro do qual se encontra o resultado da adição de duas grandezas, x e y, sabendo-se que $x \varepsilon (x_m, x_M)$ e $y \varepsilon (y_m, y_M)$. O resultado, conhecido da teoria de erros, é dado pelo intervalo $(x_m + y_m, x_M + y_M)$.

No caso de problemas relativamente complexos, que envolvem um grande número de operações, torna-se impraticável uma determinação razoável do intervalo de confiabilidade da solução, utilizando-se apenas os elementos da aritmética de intervalos (Nickel, 1977). Nestas condições pode-se chegar a impasses de difícil resolução (Nickel, 1977).

Neste trabalho será apresentado um tratamento alternativo, baseado no teorema de Taylor. O objetivo é permitir a obtenção do intervalo de confiabilidade de uma forma simples e de fácil aplicação.

2. FUNDAMENTOS DO MÉTODO

Um programa de computador pode ser interpretado como uma função vetorial de variável vetorial, e seus resultados representados simbolicamente por:

$$\underline{v} = \underline{f}(\underline{x}),$$

onde:

$\underline{v}$ = vetor dos resultados,

$\underline{x}$ = parâmetros envolvidos (variáveis de entrada),

$\underline{f}$ = relação funcional desenvolvida pelo algoritmo utilizado.

No caso em que $\underline{f}$ envolve apenas funções contínuas, com derivadas contínuas, pode-se utilizar o teorema de Taylor para determinar as variações provocadas em $\underline{v}$ por alterações presentes em $\underline{x}$:

Teorema de Taylor - Seja $f_i(\underline{x})$ uma função escalar de variável vetorial, com derivadas parciais contínuas até ordem m, para cada ponto de um conjunto aberto S do espaço euclidiano n dimensional E_n. Se $\underline{x} \varepsilon S$ e $\underline{x} + \Delta\underline{x} \varepsilon S$ e se a reta que une os pontos $\underline{x}$ e $\underline{x} + \Delta\underline{x}$, designada por $L(\underline{x}, \underline{x} + \Delta\underline{x})$, está contida em S, então existe um ponto $\underline{z}$ na reta $L(\underline{x}, \underline{x} + \Delta\underline{x})$ tal que:

$$f_i(\underline{x} + \Delta\underline{x}) - f_i(\underline{x}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \left[\sum_{\alpha_1=1}^{n} \cdots \sum_{\alpha_k=1}^{n} \Delta x_{\alpha_1} \cdots \Delta x_{\alpha_k} \frac{\partial^k f_i(\underline{x})}{\partial x_{\alpha_1} \cdots \partial x_{\alpha_k}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{m!} \left[\sum_{\alpha_1=1}^{n} \cdots \sum_{\alpha_m=1}^{n} \Delta x_{\alpha_1} \cdots \Delta x_{\alpha_m} \frac{\partial^m f_i(\underline{z})}{\partial x_{\alpha_1} \cdots \partial x_{\alpha_m}} \right],$$

onde.

$$\frac{\partial^k f_i(\underline{x})}{\partial x_{\alpha_1} \cdots \partial x_{\alpha_k}}$$

indica a derivada parcial de ordem k da função $f_i(\underline{x})$, com respeito às variáveis $x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_k}$, calculada no ponto $\underline{x}$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Apostol (1960).

Quando o algoritmo utilizado envolve apenas funções $f_i(\underline{x})$ contínuas, com derivadas parciais contínuas, a variação Δv_i do resultado v_i pode ser calculada usando-se o teorema de Taylor. Neste caso, a única dificuldade de implementação do método está na avaliação numérica das derivadas parciais das funções $f_i(\underline{x})$, que será discutida na próxima seção.

De modo geral, os algoritmos envolvem descontinuidades de primeira espécie introduzidas pelas "regras de decisão" que são incorporadas nos programas pelos comandos lógicos, principalmente os do tipo "IF". Este tipo de descontinuidade pode ser tratado pela utilização de funções generalizadas (Friedman, 1966; Lighthill, 1964) e constitui uma restrição à aplicação do teorema de Taylor.

3. AVALIAÇÃO NUMÉRICA DE DERIVADAS PARCIAIS

A avaliação numérica de derivadas parciais é feita na forma de um quociente em que o numerador aproxima as variações Δf pelo método de diferenças finitas, e o denominador é dado pelo produto dos incrementos, δx_{α_j}, das variáveis independentes. Tem-se assim:

$$\frac{\partial^k f_i(\underline{x})}{\partial x_{\alpha_1} \cdots \partial x_{\alpha_k}} = \frac{\Delta^k f_i(\underline{x})}{\delta x_{\alpha_1} \cdots \delta x_{\alpha_k}} .$$

O cálculo da diferença finita de ordem k, da função $f_i(\underline{x})$, é feito recursivamente pela relação:

$$\Delta^k f_i(\underline{x}) = \Delta_{\alpha_k} \cdots \Delta_{\alpha_1} f_i(\underline{x}) .$$

Desenvolvendo-se esta fórmula resulta:

$$\Delta_{\alpha_1} f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{x} + \underline{\delta x}_{\alpha_1}) - f_i(\underline{x}) ,$$

$$\Delta_{\alpha_2} \Delta_{\alpha_1} f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{x} + \underline{\delta x}_{\alpha_1} + \underline{\delta x}_{\alpha_2}) - f_i(\underline{x} + \underline{\delta x}_{\alpha_1}) -$$

$$- f_i(\underline{x} + \underline{\delta x}_{\alpha_2}) + f_i(\underline{x}) .$$

e assim sucessivamente. Os $\underline{\delta x}_{\alpha_j}$ são vetores cuja única componente não--nula é a α_j-ésima, que possui o valor do incremento: δx_{α_j}. O resultado final será dado pela adição das seguintes componentes:

i) uma somatória que contém $C_{k,k} = 1$ termo na forma:

$$f_i(\underline{x} + \sum_{j=1}^{k} \underline{\delta x}_{\alpha_j});$$

ii) uma somatória que contém $C_{k,\ k-1} = k$ termos na forma:

$$- \sum_{p=1}^{k} f_i(\underline{x} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{k} \underline{\delta x}_{\alpha_j});$$

iii) uma somatória que contém $C_{k,\ k-2} = k(k-1)/2$ termos na forma:

$$\sum_{q=1}^{k} \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq q}}^{k} f_i(\underline{x} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p \\ j\neq q}}^{k} \underline{\delta x}_{\alpha_j}),$$

e assim por diante, alternando o sinal das somatórias até a última componente que contém $C_{k,0} = 1$ termo na forma:

$$(-1)^k f_i(\underline{x}).$$

Para cada coleção de índices $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, o total de vezes que o programa deve ser reexecutado é dado por:

$$(\sum_{s=0}^{k} C_{k,s}) - 1 = 2^k - 1 .$$

Como cada α_j varia de 1 até n, a k-ésima parcela da série de Taylor exigirá um total de:

$$n^k (2^k - 1)$$

reexecuções do programa.

O número de reexecuções do programa, determinado no parágrafo anterior, constitui uma estimativa pessimista. Na verdade, tal número pode ser reduzido, considerando-se que na relação:

$$\Delta^k f_i(\underline{x}) = \Delta_{\alpha_k} \left[\Delta^{k-1} f_i(\underline{x}) \right] = \Delta^{k-1} f_i(\underline{x} + \underline{\delta x}_{\alpha_k}) - \Delta^{k-1} f_i(\underline{x})$$

as parcelas de $\Delta^{k-1} f_i(\underline{x})$ já foram determinadas para a componente de ordem k-1. Assim para $k \geq 2$, o número de reexecuções do programa será:

$$n^{(k-1)} (2^{(k-1)} - 1)$$

para cada componente da fórmula de Taylor. De qualquer modo o processo é dispensioso, mas não incorre em problemas para subestimar ou superestimar o intervalo (Nickel, 1977).

4. DESCONTINUIDADES DE PRIMEIRA ESPÉCIE

As descontinuidades de primeira espécie são introduzidas, nos algoritmos, pelas regras de decisão como, por exemplo:

se $x \geq 0$ $\quad s(x) = s_1(x)$,

se $x < 0$ $\quad s(x) = s_2(x)$,

executáveis em computador pelos comandos lógicos do tipo IF.

Descontinuidades presentes em quaisquer das derivadas invalidam a aplicação da fórmula de Taylor. As descontinuidades em questão serão estudadas do ponto de vista de funções generalizadas (Schwartz, 1973; Friedman, 1966; Lighthill, 1964).

Qualquer função $f(x)$, com descontinuidade de primeira espécie em qualquer de suas derivadas, pode ser expressa como a soma de duas outras funções (Friedman, 1966):

$$f(x) = \tilde{f}(x) + g(x),$$

onde:

$\tilde{f}(x)$ = função contínua com derivadas contínuas até ordem m,

$g(x)$ = função generalizada.

Assim, no exemplo dado acima, se $s_2(x)$ é uma função contínua, com derivadas contínuas, pode-se escrever:

$$f(x) = s_2(x) + \left[s_1(x) - s_2(x) \right] H(x),$$

onde $H(x)$ é a função degrau de Heaviside. Identifica-se então a função generalizada:

$$g(x) = \left[s_1(x) - s_2(x) \right] H(x).$$

As funções generalizadas só possuem significado como "distribuições" (Schwartz, 1973). Essas funções podem, entretanto, ser interpretadas como caso limite de alguma sequência de funções contínuas e deriváveis (Lighthill, 1964). É possível escrever:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$$

e existir uma vizinhança de raio σ, em torno do ponto de descontinuidade de x_o, fora da qual, para um dado ε arbitrariamente pequeno, é sempre possível determinar um N, tal que para $n > N$:

$$|g(x) - \phi_n(x)| < \varepsilon, \qquad x \notin (x_o - \sigma,\ x_o + \sigma).$$

De modo oposto, dado $\varepsilon > o$ tal que:

$$|g(x) - \phi_N(x)| < \varepsilon,$$

fica determinado o raio σ da vizinhança restrita de x_o.

A existência de uma "aproximação contínua e derivável" para g(x) é de grande importância em Análise Numérica. De fato, trabalhando-se com valores de x fora da vizinhança de raio σ de x_o, pode-se escrever:

$$f(x) \cong \tilde{f}(x) + \phi_n(x).$$

Nesta última aproximação, $f(x)$ é contínua com derivadas contínuas, podendo-se, pois, aplicar o teorema de Taylor.

No caso de maior interesse prático, os algoritmos utilizados são sempre consistentes e aplicados a problemas consistentes (Isaacson and Keller, 1966). Nestas condições, para todo x existe o valor $g(x)$ finito. A restrição ao uso da fórmula de Taylor é concernente ao cálculo das derivadas de $g(x)$ que podem eventualmente envolver funções generalizadas do tipo $\delta(x)$, cujo significado só aparece quando englobadas num processo de integração (Lighthill, 1964). Este problema é facilmente contornado por uma das duas alternativas:

a) avaliar a derivada numérica por métodos como o de diferenças finitas que só envolvem valores $g(x)$,

b) utilizar a aproximação contínua e derivável de $f(x)$, evitando-se as vizinhanças dos pontos de descontinuidades.

A primeira alternativa pode ser usada, neste caso, sem maiores problemas, pois o limite da sequência das $\phi_n(x)$ é finito para todo x.

5. DETERMINAÇÃO DO INTERVALO DA SOLUÇÃO

A determinação do intervalo dentro do qual está contida a solução envolve duas etapas:

a) escolha do ponto x em torno do qual será feita a expansão em série de Taylor.

b) estabelecimento dos valores máximos, positivo e negativo, das variações Δv_i.

A escolha do ponto $\underline{x}$ depende essencialmente da distribuição de probabilidades dentro do intervalo de incerteza para cada uma de suas componentes. Destacam-se dois tipos principais:

i) Distribuição uniforme para a qual se procura escolher cada x_i, de forma a minimizar a relação:

$$\left| \frac{\Delta x_i}{x_i} \right| .$$

ii) Distribuição decrescente em função do afastamento com relação a um valor mais provável, $\bar{x}_i$, que será escolhido para a componente x_i.

Em geral, os arredondamentos executados pelo computador são do primeiro tipo, enquanto medidas físicas, obtidas como resultado de um número significativo de experiências idênticas, pertecem ao segundo tipo.

O estabelimento dos valores máximos das variações Δv_i depende da escolha conveniente de sinal dos Δx_{α_j}. O máximo negativo será obtido quando todas as parcelas de cada componente da série de Taylor forem negativas. Analogamente, o máximo positivo depende da coerência de sinais positivos para todas as parcelas envolvidas.

Na utilização da fórmula de Taylor, para estimativa dos Δv_i, deve-se ter cuidado com a avaliação das derivadas parciais. Quando um intervalo particular $(x_k, x_k + \Delta x_k)$ envolver um ponto de descontinuidade, o intervalo correspondente ao cálculo das derivadas parciais $(x_k, x_k + \delta x_k)$ também deverá englobar esse ponto.

6. EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Nesta seção serão apresentados exemplos extremamente simples, mas que ilustram perfeitamente a aplicação do método.

Considere-se o problema para calcular o intervalo dentro do qual se encontra o valor $y = f(x)$:

$$f(x) = x \quad - \quad x \in [0;1]$$

$$f(x) = 1 + 0{,}05(x - 1) \qquad x \in [1;20]$$

quando o valor x é igualmente provável no intervalo (0,9; 1,1).

No presente caso, a aplicação da aritmética de intervalos é imediata, pois, sendo f(x) monotonicamente crescente, tem-se:

$$y_{min} = f(x_{min}) = f(0{,}9) = 0{,}9,$$

$$y_{max} = f(x_{max}) = f(1{,}1) = 1{,}005.$$

Verifica-se que, apesar da descontinuidade de primeira espécie nas deridas de f(x) no ponto x = 1, a solução do problema existe.

A aplicação do método proposto neste trabalho requer, primeiramente, a escolha do ponto x_o em torno do qual se fará a expansão de Taylor. Sendo os valores igualmente prováveis, será escolhido o ponto $x_o = 1,1$, pois é ele que minimiza a relação:

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right|.$$

Constata-se em seguida que o intérvalo $(x_o - \Delta x_o, x_o)$ engloba o ponto de descontinuidade $x = 1$. A avaliação numérica das derivadas deverá, pois, englobar esse ponto.

Como o ponto x_o encontra-se no extremo superior de viabilidade de x, as derivadas são calculadas utilizando-se diferenças regressivas. Tomando-se seis pontos $x_1 = 0,6$; $x_2 = 0,7$; $x_3 = 0,8$; $x_4 = 0,9$; $x_5 = 1,0$ e $x_6 = 1,1$, têm-se as diferenças para o cálculo de cinco derivadas:

$$\Delta f(x_6) = 1,005 - 1,0 = 0,005,$$

$$\Delta^2 f(x_6) = 1,005 - 2(1,0) + 0,9 = -0,095,$$

$$\Delta^3 f(x_6) = 1,005 - 3(1,0) + 3(0,9) - 0,8 = -0,095,$$

$$\Delta^4 f(x_6) = 1,005 - 4(1,0) + 6(0,9) - 4(0,8) + 0,7 = -0,095,$$

$$\Delta^5 f(x_6) = 1,005 - 5(1,0) + 10(0,9) - 10(0,8) + 5(0,7) - 0,6 =$$
$$= -0,095,$$

o que resulta nos valores aproximados das cinco primeiras derivadas:

$$\frac{\partial f(x_6)}{\partial x} \cong 0,05,$$

$$\frac{\partial^2 f(x_6)}{\partial x^2} \cong -9,5,$$

$$\frac{\partial^3 f(x_6)}{\partial x^3} \cong -95,$$

$$\frac{\partial^4 f(x_6)}{\partial x^4} \cong -950,$$

$$\frac{\partial^5 f(x_6)}{\partial x^5} \cong -9,500$$

e, finalmente, no desenvolvimento de Taylor:

$$\Delta y \cong (-0,2)(0,05) + \left[(-0,2)^2(-9,5)\right]/2 +$$

$$+ \left[(-0,2)^3(-95)\right]/6 + \left[(-0,2)^4(-950)\right]/24 +$$

$$+ \left[(-0,2)^5(-9500)\right]/120 \cong -0,111,$$

que fornece o intervalo (0,894; 1,005) para a solução.

Pode-se observar que, devido à grande amplitude do intervalo de incerteza, da variável x, bem como da descontinuidade de primeira espécie na primeira derivada da função f(x), a convergência da série de Taylor foi relativamente lenta. Neste exemplo a resolução do problema pela aritmética de intervalos foi ralativamente mais simples, em virtude de se conhecer o comportamento monotônico da função f(x). Nos casos mais complexos, a resolução pela aritmética de intervalos requer a pesquisa de extremantes a cada passo do programa. Para funções contínuas e para pequenos intervalos, Pennington (1970) sugere a utilização da fórmula de Taylor juntamente com cada comando operacional executado.

Como segundo exemplo considere-se a determinação do intervalo, dentro do qual se encontra o resultado do produto matricial:

$$\underline{v} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}\ ,$$

conhecidos os intervalos de incerteza:

$$\left[(a_{ij})_m,\ (a_{ij})_M\right]$$

para cada elemento a_{ij}, $i,j = 1,\ldots, N$

$$\left[(x_j)_m,\ (x_j)_M\right] \quad \text{e}$$

para cada componente x_j, $j = 1,\ldots, N$.

A solução deste problema, pela aritmética de intervalos, para cada componente será:

$$\Delta v_i = \sum_{j=1}^{N} (a_{ij})_M\,(x_j)_M - \sum_{j=1}^{N} (a_{ij})_m\,(x_j)_m\ .$$

A solução, pelo método proposto neste trabalho, pode ser facilmente determinada, pois:

$$\frac{\partial v_i}{\partial a_{ij}} = x_j, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = a_{ij} \; ,$$

e as derivadas de ordem superior são todas nulas, exceto as derivadas mistas de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial a_{ij}} = 1, \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial a_{ij} \partial x_j} = 1 \; .$$

Assim, pela fórmula de Taylor resulta:

$$\Delta v_i = \sum_{j=1}^{N} \left[a_{ij} \Delta x_j + x_j \Delta a_{ij} + \Delta a_{ij} \Delta x_j \right] \; .$$

A equivalência dos dois métodos pode ser facilmente verificada pelo leitor. Basta considerar o caso em que todas as incertezas são idênticas a um valor positivo δ. O intervalo Δv_i resultará, por qualquer das fórmulas:

$$\Delta v_i = \delta \left[\sum_{j=1}^{N} (a_{ij} + x_j) \right] + N\delta^2 \; .$$

Comparando os dois métodos, neste último exemplo, vê-se que a expressão obtida pela aritmética de intervalos possui o inconveniente de envolver subtração de números muito próximos, no caso de pequenas incertezas nos valores a_{ij}, x_j, $i,j = 1, \ldots, N$. Isto provoca uma perda de dígitos significativos (Pennington, 1970), comprometendo desta forma a qualidade do resultado.

7. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

A solução alternativa, proposta neste trabalho, para determinação do intervalo de confiabilidade de resultados obtidos por programas de computador apresenta os seguintes aspectos convenientes:

a) O método constitui uma forma segura para obtenção do resultado desejado.

b) O processo pode ser totalmente automatizado, por meio de uma sub-rotina, independentemente de uma análise completa do programa.

c) Não é requerido um aumento do número de variáveis envolvidas no programa.

A solução proposta possui, em contrapartida, o inconveniente de requerer, em alguns casos, maior trabalho computacional do que a aritmética de intervalos.

Para programas que envolvem matrizes, a forma proposta apresenta a vantagem de não aumentar o número de variáveis do programa. Este número pela aritmética de intervalos deve ser, pelo menos, duplicado.

A aplicabilidade de cada método depende certamente da natureza do problema, da capacidade de memória do computador , do aumento de trabalho computacional exigido na fórmula de Taylor, e do algoritmo utilizado para a obtenção do resultado.

AGRADECIMENTO

O autor agradece o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), através do Instituto de Pesquisas Espaciais (INPE), no qual este trabalho foi desenvolvido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APOSTOL, T.M. *Mathematical analysis.* Reading, Addison-Wesley, 1960.

FRIEDMAN, B. *Principles and techniques of applied mathematics.* New York, Wiley, 1966.

ISAACSON, E. Keller, H.B. *Analysis of numerical methods.* New York, Willey, 1966.

LIGHTHILL, M.J., F.R.S. *Introduction to fourier analysis and generalised functions.* Cambridge, Cambridge University Press, 1964.

NICKEL, K. Interval Analysis. In: JACOBS, D. *The state of the art in numerical analysis;* Proceedings of the Conference held at the University of York, Apr. 12th - 15th, 1976. London, Academic, 1977, Part 2.3, p. 193-222.

PENNINGTON, R.H. *Introductory computer methods and numerical analysis.* London, Macmillan, 1970.

SCHWARTZ, L. *Theorie des distributions.* Paris, Hermann, 1973.