

1. Publicação nº <i>INPE-2750-PRE/326</i>	2. Versão	3. Data <i>Maio, 1983</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DMC/DEC</i>	Programa <i>EDISA</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>CONTROLE ÓTIMO</i> <i>ELEMENTOS FINITOS</i>			
7. C.D.U.: <i>681.5.015.24:517.96</i>			
8. Título <i>INPE-2750-PRE/326</i>		10. Páginas: <i>13</i>	
ESTUDO DA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO NA FORMA DE BOLZA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS		11. Última página: <i>12</i>	
		12. Revisada por	
9. Autoria <i>Santiago Alves Tavares</i> <i>Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto</i>		<i>Nellore S. Venkataraman</i> Nellore S. Venkataraman	
Assinatura responsável <i>Santiago</i>		13. Autorizada por	
		<i>Nelson de Jesus Parada</i> Nelson de Jesus Parada Diretor	
14. Resumo/Notas <i>Esse trabalho apresenta uma formulação para aplicar o método de elementos finitos ao problema de controle ótimo na forma de Bolza. Este foi armado na forma de problema de otimização, com a função-objetivo e os vínculos. Em seguida foi aplicado o conceito de elementos finitos e a obtenção dos parâmetros de solução foi feita com um método de resíduos ponderados (Galerkin). Deste modo, foi transformado em um de programação matemática, cuja solução foi obtida com os métodos de gradiente conjugado e projeção do gradiente.</i>			
15. Observações <i>Este trabalho será apresentado no VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM 83 - Uberlândia, MG, de 13 a 16 de dezembro de 1983.</i>			

ANAIS	COBEM 83	PROCEEDINGS
	VII CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA	
	UBERLÂNDIA, 13 - 16 de dezembro de 1983	
TRABALHO PAPER	Nº	P.P.
		UFU

ESTUDO DA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO NA
FORMA DE BOLZA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

SANTIAGO ALVES TAVARES

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

RICARDO LUIZ UTSCH DE FREITAS PINTO

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG
Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

SUMÁRIO

Esse trabalho apresenta uma formulação para aplicar o método de elementos finitos ao problema de controle ótimo na forma de Bolza. Este foi armado na forma de problema de otimização, com a função-objetivo e os vínculos. Em seguida foi aplicado o conceito de elementos finitos e a obtenção dos parâmetros de solução foi feita com um método de resíduos ponderados (Galerkin). Deste modo, foi transformado em um de programação matemática, cuja solução foi obtida com os métodos de gradiente conjugado e projeção do gradiente.

SUMMARY

This work deals with the application of the finite element methods to the optimal control problem in the Bolza form. The problem was solved as an optimization problem with functional and the constraints. The concepts of finite element methods was applied, and the solution parameters were obtained by means of a weighted Residual Method (Galerkin). It was then transformed to a mathematical programming problem and solved jointly by conjugate gradient and gradient projection methods.

1. Introdução

Os vários métodos existentes para a solução numérica do problema de controle ótimo podem ser divididos em: clássicos, subótimos e de parametrização.

Os métodos clássicos não usam aproximações para as variáveis dinâmicas, trabalhando diretamente no espaço de funções. Podem ser subdivididos em métodos diretos e indiretos. Os primeiros procuram minimizar a função-objetivo satisfazendo os vínculos terminais, sem violar os vínculos dinâmicos. Pode-se citar, neste grupo, o Método de Gradiente, [1] e [2], e o Método do Gradiente Conjugado, [3]. Os segundos procuram satisfazer as condições estacionárias, as quais são fornecidas pelo cálculo variacional e representam o ótimo [4] e [5]. Estes métodos têm como dificuldade e satisfação aos vínculos de contorno e instabilidade numérica na integração das equações diferenciais.

Os métodos subótimos transformam parcialmente o problema do espaço de funções para o paramétrico, pela restrição da função de controle a uma certa classe de funções [6], [7], [8] e [9]. Possuem as mesmas dificuldades que os métodos clássicos, em menores proporções.

Os métodos de parametrização transformam o problema do espaço de funções para o R^n e, como consequência, transforma o problema em um de programação matemática. Um dos modos de transformação é por diferenças finitas onde as variações dinâmicas são aproximadas por valores da função e suas derivadas em vários pontos.

As equações diferenciais transformam-se em equações de diferenças finitas [10] e [11]. Um outro método é o de Elementos Finitos onde as variáveis dinâmicas são desenvolvidas num espaço de funções (funções de forma), cujas coordenadas são os coeficientes a serem ajustados. O domínio é dividido num conjunto de subdomínios (elementos). Existem vários trabalhos que, embora não se referindo a elementos finitos, estão neste grupo; sendo, em realidade, casos particulares [12] e [13]. Nos trabalhos de Nakamichi e Washizu [14], [15] e [16], aparece pela primeira vez o uso declarado deste método. Neles o intervalo de tempo é dividido em elementos; as variáveis dinâmicas são aproximadas pelas funções de forma e os vínculos

são colocados no funcional (forma de Bolza).

O método proposto neste trabalho não introduz os vínculos no funcional; trabalha com o conceito de elementos finitos de modo idêntico ao usado no cálculo estrutural e transforma o problema de controle ótimo em um de programação matemática com vínculos.

As dificuldades dos métodos clássicos e subótimos desaparecem neste, surgindo aquelas inerentes aos problemas de programação matemática com vínculos e as do Método de Elementos Finitos.

2. Formulação do Problema

O problema de controle ótimo na forma de Bolza consiste em obter o valor estacionário do funcional

$$J[\vec{x}, \vec{u}, t_f] = \phi[\vec{x}(t_0), \vec{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t] dt, \quad (1)$$

onde:

- $\vec{x}(t)$ - é um vetor n dimensional das variáveis de estado;
- $\vec{u}(t)$ - é um vetor m dimensional que contém as variáveis de controle;
- $L[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t]$ - é uma função das variáveis dinâmicas $\vec{x}(t)$ e $\vec{u}(t)$;
- $\phi[\vec{x}(t_0), \vec{x}(t_f), t_f]$ - é uma função das variáveis de contorno;
- t_0 - é o instante inicial suposto conhecido;
- t_f - é o instante final, admitido livre;
- $J[\vec{x}, \vec{u}, t_f] \in \mathbb{R}$ - é o valor do funcional.

As variáveis de estado estão sujeitas a vínculos dinâmicos dados por um sistema de n equações diferenciais na forma:

$$\dot{\vec{x}}(t) = f[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t], \quad (2)$$

onde \vec{f} é um vetor de funções n dimensional. Supõe-se, também,

a existência de q vínculos de contorno na forma:

$$\vec{\psi}[\vec{x}(t_0), \vec{x}(t_f), t_f] = 0, \quad (3)$$

onde $\vec{\psi}$ é um vetor de funções de contorno de dimensão q .

O procedimento seguido por vários autores é o de introduzir os vínculos no funcional por meio dos multiplicadores de Lagrange, obtendo o seguinte funcional generalizado

$$J_G[\vec{x}, \vec{u}, t_f, \vec{\lambda}, v] = \phi[\vec{x}(t_0), \vec{x}(t_f), t_f] + \vec{v}^T \vec{\psi}[\vec{x}(t_0), \vec{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{L[\vec{x}(t), \vec{u}(t), T] + \vec{\lambda}^T(t) [\vec{f}[\vec{x}(t), \vec{u}(t), t] - \dot{\vec{x}}(t)]\} dt. \quad (4)$$

Esta forma não se mostrou adequada para o uso de elementos finitos e sim a anterior, onde os vínculos não estão no funcional.

3. Discretização por Elementos Finitos

O domínio que, neste caso, é o intervalo $[t_0, t_f]$ de tempo, será dividido em N subdomínios. Sendo o elemento unidimensional uma só variável independente, tem-se N elementos e $N+1$ nós.

Para facilitar o algebrismo, é comum, no Método de Elementos Finitos, o uso de coordenadas naturais, definido, para este caso, como

$$\xi = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}, \quad (5)$$

onde t_1 é o tempo no nó 1 do elemento, e t_2 no nó 2, em numeração local.

No Método de Elementos Finitos, supõe-se que a solução está desenvolvida num espaço finito de funções, dadas por

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^m N_i(t) \vec{X}_i, \quad (6)$$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^m N_i(t) \vec{U}_i, \quad (7)$$

onde m é a dimensão do espaço; \vec{X}_i, \vec{U} , os valores de \vec{x}, \vec{u} nos nós do elemento; $N_i(t)$ são as funções de forma que correspondem à base.

A escolha das funções $N_i(t)$ dependem do problema em particular e, no exemplo feito, foram usados os polinômios de interpolação de Hermite, com continuidade na derivada primeira. A solução aproximada, para cada elemento "e", é da forma

$$\begin{aligned}\vec{x}_e &= \sum_{i=1}^m (N_i(t) \vec{X}_i + M_i(t) \dot{\vec{X}}_i), \\ \vec{u}_e &= \sum_{i=1}^m (N_i(t) \vec{U}_i + M_i(t) \dot{\vec{U}}_i).\end{aligned}\quad (8)$$

Substituindo a variável t pelas coordenadas naturais, o problema de Bolza toma a forma:

$$\begin{aligned}J &= \phi[\vec{X}_0, \vec{U}_0, \vec{X}_{N+1}, \vec{U}_{N+1}, \dot{\vec{X}}_0, \dot{\vec{U}}_0, \dot{\vec{X}}_{N+1}, \dot{\vec{U}}_{N+1}, t_f] + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_0^1 L[\vec{x}_e, \vec{u}_e, \dot{\vec{x}}_e, \dot{\vec{u}}_e, t_f, \xi] d\xi,\end{aligned}\quad (9)$$

sujeito dos vínculos dinâmicos

$$\vec{F}_e[\vec{x}_e, \vec{u}_e, \dot{\vec{x}}_e, \dot{\vec{u}}_e, t_f, \xi] = 0 \quad e = 1, \dots, N, \quad (10)$$

e aos vínculos de contorno

$$\vec{\Psi}[\vec{X}_0, \vec{U}_0, \vec{X}_{N+1}, \vec{U}_{N+1}, \dot{\vec{X}}_0, \dot{\vec{U}}_0, \dot{\vec{X}}_{N+1}, \dot{\vec{U}}_{N+1}, t_f] = 0. \quad (11)$$

Os índices zero e $N+1$ referem-se ao primeiro e ao último nó do domínio, e o índice "e" ao elemento genérico.

4. Determinação dos Parâmetros de Estado e Controle

Os parâmetros nodais, no Método de Elementos Finitos, são obtidos pela imposição de algum critério de minimização da norma do erro. Neste trabalho, foi adotado o método de Galerkin, que torna nula a integral do erro ponderado no domínio. Este método pertencente ao conjunto dos métodos de resíduo ponderado, sendo expresso por

$$\int_D WRdD = 0, \quad (12)$$

onde W é a função-peso, que aqui será usada como cada uma das funções de forma, e R é o resíduo no domínio D considerado.

Aplicando o método de Galerkin aos vínculos dinâmicos, as funções de forma desaparecem na integração, restando os parâmetros. O mesmo ocorre com a integral existente no funcional.

O problema de Bolza toma a seguinte forma em função dos valores nodais. Obter o valor estacionário de

$$J = \phi[\vec{X}_0, \vec{U}_0, \dot{X}_0, \dot{U}_0, \vec{X}_{N+1}, \vec{U}_{N+1}, \dot{X}_{N+1}, \dot{U}_{N+1}, t_f] + \sum_{i=1}^N L_i[\vec{X}_i, \dot{X}_i, \vec{U}_i, \dot{U}_i, t_f], \quad (13)$$

sujeito aos vínculos $S[\vec{X}, \vec{U}, t_f] = 0$ e $\psi[\dot{X}_1, \dots, \dot{U}_{N+1}, t_f] = 0$,

onde S e ψ formam um sistema de equações algébricas em geral não-linear.

Deste modo, o problema foi transformado para o R^n , cuja solução pode ser obtida por programação matemática.

5. Solução de um Problema de Trajetória de Tempo Mínimo

Seja um barco de velocidade constante em relação a água e deslocando-se num rio com um certo perfil de corrente. Ele sai de um ponto (x'_0, y'_0) e vai para (x'_f, y'_f) . Deseja-se saber qual o ângulo do leme a ser dado e o percurso de modo que a viagem seja feita em tempo mínimo (Figura 1).

O perfil de corrente do rio é

$$u_c(x', y') = -vy'/h, \quad (14)$$

$$v_c(x', y') = 0,$$

onde h é o valor de y' para $u_c = -v$.

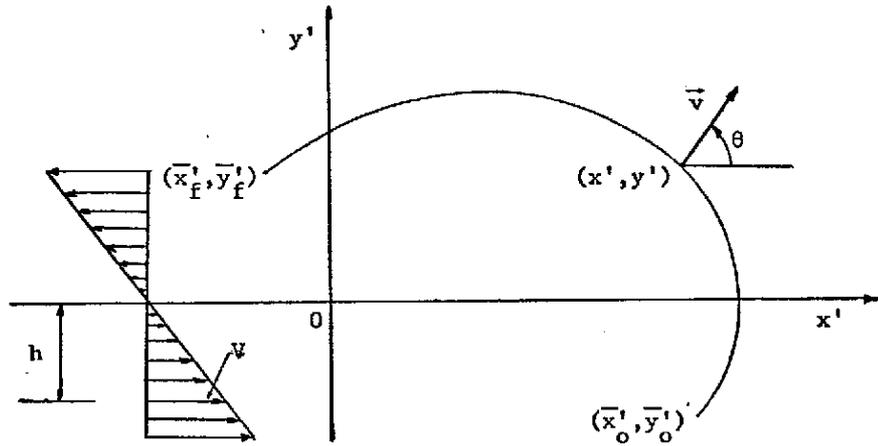


Fig. 1. Nomenclatura para o problema de trajetória de tempo mínimo.

A dinâmica do veículo é dada por

$$\dot{x}' = v \cos\theta' + u_c \quad ; \quad \dot{y}' = v \sin\theta' + v_c \quad , \quad (15)$$

onde x' e y' são as coordenadas do barco, e θ é o ângulo do leme. O problema pode ser adimensionalizado com a seguinte transformação

$$x = x'/h \quad ; \quad y = y'/h \quad ; \quad t = t'(v/h), \quad (16)$$

o que permite formulá-lo como:

$$\text{minimizar } J = t_f - t_0, \quad (17)$$

sujeito aos vínculos dinâmicos

$$\dot{x} = \cos\theta - y \quad ; \quad \dot{y} = \sin\theta, \quad (18)$$

com as condições iniciais

$$x(t_0) = x_0 \quad ; \quad y(t_0) = y_0, \quad (19)$$

e condições terminais

$$x(t_f) = x_f \quad ; \quad y(t_f) = y_f. \quad (20)$$

Observa-se que t_0 é conhecido e t_f não o é. Este problema foi resolvido analiticamente por Bryson e Ho [17] e usado por Nakamichi e Washizu [16] como exemplo, pelo método de Elementos Finitos.

Na solução do problema foi feita a seguinte mudança de variável $u(t) = \cos\theta$ e $v(t) = \sin\theta$ e como consequência, foi necessário adicionar o vínculo $u^2 + v^2 = 1$.

A transformação para coordenadas naturais e aplicação do conceito de elementos finitos fornece

$$J = t_f - t_0, \quad (21)$$

sujeitos aos vínculos dinâmicos

$$F_1^e = \frac{N}{t_f - t_0} \dot{x}_e(\xi) - u_e(\xi) + y_e(\xi) = 0,$$

$$F_2^e = \frac{N}{t_f - t_0} \dot{y}_e(\xi) - v_e(\xi) = 0, \quad (22)$$

$$F_3^e = u_e(\xi)^2 + v_e(\xi)^2 - 1 = 0, \quad \text{para } e = 1, 2, \dots, N,$$

e aos vínculos de contorno no ponto inicial, $\xi = 0$, do primeiro elemento ($e = 1$)

$$\psi_1 = x_e(0) - x_0 = 0 \quad , \quad \psi_2 = y_e(0) - y_0 = 0, \quad (23)$$

e, no ponto final, $\xi = 1$, dos últimos elementos ($e = N$)

$$\psi_3 = x_e(1) - x_f = 0 \quad , \quad \psi_4 = y_e(1) - y_f = 0. \quad (24)$$

A solução aproximada utilizada foi

$$x_e = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 + M_1(\xi)\dot{x}_1 + M_2(\xi)\dot{x}_2,$$

$$y_e = N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 + M_1(\xi)\dot{y}_1 + M_2(\xi)\dot{y}_2,$$

$$u_e = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 + M_1(\xi)\dot{u}_1 + M_2(\xi)\dot{u}_2,$$

$$v_e = N_1(\xi)v_1 + N_2(\xi)v_2 + M_1(\xi)v_1 + M_2(\xi)v_2, \quad (25)$$

onde os polinômios de interpolação de Hermite são

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 & ; & \quad M_1(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi; \\ N_2(\xi) &= -2\xi^3 + 3\xi^2 & ; & \quad M_2(\xi) = \xi^3 - \xi^2. \end{aligned} \quad (26)$$

O algoritmo usado para a solução do problema no R^n foi uma associação do método do gradiente conjugado com o de projeção do gradiente. Foram resolvidos dois casos para comprovar o método.

No primeiro caso, o ponto inicial é $x_0 = 3,66$, $y_0 = 1,86$, $t_0 = 0$ e o final é $x_f = y_f = 0$. O resultado obtido, com 4 elementos, foi $t_f = 2,32411$ e a solução analítica é $t_f = 2,32389$. Na Figura 2 está indicada a trajetória ótima obtida numericamente e analiticamente.

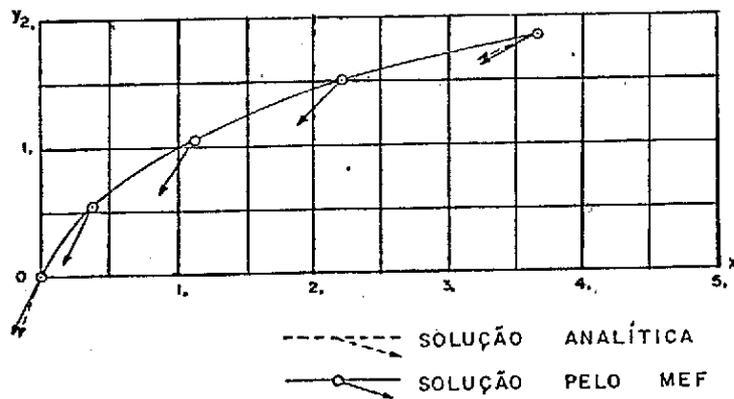


Fig. 2. Trajetória de tempo mínimo para o barco (caso 1).

No segundo caso, o ponto inicial é $x_0 = 1,86$, $t_0 = 0$ e o final é $x_f = y_f = 0$. O resultado obtido, com 4 elementos, foi $t_f = 5,45832$ e o analítico é $t_f = 5,45787$. Na Figura 3 está indicada a trajetória ótima.

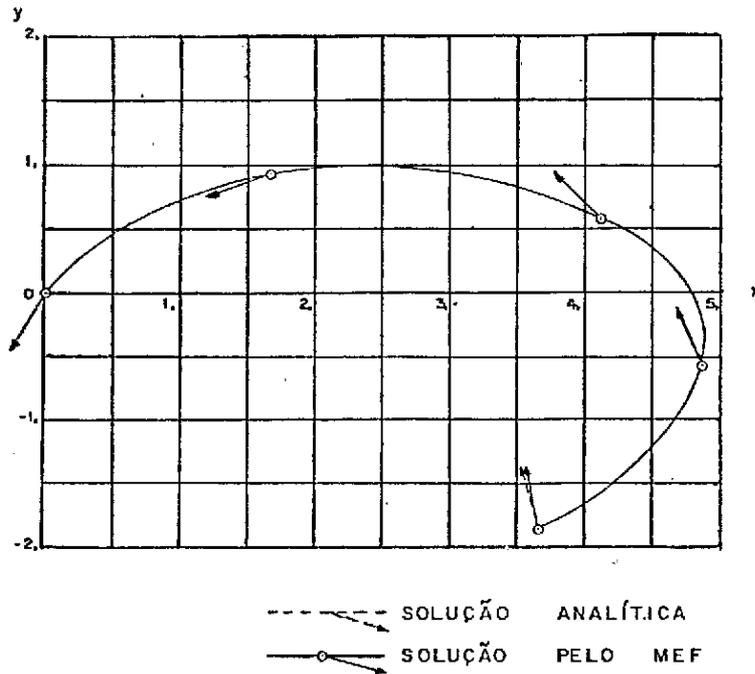


Fig. 3. Trajetória de tempo mínimo para o barco (caso 2).

6. Conclusões

A necessidade de integrações numéricas de equações diferenciais desaparece com o uso do Método de Elementos Finitos, assim como a dificuldade de satisfação dos vínculos de contorno. A divisão em elementos faz o papel da integração e as condições de contorno são impostas, sem dificuldades, ao sistema de equações obtido a partir da solução aproximada. No caso dos vínculos de contorno serem fornecidos por equações diferenciais, também não há dificuldade, pois elas são transformadas em algébricas, tornando-se vínculos adicionais.

Este modo de conduzir a solução foi enormemente facilitado pelo uso de formulação do Problema de Bolza, sem embutir os vínculos no funcional. Desta forma, os multiplicadores foram eliminados, assim como a necessidade de colocar os vínculos na forma de equações diferenciais de primeira ordem.

O método apresentado possui algumas dificuldades, tais como não conhecer a priori o número de elementos ou quais as

funções de forma mais adequadas. No primeiro caso, o programa de computador permite que o número de elementos seja um parâmetro de entrada, facilitando a análise de convergência. No segundo caso, um conhecimento qualitativo da solução esperada é um indicador do tipo de função de forma mais conveniente a ser adotado.

REFERÊNCIAS

- [1] Kelley, H.J., "Method of gradients, optimization techniques", New York, Academic Press, (1962).
- [2] Bryson, A.E.; Denham, W.F., "A steepest-ascent method for solving optimal programming problems", Journal of Applied Mechanics, 84(2), (1962).
- [3] Lasdon, L.S.; Mitter, S.; Warren, A.D., "The conjugate gradient method for optimal control problem", IEEE Transaction Automatic Control, AC-12(2):132-138, Apr. (1967).
- [4] Henning, G.R.; Miele, A., "Sequential gradient-restoration algorithm for optimal control problems with bounded state", Journal of Optimization Theory and Applications, 12(1):61-98, (1973).
- [5] Miele, A.; Tietze, J.L.; Cloutier, J.R., "A hybrid approach to optimal control problems with bounded state", Computer and Mathematics, 1:175-194, (1975).
- [6] Willianson, W.E., "Use of polynomial approximations to calculate suboptimal controls", AIAA Journal, 9(11): 2271-2273, Nov., (1971).
- [7] Hull, D.G.; Edman, L.J., "Suboptimal control using a second order parameter-optimization method", Journal of Optimization Theory and Applications, 17(5/6):481-491, Dec., (1975).
- [8] Ceballos, D.C.; Rios Neto, A., "Linear programming and suboptimal solutions of dynamic systems control problems", International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics, Darmstadt, República Federal da Alemanha, 17 a 23 de maio, (1981).

- [9] Rios Neto, A.; Bambace, L.A.W., "Optimal linear estimation and suboptimal numerical solutions of dynamics systems control problems", International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics, Darmstadt, República Federal da Alemanha, 17 a 23 de maio, (1981).
- [10] Zadeh, L.A.; Whalen, B.H., On optimal control and linear programming, IRE Transaction Automatic Control, AC-7: 45-46, (1962).
- [11] Tabak, D.; Kuo, B.C., "Optimal control by mathematical programming", Prentice-Hall, (1971).
- [12] Zaradnik, R.L.; Parkin, E.S., Computing methods in optimization problems, International Conference on Computing Methods in Optimization, 2., San Remo, Itália, (1968). [Producing]. New York, Academic, (1967).
- [13] Lynn, L.L.; Parkin, E.S.; Zahradnik, R.L., "Near-optimal control by trajectory approximation", Industrial Engineering Chemical, Fundamentals 9:58-62, (1970).
- [14] Nakamichi, J.; Washizu, K., Application of the finite element method to an optimal control problem. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12:1559-1579, (1978).
- [15] Nakamichi, J.; Washizu, K., A direct approach using the finite element method for the solution of the linear optimal control problem with a quadratic criterion. Journal of the Franklin Institute, 306(4):309-319, Oct., (1978).
- [16] Nakamichi, J.; Washizu, K., "An application of the finite element technique to an optimal trajectory problem", Transaction Japan Society for Aeronautics and Space Science, 21:118-127, Nov., (1978).
- [17] Bryson, A.E.; Ho, Y.C., "Applied optimal control", New York, John Willey, (1975).
- [18] Freitas Pinto, R.L.V., "Estudo da solução de problemas de controle ótimo na forma de Bolza pelo Método de Elementos Finitos", Tese de Mestrado em Engenharia Aeronáutica, São José dos Campos, Centro Técnico de Aeronáutica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, (1982).