1. Publicação nº	2. Versão	3. Data	5. Distribuição
INPE-2768-PRE/341		*Junho, 1983*	☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita

4. Origem: *DIN/DEP* — Programa: *MEDEP/NAS*

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)
MEDIÇÃO DE ERROS
APROXIMAÇÃO PARA UM PROBLEMA ESTOCÁSTICO
SIMULAÇÃO

7. C.D.U.: *519.87*

8. Título *INPE-2768-PRE/341*

MEDIÇÃO DE ERROS DE UMA APROXIMAÇÃO DETERMINÍSTICA PARA UM PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DE PRODUÇÃO ESTOCÁSTICO

10. Páginas: *14*

11. Última página: *13*

12. Revisada por

Paulo Renato de Morais

9. Autoria *Celso Massaki Hirata*
Horacio Hideki Yanasse

Assinatura responsável

13. Autorizada por

Nelson de Jesus Parada
Diretor

14. Resumo/Notas

Apresenta-se uma metodologia para estimação de erros decorrentes da utilização de uma aproximação determinística para um modelo de planejamento de produção estocástico sequencial. A dificuldade em estimar estes erros consiste em determinar um limitante inferior para o problema sequencial focalizado, já que este é de solução extremamente complexa, talvez desconhecida, a menos que estruturas de custos particulares sejam utilizadas. A metodologia sugerida utiliza a simulação digital para obter uma estimativa dos limitantes superior e inferior para a solução ótima do problema. Alguns resultados computacionais limitados são apresentados usando um problema de planejamento de produção, onde se admite que as demandas são distribuídas normalmente.

15. Observações

Este trabalho será submetido para apresentação no XVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, a ser realizado em Florianópolis, SC, 10/83.

MEDIÇÃO DE ERROS DE UMA APROXIMAÇÃO DETERMINÍSTICA PARA UM PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DE PRODUÇÃO ESTOCÁSTICO

Celso Massaki Hirata
ITAUDATA

Horácio Hideki Yanasse
INPE/CNPq

RESUMO

Apresenta-se uma metodologia para estimação de erros decorrentes da utilização de uma aproximação determinística para um modelo de planejamento de produção estocástico sequencial. A dificuldade em estimar estes erros consiste em determinar um limitante inferior para o problema sequencial focalizado, já que este é de solução extremamente complexa, talvez desconhecida, a menos que estruturas de custos particulares sejam utilizadas. A metodologia sugerida utiliza a simulação digital para obter uma estimativa dos limitantes superior e inferior para a solução ótima do problema. Alguns resultados computacionais limitados são apresentados usando um problema de planejamento de produção, onde se admite que as demandas são distribuídas normalmente.

ABSTRACT

In this paper we present a methodology to estimate the relative error of a deterministic approximation to a stochastic sequential production planning problem. The difficulty in estimating these errors is in the determination of a lower bound to the sequential problem. The latter is of extremely complex situation, perhaps unknown unless special cost functions are used. The suggested methodology utilizes digital simulation to get an estimate of the upper and lower bounds to the optimal solution of the problem. Some limited computational results are presented using a production planning problem where it is admitted that demands are normally distributed.

1. INTRODUÇÃO

Em problemas de planejamento de produção, não raro é feita a hipótese de que as demandas são conhecidas exatamente, quando, na realidade, elas são de natureza incerta. Modelos determinísticos de planejamento da produção, como por exemplo os apresentados em Hax (1978), são utilizados, muitas vezes, representando situações reais onde as demandas são de natureza estocástica. Tal aproximação visa, na maioria das vezes, uma simplificação do modelo que, de outra forma, seria de solução extremamente complexa. O problema ocasionado pela incerteza das demandas é contornado através de um estoque de reserva que procura absorver as flutuações da demanda com relação às projeções obtidas.

A aproximação de um modelo determinístico por um modelo estocástico carece de estudos indicativos da qualidade das soluções obtidas. Bitran e Yanasse (1982) desenvolveram estudos na busca de resultados que viessem a preencher estas lacunas. Eles apresentam limitantes para os erros decorrentes deste tipo de aproximação para problemas de planejamento da produção com funções-objetivos particulares. Mais especificamente, eles compararam o modeló:

(D)

$$v(D) = \text{Min} \left\{ \sum_{t=u}^{v} (s_t \delta(X_t) + h_t I_t^+ + v_t X_t + o_t 0_t) \right\},$$

sujeito a

$$X_t + I_{t-1} - I_t = \overline{d}_t \qquad t = u, u+1, \ldots, v;$$

$$0 \leq X_t \leq C_t + 0_t \qquad t = u, \ldots, v;$$

$$\sum_{\ell=u}^{t} X_\ell \geq \ell_t(\alpha) - I_{u-1} \qquad t = u, \ldots, v;$$

onde:

$$\delta(X_t) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_t > 0 \\ 0 & \text{se } X_t = 0 \end{cases} \qquad t = u, \ldots, v;$$

I_{u-1} dado;

$$I_t^+ = \max \left\{ I_t, o \right\} \qquad t = u, \ldots, v;$$

$\overline{d}_t$ é um valor pré-fixado para a demanda, no perôdo t;

X_t é a quantidade a ser produzida no período t;

I_t é o estoque (se positivo) ou falta (se negativo) carregado do período t para o período t+1;

v_t é o custo de produção por unidade no período t;

s_t é o custo fixo de produção no período t;

h_t é o custo unitário de se carregar estoque do período t para o período t+1;

o_t é o custo por homem-hora de horas extras no período t;

0_t é a quantidade de homens-horas extras usadas durante o período t;

C_t é a capacidade regular em homens-horas no período t;

$\ell_t(\alpha)$ é a quantidade cumulativa que deve estar disponível até o período t para que seja mantido um nível de serviço de $(1-\alpha)\%$,

com o modelo:

(SP)

$$v(SP) = \text{Min } E \left\{ \sum_{t=u}^{v} \left[s_t \, \delta(X_t) + h_t \, I_t^+ + v_t \, X_t + o_t \, 0_t \right] \right\},$$

sujeito a

$$0 \leq X_t < C_t + 0_t \qquad t = u, \ldots, v;$$

$$\sum_{\ell=u}^{t} X_\ell \geq \ell_t(\alpha) - I_{u-1} \qquad t = t, \ldots, v;$$

$$X_t + I_{t-1} - I_t = d_t \qquad t = u, \ldots, v;$$

onde os parâmetros e variáveis são definidos como anteriormente; d_t é a demanda no período t, admitida ser estocástica, e E (.) indica a esperança matemática.

Os resultados encontrados por Bitran e Yanasse, utilizando demandas com distribuição normal, Poisson e Gama, foram encorajadores, revelando erros relativos inferiores a 10%. Uma generalização da fórmula dos erros relativos para o caso de múltiplos produtos foi também obtida através de uma extensão simples do caso com um único produto.

Convém lembrar que o processo decisório real é do tipo sequencial, ou seja, a decisão de quanto produzir é tomada após observado o estoque restante do período anterior. Em (D) e em (SP) isto não é considerado. O problema sequencial formalizado a seguir reflete esta característica sequencial do processo decisório.

Seja F_t o conjunto dos pontos $(X_t, 0_t)$ que satisfazem:

$$0 \leq X_t \leq C_t + 0_t;$$

$$X_t + I_{t-1} - I_t = d_t;$$

$$P_r\ (I_t < o/I_{t-1}) \leq \alpha_t.$$

onde:

α_t é a probabilidade de existir uma falta de estoque no período t;

$P_r(.)$ é a probabilidade para um evento.

Seja o problema (S) definido abaixo.

$$v(s) = \min_{(X_u,\ 0_u)\ \varepsilon\ F_u} \Big\{ E_{d_u/I_{u-1}} \Big[c_u\ (X_u) + H_u(I_u^+) + o_u(0_u) +$$

$$+ \min_{(X_{u+1},\ 0_{u+1})\ \varepsilon\ F_{u+1}} \Big\{ E_{d_{u+1}/I_u} \Big[c_{u+1}(X_{u+1}) + H_{u+1}(I_{u+1}^+) +$$

$$+ o_{u+1}(0_{u+1}) + \dots + \min_{(X_v,\ 0_v)\ \varepsilon\ F_v} \Big\{ E_{d_v/I_{v-1}} \Big[c_v(X_v) +$$

$$+ H_v(I_v^+) + o_v(0_v)\Big]\Big\} .$$

onde

$c_t(X_t)$ é o custo de produzir a quantidade X_t no período t;

$H_t(I_t^+)$ é o custo de armazenar o estoque I_t^+ do período t para o período t+1;

$o_t(0_t)$ é o custo da utilização de 0_t homens-horas extras no período t.

A maneira que parece ser a mais natural de resolver este problema é através de um método recursivo que começa dos problemas mais internos para os mais externos. Para tanto, soluções fechadas em função dos parâmetros de entrada devem ser obtidos dos problemas internos para que os problemas mais externos possam, por sua vez, ser também resolvidos. Funções-objetivos mais complexas tornam inviável a obtenção de uma solução para o problema por este método, dado o estado atual do conhecimento. Pesquisas em estratégias de solução de problemas estocásticos de múltiplos estágios têm se limitado a estruturas de custos e distribuições de demanda especiais e, dentre os trabalhos desenvolvidos , estes geralmente se limitam a problemas com, no máximo, dois estágios. O leitor interessado poderá consultar, por exemplo, El Azigy (1967), Everitt e Ziemba (1979) e Clark e Scarf (1960)

Em Bitran e Yanasse (1982), um esforço foi realizado no sentido de obter uma maneira de medir os erros decorrentes da utilização de um modelo mais simples e viável de ser resolvido, no lugar de (S). Para medir tal erro, necessitava-se encontrar um limitante inferior para o valor ótimo de função-objetivo v(S). Para o caso onde os custos de produção são da forma $c_t(X_t) = v_t X_t$, os custos de armazenagem são $H_t(I_t^+) = h_t I_t^+$, e os custos de horas extras são $o_t(0_t) = o_t 0_t$, eles conseguiram determinar um limitante inferior utilizando sucessivamente a desigualdade de Jensen (Feller, 1966).

Este trabalho complementa o de Bitran e Yanasse (1982) que apresenta uma maneira natural de obter uma estimativa para um li mitante inferior de v(S), quando as funções de custo envolvidas são mais gerais. Na Seção 2 apresenta-se a metodologia para a obtenção do limitante inferior, na Seção 3 apresentam-se alguns resultados computacionais limitados e na Seção 4 fazem-se algumas considerações finais.

2. LIMITANTES PARA O ERRO

Rever-se-á aqui como é obtida uma solução aproximada para o problema sequencial (S), bem como uma maneira de estimar um limitante inferior para v(S), admitindo que as demandas sejam distribuídas de acordo com uma certa distribuição de probabilidade conhecida.

Qualquer solução viável para o problema (S) fornece um limitante superior para v(S), uma vez que (S) é um problema de minimização. Uma solução viável para (S) é obtida utilizando o problema (D1) abaixo:

(D1)

$$\text{Min} \left\{ \sum_{t=u}^{v} \left(c_t\ (X_t) + H_t\ (I_t^+) + o_t\ (0_t)\right) \right\},$$

sujeito a

$$0 \leq X_t \leq C_t + 0_t \qquad t = u, \ldots, v; \qquad (1)$$

$$X_t - I_t + I_{t-1} = E(d_t) \qquad t = u, \ldots, v; \qquad (2)$$

$$\sum_{\ell=u}^{t} X_\ell \geq \ell_t\ (\alpha) - I_{u-1} \qquad t = u, \ldots, v. \qquad (3)$$

X_u e 0_u, obtidos de (D1), constituem uma solução viável para (S), pois as expressões 1, 2 e 3 incluem as restrições do período u de (S). Resolvendo sequencialmente problemas da forma (D1), obedecendo as restrições de cada estágio de (S), obtêm-se X_t 0_t, t = u+1, ..., v, que constituem soluções viáveis para (S) nestes períodos. Mais especificamente, far-se-ia, para o primeiro período resolve-se (D1), admitindo que I_{u-1} seja conhecido e sujeito às restrições (1), (2) e (3). Findo este período, I_u poderá ser calculado uma vez observada a demanda d_u deste período. Para o segundo período, resolve-se (D1) novamente, exceto que agora t toma os valores $t = u+1, \ldots, v+1$, e I_u é o valor obtido anteriormente. Com isto, obtêm-se X_{u+1}, 0_{u+1}; I_{u+1} poderá ser calculado, observada a demanda d_{u+1}, neste período; e assim, sucessivamente resolve-se (D1) ajustando convenientemente os valores de t a serem considerados, obtendo X_t e 0_t, $t = u+2, \ldots, v$. Observe que esta solução de (S) para todos os períodos é construída, após observada as demandas em cada período.

Uma estimativa do custo associado a soluções obtidas com o procedimento descrito é calculada tirando a média dos custos associados a estas soluções para uma série de experimentos simulados. Ressalta-se que esta é uma estimativa de um limitante superior para v(S).

Uma estimativa de um limitante inferior para v(S) pode ser obtida, também, através de experimentos simulados. O que se apresenta a seguir fundamenta-se no seguinte lema apresentado em Avriel e Williams (1970).

<u>Lema</u>: "Seja f(X,z) uma função da variável de decisão X e da variável aleatória z. Então,

$$E_z \operatorname*{Min}_X f(X,z) \leq \operatorname*{Min}_X E_z f(X,z), \tag{4}$$

se os valores esperados e os mínimos indicados existem".

Considere, pois, o problema (S). Admitindo que os valores esperados e os mínimos existam, pelo Lema pode-se escrever:

$$v(S) \geq E_{d_u/I_{u-1}} \left\{ \operatorname*{Min}_{(X_u, 0_u) \in F_u} \left[c_u(X_u) + H_u(I_u^+) + o_u(0_u) + \right.\right.$$

$$+ E_{d_{u+1}/I_u} \left\{ \operatorname*{Min}_{(X_{u+1}, 0_{u+1}) \in F_{u+1}} \left[c_{u+1}(X_{u+1}) + H_{u+1}(I_{u+1}^+) + \right.\right.$$

$$+ o_{u+1}(0_{u+1}) + \dots + E_{d_v/I_{v-1}} \left\{ \underset{(X_v,0_v) \,\varepsilon\, F_v}{\mathrm{Min}} \left[c_v(X_v) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + H_v(I_v^+) + o_v(0_v) \right] \right\} \dots \left. \right] \Big\} =$$

$$= E_{d_u/I_{u-1}} \left\{ \underset{(X_u,0_u) \,\varepsilon\, F_u}{\mathrm{Min}} E_{d_{u+1}/d_u, I_{u-1}} \left[c_u(X_u) + H_u(I_u^+) + \right.\right.$$

$$+ o_u(0_u) + \underset{(X_{u+1},0_{u+1}) \,\varepsilon\, F_{u+1}}{\mathrm{Min}} E_{d_{u+2}/d_{u+1}, I_u} \left[c_{u+1}(X_{u+1}) + \right.$$

$$+ H_{u+1}(I_{u+1}^+) + o_{u+1}(0_{u+1}) + \dots + \underset{(X_{v-1},0_{v-1}) \quad F_{v-1}}{\mathrm{Min}}$$

$$E_{d_v/d_{v-1}, I_{v-2}} \left[c_{v-1}(X_{v-1}) + H_{v-1}(I_{v-1}^+) + o_{v-1}(0_{v-1}) + \right.$$

$$\left.\left.\left. + \underset{(X_v,0_v) \,\varepsilon\, F_v}{\mathrm{Min}} \left[c_v(X_v) + H_v(I_v^+) + o_v(0_v) \right] \right] \dots \right\}.\right.$$

A aplicação sucessiva do Lema dá:

$$v(S) \geq E_{d_u/I_{u-1}} \left[E_{d_{u+1}/d_u, I_{u-1}} \left[\dots \left[E_{d_v/d_u, d_{u+1}, \dots, d_{v-1}, I_{u-1}} \left[\underset{(X_t,0_t) \,\varepsilon\, F_t}{\mathrm{Min}} \sum_{t=u}^{v} (c_t(X_t) + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + H_t(I_t^+) + o_t(0_t)) \right] \dots \right]. \tag{5}$$

Pode-se escrever a expressão 5 em termos da distribuição conjunta de d_u, d_{u+1}, ..., d_v e ter-se-á

$$v(S) \geq E_{d_u,\ d_{u+1},\ldots,\ d_v/I_{u-1}} \left[\underset{(X_t,\, 0_t)\ \epsilon\ F_t}{\text{Min}} \sum_{t=u}^{v} (c_t(X_t) + \right.$$

$$\left. + H_t(I_t^+) + o_t(0_t)) \right] . \qquad (6)$$

O lado direito da expressão 6 é, pois, um limitante inferior para v(S).

Admitindo que o problema de minimização possa ser resolvido, obtém-se uma estimativa do lado direito de expressão 5 ou 6 utilizando a média dos custos associados às soluções obtidas por experimentos simulados.

Convém observar que o procedimento apresentado pode ser generalizado trivialmente a problemas com múltiplos produtos, onde a capacidade produtiva é compartilhada para a produção dos diversos produtos.

3. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Os resultados computacionais aqui apresentados limitam-se a um problema de planejamento da produção sequencial com 2 produtos, devido a restrições de tempo e custos de computação. A função-objetivo utilizada é da forma

$$c_t(X_t) = s_t\ \delta(X_t) + v_t\ X_t\ ,$$

$$H_t(I_t^+) = h_t\ I_t^+\ ,$$

$$o_t(0_t) = o_t\ 0_t\ ,$$

e, portanto, não-linear e não-convexa. Os dados básicos para esta simulação são apresentados na Tabela 3.1 .

TABELA 3.1

DADOS PARA O TESTE

	PRODUTO 1	PRODUTO 2
Custo fixo de produção	12000	9000
Custo de armazenamento	.40/unidade-mês	.31/unidade-mês
Custo de Hora Extra	9.5/hora	9.5/hora
Fator de produtividade	.2 horas/unidade	.1 horas/unidade
Custo de Produção	19/unidade	15/unidade
Total de horas regulares por período: 4000 horas Número de períodos: 6		

Demandas para os produtos 1 e 2 são admitidas independentes, normais e identicamente distribuídas de período para período com médias e desvios-padrões (9248, 4487), (7644, 6659) respectivamente.

Admitiu-se que $\alpha_{1t} = \alpha_{2t} = 0.05$, $t = 1, 2, \ldots, 6$, ou seja, o nível de serviço é de 95% em todos os períodos, para todos os produtos. Os estoques iniciais de cada produto foram admitidos nulos.

Geraram-se demandas em número suficiente para a realização dos experimentos desejados. Apresenta-se, na Tabela 3.2, para efeito de verificação da ordem de grandeza, apenas os valores da função-objetivo associados aos 10 primeiros experimentos.

TABELA 3.2

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO TESTE 1

Nº DO EXPERIMENTO	LIMITANTE SUPERIOR	LIMITANTE INFERIOR
1	3795314.24	2270702.00
2	4690225.73	2903509.08
3	4137124.55	2647568.87
4	2291767.23	2010059.90
5	3513266.19	1985168.43
6	3896750.03	2410446.87
7	3727970.79	2311317.33
8	2534153.36	2088422.89
9	3625567.39	2268517.06
10	3331058.39	2961094.07

Foram realizados 40 experimentos para este teste.

O erro relativo estimado para estes dados é de 43%. Este erro é obtido por: $\left(\frac{\text{estim. do limit. sup.} - \text{estim. do limit. inf.}}{\text{estimativa do limitante inferior}}\right)$.

Observou-se que a variância dos dados obtidos é pequena, indicando que o intervalo de confiança para o erro relativo é pequeno.

Testes adicionais foram realizados para tentar identificar se o erro relativo é sensível a mudanças nos valores de certos parâmetros.

Quando os custos fixos de produção foram tomados iguais a 120.000 e 90.000 para o produto 1 e produto 2, respectivamente, o erro relativo foi de 59%.

Quando os custos fixos de produção foram tomados iguais a 1200 e 900 para o produto 1 e 2, respectivamente, o erro relativo foi de 36%.

4. CONCLUSÕES FINAIS

Há sempre interesse em saber da magnitude dos erros cometidos por aproximações utilizadas. Os custos de buscar desenvolver métodos alternativos com soluções "mais eficientes" ou de colher informações mais acuradas, devem ser comparados com os custos decorrentes da utilização de soluções subótimas. O presente trabalho apresenta uma maneira simples de estabelecer qual o valor máximo até o qual seria interessante investir neste esforço. Sob este aspecto, vários outros trabalhos em programação estocástica têm sido apresentados na literatura (Birge, 1982; Huang et alii, 1977; Madansky, 1960; e Morris and Thompson, 1980).

Os resultados obtidos constituem uma primeira tentativa de medir os erros de aproximação utilizada para um caso mais geral do que o focalizado em Bitran e Yanasse (1982). Tais resultados dão suporte aos usuários de certos modelos de planejamento de produção.

Dos testes experimentais realizados, foram obtidos erros relativos superiores aos encontrados em Bitran e Yanasse (1982), quando as funções-custos utilizadas eram lineares. Portanto, a aproximação para o caso não-linear parece não ser tão boa quanto para o caso linear. Os erros mostraram-se sensíveis às variações do custo fixo de produção, diminuindo com o seu valor, mas mesmo assim, significantemente maiores que os encontrados por Bitran e Yanasse (1982). Ressalta-se que o limitante inferior apresentado é na realidade bem simples e intuitivo. A sua qualidade precisa ser analisada e, quem sabe, chegar à determinação de um outro limitante de melhor qualidade. Por outro lado, pesquisas poderão ser realizadas no sentido de idealizar uma outra aproximação que produza erros menores. A resolução satisfatória do problema de programação estocástica com multi plos estágios parece ainda estar longe de ser conseguida e representa uma meta a ser atingida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AVRIEL, M.; WILLIAMS, A.C. The value of Information and stochastic Programming. *Operations Research*, 8:947-954, 1970.

BIRGE, J.R. The Value of the Stochastic Solution in Stochastic Linear Programs with Fixed Recourse. *Mathematical Programming* 24:314-325, 1982.

BITRAN, G.R; YANASSE, H.H. Deterministic Approximation to Stochastic Production Problems. Presented at the ORSA/TIMS meeting, San Diego, Califórnia, 1982.

CLARK, A.J.; SCARF, H. Optimal Policies for a Multiechelon Inventory Problem. *Management Science*, 6:475-490, 1960.

EL AGIZY, M. Two-Stage Programming Under Uncertainty with Discrete Distribution Function. *Operations Research*, 15:55-70, 1967.

EVERITT, R.; ZIEMBA, W.T. Two Period Stochastic Programs with Simple Recourse. *Operations Research*, 27:485-502, 1979.

FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. II. New York, Wiley, 1966.

HAX, A.C. Aggregate Production Planning. In: Moders, J.; Elmaghraby, S., ed. *Handbook of Operations Research*, Van Nostrand Reinhold, 1978.

HUANG, C.C.; VERTINSKY, I.; ZIEMBA, W.T. Sharp Bounds on the Value of Perfect Information. *Operating Research*, 25(1):128-139, Jan/Feb, 1977.

MADANSKY, A. Inequalities for Stochastic Linear Programming Problems. *Management Science*, 6:197-204, 1960.

MORRIS, J.F.; THOMPSON, H.E. A note of the Value of Bounds on EVPI in Stochastic Programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, 27:165-169, 1980.