1. Classificação *INPE-COM.4/RPE*

C.D.U.: 514.743.4

2. Período

4. Distribuição

interna ☐

externa ☒

3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor)

TENSORES
CÁLCULO TENSORIAL
ANÁLISE TENSORIAL

5. Relatório nº

INPE-1648-RPE/102

6. Data

Dezembro, 1979

7. Revisado por

Ivan J. Kantor

8. Título e Sub-Título

MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA:
III ANÁLISE TENSORIAL

9. Autorizado por

Nelson de Jesus Parada
Diretor

10. Setor *DCE* Código

11. Nº de cópias *10*

12. Autoria *René A. Medrano-B*

14. Nº de páginas *149*

15. Preço

13. Assinatura Responsável

16. Sumário/Notas

Apresenta-se um estudo introdutório sobre tensores e sua aplicação na física. Definindo relações de transformação de coordenadas ortogonais para as componentes de um vetor, é introduzido o conceito de tensor cartesiano. Desenvolve-se uma análise dos tensores cartesianos, classificando-os e estabelecendo suas propriedades. Como parte de uma transição gradativa ao estudo dos tensores generalizados são estudados os tensores referidos a coordenadas oblíquas com o consequinte aparecimento dos termos de covariante e contravariante. Dentro do estudo dos tensores generalizados são desenvolvidos, entre outros, os conceitos de tensores covariantes, contravariantes e mistos, contração, tensores relativos, teorema do quociente, módulo e ângulo entre vetores, símbolos de Christoffel e derivada covariante. Por último, e como parte das aplicações, são desenvolvidas, em detalhe, a equação das geodésicas, a lei gravitacional de Einstein (órbitas planetárias) e a forma relativística das equações de Maxwell.

17. Observações Esta publicação foi substituída pelo INPE-5000-MD/41

ÍNDICE

RESUMO .... *v*

ABSTRACT .... *vi*

LISTA DE FIGURAS .... *vii*

CAPÍTULO III

ANÁLISE TENSORIAL E SUAS APLICAÇÕES 1

3.1 - Introdução 1

3.2 - Tensores Cartesianos 9

3.2.1 - Tensor de Primeira Ordem 9

3.2.2 - Diádicas. Tensores de Segunda Ordem 16

3.2.3 - Tensores de Ordem Superior 25

3.2.4 - Tensores Simétricos e Anti-simétricos. Pseudotensores .. 27

3.2.5 - Contração de (ou Produto Interno entre) Tensores 33

3.2.6 - Derivadas em Tensores Cartesianos 35

3.2.7 - Transformação mais Geral de Coordenadas 39

3.3 - Tensores Cartesianos Oblíquos 41

3.3.1 - Vetores Covariantes e Contravariantes 41

3.3.2 - Tensor Fundamental 42

3.3.3 - Tensores Covariantes e Contravariantes 43

3.3.4 - Tensor Recíproco 47

3.3.5 - Vetores Base Covariantes e Contravariantes 49

3.4 - Tensores Generalizados 51

3.4.1 - Vetor Contravariante e Covariante 53

3.4.2 - O Jacobiano da Transformação 58

3.4.3 - Tensores de Ordem Superior 61

3.4.4 - Contração 63

3.4.5 - Tensores Fundamental e Recíproco 65

3.4.6 - Tensores Relativos 74

3.4.7 - Teorema do Quociente 79

3.4.8 - A Operação de Rotacionar 84

3.4.9 - Módulo de um Vetor e Ângulo entre dois Vetores 86

3.4.10 - Direções Principais de um Tensor 88
3.4.11 - Símbolos de Christoffel 93
3.4.12 - Derivada Covariante 97
3.4.13 - O Gradiente, Divergente e Rotacional 100

3.5 - Exemplos de Aplicação do Cálculo Tensorial 105
3.5.1 - Geodésicas 105
3.5.2 - Teoria Gravitacional de Einstein 112
3.5.3 - Forma Relativística das Equações de Maxwell 125

AGRADECIMENTOS 141

BIBLIOGRAFIA 143

RESUMO

Este trabalho pretende, primeiro, introduzir o leitor no estudo dos tensores, explorando os conhecimentos básicos adquiridos no seu contato com grandezas físicas familiares, apontando-se as diferenças entre os tensores cartesianos, oblíquos e generalizados. Em seguida, inicia-se o estudo dos tensores cartesianos, com a obtenção de relações de transformação das componentes de um vetor, como consequência de rotações sucessivas do sistema de coordenadas (ângulos de Euler). Tensores de ordem superior são definidos pelas suas relações de transformação, a partir da formação de diádicas. Continua-se com um estudo breve dos tensores em coordenadas oblíquas, com a idéia de fazer que os conceitos de tensores covariante e contravariante surjam de uma maneira natural. Logo após, faz-se um tratamento dos tensores generalizados como uma extensão dos conceitos já desenvolvidos. O tensor fundamental é tratado com especial ênfase no seu significado geométrico. São também desenvolvidos, entre outros, os conceitos de contração, tensores relativos, teorema do quociente, símbolos de Christoffel e derivada covariante. Na parte final do trabalho, e para não deixar o leitor com a impressão de ter apreendido apenas uma matemática abstrata, são apresentadas três aplicações específicas, onde se utilizam resultados previamente obtidos para deduzir a equação das geodésicas e a lei gravitacional de Einstein (comparando-a, depois, com a lei de Newton), e escrever as equações de Maxwell na forma relativística. Em cada seção, quando possível, são apresentados exemplos contendo interpretações que visam colocar tanto a análise tensorial, como o leitor, num mesmo "chão". Este trabalho é uma continuação dos relatórios INPE-1372-PE/174, outubro 1978 e INPE-1449-RPE/014, Março 1979, porém, não é necessário que o leitor tenha outros requisitos além de cálculo vetorial e matérias correlatadas, que normalmente são oferecidas nos cursos de graduação nas disciplinas de Física e Engenharia. O material aqui apresentado é o resultado da experiência acumulada durante as aulas sobre Métodos Matemáticos da Física, que o autor ministra nos cursos de pós-graduação do INPE.

ABSTRACT

This work intends to introduce the reader to the study of tensors, first trying to make use of his basic knowledge of physical quantities. Then, a treatment of cartesian tensors is initiated with the derivation of the transformation relations for the components of a vector, through successive angular rotations of an orthogonal system of coordinates (Euler angles). Tensors of higher order are defined by means of the transformation relations of dyadics. It follows a brief study of tensors referred to skew cartesian coordinates with the idea of arriving to the concept of covariant and contravariant tensors. As a natural continuation, it follows a treatment of general tensors as an extension of the concepts already developed. Some emphasis is placed on the geometric meaning of the fundamental tensor. Among other important concepts developed are: the contraction, relative tensors, the quotient theorem, Christoffel symbols, and the covariant derivative. At the end, and in order to avoid the reader of having the impression that he has learnt something abstract, three applications on geodesics, Einstein's gravitational law, and the relativistic form of the Maxwell equations are presented, all of them developed using the results derived in earlier sections. In each section, and whenever possible, illustrative exemples are presented such that their interpretations intend to put both the theory and the reader on the some "ground". This work is a continuation of the reports INPE-1372-PE/174, Oct. 1978 and INPE-1449-RPE/014, Mar. 1979, however, the reader does not need prerequisites other than those offered by a regular undergraduate course in physics or engineering. The content of this report is the result of the classroom experience accumulated by the author in teaching a course on mathematical methods of physics in the graduate program of INPE.

LISTA DE FIGURAS

III.1 - Dois tipos de componentes, V^i e V_i do vetor $\underset{\sim}{V}$ expresso em coordenadas oblíquas 7

III.2 - Rotação positiva em torno do eixo $\hat{\underset{\sim}{y}}_1$ em um ângulo β 12

III.3 - Ângulos de Euler α, β e γ como resultado de três rotações sucessivas, partindo do sistema $\hat{\underset{\sim}{x}}_0$, $\hat{\underset{\sim}{y}}_0$, $\hat{\underset{\sim}{z}}_0$ para chegar ao $\hat{\underset{\sim}{x}}_3$, $\hat{\underset{\sim}{y}}_3$, $\hat{\underset{\sim}{z}}_3$. As regiões com a mesma hachura encontram-se num mesmo plano 16

III.4 - Mudança de vetores base em coordenadas oblíquas 44

III.5 - Sistema esférico-polar como um exemplo de sistema de coordenadas, onde a orientação dos vetores base muda para cada ponto do espaço 52

III.6 - Concepção bidimensional de um espaço curvo devido à presença de uma massa estelar. As curvas tracejadas fechadas representam curvas de nível do poço de "potencial" criado pela massa estelar. As tracejadas abertas são linhas geodésicas que passam pela estrela. A curva cheia mostra, de uma maneira exagerada, a trajetória "real" de um planeta 124

III.7 . Dois sistemas de referência, um S fixo e outro S' movimentando-se com velocidade $\underset{\sim}{v} = v\hat{\underset{\sim}{e}}_1$ 126

CAPÍTULO III

ANÁLISE TENSORIAL E SUAS APLICAÇÕES

3.1 - INTRODUÇÃO

As leis da física, e sua aplicação a problemas práticos, são comumente expressas mediante equações que contêm grandezas escalares, vetoriais, e grandezas denominadas *tensores* que são intimamente relacionadas à natureza intrínseca do meio.

As grandezas escalares e vetoriais, e suas propriedades, são as mais conhecidas dentro da física elementar. No Capítulo I, fez-se uma revisão dos métodos principais de estudo destas grandezas, e dos campos escalares e vetoriais que elas originam. Entretanto, os tensores são grandezas conhecidas, principalmente, nos campos avançados da física, tais como na Eletrodinâmica, Mecânica Quântica, Teoria da Relatividade, etc.

De uma maneira similar, à definição dos campos escalares e vetoriais, define-se um campo tensorial por um tensor cujo valor é definido para cada ponto do espaço. Porém, o que é um tensor? A resposta matemática a esta pergunta pode ser encontrada ao longo de todo este capítulo. Quanto ao significado dos tensores, dentro dos campos da física, será melhor compreendido através dos exemplos seguintes.

Imagine-se uma barra de um material determinado, submetido a um esforço sobre todos os pontos da mesma devido à presença de uma força externa arbitrária que atua sobre ela. De uma maneira geral, o esforço (força que atua através de uma secção transversal arbitrária da barra e que tende a separá-la) não será o mesmo em todos os pontos no interior da barra, nem mesmo para um mesmo ponto será igual em todas as direções. Inclusive, se a força for superior à resistência do material, a barra poderá se quebrar "ao longo" de uma superfície onde, presumivelmente, o esforço seja o máximo, ou, alternativamente, onde a resistência do material seja menor. A grandeza que descreve as propriedades de esforço da barra, em qualquer ponto e em todas as direções neste ponto, é um tensor chamado de *tensor de Tensão*.

Outro exemplo da aplicação de tensores na física é representado pela condutividade elétrica. Num meio condutor de eletricidade, a densidade de corrente $\underset{\sim}{J}$ é, de certa maneira, proporcional ao campo elétrico $\underset{\sim}{E}$ presente no meio. Assim,

$$\underset{\sim}{J} \sim \sigma \underset{\sim}{E} \tag{III.1}$$

onde o coeficiente σ é conhecido como condutividade elétrica. Se o meio fosse, por exemplo, um metal, a condutividade seria praticamente uma quantidade escalar constante, e a relação (III.1) converter-se-ia em uma igualdade e, portanto, a direção da corrente elétrica seria a mesma que a do campo elétrico aplicado. Neste caso, diz-se que o meio, cujas características estão contidas implicitamente em σ, é um meio "isotrópico". Assim, num meio condutor isotrópico:

$$\underset{\sim}{J} = \sigma \underset{\sim}{E} \qquad \text{(III.2)}$$

Todavia, quando o meio é "anisotrópico", (por exemplo, um cristal, onde a condutividade em um mesmo ponto tem propriedades diferentes para direções diferentes), observa-se que a corrente elétrica flui, em geral, em direções diferentes à do campo elétrico aplicado. Neste caso, *a condutividade elétrica σ é um tensor*, e a equação (III.1) pode ser escrita mais apropriadamente na forma

$$\underset{\sim}{J} = \underset{\approx}{\sigma} \underset{\sim}{E}$$

onde $\underset{\approx}{\sigma}$ representa o tensor condutividade e o produto do segundo membro é um produto tensorial. A razão de se ter representado o tensor condutividade com dois tis, é que este é um tensor de segunda ordem. Este tipo de representação é conveniente, apenas, quando os tensores são referenciados a coordenadas cartesianas, onde os tensores de primeira ordem são representados por um til, os de terceiras por três, etc. Conforme será provado mais tarde, um vetor $\underset{\sim}{V}$ é um tensor de primeira ordem. Esta identificação permite inferir que, da mesma maneira que um vetor pode ser representado por um de seus componentes na notação indicial, um tensor de primeira ordem $\underset{\sim}{V}$ pode, também, ser representado por uma de suas componentes V_i. Neste tipo de representação, que é a mais comum no estudo dos tensores, um tensor de segunda ordem $\underset{\approx}{T}$, pode, também, ser representado por uma de suas "componentes" T_{ij}.

Nesta representação, por componente, a expressão tensorial para a densidade de corrente (que é um tensor de primeira ordem) pode ser escrita na forma

$$J_i = \sigma_{ij} E_j \tag{III.3}$$

onde se deve notar que o produto do segundo membro tem que ser equivalente ao de um produto matricial entre uma matriz de segunda ordem e um vetor coluna (os índices repetidos implicam em soma) de maneira que o resultado seja um vetor. Observa-se, na equação (III.3), que uma componente qualquer da densidade de corrente $\underset{\sim}{J}$, depende das três componentes do campo elétrico. A relação (III.3) é a expressão da conhecida lei de Ohm.

Como um último exemplo, considere-se o *momento de inércia*. Um objeto sólido, que gira em torno de um eixo fixo, possui um momento angular $\underset{\sim}{L}$ que, de certa maneira, é proporcional à sua velocidade angular $\underset{\sim}{\omega}$. Quando o eixo de rotação é, ao mesmo tempo, o eixo de simetria do objeto, tem-se que

$$L_i = I\,\omega_i \tag{III.4}$$

onde a constante de proporcionalidade I, é o momento de inércia do corpo que, neste caso, é apenas uma quantidade escalar. Para um eixo de rotação arbitrário, porém, o momento de inércia é um tensor I_{ij}. Portanto, pode-se inferir que o momento de inércia é uma grandeza que impli citamente inclui propriedades físicas do corpo, em relação ao eixo considerado. De fato, pode-se demonstrar que o tensor de inércia é dado por:

$$I_{ij} = \int_V \rho(\underset{\sim}{x}) \; (|\underset{\sim}{x}|^2 \; \delta_{ij} - x_i x_j) d^3x \tag{III.5}$$

onde $\rho(\underset{\sim}{x})$ é a densidade de massa do corpo, $\underset{\sim}{x}$ o raio vetor (ou vetor de posição), e δ_{ij} é o delta de Kronecker. Neste caso, o tensor de inércia é também um tensor de segunda ordem.

É interessante observar na equação (III.3), que os elementos de um tensor podem sempre ser arranjados em forma matricial. Assim, os elementos (ou componentes) de um tensor de segunda ordem $\underset{\approx}{T}$, podem ser representados numa forma matricial, $\mathcal{T}$ (ver Capítulo II). Entretanto, deve-se ressaltar que, em geral, o inverso não e verdadeiro, isto é, uma matriz nem sempre é um tensor. A diferença fundamental entre ambos os conceitos, se encontra nas propriedades de transformação de cada componente.

No estudo dos tensores, o mais importante é o tipo de transformação a que estão sujeitas suas componentes, quando se muda de sistema de coordenadas. Assim por exemplo, quando o sistema de coordenadas original é o cartesiano ortogonal fixo, e as transformações são feitas para outro sistema também cartesiano, os tensores expressos nestes sistemas são chamados de tensores cartesianos ortogonais, ou, sim plesmente, de *tensores cartesianos*. O estudo deste tipo de tensores será o tema da seção 3.2 deste capítulo.

Alternativamente, quando os tensores são expressos em sistemas de coordenadas oblíquas, porém ainda fixos (chamados também de coordenadas cartesianas oblíquas), a transformação de coordenadas dos tensores expressos nestes sistemas determina o estudo dos *tensores cartesianos oblíquos*. É interessante notar que, neste sistema de coordenadas, as componentes de um vetor (que, conforme foi adiantado, é um tensor de primeira ordem) têm dois tipos de componentes, sendo ambos de natureza diferente. Para dar uma idéia geométrica destas componentes, considere-se um vetor $\underset{\sim}{V}$, referenciado a um sistema de coordenadas oblíquas de vetores base $\underset{\sim}{\hat{e}}_1$ e $\underset{\sim}{\hat{e}}_2$, na forma mostrada na Figura III.1. Desta Figura pode-se ver que

$$\underset{\sim}{V} = V^1 \, \underset{\sim}{\hat{e}}_1 + V^2 \, \underset{\sim}{\hat{e}}_2$$

onde a componente V^2, na direção $\underset{\sim}{\hat{e}}_2$, é obtido após traçar uma paralela à direção $\underset{\sim}{\hat{e}}_1$. Estas componentes são chamadas de *componentes contravariantes* do vetor $\underset{\sim}{V}$. Evidentemente, para um espaço multidimensional, o vetor $\underset{\sim}{V}$ pode ser representado na forma

$$\underset{\sim}{V} \equiv V^i \, \underset{\sim}{\hat{e}}_i \qquad \text{(III.6)}$$

Esta representação de $\underset{\sim}{V}$, que é o resultado de uma soma vetorial (lei do paralelogramo) entre os vetores $V^i \, \underset{\sim}{\hat{e}}_i$, é a mesma mostrada na equação (III.3) do Capítulo I, onde o vetor $\underset{\sim}{V}$ é também o resultado da soma dos vetores $V_i\, \hat{\underset{\sim}{e}}_i$ (onde $V_i = \underset{\sim}{V} \cdot \hat{\underset{\sim}{e}}_i$), porém, num sistema onde $\hat{\underset{\sim}{e}}_i \cdot \hat{\underset{\sim}{e}}_j = \delta_{ij}$. Este mesmo tipo de componentes do vetor $\underset{\sim}{V}$, também existe nas coordenadas oblíquas, i.e.

$$V_i = \underset{\sim}{V} \cdot \hat{\underset{\sim}{e}}_i \tag{III.7}$$

conforme indicado na Figura III.1. Note-se, entretanto, que neste caso

$$V_i\, \hat{\underset{\sim}{e}}_i \neq \underset{\sim}{V}.$$

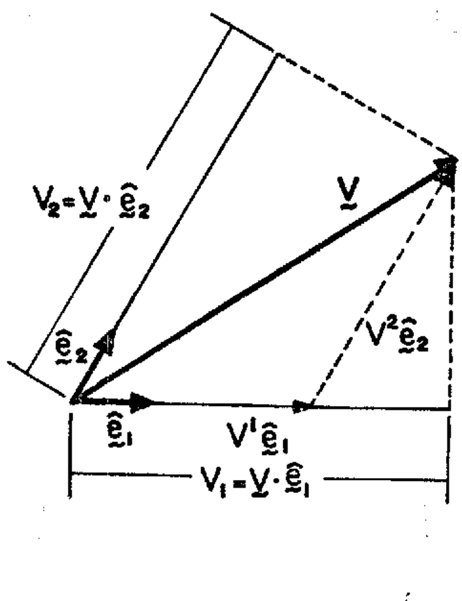

Fig. III.1 - Dois tipos de componentes, V^i e V_i do vetor $\underset{\sim}{V}$ expresso em coordenadas oblíquas.

A este tipo de componentes, obtido mediante a relação (III.7), chama-se de *componentes covariantes* de $\underset{\sim}{V}$.

É interessante notar que um vetor arbitrário $\underset{\sim}{V}$, expresso num sistema de coordenadas oblíquo fixo, pode ser representado alternativamente por suas componentes contravariantes ou covariantes. Deve ficar evidente, porém, que suas manipulações serão, em geral, diferentes. Em particular, a lei de transformação das componentes covariantes do vetor $\underset{\sim}{V}$, de um sistema de coordenadas fixo a outro, não será a mesma que a lei de transformação das componentes contravariantes. Nota-se, também, que para o caso especial de coordenadas cartesianas ortogonais ($\underset{\sim}{\hat{e}}_i \cdot \underset{\sim}{\hat{e}}_j = \delta_{ij}$), as componentes covariantes e contravariantes de um vetor são idênticos.

É necessário ressaltar que, nos dois casos de coordenadas fixas, mencionados anteriormente, os vetores base são fixos. Isto é, para cada ponto no espaço os vetores base conservam sempre as mesmas direções. Todavia, existe ainda o caso mais geral de transformação de um sistema de coordenadas arbitrário a um outro, onde as direções relativas dos vetores base mudam para cada ponto do espaço, seguindo uma lei pré-estabelecida. Um exemplo deste tipo de coordenadas é o caso das (coordenadas) curvilíneas estudadas na seção 1.10 do Capítulo I, embora as direções relativas dos vetores base, neste caso, permaneçam ortogonais entre si. O estudo de tensores sujeitos a transformações deste tipo correspondem à análise dos *tensores generalizados* que também serão vistos no decorrer deste capítulo.

Algo de extrema importância na aplicação da transformação de coordenadas a problemas práticos, e que deve ser sempre lembrado, é que as leis da física, que normalmente são expressas mediante equações, são as mesmas para qualquer sistema de referência correspondente ao mesmo espaço. Assim, por exemplo, a equação (III.3), expressa num sistema de vetores base arbitrários, será:

$$J'_i = \sigma'_{ij}\, E'_j \tag{III.8}$$

Esta expressão, comparada com a (III.3), implica que se for feita a transformação separadamente das componentes J_i, σ_{ij} e E_j, e depois substituí-las na equação (III.3), necessariamente deverá se obter a relação (III.8)

3.2 - TENSORES CARTESIANOS

3.2.1 - Tensor de Primeira Ordem

Considere-se um sistema cartesiano tridimensional S de vetores base $\hat{\underset{\sim}{x}}$, $\hat{\underset{\sim}{y}}$ e $\hat{\underset{\sim}{z}}$. Um vetor $\underset{\sim}{V}$, neste espaço, tem por componentes V_x, V_y e V_z. Suponha-se que o sistema de coordenadas é girado ao redor do eixo $\hat{\underset{\sim}{z}}$ de um ângulo α, no sentido positivo da orientação do sistema, de maneira que a relação entre os vetores base do sistema S e do novo S' ($\hat{\underset{\sim}{x}}'$, $\hat{\underset{\sim}{y}}'$ e $\hat{\underset{\sim}{z}}'$), seja

$$\hat{\underset{\sim}{z}}' = \hat{\underset{\sim}{z}}, \quad \hat{\underset{\sim}{x}} \times \hat{\underset{\sim}{x}}' = \hat{\underset{\sim}{y}} \times \hat{\underset{\sim}{y}}' = \hat{\underset{\sim}{z}}\,\text{sen}\,\alpha, \quad \hat{\underset{\sim}{x}} \cdot \hat{\underset{\sim}{x}}' = \hat{\underset{\sim}{y}} \cdot \hat{\underset{\sim}{y}}' = \cos\alpha$$

A representação esquemática desta rotação é a mesma que a ilustrada na Figura II.2 do Capítulo II. Portanto, as componentes de $\underset{\sim}{V}$, neste novo sistema, de acordo com a equação (II.20) do Capítulo II, são dados pelas relações:

$$V'_x = V_x \cos\alpha + V_y \operatorname{sen}\alpha$$

$$V'_y = - V_x \operatorname{sen}\alpha + V_y \cos\alpha$$

$$V'_z = V_z$$

ou, alternativamente, fazendo-se uso da notação matricial,

$$\underset{\sim}{V}' = \left[M_z\,(\alpha) \right] \underset{\sim}{V} \tag{III.9}$$

onde,

$$M_z\,(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{III.10}$$

matriz que deve ser lida da seguinte maneira: matriz da rotação em torno do eixo $\hat{\underset{\sim}{z}}$, num ângulo α. Esta rotação é chamada de positiva porque o sentido da rotação, segundo a regra da mão direita, coincide com a do eixo $\hat{\underset{\sim}{z}}$. Uma rotação negativa é obtida pela simples substituição de α por $-\alpha$.

Matrizes de rotação em torno dos outros eixos podem ser obtidos por analogia. Uma orientação arbitrária é conseguida mediante, no mínimo, 3 rotações sucessivas. Assim, por exemplo, partindo-se do sistema base $\hat{x}_o$, $\hat{y}_o$, $\hat{z}_o$ pode-se chegar a um arbitrário $\hat{x}_3$, $\hat{y}_3$, $\hat{z}_3$, mediante as seguintes transformações (ou rotações) sucessivas:

$$\hat{z}_o, \hat{y}_o, \hat{z}_o \xrightarrow{M_{z_o}(\alpha)} \hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1 \qquad (\hat{z}_o = \hat{z}_1)$$

$$\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1 \xrightarrow{M_{y_1}(\beta)} \hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{z}_2 \qquad (\hat{y}_1 = \hat{y}_2)$$

$$\hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{z}_2 \xrightarrow{M_{z_2}(\gamma)} \hat{x}_3, \hat{y}_3, \hat{z}_3 \qquad (\hat{z}_2 = \hat{z}_3)$$

Evidentemente, podem também ser feitas sequências diferentes de rotações em torno de eixos diferentes. O importante é que são necessárias apenas três rotações, para se chegar a uma orientação arbitrária.

As matrizes de rotação são facilmente obtidas, conforme será demonstrado a seguir. A rotação ao redor do eixo $\hat{y}_1$ de um ângulo β, de acordo com a Figura III.2, é dada pelas seguintes relações das componentes de V, em ambos os sistemas:

$$V_{z_2} = V_{z_1} \cos \beta + V_{x_1} \operatorname{sen} \beta$$

$$V_{x2} = - V_{z1} \text{ sen } \beta + V_{x1} \cos \beta$$

$$V_{y_2} = V_{y_1}$$

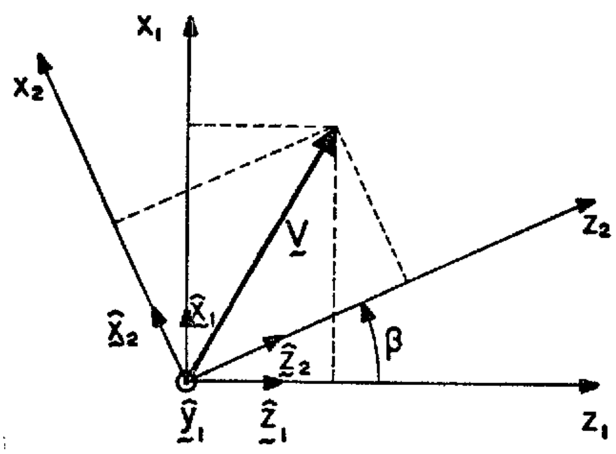

Fig. III.2 - Rotação positiva em torno do eixo $\tilde{y}_1$ em um ângulo β.

de onde se tem que a matriz de rotação $M_{y_1}(\beta)$ é:

$$M_{y_1}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & - \text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \qquad \text{(III.11)}$$

Entretanto, não é necessário desenhar esquemas parecidos com o mostrado na Figura III.2, toda vez que se precise encontrar a matriz de rotação em torno de um eixo qualquer. Para evitar isto, é suficiente observar a forma das matrizes (III.10) e (III.11), de onde se pode tirar con clusões interessantes. Por exemplo, o elemento da diagonal, que corresponde ao eixo de rotação, é sempre 1. Assim, se o eixo de giro é o 3, então $M_{33} = 1$, conforme (III.10). Por outro lado, todos os elementos da linha e coluna correspondentes a este elemento unitário são nulos. Observa-se, também, que os elementos restantes da diagonal são sempre o co-seno do ângulo (θ) da rotação. Finalmente, os elementos restantes, fora da diagonal, são da forma

$$M_{ij} = \pm \text{ sen } \theta$$

onde o sinal positivo ou negativo depende dos índices numéricos. Se estes se encontram na sequência 1, 2, 3, 1, o sinal é positivo, ou na sequência inversa 3, 2, 1, 3 o sinal é negativo. Assim, por exemplo, o elemento M_{13} da matriz (III.11) será $-\text{sen } \beta$, no entanto $M_{31} = \text{sen } \beta$.

Com estas observações, pode-se escrever a matriz da rotação em torno de qualquer eixo, tomando-se cuidado, apenas, com o sentido da rotação (ângulo de rotação positivo para uma rotação positiva, e negativa, caso contrário). Assim, a matriz $M_{z_2}(\gamma)$ é:

$$M_{z_2}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \text{sen } \gamma & 0 \\ -\text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.12)}$$

Finalmente, a transformação dos componentes de um vetor $\underset{\sim}{V}$, inicialmente num sistema S_o, a um sistema S, será dada pelas rela ções de transformação sucessivas:

$$\underset{\sim}{V}_1 = M_{z_o}(\alpha)\ \underset{\sim}{V}_o$$

$$\underset{\sim}{V}_2 = M_{y_1}(\beta)\ \underset{\sim}{V}_1 = [M_{y_1}(\beta)]\,[M_{z_o}(\alpha)]\,\underset{\sim}{V}_o$$

$$\underset{\sim}{V}_3 = [M_{z_2}(\gamma)]\,[M_{y_1}(\beta)]\,[M_{z_o}(\alpha)]\ \underset{\sim}{V}_o \tag{III.13}$$

Consequentemente, a matriz de transformação de um sistema ortogonal tridimensional S_o, a um outro similar S_3, é dada por

$$M\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma) = [M_{z_2}(\gamma)]\,[M_{y_1}(\beta)]\,[M_{z_o}(\alpha)] \tag{III.14}$$

Pode-se verificar que

$$M\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \tag{III.15}$$

onde:

$$M_{11} = \cos\gamma\ \cos\beta\ \cos\alpha - \text{sen}\,\gamma\ \text{sen}\,\alpha$$

$$M_{12} = \cos\gamma\ \cos\beta\ \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\gamma\ \cos\alpha$$

$$M_{13} = -\cos\gamma\ \text{sen}\,\beta$$

$$M_{21} = -\text{sen}\,\gamma\ \cos\beta\ \cos\alpha - \cos\gamma\ \text{sen}\,\alpha$$

$$M_{22} = -\text{sen}\,\gamma\ \cos\beta\ \text{sen}\,\alpha + \cos\gamma\ \cos\alpha$$

M_{23} = sen γ sen β

M_{31} = sen β cos α

M_{32} = sen β sen α

M_{33} = cos β

Este tipo de transformação é muito comum na Mecânica Clássica, onde certos tipos de problemas ficam mais fácil de se resolver em um sistema de coordenadas especial (como, por exemplo, o sistema natural de coordenadas, mencionado no Capítulo II), para, logo depois, transformar a solução de volta ao sistema original de coordenadas. Os ângulos α, β e γ são chamados de *Ângulos de Euler*. A Figura III.3 ilustra a orientação dos vetores base, após cada rotação, começando do sistema inicial $\hat{x}_o$, $\hat{y}_o$ e $\hat{z}_o$, que, depois de girado, mediante $M_{z_o}(\alpha)$, dá origem ao sistema $\hat{x}_1$, $\hat{y}_1$, $\hat{z}_1$, que por sua vez, mediante a rotação $M_{y_1}(\beta)$, gera o sistema $\hat{x}_2$, $\hat{y}_2$, $\hat{z}_2$, de onde se obtém, finalmente, o sistema desejado $\hat{x}_3$, $\hat{y}_3$, $\hat{z}_3$.

Voltando à equação (III.13), e chamando M_{ij} aos elementos da matriz M (α, β, γ), esta relação na notação indicial fica,

$$V_{(3)i} \equiv M_{ij} V_{(o)j} \qquad \text{(III.16)}$$

Grandezas que se transformam segundo a relação acima, onde os coeficientes da transformação são os elementos da matriz M, são chamados de *tensores de primeira ordem*. Observa-se que este é o mesmo tipo de transformação que já foi estudado no Capítulo II, onde a matriz de transformação fora denominada G. O leitor pode verificar que a matriz de transformação (III.15) é uma matriz ortogonal, isto é:

$$M^{-1} = \tilde{M}$$

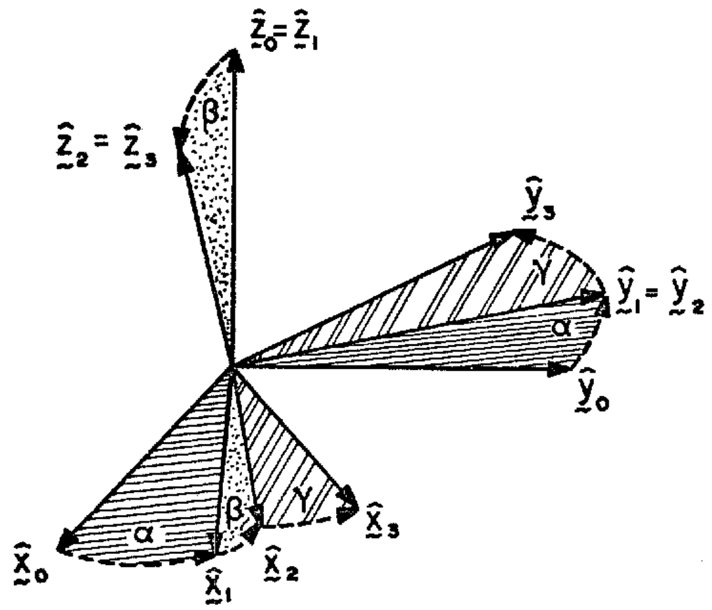

Fig. III.3 - Ângulos de Euler α, β e γ como resultado de três rotações sucessivas, partindo do sistema $\hat{x}_0$, $\hat{y}_0$, $\hat{z}_0$ para chegar ao $\hat{x}_3$, $\hat{y}_3$, $\hat{z}_3$. As regiões com a mesma hachura encontram-se num mesmo plano.

3.2.2 - Diádicas. Tensores de Segunda Ordem:

Conforme fora apontado no Capítulo II, considera-se que dois vetores pertencem ao mesmo espaço vetorial, quando ambos podem ser expressos como combinações lineares dos vetores base do espaço. Entre tanto, os dois vetores não precisam representar quantidades físicas semelhantes. Muito pelo contrário, estes vetores são, em geral, grandezas intrínsecamente diferentes.

É importante, também, ressaltar que da interação entre dois vetores diferentes, pode surgir uma terceira grandeza com propriedades físicas próprias. Por exemplo, a equação $dW = \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{x}$, indica o trabalho dW (grandeza escalar) desenvolvido por uma força $\underset{\sim}{F}$, quando seu ponto de aplicação percorre uma distância elementar $d\underset{\sim}{x}$. Neste exemplo, $\underset{\sim}{F}$ e $d\underset{\sim}{x}$, são dois vetores do mesmo espaço (dado que $\underset{\sim}{F} \equiv F_i \, \underset{\sim}{\hat{x}}_i$ e $d\underset{\sim}{x} \equiv \underset{\sim}{\hat{x}}_i \, dx_i$), porém intrínsecamente diferentes, e de cuja interação surge uma terceira grandeza de propriedades físicas definidas. Além do produto escalar, a operação entre dois vetores, pode também ser feita mediante o produto vetorial, e o *produto tensorial*. Os dois primeiros produtos (escalar e vetorial) não precisam de maiores explanações por serem os mais conhecidos. Analisa-se, em seguida, a natureza do produto tensorial.

Seja o produto (de certa maneira algébrico) dos vetores $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{B}$, expressos num sistema ortogonal tridimensional

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B} = (A_x \underset{\sim}{\hat{x}} + A_y \underset{\sim}{\hat{y}} + A_z \underset{\sim}{\hat{z}})\;(B_x \underset{\sim}{\hat{x}} + B_y \underset{\sim}{\hat{y}} + B_z \underset{\sim}{\hat{z}})$$

Desenvolvendo-se este produto algébrico, tem-se:

$$\underset{\sim\sim}{AB} = A_x B_x \,\underset{\sim\sim}{\hat{x}\hat{x}} + A_x B_y \,\underset{\sim\sim}{\hat{x}\hat{y}} + A_x B_z \,\underset{\sim\sim}{\hat{x}\hat{z}} + A_y B_x \,\underset{\sim\sim}{\hat{y}\hat{x}} + A_y B_y \,\underset{\sim\sim}{\hat{y}\hat{y}} + A_y B_z \,\underset{\sim\sim}{\hat{y}\hat{z}} + A_z B_x \,\underset{\sim\sim}{\hat{z}\hat{x}} + A_z B_y \,\underset{\sim\sim}{\hat{z}\hat{y}} + A_z B_z \,\underset{\sim\sim}{\hat{z}\hat{z}}$$

O novo ente, que assim acaba de se formar, é chamado de *diádica*. Na notação indicial, a expressão anterior fica:

$$\underset{\sim\sim}{AB} = \sum_{i}\sum_{j} A_i B_j \, \underset{\sim}{\hat{e}}_i \underset{\sim}{\hat{j}}_j \equiv A_i B_j \, \underset{\sim}{\hat{e}}_i \underset{\sim}{\hat{e}}_j \qquad \text{(III.17)}$$

onde os $\underset{\sim}{\hat{e}}_i$ são os vetores base do sistema. Cada um destes termos são chamados de *unidades diádicas* ou, simplesmente, *díades*. Note-se que os componentes da diádica podem ser arranjadas como se fossem elementos de matriz. Chamando $\underset{\approx}{T} = \underset{\sim\sim}{AB}$ à nova grandeza assim formada, e cada elemento

$$T_{ij} = A_i B_j , \qquad \text{(III.18)}$$

segue-se que

$$\underset{\approx}{T} \equiv T_{ij} \, \underset{\sim}{\hat{e}}_i \underset{\sim}{\hat{e}}_j \qquad \text{(III.19)}$$

Em seguida far-se-á uma análise das propriedades desta nova grandeza. Para isto é necessário não esquecer que o último fator $\underset{\sim}{\hat{e}}_j$, é um vetor e como tal, sujeito a operações conhecidas entre vetores. Assim, pode-se, por exemplo, fazer o *produto interno* (ou escalar) da diádica (3.18) com o vetor $\underset{\sim}{V} \equiv V_k \underset{\sim}{\hat{e}}_k$. Assim,

$$\underset{\approx}{T} \cdot \underset{\sim}{V} \equiv T_{ij} \, V_k \, \underset{\sim}{\hat{e}}_i \underset{\sim}{\hat{e}}_j \cdot \underset{\sim}{\hat{e}}_k = T_{ij} \, V_k \, \underset{\sim}{\hat{e}}_i \, \delta_{jk} = T_{ij} \, V_j \, \underset{\sim}{\hat{e}}_i$$

de onde, tem-se que,

$$\underset{\approx}{T} \cdot \underset{\sim}{V} = (\sum_j T_{1j}\, V_j)\underset{\sim}{\hat{e}}_1 + (\sum_j T_{2j}\, V_j)\underset{\sim}{\hat{e}}_2 + (\sum_j T_{3j}\, V_j)\underset{\sim}{\hat{e}}_3 \qquad \text{(III.20)}$$

Este resultado é um vetor ! Logo: o produto interno de uma diádica com um vetor dá outro vetor. Note-se que cada componente i do novo vetor, $T_{ij}\, V_j$, representa, exatamente, a notação indicial do produto de uma matriz T com o vetor coluna $\underset{\sim}{V}$. Portanto, o produto interno entre $\underset{\approx}{T}$ e $\underset{\sim}{V}$, na notação matricial, fica:

$$T\underset{\sim}{V} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_xB_x & A_xB_y & A_xB_z \\ A_yB_x & A_yB_y & A_yB_z \\ A_zB_x & A_zB_y & A_zB_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \qquad \text{(III.21)}$$

Pode-se observar que a matriz T, por sua vez, é formada pelo produto, em sequência, de um vetor coluna com um vetor linha. Assim,

$$T = \underset{\sim\sim}{A\tilde{B}} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} (B_x \quad B_y \quad B_z) = \begin{pmatrix} A_xB_x & A_xB_y & A_xB_z \\ A_yB_x & A_yB_y & A_yB_z \\ A_zB_x & A_zB_y & A_zB_z \end{pmatrix} \qquad \text{(III.22)}$$

Fica evidente que a matriz T (que apenas é um arranjo de elementos) é diferente da diádica $\underset{\approx}{T}$ (que em si representa uma soma de termos).

O produto $\underset{\sim\sim}{AB} \equiv A_iB_j$ é chamado de *produto externo*, logo, o produto externo de dois vetores forma uma diádica.

A seguir, ver-se-á a transformação do produto externo de dois vetores, a um outro sistema de coordenadas. Chamando $\underset{\sim}{A}'$ e $\underset{\sim}{B}'$ a dois vetores no sistema de coordenadas S', e observando que cada um dos vetores se transforma segundo (III.16), tem-se que o produto $\underset{\sim}{A}'\ \underset{\sim}{B}'$ segue a seguinte transformação

$$A'_i\ B'_j \equiv M_{ik}\ A_k\ M_{j\ell}\ B_\ell = M_{ik}\ M_{j\ell}\ A_k\ B_\ell$$

ou também:

$$T'_{ij} \equiv M_{ik}\ M_{j\ell}\ T_{k\ell} \qquad \text{(III.23)}$$

onde não se deve esquecer a soma dupla, envolvida, sobre os índices repetidos.

Esta última expressão define o tensor cartesiano de segunda ordem. Toda entidade $\underset{\approx}{T}$, cujos componentes T_{ij} se transformam segundo a equação (III.23) é chamada de *Tensor Cartesiano de segunda ordem.* Desta maneira, o produto externo de dois vetores forma um tensor de segunda ordem. É importante ressaltar que as componentes deste tensor podem ser colocadas como elementos de uma matriz T, porém, o tensor $\underset{\approx}{T}$ é algo mais complicado que um simples arranjo de elementos.

A equação (III.20) permite concluir que o produto escalar de um tensor de segunda ordem com um vetor resulta em outro vetor. Esta conclusão estava já implícita na equação da lei de Ohm (III.3).

Por último, é também importante observar que as componentes do tensor de segunda ordem $\underset{\approx}{T}$ (de acordo com a sua representação matricial) são 9, para um sistema cartesiano tridimensional. Para um sistema de n dimensões, o número de componentes do tensor de segunda ordem será n^2.

EXEMPLO 3.1

Neste exemplo ver-se-á a diferença que existe entre os elementos de uma matriz e os de um tensor, arranjados em forma de matriz. Sejam as matrizes

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix}$$

onde os elementos de cada matriz são formados pelas componentes do vetor $\underset{\sim}{v} = x\underset{\sim}{\hat{x}} + y\underset{\sim}{\hat{y}}$. Suponha-se que se deseja expressar os elementos das matrizes $\mathcal{T}$ e $\mathcal{R}$, num sistema onde $\underset{\sim}{v} = x'\underset{\sim}{\hat{x}}' + y'\underset{\sim}{\hat{y}}'$, cujas componentes são obtidos segundo a seguinte transformação:

$$x' = x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha$$

$$y' = -x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha$$

A matriz de transformação $\mathcal{M}$ (rotação num ângulo α em torno de $\underset{\sim}{\hat{z}}$) é:

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\,\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Para simplificar a álgebra chama-se,

$C = \cos\alpha$ e $S = \text{sen}\,\alpha$

Logo,

$$M = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix}$$

Se todos os elementos, de quaisquer das duas matrizes, se transformam segundo a relação (III.23) então, esta matriz será um tensor. Por exemplo, se T é um tensor, então, no novo sistema ter-se-á

$$T' = \begin{pmatrix} x'^2 & x'y' \\ x'y' & y'^2 \end{pmatrix}$$

Se de alguma maneira se souber que T é um tensor, então será suficiente substituir as relações de transformação de coordenadas em cada elemento de T'.

O elemento T'_{ij}, segundo a relação (III.23), escrito por extenso e considerando-se que a variação numérica dos índices é de 1 a 2, fica:

$$T'_{ij} = M_{i1}\, M_{j1}\, T_{11} + M_{i1}\, M_{j2}\, T_{12} + M_{i2}\, M_{j1}\, T_{21} + M_{i2}\, M_{j2}\, T_{22}$$

Assim:

$$T'_{11} = C^2x^2 + CS\ xy + SC\ xy + S^2y^2 = x^2C^2 + 2SC\ xy + y^2S^2 =$$

$$= (xC + yS)^2 = (x \cos \alpha + y \text{ sen } \alpha)^2 = x'^2$$

Pode-se verificar que os outros elementos de T obedecem à mesma transformação. Logo, os elementos da matriz T correspondem às componentes de um tensor.

Para saber se R é um tensor, poder-se-ia seguir o mesmo procedimento. Entretanto, dado que R é uma matriz, pode-se obter uma versão matricial da equação (III.23) e, desta maneira, ter uma transformação simultânea de todos os seus elementos. Assim, a equação (III.23) fica:

$$T'_{ij} \equiv M_{ik}\, M_{j\ell}\, T_{k\ell} = M_{ik}\, T_{k\ell}\, M_{j\ell} = M_{ik}\, T_{k\ell}\, (\tilde{M})_{\ell j} \equiv M T \tilde{M}$$

Portanto, a transformação da matriz R, ao novo sistema de coordenadas, é:

$$R' = MR\tilde{M} = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (yC + xS)^2 & (x^2 - y^2)SC + xy(C^2 - S^2) \\ (x^2 - y^2)SC + xy(C^2 - S^2) & (yS - xC)^2 \end{pmatrix}$$

Pode-se ver que

$$R'_{11} = (y\cos\alpha + x\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 \neq y'^2 = (y\cos\alpha - x\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2$$

$$R'_{12} \neq x'y', \text{ etc}$$

Desta maneira, chega-se à conclusão de que os elementos da matriz R não correspondem aos elementos de um tensor.

EXEMPLO 3.2

Uma quantidade matemática que possui dois índices e que foi de uso muito comum nos capítulos anteriores é o delta de Kronecker δ_{ij}. Será que esta entidade (que na realidade apenas representa um símbolo) é um tensor? Evidentemente, se δ_{ij} é um tensor, terá que se transformar segundo (III.23). Ou seja, tem que satisfazer a relação:

$$\delta'_{ij} \equiv M_{ik}\, M_{j\ell}\, \delta_{k\ell} \tag{III.24}$$

Para isto, é importante lembrar que o delta de Kronecker é uma definição, e, portanto, aplicável a qualquer sistema base ortogonal. Assim:

$$\delta'_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Evidentemente, esta é a conclusão a que se deve chegar, partindo-se da relação (III.24). Aplicando-se as propriedades do símbolo $\delta_{k\ell}$, ao segundo membro de relação (III.24), fica:

$$\delta'_{ij} \equiv M_{ik}\, M_{jk}$$

Porém,

$$M_{ij} = (\tilde{M})_{kj}$$

logo:

$$\delta'_{ij} = M_{ik}\, (\tilde{M})_{kj} = M_{ik}\, (M^{-1})_{kj}$$

$$\equiv M\, M^{-1} = I \equiv \delta_{ij}$$

Portanto, o delta de Kronecker é um tensor cartesiano de segunda ordem.

3.2.3 - Tensores de Ordem Superior

Os tensores cartesianos de terceira ordem podem também ser definidos pela associação de três vetores $\underset{\sim}{A}$ $\underset{\sim}{B}$ $\underset{\sim}{C}$ formando "triádicas". A transformação destas grandezas podem ser escritas em analogia com as diádicas

$$A'_i \; B'_j \; C'_k \equiv M_{i\ell} \; M_{jm} \; M_{kn} \; A_\ell \; B_m \; C_n$$

É mediante este tipo de transformação que são definidos os tensores cartesianos de terceira ordem

$$T'_{ijk} \equiv M_{i\ell} \; M_{jm} \; M_{kn} \; T_{\ell mn}$$

Em geral, um tensor cartesiano de ordem arbitrária se transforma segundo:

$$T'_{ijk \, \dots \, n} \equiv M_{i\alpha} \; M_{j\beta} \; M_{k\gamma} \; \dots \; M_{n\eta} \; T_{\alpha\beta\gamma \, \dots \, \eta} \qquad \text{(III.25)}$$

De uma maneira análoga à definição de produto externo entre dois vetores, existe, também, o produto externo entre tensores de ordem arbitrária. Assim, por exemplo, o produto externo entre dois tensores de segunda ordem,

$$\underset{\approx}{T} \; \underset{\approx}{P} \equiv T_{ij} \; P_{k\ell} = Q_{ijk}$$

dá como resultado um tensor de quarta ordem. Pode-se ver que, a ordem do tensor formado pelo produto externo de dois outros tensores, é igual à soma das ordens dos tensores. Deste ponto de vista, os vetores representam tensores de primeira ordem, uma vez que o produto externo de dois vetores, $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{B}$,

$$\underset{\sim}{A} \; \underset{\sim}{B} \equiv A_i \; B_j = T_{ij} \equiv \underset{\sim}{T}$$

forma um tensor de segunda ordem.

Analogamente, o produto externo de um escalar λ com um tensor de primeira ordem,

$$\lambda \underset{\sim}{A} \equiv \lambda A_i = B_i \equiv \underset{\sim}{B}$$

dá como resultado um outro tensor de primeira ordem. De onde se conclui que o escalar λ é um tensor de ordem zero.

3.2.4 - Tensores Simétricos e Anti-simétricos. - Pseudotensores

Um tensor de segunda ordem T_{ij}, é chamado de *tensor simétrico* quando seus elementos satisfazem a seguinte relação:

$$T_{ij} = T_{ij}$$

No entanto, quando

$$T_{ij} = -T_{ij}$$

o tensor é chamado de *anti-simétrico*. Aqui, surge a seguinte pergunta: será que um tensor, sendo simétrico num determinado sistema de coordenadas cartesianas, também resulta ser um tensor simétrico em qualquer outro sistema cartesiano? A resposta é positiva, isto é, se

$$T_{ij} = T_{ji},$$

tem-se também que,

$$T'_{ij} = T'_{ji} \tag{III.26}$$

A demonstração desta propriedade é muito simples

$$T'_{ij} \equiv M_{ik} M_{j\ell} T_{k\ell} = M_{ik} M_{j\ell} T_{\ell k} = M_{j\ell} M_{ik} T_{\ell k} = T'_{ji}$$

Esta mesma propriedade se aplica para os tensores anti-simétricos.

Para tensores de ordem superior, pode-se, também, definir estas mesmas propriedades de simetria, porém, em relação a apenas dois de seus índices. Assim, um tensor de terceira ordem é simétrico em relação aos seus dois primeiros índices, quando

$$T_{ijk} = T_{jik}$$

Chama-se de *pseudotensor*, ao tensor cujas componentes são regidas pela transformação (III.25), exceto que vai multiplicado pelo determinante da matriz de transformação. Isto é,

$$T'_{ijk\,\ldots\,n} \equiv M_{i\alpha} M_{j\beta} M_{k\gamma} \ldots M_{n\eta} T_{\alpha\beta\gamma\,\ldots\,\eta} \det M \tag{III.27}$$

Para o caso da matriz de transformação (III.15), tem-se que o det M = 1. Porém, este resultado nem sempre é o mesmo, conforme será visto a seguir.

Existe outro tipo de transformação, chamada de *rotação imprópria*, na qual, embora a matriz de transformação seja ainda ortogonal, o seu determinante tem o valor:

$$\det M = -1$$

Este tipo de transformação, também leva o tensor (ou melhor, as suas componentes) a ser expresso no sistema desejado, exceto que a direção de um dos vetores base neste sistema é invertido . (Isto é, um vetor base qualquer do novo sistema $\hat{e}_i$ é trocado pelo $-\hat{e}_i$). Fica evidente que a matriz M (III.15) representa uma rotação própria.

EXEMPLO 3.3

Seja o símbolo de Levi-Civita ε_{ijk}, que no Capítulo I chamou-se de "tensor anti-simétrico". Em seguida, determinar-se-á, se ε_{ijk} é, de fato, um tensor. Para isto, suponha-se que, de fato, ε_{ijk} é um tensor, e que portanto satisfaz a relação:

$$\varepsilon'_{ijk} \equiv M_{i\ell}\, M_{jm}\, M_{kn}\, \varepsilon_{\ell mn} \qquad \text{(III.28)}$$

De uma maneira análoga ao feito para o tensor de Kronecker, aqui também se faz uso das propriedades definidas do símbolo de Levi-Civita. Assim, sabendo-se que

$$\varepsilon_{\ell mn} = \begin{cases} 1 & \text{quando os valores numéricos dos índices se encontram} \\ & \text{na sequência positiva: 1, 2, 3, 1} \\ -1 & \text{quando a sequência é negativa: 3, 2, 1, 3} \\ 0 & \text{quando aparecem índices repetidos} \end{cases}$$

deseja-se saber se ε'_{ijk}, tem as mesmas propriedades no novo sistema de coordenadas. Suponha-se, por exemplo, que: $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$. Para estes valores, a relação (III.28) fica:

$$\varepsilon'_{123} \equiv M_{1\ell}\, M_{2m}\, M_{3n}\, \varepsilon_{\ell mn}$$

Nota-se que esta expressão é a representação indicial do determinante de uma matriz de 3 × 3 elementos (ver a equação (III.33) do Capítulo II). Portanto,

$$\varepsilon'_{123} = \det M$$

Para outro conjunto de valores dos índices, por exemplo $i = 1$, $j = 2$, $k = 2$, tem-se que,

$$\varepsilon'_{123} \equiv \varepsilon_{\ell mn}\, M_{1\ell}\, M_{2m}\, M_{2n} = 0$$

Este resultado é devido ao fato de que as duas últimas linhas do determinante, são iguais. Para outros conjuntos de valores tem-se:

$$\varepsilon'_{231} \equiv \varepsilon_{\ell mn}\, M_{2\ell}\, M_{3m}\, M_{1n} = \varepsilon_{n\ell m}\, M_{1n}\, M_{2\ell}\, M_{3m} \equiv \det M$$

$$\varepsilon'_{321} \equiv \varepsilon_{\ell mn}\, M_{3\ell}\, M_{2m}\, M_{1n} = -\varepsilon_{nm\ell}\, M_{1n}\, M_{2m}\, M_{3\ell} = -\det M$$

onde foram usadas as propriedades de inversão de índices em $\varepsilon_{\ell mn}$.

Pode-se ver que o símbolo de Levi-Civita satisfaria as relações de um tensor anti-simétrico, se a transformação fosse decorrente de uma *rotação própria*, ou seja, quando $\det M = 1$.

Se as rotações fossem impróprias ($\det M = -1$) os resultados anteriores, então, não corresponderiam à definição do símbolo de Levi-Civita que, por ser definição, não deveria depender de qualquer sistema cartesiano de referência.

Para que os resultados sejam os desejados, será necessário que na transformação (III.28) seja incluído o fator $\det M$, ficando, portanto,

$$\varepsilon'_{ijk} \equiv M_{i\ell}\, M_{jm}\, M_{kn}\, \varepsilon_{\ell mn} \times (\det M) \qquad \text{(III.29)}$$

Desta maneira, ter-se-ia:

$$\varepsilon'_{123} = (\det M) \times (\det M) = 1$$

$$\varepsilon'_{321} = -(\det M) \times (\det M) = -1$$

onde todas as propriedades do tensor anti-simétrico são satisfeitas. Como consequência, e de acordo com a equação (III.29), chega-se à conclusão de que o símbolo de Levi-Civita é um pseudotensor.

É interessante, ainda, saber qual o tipo de tensor que é gerado ao se fazer o produto externo de um tensor simples (por exemplo de segunda ordem) $\underset{\approx}{T}$ e um pseudotensor $\underset{\approx}{\tau}$.

$$\underset{\approx}{T}'\underset{\approx}{\tau}' \equiv T'_{ij}\ \tau'_{pq} \equiv M_{ik}\ M_{j\ell}\ T_{k\ell}\ M_{pr}\ M_{qs}\ \tau_{rs} \times (\det M)$$

$$\equiv M_{ik}\ M_{j\ell}\ M_{pr}\ M_{qs}\ T_{k\ell}\ \tau_{rs}\ (\det M)$$

Chamando-se

$$R_{k\ell rs} = T_{k\ell}\ \tau_{rs}$$

tem-se que,

$$R'_{ijpq} \equiv M_{ik}\ M_{j\ell}\ M_{pr}\ M_{qs}\ R_{k\ell rs}\ (\det M)$$

Portanto, o produto externo de um tensor simples com um pseudotensor (ou vice-versa) é um pseudotensor.

Obviamente, o produto externo de dois pseudotensores dá como resultado um tensor, sempre e quando $|\det M| = 1$.

3.2.5 - Contração de (ou Produto Interno entre) Tensores

Considere-se o produto interno (ou escalar) entre dois vetores:

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} \equiv A_i\, B_i \tag{III.30}$$

A nova grandeza, assim formada, é evidentemente um escalar. O que tem acontecido, portanto, é que da associação de dois tensores de primeira ordem, $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{B}$, mediante o produto interno entre ambos, gera-se um tensor de ordem zero.

A relação (III.30) indica que quando dois índices do tensor são tomados iguais (implicando, portanto, numa soma sobre estes índices repetidos), o tensor diminue de ordem. A operação de se fazer dois índices iguais é chamada de *contração*.

Pode-se ver também, da relação (III.30), que o produto interno entre dois tensores implica sempre numa contração. (Ao contrário do produto externo que implica em uma "construção").

Em seguida, ver-se-ão as propriedades de transformação do produto interno, assim definido,

$$A'_i\, B'_i \equiv M_{ik}\, M_{i\ell}\, A_k\, B_\ell = (\tilde{M})_{ki}\, M_{i\ell}\, A_k\, B_\ell = (M\tilde{M})_{k\ell}\, A_k\, B_\ell$$

$$\equiv \delta_{k\ell}\, A_k\, B_\ell = A_k\, B_k$$

Portanto, $A_k\, B_k$ é um tensor de ordem zero em ambos sistemas de coordenadas, ou também, o produto escalar entre vetores é uma invariante sob a transformação por rotação.

Outros exemplos de contração entre tensores foram mencionados nas relações (III.3) e (III.20). A contração não só implica numa redução na ordem do tensor, mas também e como consequência disto uma redução no número de componentes do tensor. Por exemplo, o produto externo entre o tensor T_{ij} e o V_k,

$$P_{ijk} = T_{ij}\, V_k$$

é um tensor de terceira ordem, e de $3^3 = 27$ componentes no sistema cartesiano tridimensional. Entretanto, o produto interno entre os mesmos tensores é:

$$P_i \equiv T_{ij}\, V_j$$

que é um tensor de primeira ordem com apenas 3 componentes.

É interessante também notar que a contração de um tensor de segunda ordem T_{ii}, é equivalente ao traço da matriz formada com as componentes do tensor.

Em seguida ver-se-ão algumas contrações interessantes conhecidas sob o ponto de vista do cálculo vetorial. Por exemplo, considere-se o produto vetorial:

$$\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B}|_i \equiv \varepsilon_{ijk} A_j B_k \qquad \text{(III.31)}$$

Olhando-se para o segundo membro, pode-se ver que esta operação representa o produto interno, primeiramente entre o pseudotensor ε_{ijk} e o B_k, cujo resultado dá origem a um pseudotensor de segunda ordem, e em seguida o produto interno deste resultado com o tensor A_j. Fica evidente que o resultado final é um pseudotensor de primeira ordem. Assim, conclui-se que o produto vetorial entre $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{B}$ gera um *pseudovetor*.

Da forma análoga o produto

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} \times \underset{\sim}{C} \equiv \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

representa um *pseudoescalar*.

3.2.6 - Derivadas em Tensores Cartesianos

Uma das operações muito comuns no cálculo tensorial é a diferenciação ou derivação. Conforme será demonstrado em seguida, um tensor cartesiano, ou melhor, as componentes de um tensor cartesiano podem ser sempre derivadas em relação a uma outra variável que não seja nenhuma das coordenadas, gerando-se, como consequência, um outro tensor da mesma ordem. Entretanto, quando a de rivação é feita em relação a uma das coordenadas do sistema ou a alguma variável diretamente ligada com as coordenadas, o resultado é um tensor de ordem superior ao original. Primeiro ver-se-á o que acontece com as propriedades de transformação, quando a derivada é em relação a uma variável não relacionada com as coordenadas. Por exemplo, seja ω esta variável e considere-se o tensor:

$$T'_{ij}\ (x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ \omega) \equiv M_{ik}\ M_{j\ell}\ T_{k\ell}\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ \omega)$$

$$\frac{\partial T'_{ij}}{\partial \omega} \equiv \frac{\partial}{\partial \omega}\left[M_{ik}\ M_{j\ell}\ T_{k\ell}\right] = M_{ik}\ M_{j\ell}\ \frac{\partial}{\partial \omega}\ T_{k\ell}$$

Chamando-se

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\ T_{k\ell} = Z_{k\ell}$$

tem-se,

$$Z'_{ij} \equiv M_{ik}\ M_{j\ell}\ Z_{k\ell}$$

Esta relação mostra que, independentemente das propriedades físicas da nova grandeza gerada $Z_{k\ell}$, a transformação deste novo ente é a mesma que a transformação de um tensor de segunda ordem. Portanto, a derivada de um tensor cartesiano, em relação a uma variável que não depende das coordenadas, é outro tensor da mesma ordem.

Para o caso da derivada do tensor em relação a uma das coordenadas, o caso é diferente. Seja o tensor $T'_{ij} = T'_{ij}\ (x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$. A derivada deste tensor, e de sua transformação, em relação a uma das coordenadas, é:

$$\frac{\partial}{\partial x'_m}\ T'_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial x'_m}\left[M_{ik}\ M_{j\ell}\ T_{k\ell}\right] = M_{ik}\ M_{j\ell}\ \frac{\partial}{\partial x'_m}\ T_{k\ell}$$

Note-se que a matriz de transformação, para sistemas de coordenadas cartesianas, só depende dos ângulos de rotação e, portanto, não é afetada pelas derivadas. Por outro lado

$$\frac{\partial}{\partial x'_m}\ T_{k\ell}\ (x_1,\ x_2,\ x_3) \equiv \frac{\partial\ T_{k\ell}}{\partial x_n}\ \frac{\partial x_n}{\partial x'_m}$$

Porém, as coordenadas também se transformam segundo (III.16).

$$x'_m \equiv M_{mn}\ x_n$$

Supondo-se que a matriz de transformação M, é uma matriz (não - singular) ortogonal e colocando a expressão anterior na notação matricial tem-se que,

$$\underset{\sim}{x}' = M\ \underset{\sim}{x}\ ;\quad \underset{\sim}{x} = M^{-1}\ \underset{\sim}{x}' = \tilde{M}\ \underset{\sim}{x}'$$

Voltando à notação tensorial,

$$x_n \equiv (\tilde{M})_{nm}\; x'_m = M_{mn}\; x'_m$$

tem-se que:

$$\frac{\partial x_n}{\partial x'_m} = M_{mn}$$

Note-se que não existe mais a soma sobre o índice m, desde que não se tem índices repetidos. Finalmente, a derivada do tensor fica:

$$\frac{\partial}{\partial x'_m}\, T'_{ij} \equiv M_{ik}\, M_{j\ell}\, M_{mn}\, \frac{\partial}{\partial x_n}\, T_{k\ell} \qquad \text{(III.32)}$$

Nesta expressão, nota-se a presença de 3 fatores de transformação, que, segundo a equação (III.25), corresponde à transformação de um tensor de terceira ordem. Logo, a derivada de um tensor cartesiano em relação às coordenadas é um outro tensor, porém, de ordem acrescida em uma unidade. É importante notar que esta derivada, no sistema cartesiano tridimensional, corresponde ao gradiente, uma vez que a derivada é feita em relação a todas as coordenadas.

Observe-se que se estas derivadas são diferentes de zero, significa que existe uma variação do valor do tensor para pontos no es paço. Ou também pode-se dizer que, para cada ponto do espaço, existe um valor definido do tensor. Esta situação, em analogia com as definições de campo escalar e vetorial, é conhecida como *campo tensorial* e o estudo deste é chamado de *cálculo tensorial*.

3.2.7 - Transformação mais Geral de Coordenadas

As transformações que foram vistas referem-se, especificamente, às transformações por rotação do tipo (III.15). Para campos tensoriais, em geral, quando se fala de componentes do tensor, o que realmente interessa são as componentes associadas às direções dos vetores base do sistema. Assim, por exemplo, um vetor $\underset{\sim}{V}$ no ponto $\underset{\sim}{x}$ do espaço pode ser expresso mediante suas componentes

$$\underset{\sim}{V}\ (\underset{\sim}{x}) \equiv V_i\ (\underset{\sim}{x})\ \underset{\sim}{\hat{e}}_i$$

Fica evidente que, para um campo vetorial não interessa onde se encontra a origem do sistema de coordenadas e, portanto, para a transformação das suas componentes é necessária apenas a matriz M de transformação. De uma maneira similar, para campos tensoriais em geral, a transformação das componentes de um tensor é feita apenas com o conhecimento de M.

No entanto, se a transformação envolve não apenas rotações, mas também uma *translação* da origem do sistema, ela afeta apenas o vetor de posição $\underset{\sim}{x}$, e não as outras grandezas do espaço. Neste caso, as coordenadas de um ponto no espaço se transformam segundo:

$$\underset{\sim}{x}' = M\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{a} \qquad \text{ou} \qquad x_i' \equiv M_{ij}\, x_j + a_i \tag{III.33}$$

onde $\underset{\sim}{a}$ é o vetor coluna "translação", cujos componentes são as coordenadas da origem do novo sistema.

Entretanto, se $\underset{\sim}{x}$ não e o vetor de posição, porém, por exemplo, a diferença entre dois vetores de posição

$$\Delta\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}_1 - \underset{\sim}{x}_2$$

então, sua transformação também não depende do vetor translação, conforme pode-se ver a seguir

$$\Delta\underset{\sim}{x}' = \underset{\sim}{x}_1' - \underset{\sim}{x}_2' = M\underset{\sim}{x}_1 + \underset{\sim}{a} - M\underset{\sim}{x}_2 - \underset{\sim}{a} = M(\underset{\sim}{x}_1 - \underset{\sim}{x}_2)$$

de onde se tem que

$$\Delta x' = M\,\Delta\,\underset{\sim}{x}$$

Logo, inclusive para este caso, o vetor translação não entra na transformação. Desta maneira, conclui-se que a relação de transformação (mais geral), indicada na equação (III.33), é aplicável só a vetores de posição.

3.3 - TENSORES CARTESIANOS OBLÍQUOS

3.3.1 - Vetores Covariantes e Contravariante

Os tensores referenciados a coordenadas oblíquas fixas são conhecidos como tensores cartesianos obliquos.

A interpretação geométrica das componentes de um tensor de primeira ordem, foi mostrada na Figura III.1, onde se fez a distinção entre componentes contravariantes e covariantes. Assim, o vetor $\underset{\sim}{V}$ pode ser representado pelas suas componentes contravariantes V^{i}, obtidas a partir da lei do paralelogramo, ou pelas suas componentes covariantes V_{i}, obtidas diretamente da projeção do vetor $\underset{\sim}{V}$ sobre os vetores base do sistema. Ressalta-se, porém, que o vetor $\underset{\sim}{V}$, para ambos os casos, é o mesmo. Desta maneira, o vetor $\underset{\sim}{V}$ pode ser representado alternativamente por um vetor coluna de elementos contravariantes, ou outro de componentes covariantes. Portanto, existirão dois tipos de vetores coluna, o $\underset{\sim}{V}^{\text{con}}$ e o $\underset{\sim}{V}_{\text{cov}}$, que representam o mesmo vetor $\underset{\sim}{V}$.

$$\underset{\sim}{V}^{\text{con}} = \begin{Bmatrix} V^1 \\ V^2 \\ \vdots \\ V^i \\ \vdots \\ V^n \end{Bmatrix} \qquad \underset{\sim}{V}_{\text{cov}} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_n \end{Bmatrix} \tag{III.34}$$

Evidentemente, se o sistema de coordenadas é o cartesiano ortogonal, os dois vetores coluna serão idênticos, recobrando-se a conhecida representação única.

3.3.2 - Tensor Fundamental

Comumente, os vetores base do sistema de coordenadas são escolhidos de maneira que $|\underset{\sim}{e}_i| = 1$. Todavia, para o caso de coordenadas oblíquas, tem-se que $\hat{\underset{\sim}{e}}_1 \cdot \hat{\underset{\sim}{e}}_2 = \cos\alpha$, onde α é o ângulo entre os vetores base $\hat{\underset{\sim}{e}}_1$ e $\hat{\underset{\sim}{e}}_2$. Entretanto, em vez de designar pelo co-seno do ângulo, o produto interno entre dois vetores, pode-se adotar uma representação mais geral como a que se segue:

$$\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j = g_{ij} \qquad \text{(III.35)}$$

onde $|\hat{\underset{\sim}{e}}_i|^2 = g_{ii}$ (aqui os índices repetidos, não implicam em soma) é uma grandeza que, em geral, é diferente da unidade.

O conjunto de grandezas g_{ij} é chamado de *tensor fundamental*, ou, também, de *tensor métrico*. Fica evidente a necessidade de um esclarecimento quanto à natureza desta grandeza e, em especial, de uma justificação para defini-lo como um tensor. Na realidade, não se dispõe, nestas alturas, de argumentos que justifiquem a denominação de tensor para a grandeza g_{ij}. Contudo, e apenas devido ao fato desta grandeza possuir dois índices, pode-se adiantar que é um tensor de segunda ordem.

De fato, conforme será provado mais tarde, na subseção 3.4.3, esta grandeza é um tensor covariante de segunda ordem.

Observa-se também, na definição (III.35), que os elementos g_{ij} formam um conjunto que podem convenientemente ser arranjados em forma de matriz, e que esta matriz, assim formada, é uma matriz simétrica. De fato, o tensor fundamental é um tensor simétrico, cuja propriedade de simetria será provada de uma forma geral, na subseção 3.4.5.

3.3.3 - Tensores Covariantes e Contravariantes

Voltando ao conceito de vetores base, nota-se que uma mudança de coordenadas traz, como consequência, uma mudança não apenas nas direções dos vetores base, mas também na escala do novo sistema. A Figura III.4 esquematiza uma mudança de coordenadas, em duas dimensões, entre os sistemas S e $\bar{S}$, onde

$$\bar{\underset{\sim}{e}}_1 = N_{11}\ \underset{\sim}{e}_1 + N_{12}\ \underset{\sim}{e}_2$$

$$\bar{\underset{\sim}{e}}_2 = N_{21}\ \underset{\sim}{e}_1 + N_{22}\ \underset{\sim}{e}_2 .$$

De uma maneira geral, tem-se que:

$$\bar{\underset{\sim}{e}}_i \equiv N_{ij}\ \underset{\sim}{e}_j \qquad \text{(III.36)}$$

onde N_{ij} é a matriz de transformação.

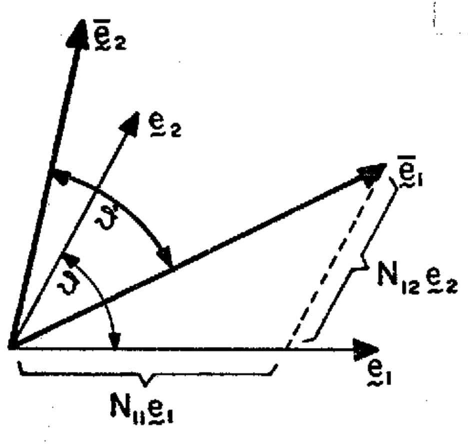

Fig. III.4 - Mudança de vetores base em coordenadas oblíquas.

A transformação das componentes covariantes V_i do vetor $\underset{\sim}{V}$, do sistema de vetores $\underset{\sim}{e}_i$ ao $\bar{\underset{\sim}{e}}_j$, pode agora ser obtida da seguinte maneira. Segundo a equação (III.7),

$$\bar{V}_i = \underset{\sim}{V} \cdot \bar{\underset{\sim}{e}}_i \equiv N_{ij}\, \underset{\sim}{V} \cdot \underset{\sim}{e}_j$$

de onde,

$$\bar{V}_i \equiv N_{ij}\, V_j \qquad \text{(III.37)}$$

O interessante desta transformação é que esta obedece à mesma lei de transformação que a dos vetores base, indicada na relação (III.36). Esta é a razão pela qual as componentes V_i são chamadas de componentes *covariantes* do vetor $\underset{\sim}{V}$.

A relação (III.36), escrita na notação matricial, fica:

$$\bar{\underset{\sim}{e}} = N \underset{\sim}{e}$$

Assim, supondo-se que N é uma matriz não-singular, tem-se

$$\underset{\sim}{e} = N^{-1} \bar{\underset{\sim}{e}}$$

ou, na notação indicial:

$$\underset{\sim}{e}_i \equiv (N^{-1})_{ij} \bar{\underset{\sim}{e}}_j \qquad \text{(III.38)}$$

Esta é a relação da transformação inversa entre os vetores base. Substituindo-se esta relação na equação (III.6), vem

$$\underset{\sim}{V} \equiv V^i \underset{\sim}{e}_i \equiv V^i (N^{-1})_{ij} \bar{\underset{\sim}{e}}_j = \widetilde{(N^{-1})}_{ji} V^i \bar{\underset{\sim}{e}}_j$$

Chamando-se

$$\bar{V}^j \equiv \widetilde{(N^{-1})}_{ji} V^i \qquad \text{(III.39)}$$

tem-se que,

$$V^i \underset{\sim}{e}_i \equiv \bar{V}^j \bar{\underset{\sim}{e}}_j$$

ou seja, o vetor $\underset{\sim}{V}$ pode ser expresso, mediante a mesma representação, tanto no sistema S como no $\bar{S}$.

A expressão (III.39) é a relação de transformação das componentes contravariantes do vetor $\underset{\sim}{V}$. A denominação de *contravariante* fica evidente devido à matriz de transformação (que é inversa da matriz de transformação covariante).

Em suma, pode-se dizer que os vetores coluna $\underset{\sim}{V}^{con}$ e $\underset{\sim}{V}_{cov}$, ou simplesmente V^{i} e V_{i} respectivamente, são definições mais gerais de "vetores" e que, mediante a análise anterior, auto justificam-se as denominações de componentes contravariantes e covariantes de um mesmo vetor, respectivamente. As entidades que se transformam segundo as relações (III.37) e (III.39) são chamadas de *tensores covariante e contravariante de primeira ordem*, respectivamente.

Analogamente, entidades que se transformam segundo:

$$\bar{T}_{ij} \equiv N_{ik}\, N_{j\ell}\, T_{k\ell} \tag{III.40}$$

$$\bar{T}^{ij} \equiv (\widetilde{N^{-1}})_{ik}\, (\widetilde{N^{-1}})_{j\ell}\, T^{k\ell} \tag{III.41}$$

são chamadas de *tensores covariante e contravariante de segunda ordem*, respectivamente. O resultado do produto externo de um vetor covariante e outro contravariante, dá origem a um tensor mixto de segunda ordem. Logo, toda entidade que se transforma segundo,

$$\bar{T}^{i}_{j} \equiv (\widetilde{N^{-1}})_{ik}\, N_{j\ell}\, T^{k}_{\ell} \tag{III.42}$$

é chamada de *tensor misto de segunda ordem*. Naturalmente, este tipo de tensor não existe em sistemas cartesianos ortogonais.

3.3.4 - Tensor Recíproco

O produto interno do vetor de posição $\underset{\sim}{x} \equiv x^i \underset{\sim}{e}_i$ com um dos vetores base $\underset{\sim}{e}_j$ do sistema evidentemente é: $\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{e}_j = x_j$. Assim:

$$x_j \equiv \underset{\sim}{e}_j \cdot (x^i \underset{\sim}{e}_i) = \underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{e}_i \, x^i = g_{ji} \, x^i \qquad \text{(III.43)}$$

Neste caso, o tensor fundamental atua como se fosse um operador que converte uma componente contravariante numa componente covariante. Em outras palavras, o tensor g_{ji} tem a propriedade de "abaixar" o índice do tensor sobre o qual atua. Ao mesmo tempo, este procedimento consiste na contração de um tensor mixto de terceira ordem (dois índices covariantes e um contravariante).

Em correspondência à operação de abaixar um índice contravariante, existe a operação inversa de "levantar" o índice, podendo ser feita da seguinte maneira. Multiplicando-se a equação (III.43) pela matriz inversa de g (formada com os elementos de g_{ij}), ou seja g^{-1}, e definindo-se

$$(g^{-1})_{ij} = g^{ij}$$

tem-se:

$$g^{kj}\, x_j \equiv g^{kj}\, g_{ji}\, x^i$$

Porém, por definição:

$$g^{kj}\, g_{ji} \equiv g^{-1}\, g = I$$

logo,

$$x^i \equiv g^{ij}\, x_j \qquad \text{(III.44)}$$

O tensor g^{ij}, que é um tensor contravariante, conforme será demonstrado mais tarde, é às vezes chamado de *tensor recíproco* do fundamental. Uma outra maneira de se referir aos tensores g_{ij} e g^{ij} é chamá-los de componentes covariantes e contravariantes do tensor $\underset{\approx}{g}$. Observe-se que:

$$g_{ij}\, g^{jk} \equiv g\, g^{-1} = I = \delta_i^k \qquad \text{(III.45)}$$

Esta relação dá uma nova definição do delta de Kronecker em coordenadas oblíquas. O delta de Kronecker pode ser considerado como um tensor mixto de segunda ordem que resulta da contração entre as componentes covariante e contravariante do tensor fundamental. A demonstração de que δ_i^k é efetivamente um tensor mixto será feita de uma maneira geral na seção seguinte.

Note-se que sendo o tensor fundamental g_{ij}, uma grandeza simétrica em relação aos seus índices, o tensor recíproco g^{ij} também será simétrico em relação aos mesmos índices.

3.3.5 - Vetores Base Covariantes e Contravariantes

Os vetores base, que têm sido de uso comum no material visto até aqui, são vetores covariantes, devido a sua característica de transformação indicada na relação (III.36).

Define-se um vetor base contravariante $\underset{\sim}{e}^i$ mediante o seguinte produto escalar:

$$\underset{\sim}{e}^i \cdot \underset{\sim}{e}_j = \delta^i_j \tag{III.46}$$

Esta definição tem implicações muito interessantes. Por exemplo

$$\underset{\sim}{e}^i \cdot \underset{\sim}{e}_j = 0 \qquad\qquad \text{se } i \neq j$$

ou seja, os vetores $\underset{\sim}{e}_i$ são ortogonais aos $\underset{\sim}{e}_j$. Por outro lado,

$$\underset{\sim}{e}^i \cdot \underset{\sim}{e}_i = |\underset{\sim}{e}^i|\ |\underset{\sim}{e}_i| \cos\,(\underset{\sim}{e}^i, \underset{\sim}{e}_i) = 1$$

É interessante notar que a relação entre os vetores base covariantes e contravariantes é similar à relação entre os vetores do espaço primitivo e os do dual nos espaços vetoriais lineares estudados no Capítulo II. Nesta comparação, os vetores base contravariantes representariam o papel de um espaço dual.

A existência dos vetores base contravariantes traz como consequência uma representação alternativa de um vetor em função das suas componentes covariantes. Lembrando-se a representação (III.3) para um vetor, e fazendo-se uso da propriedade do tensor recíproco de levantar os índices covariantes, tem-se que:

$$\underset{\sim}{V} \equiv V^{i} \underset{\sim}{e}_{i} \equiv g^{ij} V_{j} \underset{\sim}{e}_{i}$$

Dada a simetria do tensor recíproco, tem-se ainda que

$$g^{ij} \underset{\sim}{e}_{i} = g^{ji} \underset{\sim}{e}_{i} = \underset{\sim}{e}^{j}$$

logo

$$\underset{\sim}{V} \equiv V_{i} \underset{\sim}{e}^{i} \qquad \text{(III.47)}$$

O interessante das relações (III.6) e (III.47) é que ambas representam uma adição vetorial das suas componentes, contravariantes e covariantes respectivamente, de acordo com a lei do paralelogramo.

3.4 - TENSORES GENERALIZADOS

Nesta seção, ver-se-á a transformação das componentes de um tensor, referenciada a um sistema de coordenadas arbitrário (onde, inclusive, a orientação dos vetores base do sistema varia para cada ponto do espaço), chamado também de curvilíneo generalizado a um outro sistema igualmente arbitrário. Naturalmente, nesta análise, encontram-se incluídos os tensores cartesianos ortogonais e oblíquos, estudados nas seções 3.2 e 3.3, e que chegam a ser simples casos particulares do que se segue.

Exemplos de sistemas de coordenadas, cujas orientações mudam para cada ponto do espaço, são as coordenadas curvilíneas ortogonais, entre os quais tem-se as esférico-polares e cilíndrico-circulares, estudados na seção 1.10 do Capítulo I. Por exemplo, no sistema esférico-polar, mostrado na Figura III.5, para um ponto $\underset{\sim}{x}$ no sistema de coordenadas r, θ e ϕ, os vetores base neste ponto são $\hat{\underset{\sim}{r}}$, $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$ e $\hat{\underset{\sim}{\phi}}$. As componentes do versor $\hat{\underset{\sim}{r}}$, em função do sistema fixo $\hat{\underset{\sim}{x}}$, $\hat{\underset{\sim}{y}}$ e $\hat{\underset{\sim}{z}}$, são:

$$\hat{\underset{\sim}{r}} = \operatorname{sen}\theta \cos\phi \, \hat{\underset{\sim}{x}} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \, \hat{\underset{\sim}{y}} + \cos\theta \, \hat{\underset{\sim}{z}}$$

Fica evidente que esta direção é diferente para cada ponto do espaço. Naturalmente, os outros vetores base também mudam de direção.

Se no exemplo da Figura III.5, se quisesse mudar do sistema esférico-polar para o cartesiano, ter-se-ia que se usar as relações seguintes:

$$x = r \text{ sen } \theta \cos \phi = x(r, \theta, \phi)$$

$$y = r \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi = y(r, \theta, \phi)$$

$$z = r \cos \theta \qquad = z(r, \theta, \phi)$$

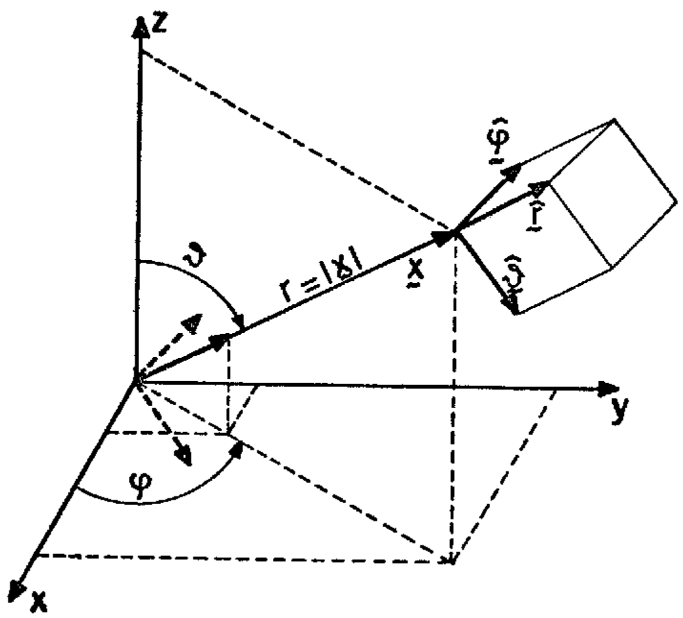

Fig.III.5 - Sistema esférico-polar como um exemplo de sistema de coordenadas, onde as direções dos vetores base mudam para cada ponto do espaço.

Note-se que, neste caso, as relações de transformação não são mais lineares, como foi o caso das transformações cartesianas. De uma maneira geral, e chamando-se de x^i às coordenadas de um sistema S, e $\bar{x}^i$ às do sistema $\bar{S}$, as relações de transformação, agora, podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\bar{x}^{i} = \bar{x}^{i}\,(x^1,\ x^2,\ \ldots\ x^j\ \ldots\ x^n) \qquad \text{(III.48)}$$

3.4.1 - Vetor Contravariante e Covariante

O vetor elementar $d\,\underset{\sim}{\ell}$ que une o ponto representado pelo vetor de posição $\underset{\sim}{x}$, com outro muito próximo dele é $d\,\underset{\sim}{\ell} \equiv d\,x^i\,\underset{\sim}{e}_i$. Mais simplesmente, este vetor elementar pode ser representado apenas por uma de suas componentes $d\,x^i$. Analogamente, no sistema $\bar{S}$, o vetor elementar é representado por $d\,\bar{x}^i$. Estas últimas componentes são obtidas diferenciando-se diretamente a relação (III.48):

$$d\bar{x}^i \equiv \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\,dx^j \qquad \text{(III.49)}$$

Esta última expressão define a transformação de vetores contravariantes. Assim, toda grandeza que se transforme segundo:

$$\bar{V}^i \equiv \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\,V^j \qquad \text{(III.50)}$$

é chamada de *vetor contravariante*. Note-se, nesta transformação, que as derivadas parciais são feitas nas coordenadas do sistema "com barra" (numerador), em relação às coordenadas do sistema "sem barra" (denominador).

A equação (III.50) é uma generalização das transformações (III.9) e (III.39) dos tensores cartesianos ortogonais e oblíquos, respecti vamente. Pode-se ver que as grandezas $\frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{j}}$, são equivalentes aos elementos das matrizes de transformação correspondentes. De fato, e chamando-se $N_{ji} = \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{j}}$, vê-se que, com estes elementos, pode-se construir uma matriz de transformação.

Em seguida, encontrar-se-á a relação de transformação de um vetor covariante. Para isto, considere-se a função escalar Φ (x^1, x^2, ... x^{i} ... x^{N}) que, por ser uma grandeza escalar, é invariante em relação a transformações de coordenadas. Entretanto, o conjunto formado com as derivadas $\frac{\partial \Phi}{\partial x^{i}}$, é um vetor (grandeza com um índice) que "mede" o grau da variação de Φ nesse sistema de coordenadas. Este vetor, escrito no sistema $\bar{S}$, é dado por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \equiv \frac{\partial x^{j}}{\partial \bar{x}^{i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{j}} \qquad \text{(III.51)}$$

Esta expressão define a transformação de um vetor covariante. Toda grandeza que se transforme segundo:

$$\bar{V}_{i} \equiv \frac{\partial x^{j}}{\partial \bar{x}^{i}} V_{j} \qquad \text{(III.52)}$$

é chamada de *vetor covariante*. Observe-se que nesta transformação, as derivadas parciais são feitas nas coordenadas do sistema "sem barra" (numerador), em relação às coordenadas do sistema "com barra" (denominador).

Para facilitar a memorização das relações de transformação dos vetores contravariante e covariante, é interessante notar que a posição do índice (se superior - contravariante - ou inferior - covariante), da grandeza que se encontra no primeiro membro, indica a posição, (numerador ou denominador respectivamente), da sua coordenada nos coeficientes da transformação.

EXEMPLO 3.4

Suponha-se que em coordenadas polares (r, θ) se faz a seguinte troca de variável: $\lambda = \ell n\ r$, de maneira que as novas coordenadas das "polares" agora sejam r e θ. É interessante saber como é que se transformam, a este novo sistema, as componentes contravariantes V^i do vetor $\underset{\sim}{V}$, expressas no sistema cartesiano (x, y).

As relações de transformação segundo a equação (III.50), são:

$$V^{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} V^x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} V^y$$

$$V^{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial x} V^x + \frac{\partial \theta}{\partial y} V^y$$

Fica evidente que o problema consiste em encontrar os valores das derivadas parciais. Não se deve esquecer que as relações de transformação das coordenadas polares às cartesianas, são:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \text{ sen } \theta$$

ou, alternativamente,

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{tg } \theta = \frac{y}{x}$$

Assim, então,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} \frac{\partial r}{\partial x}$$

Porém,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

logo, segue que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}$$

Todavia,

$$r = e^{\lambda}$$

de onde se tem:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = e^{-\lambda} \cos \theta$$

Analogamente,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = e^{-\lambda} \operatorname{sen} \theta$$

Finalmente:

$$V^{\lambda} = e^{-\lambda} (\cos \theta \, V^{x} + \operatorname{sen} \theta \, V^{y})$$

De uma maneira similar, encontra-se que,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -e^{-\lambda} \operatorname{sen} \theta \quad : \frac{\partial \theta}{\partial y} = e^{-\lambda} \cos \theta$$

de onde:

$$V^{\theta} = e^{-\lambda} (-\operatorname{sen} \theta \, V^{x} + \cos \theta \, V^{y})$$

Pode-se verificar, também, que a transformação inversa é:

$$V^x = xV^\lambda - yV^\theta \qquad \text{e} \qquad V^y = yV^\lambda + xV^\theta$$

O problema de se encontrar as transformações covariantes é deixado para o leitor.

3.4.2 - O Jacobiano da Transformação

No último exemplo, a transformação inversa (deixada como exercício) pode ser encontrada aplicando-se diretamente as relações de transformação, ou, também, resolvendo-se o sistema de duas equações obtido da primeira transformação. Entretanto, surge sempre a pergunta: sob que condições existe uma transformação inversa? Ou melhor ainda, quando é possível a transformação de um sistema da coordenadas a um outro, e vice-versa? Em seguida, encontrar-se-á uma relação matemática que responde a este tipo de perguntas.

Considere-se a relação de transformação (III.52) na sua forma matricial. Para isto, é necessário notar que o primeiro índice de cada elemento da matriz tem que corresponder ao índice do operador $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$, por razões óbvias. Assim, chamando-se

$$Q_{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$$

a relação (III.52) pode ser escrita na da forma

$$\underset{\sim}{\bar{V}}_{cov} = Q \; \underset{\sim}{V}_{cov} \tag{III.53}$$

onde os vetores coluna são formados com as componentes covariantes, e onde

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^1} \\ \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^n} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^n} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^n} \end{pmatrix}$$

A transformação inversa é obtida multiplicando-se a equação (III.53) por Q^{-1}, na suposição de que este inverso exista,

$$\underset{\sim}{\bar{V}}_{cov} = Q^{-1} \; \underset{\sim}{V}_{cov} \tag{III.54}$$

Fica evidente que a transformação inversa existe, apenas quando Q é uma matriz não singular. Lembra-se (Capítulo II) que esta condição é satisfeita quando: det $Q \neq 0$.

O determinante da matriz Q é uma grandeza de muita significância e será designado por:

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right| = \det Q = \det \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \right)$$

Assim,

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^n} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^n} & \cdots\cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^n} \end{vmatrix} \qquad \text{(III.55)}$$

Este determinante recebe o nome de *Jacobiano da transformação*, cuja existência (diferente de zero) garante a existência da transformação de um sistema para outro, e vice-versa.

Embora tenha sida usada a relação de transformação dos vetores covariantes para se chegar ã expressão do Jacobiano, pode-se demonstrar que uma expressão equivalente ẽ obtida se se fizer uso da relação de transformação dos vetores contravariantes.

Outras representações do Jacobiano comumente encontradas na literatura correspondente são:

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right| = J \left(\frac{x}{\bar{x}} \right) = \frac{\partial \, (x^1,\ x^2,\ \ldots\ x^n)}{\partial \, (\bar{x}^1,\ \bar{x}^2,\ \ldots\ \bar{x}^n)}$$

Lembra-se que o Jacobiano jã tinha sida mencionado no Capĩtulo I, porẽm, sob um ponto de vista diferente, embora, na opor tunidade, fora adiantado que se tratava do "acoplamento" entre dois sistemas de coordenadas.

3.4.3 - Tensores de Ordem Superior

De uma maneira similar ao caso dos tensores cartesianos oblíquos, o produto externo entre dois vetores contravariante origina, também, um tensor contravariante de segunda ordem. Assim,

$$\bar{A}^i \, \bar{B}^j \equiv \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\ell} \, A^k \, B^\ell$$

Chamando-se, como antes,

$$T^{ij} = A^i \, B^j$$

tem-se:

$$\bar{T}^{ij} \equiv \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\ell} \, T^{k\ell} \qquad \text{(III.56)}$$

Toda grandeza, cuja transformação segue a relação (III.56), é chamada de *tensor contravariante de segunda ordem*. De uma maneira similar, são definidos os tensores seguintes:

$$\bar{T}_{ij} \equiv \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \, \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \, T_{k\ell} = \textit{Tensor covariante de segunda ordem} \qquad \text{(III.57)}$$

$$\bar{T}^{i}_{j} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{\ell}}{\partial \bar{x}^{j}} T^{k}_{\ell} = \textit{Tensor misto de segunda ordem} \qquad \text{(III.58)}$$

EXEMPLO 3.5

Neste exemplo, investiga-se natureza do delta de kronecker, sob o ponto de vista de coordenadas generalizadas. Deve-se lembrar que, de uma maneira mais ou menos intuitiva, foi inferido que este símbolo era um tensor misto conforme a relação (III.45).

Para se saber se o delta de Kronecker é, de fato um tensor misto, é necessário submetê-lo à transformação de um tensor misto e ver se, depois da transformação, esta grandeza continua a satisfazer as propriedades definidas. Assim,

$$\bar{\delta}^{i}_{j} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{\ell}}{\partial \bar{x}^{j}} \delta^{k}_{\ell}$$

Aplicando-se, nesta expressão, as propriedades do símbolo de Kronecker no sistema sem barra, tem-se

$$\bar{\delta}^{i}_{j} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{j}} = \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial \bar{x}^{j}}$$

O último termo é 1 se $i = j$ (ou seja, para um valor numérico de i, $\frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial \bar{x}^{i}} = 1$) ou é zero se $i \neq j$, uma vez que as coordenadas, no mesmo sistema, são variáveis independentes entre si. Logo, a relação de transformação torna-se uma identidade, de onde se conclui que o delta de Kronecker obedece à transformação

$$\bar{\delta}^{i}_{j} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{\ell}}{\partial \bar{x}^{j}} \delta^{k}_{\ell} \tag{III.59}$$

Esta relação mostra que os elementos δ^{i}_{j} são as componentes de um tensor misto.

Convida-se o leitor a provar que o delta de Kronecker não satisfaz as transformações de um tensor contravariante nem as de um covariante.

3.4.4 - Contração

A propriedade de *contração*, de uma maneira semelhante aos tensores nos sistemas cartesiano ortogonal e oblíquo, implica na redução da ordem do tensor. Aqui, também, a contração é feita igualando-se dois índices. Porém, e aqui está a grande diferença, os índices envolvidos *têm* que ser um índice covariante e um contravariante, ou vice-versa. A contração não pode ser feita com índices do mesmo "nível" conforme será visto a seguir.

Seja o tensor $T^{ij}\ V_j$ uma vez que o índice é repetido, este é "mudo", ficando, então, o índice contravariante i como representativo do tensor. Chamando-se

$$A^i \equiv T^{ij}\ V_j$$

tem-se que a transformação desta grandeza, é:

$$\bar{A}^i \equiv \bar{T}^{ij}\ \bar{V}_j \equiv \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\ \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\ell}\ T^{k\ell}\ \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\ V_m = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\ \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\ \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\ell}\ T^{k\ell}\ V_m$$

Porém,

$$\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\ \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\ell} = \frac{\partial x^m}{\partial x^\ell} = \delta^m_\ell$$

Portanto,

$$\bar{A}^i \equiv \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\ T^{km}\ V_m = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\ A^k \qquad \text{(III.60)}$$

Esta transformação corresponde a um vetor contravariante. Logo a grandeza $T^{ij}\ V_j$ (originalmente um tensor de terceira ordem, contravariante nos índices ij e covariantes no outro índice j) é um vetor contravariante.

Suponha-se que se queira saber se a grandeza $T^{ij}\, V^{j}$ (índices contravariantes iguais) é um tensor. Para elucidar isto, primeiro supõe-se que esta grandeza, de fato, seja um tensor, aplicando-se, portanto, a transformação de um tensor

$$\bar{T}^{ij}\, \bar{V}^{j} = \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{\ell}} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{m}}\, T^{k\ell}\, V^{m}$$

Pode-se ver que a transformação desta grandeza não leva a uma contração e, devido à soma sobre os índices repetidos j, nem sequer é a transformação de um tensor. Isto prova que a contração de um tensor só tem lugar quando os índices iguais ficam em níveis diferentes.

Às vezes é necessário explicitar que um determinado tensor é o resultado de uma contração. Assim, por exemplo, na equação (III.60), o tensor contravariante A^{i} é o resultado da contração dos tensores T^{km} e V_{m}. Para que isto seja assim entendido, a relação (III.60) pode ser escrita na forma:

$$\bar{A}^{ij}_{j} = \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{k}}\, A^{km}_{m} \qquad \text{(III.61)}$$

3.4.5 - Tensores Fundamental e Recíproco

Na seção dos tensores cartesianos oblíquos, o tensor fundamental foi definido mediante a relação (III.35)

$$g_{ij} = \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j \ ,$$

onde os $\underset{\sim}{e}_i$ são vetores base (ou direções) do sistema cartesiano oblíquo. Neste sistema, a magnitude (ou módulo) de um vetor elementar $d\underset{\sim}{l}$, no espaço das coordenadas, é dada por:

$$(dl) = (d\underset{\sim}{l}) \ . \ (d\underset{\sim}{l}) \equiv (dx^i \ \underset{\sim}{e}_i) \ . \ (dx^j \ \underset{\sim}{e}_j) = g_{ij} \ dx^i \ dx^i$$

O tensor fundamental g_{ij} (ou melhor, as suas componentes), que para o caso das coordenadas oblíquas são quantidades constantes, em tensores generalizados, são diferentes para cada ponto do espaço. A seguir, demonstrar-se-á que estas grandezas são componentes de um tensor covariante e não apenas de uma matriz, conforme fora mencionado na seção 3.3.

Sabendo-se que $(dl)^2$ é uma invariante para qualquer sistema de coordenadas tem-se que,

$$(dl)^2 \equiv \bar{g}_{ij} \ d\bar{x}^i \ d\bar{x}^j \equiv g_{k\ell} \ dx^k \ dx^\ell \qquad \text{(III.62)}$$

O primeiro membro:

$$\bar{g}_{ij} \ d\bar{x}^i \ d\bar{x}^j \equiv \bar{g}_{ij} \ \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \ \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\ell} \ dx^k \ dx^\ell$$

Comparando-se o segundo membro desta última expressão com o segundo membro da equação (III.62), tem-se

$$g_{k\ell} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{k}} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{\ell}} \bar{g}_{ij} \qquad \text{(III.63)}$$

Esta transformação corresponde a um tensor covariante de segunda ordem do sistema $\bar{S}$ ao sistema S. Portanto, conforme foi adiantado, conclui-se que *o tensor fundamental é um tensor covariante.*

Neste ponto fica interessante encontrar uma interpretação geométrica para o que significa o tensor fundamental. Para isto, suponha-se um espaço bidimensional "curvo", tal como o de uma superfície esférica de raio R. Usando-se as coordenadas esférico-polares, pode-se demonstrar que o elemento de comprimento, neste espaço, é dado por:

$$(dl)^2 = R^2(d\theta)^2 + R^2 \text{ sen } \theta \ (d\phi)^2$$

Para este caso, tem-se que:

$$g_{11} = R^2; \ g_{22} = R^2 \text{ sen}^2\theta \text{ e } g_{12} = g_{21} = 0$$

O importante, nestas relações, é que as componentes do tensor fundamental exprimem as características geométricas do espaço. Note-se que a matriz g, formada com os elementos do tensor fundamental, é uma matriz diagonal, para este caso em particular. Em geral, quando o elemento de comprimento é obtido mediante a relação:

$$(dl)^2 \equiv g_{ii} \, (dx^i)^2 \qquad \text{(III.64)}$$

o espaço de coordenadas é um *espaço Euclidiano* de vetores base ortogonais entre si. Em geral, um espaço Euclidiano pode estar referido a um sistema de coordenadas oblíquas tendo-se, portando, o tensor g_{ij} não diagonal. Evidentemente, existe a necessidade de se ter um critério para se estabelecer quando um espaço é Euclidiano. Este critério existe e será mencionado depois na seção da lei gravitacional de Einstein.

Os espaços, cujo comprimento diferencial é dado pela equação (III.62), (referenciado a sistemas não-cartesianos), onde a matriz, formada com os elementos do tensor g_{ij}, não é diagonal e det $g \neq 0$, são chamados de *espaços Riemanianos*, ou também, espaços curvos. Aplicações dos espaços Riemanianos serão vistos no final deste Capítulo. Entretanto, pode-se adiantar que não é muito fácil imaginar um espaço Riemaniano, mesmo porque não existe nada parecido neste mundo Euclidiano. Por exemplo, no caso do espaço bidimensional "curvo", o que, ao final, ficou estabelecido é que este espaço corresponde a um Euclidiano. Isto porque o espaço bidimensional, assim definido, corresponde a um Euclidiano tridimensional.

Agora, volta-se ao estudo do tensor fundamental. Uma propriedade deste tensor é obtida da equação (III.62), observando-se que os índices mudos podem ser convenientemente trocados de maneira a se ter:

$$(dl) \equiv g_{ij} \, dx^j \, dx^i = g_{ji} \, dx^i \, dx^j$$

Comparando-se esta expressão com a (III.62), conclui-se que

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{III.65}$$

Isto é, *o tensor fundamental é um tensor simétrico.* Esta conclusão é trivial em coordenadas oblíquas, uma vez que o tensor fundamental, neste caso, é definido apenas como o produto escalar entre os vetores base do sistema de coordenadas, conforme indicada na equação (III.35).

A seguir, ver-se-ão as características do *tensor recíproco*. Para isto, lembra-se que os elementos do tensor recíproco, ou melhor as componentes do inverso da matriz g, foram definidas mediante a equação (III.45).

$$g\, g^{-1} = g^{-1}\, g = I$$

onde, de uma maneira arbitrária, os elementos de g^{-1} foram chamados de componentes do tensor contravariante de segunda ordem. Em seguida esta denominação será justificada.

Chamando $(g^{-1})_{ij} = g^{ji}$ aos elementos da matriz g^{-1}, e de acordo com a relação (III.45), tem-se que

$$g^{ij}\, g_{jk} \equiv \delta^{i}_{k}$$

O que se conhece, nesta expressão, é que g_{ik} é um tensor covariante de segunda ordem, o segundo membro da equação é um delta de Kronecker, e este símbolo, em coordenadas generalizadas, é um tensor misto. Escrevendo-se a equação anterior no sistema $\bar{S}$, e efetuando-se a transformação do tensor misto no segundo membro, tem-se:

$$\bar{g}^{ij}\,\bar{g}_{jk} \equiv \bar{\delta}^{i}_{k} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{\ell}}\,\frac{\partial x^{m}}{\partial \bar{x}^{k}}\,\delta^{\ell}_{m} = \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{\ell}}\,\frac{\partial x^{m}}{\partial \bar{x}^{k}}\,g^{\ell n}\,g_{nm}$$

Por outro lado, com a transformação do primeiro membro, esta equação fica:

$$\bar{g}^{ij}\,\frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{j}}\,\frac{\partial x^{m}}{\partial \bar{x}^{k}}\,g_{nm} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{\ell}}\,\frac{\partial x^{m}}{\partial \bar{x}^{k}}\,g^{\ell n}\,g_{nm}$$

Igualando-se os coeficientes de $\frac{\partial \bar{x}^{m}}{\partial x^{k}}\,g_{nm}$ em ambos os membros, tem-se

$$\frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{j}}\,\bar{g}^{ij} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{\ell}}\,g^{\ell m}$$

Multiplicando-se esta equação por $\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{n}}$ e, evidentemente, somando-se sobre todos os índices repetidos, tem-se:

$$\bar{g}^{ik} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial \bar{x}^{\ell}}\,\frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{n}}\,g^{\ell n} \qquad \text{(III.66)}$$

A relação (III.66) mostra que os elementos da matriz g^{-1} se transformam segundo as componentes de um tensor contravariante de segunda ordem. Portanto, *o tensor recíproco é um tensor contravariante de segunda ordem.*

Suponha-se que o sistema de coordenadas x^i é o cartesiano ortogonal fixo tridimensional, e que o sistema de coordenadas $\bar{x}^i$ é um sistema arbitrário. De acordo com a relação (III.35), tem-se que:

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

Logo,

$$(dl)^2 \equiv \delta_{ij}\, dx^i\, dx^j = dx^i\, dx^i$$

Por outro lado, da relação (III.62),

$$(dl)^2 \equiv dx^i\, dx^i \equiv \bar{g}_{k\ell}\, d\bar{x}^k\, d\bar{x}^\ell \qquad \text{(III.67)}$$

Porém,

$$dx^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\, d\bar{x}^k$$

Assim, efetuando-se esta transformação na relação (III.67), tem-se:

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\ell}\,d\bar{x}^k\,d\bar{x}^\ell \equiv \bar{g}_{k\ell}\,d\bar{x}^k\,d\bar{x}^\ell$$

Fica evidente que,

$$g_{k\ell} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\ell} \qquad \text{(III.68)}$$

Esta última relação permite determinar as componentes do tensor fundamental do sistema de coordenadas $\bar{x}^i$, quando a transformação é feita de um sistema cartesiano ortogonal.

EXEMPLO 3.6

Supondo-se que o sistema de coordenadas $\bar{x}^i$ é o esférico--polar ($\bar{x}^1 = r$, $\bar{x}^2 = \theta$ e $\bar{x}^3 = \phi$), encontrar-se-ão as componentes do tensor fundamental, deste sistema, relativos ao cartesiano ortogonal fixo.

Lembra-se que a relação de transformação entre os dois sistemas é o seguinte:

$$x^1 = \bar{x}^1 \operatorname{sen} \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3, \quad x^2 = \bar{x}^1 \operatorname{sen} \bar{x}^2 \operatorname{sen} \bar{x}^3 \quad \text{e} \quad x^3 = \bar{x}^1 \cos \bar{x}^2$$

Logo,

$$\bar{g}_{11} = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1}\,\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1}\,\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} + \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}\,\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1}\right)^2$$

$$= (\text{sen}\ \bar{x}^2 \cos \bar{x}^3)^2 + (\text{sen}\ \bar{x}^2\ \text{sen}\ \bar{x}^3)^2 + (\cos \bar{x}^2)^2 = 1$$

$$\bar{g}_{11} = 1$$

Analogamente,

$$\bar{g}_{22} = r^2 \qquad , \ \bar{g}_{33} = r^2\ \text{sen}^2\ \theta$$

Os outros elementos fora da diagonal são todos zero, conforme pode ser facilmente verificado. Portanto, os elementos do tensor fundamental, colocados na forma matricial, são:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\ \text{sen}^2\ \theta \end{pmatrix}$$

Assim o elemento $(dl)^2$, em coordenadas esférico-polares, é dado por:

$$(dl)^2 = g_{11}\ (d\bar{x}^1)^2 + g_{22}\ (d\bar{x}^2)^2 + g_{33}\ (d\bar{x}^3)^2 \qquad \text{(III.69a)}$$

$$(dl)^2 = (dr)^2 + r^2\ (d\theta)^2 + r^2\ \text{sen}^2\ \theta\ (d\phi)^2 \qquad \text{(III.69b)}$$

Observa-se que a relação (III.69a) é idêntica à equação (I.42) do Capítulo I, onde o quadrado das "métricas" h_i das coordenadas curvilíneas, identificam-se com as componentes do tensor fundamental (chamado também de tensor métrico) g_{ii}

3.4.6 - Tensores Relativos

Existem tensores, cuja transformação de coordenadas segue as relações normais de transformação, exceto que vão multiplicadas por uma potência do Jacobiano de transformação. Isto é:

$$\bar{R}^{ij\,\dots}_{k\ell\,\dots} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{\beta}} \cdots \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^{k}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \bar{x}^{\ell}} \cdots R^{\alpha\beta\,\dots}_{\gamma\delta\,\dots} \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{\pi} \qquad \text{(III.70)}$$

Tensores que se transformam desta maneira são chamados de *tensores relativos de peso* π, onde π é uma constante e $\left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|$ é o Jacobiano da transformação definido na relação (III.55).

Quando $\pi = +1$, o tensor é chamado de *tensor densidade*. Se $\pi = -1$, o tensor é às vezes chamado de *tensor capacidade*.

É muito fácil demonstrar que o produto (interno ou externo) entre tensores relativos dá, como resultado, um outro tensor relativo, de peso igual à soma algébrica dos pesos de cada tensor.

EXEMPLO 3.7

O tensor de Levi-Civita, em coordenadas generalizadas, pode, convenientemente, ser representado como um tensor contravariante ε^{ijk}, ou covariante ε_{ijk}, ainda com as mesmas propriedades conhecidas.

Em seguida, ver-se-ão, as propriedades de transformação da versão contravariante.

Dado que o símbolo de Levi-Civita é decorrente de uma definição, deve ficar evidente que em qualquer sistema de coordenadas, suas propriedades serão sempre as mesmas. Isto é:

$$\bar{\varepsilon}^{ijk} \equiv \varepsilon^{ijk}$$

Supondo-se que este símbolo é um tensor contravariante de terceira ordem, sua relação de transformação será a seguinte:

$$\bar{\varepsilon}^{ijk} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{\ell}} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{m}} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{n}} \varepsilon^{\ell mn}$$

A relação de transformação acima, neste caso, é mais convenientemente estudada sob o ponto de vista de produto matricial. Assim, representando-se os elementos de transformação $\frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{\ell}}$, por elementos de uma matriz Q, e dado que o tensor contravariante de terceira ordem $\varepsilon^{\ell mn}$, no sistema de coordenadas x^{i}, tem as propriedades do símbolo de Levi-Civita, então vê-se que o segundo membro da relação de transformação pode ser escrito na forma matricial equivalente da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{\ell}} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{m}} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{n}} \varepsilon^{\ell mn} \rightarrow Q_{\ell i}\, Q_{mj}\, Q_{nk}\, \varepsilon_{\ell mn}$$

Assim, a relação de transformação, escrita na forma matricial e para valores de $i = 1$, $j = 2$ e $k = 3$, fica:

$$\bar{\varepsilon}_{123} \equiv Q_{\ell 2}\, Q_{m2}\, Q_{n3}\, \varepsilon_{\ell mn} \equiv \det Q$$

Porém,

$$\det Q = \left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right|$$

Logo,

$$\bar{\varepsilon}^{123} = \left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right|$$

Pode-se ainda provar que

$$\left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right| \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right| = 1$$

ou seja,

$$\left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{-1}$$

Portanto,

$$\bar{\varepsilon}^{123} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{-1}$$

Evidentemente, este não é o resultado desejado, uma vez que, segundo a definição do símbolo, $\bar{\varepsilon}^{123} = 1$.

Pode-se ver ainda que

$$\bar{\varepsilon}^{321} = -\left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{-1} , \qquad \varepsilon^{221} = 0$$

e assim por diante.

Observa-se que todos estes exemplos reproduzem os resultados desejados, quando à relação de transformação se acrescenta o fator $\left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{+1}$. Logo, para que a definição do símbolo de Levi-Civita seja uma invariante, é necessário que a sua relação de transformação, como tensor, seja

$$\bar{\varepsilon}^{ijk} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{\ell}} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{m}} \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{n}} \varepsilon^{\ell mn} \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{+1}$$

de onde se conclui que o tensor contravariante de Levi-Civita é um tensor relativo do peso $\pi = +1$, chamado também de tensor contravariante densidade de terceira ordem.

De uma maneira similar, pode-se provar que ε_{ijk} é um tensor covariante de peso $\pi = -1$, ou também, um tensor covariante capacidade.

É interessante observar que o símbolo de Levi-Civita, em coordenadas cartesianas ortogonais, é apenas um pseudotensor, uma vez que o Jacobiano das transformações são simples determinantes das matrizes de transformação.

EXEMPLO 3.8

Neste exemplo será determinado o tipo de grandeza que representa o determinante da matriz formada com as componentes de um tensor covariante de segunda ordem. Considere-se o tensor covariante T_{ij}.

$$\bar{T}_{ij} \equiv \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} T_{k\ell}$$

Esta relação escrita, novamente, numa forma matricial onde $\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} = Q_{ik}$, fica:

$$\bar{T}_{ij} \equiv Q_{ik} T_{k\ell} Q_{j\ell} = Q_{ik} T_{k\ell} (\tilde{Q})_{\ell j}$$

ou seja,

$$\bar{T} = Q T \tilde{Q}$$

Tomando-se o determinante desta equação matricial e lembrando-se que o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes de cada matriz, tem-se

$$\det \bar{T} = (\det Q)\ (\det T)\ (\det \tilde{Q})$$

Por outro lado,

$$\det \tilde{Q} = \det Q = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|$$

Finalmente,

$$\det \bar{T}_{ij} \equiv \det T_{k\ell} \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{+2}$$

Isto é, o determinante das componentes de um tensor covariante de segunda ordem, é um escalar relativo de peso $\pi = 2$.

3.4.7 - Teorema do Quociente

Este teorema permite determinar se o conjunto de grandezas $A(i, j, k, \ldots)$, individualizadas pelos valores numéricos dos índices $i, j, k, \ldots$, constituem as componentes de um tensor. O procedimento seguido não é o de verificar se cada um dos elementos deste conjunto de grandezas se transforma como as componentes de um tensor, po rêm, segue-se um método indireto pelo qual, e com a ajuda de outros tensores definidos, consegue-se saber de uma maneira imediata se $A\ (i,\ j,\ k,\ \ldots\ )$ é um tensor.

O Teorema do Quociente pode ser expresso da seguinte maneira: Se o produto tensorial (seja interno ou externo) da grandeza $A\ (i,\ j,\ k,\ \ldots)$ com um tensor arbitrário, dá como resultado um segundo tensor, diferente do primeiro, então, $A(i,\ j,\ k,\ \ldots)$ também é um tensor.

Para a demonstração deste teorema, suponha-se a seguinte relação:

$$A(i,\ j,\ k)\ T^{p}_{ij} \equiv R^{pk} \qquad \text{(III.71)}$$

onde T^{p}_{ij} é um tensor misto arbitrário, e R^{pk} um contravariante. De uma maneira intuitiva, pode-se raciocinar da seguinte maneira. No primeiro membro existe contração nos índices i e j, e dado que a contração existe apenas quando os índices da contração se encontram em níveis diferentes, pode-se concluir que os índices i e j da grandeza $A(\ i,\ j,\ k)$, são índices contravariantes. Olhando-se para o segundo membro, observa-se que os dois índices que subsistem são ambos contravariantes, de onde se infere que o índice k da grandeza $A(i,\ j,\ k)$, é também um índice contravariante. Logo,

$$A(i,\ j,\ k) = A^{ijk}$$

O método dedutivo anterior é confirmado pela seguinte análise. A transformação da equação (III.71) pode ser feita apenas nos fatores das grandezas conhecidas. Assim, o primeiro membro fica,

$$\bar{A}(i, j, k)\ \bar{T}^{p}_{ij} \equiv \bar{A}(i, j, k)\ \frac{\partial \bar{x}^{p}}{\partial x^{\ell}}\ \frac{\partial x^{m}}{\partial \bar{x}^{i}}\ \frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{j}}\ T^{\ell}_{mn}$$

Por sua vez o segundo membro

$$\bar{R}^{pk} \equiv \frac{\partial \bar{x}^{p}}{\partial x^{q}}\ \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{r}}\ R^{qr} = \frac{\partial \bar{x}^{p}}{\partial x^{q}}\ \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{r}}\ A(i, j, r)\ T^{q}_{ij}$$

Subtraindo-se membro a membro, a segunda equação da primeira, e igualando-se, convenientemente, os índices mudos, tem-se:

$$\bar{A}(i, j, k)\ \frac{\partial \bar{x}^{p}}{\partial x^{\ell}}\ \frac{\partial x^{m}}{\partial \bar{x}^{i}}\ \frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{j}}\ T^{\ell}_{mn} - \frac{\partial \bar{x}^{p}}{\partial x^{\ell}}\ \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{r}}\ A(m, n, r)\ T^{\ell}_{mn} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{x}^{p}}{\partial x^{\ell}} \left[\frac{\partial x^{m}}{\partial \bar{x}^{i}}\ \frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{j}}\ \bar{A}(i, j, k) - \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{r}}\ A(m, n, r) \right] T^{\ell}_{mn} = 0$$

Multiplicando-se esta equação por $\frac{\partial x^{s}}{\partial \bar{x}^{p}}$ (operação que implica em soma sobre todos os índices p), e notando-se que:

$$\frac{\partial x^{s}}{\partial \bar{x}^{p}}\ \frac{\partial \bar{x}^{p}}{\partial x^{\ell}} = \delta^{s}_{\ell}$$

tem-se:

$$\left[\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}\,\bar{A}(i,\ j,\ k)\ -\ \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\,A(m,\ n,\ r)\right] T^s_{mn} = 0$$

Porém, T^s_{mn} é um tensor arbitrário (diferente de zero). Logo,

$$\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}\,\bar{A}(i,\ j,\ k) \equiv \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\,A(m,\ n,\ r)$$

Multiplicando-se ambos os membros desta equação por $\dfrac{\partial \bar{x}^u}{\partial x^m}\,\dfrac{\partial \bar{x}^v}{\partial x^n}$ (onde a soma sobre os índices repetidos m e n fica implícita) tem-se:

$$\bar{\delta}^u_i\,\bar{\delta}^v_j\,\bar{A}(i,\ j,\ k) \equiv \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\,\frac{\partial \bar{x}^u}{\partial x^m}\,\frac{\partial \bar{x}^v}{\partial x^n}\,A(m,\ n,\ r)$$

Assim, finalmente:

$$\bar{A}(u,\ v,\ k) \equiv \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r}\,\frac{\partial \bar{x}^u}{\partial x^m}\,\frac{\partial \bar{x}^v}{\partial x^n}\,A(m,\ n,\ r) \qquad \text{(III.72)}$$

É evidente que a equação anterior (e mais especificamente, a relação de transformação) corresponde à transformação de um tensor contravariante de terceira ordem. Pontanto:

$$A(i,\ j,\ k) = A^{ijk}$$

EXEMPLO 3.9

Considere-se, outra vez, o caso do tensor recíproco. O problema de se determinar se os elementos da matriz g^{-1} (onde g é a matriz formada com os elementos do tensor fundamental) são componentes de algum tensor, foi estudado na subseção 3.4.5. Naquela oportunidade, fez-se um tratamento rigoroso que, ao final, foi uma repetição da demonstração do Teorema do Quociente, para provar que os elementos desta matriz constituem um tensor contravariante de segunda ordem. Desta vez, aplicar-se-á o mencionado teorema de uma maneira dedutiva. Considere-se a relação:

$$g^{-1}(i,\ k)\ g_{ij} = \delta^k_j$$

onde g_{ij} é o tensor fundamental, e δ^k_j o delta (tensor misto) de Kronecker. Aqui não pode ser aplicado diretamente o Teorema do Quociente, porque g_{ij} não é um tensor arbitrário. Por esta razão, escolhe-se um tensor arbitrário, por exemplo um vetor contravariante V^j, e faz-se o produto interno com a relação anterior:

$$g^{-1}(i,\ k)\ g_{ij}\ V^j \equiv \delta^k_j\ V^j \equiv V^k$$

Agora $g_{ij}\ V^j \equiv A_i$ é um tensor arbitrário

$$g^{-1}(i,\ k)\ A_i \equiv V^k$$

Segundo o Teorema do Quociente, $g^{-1}(i, k) = g^{ik}$, uma vez que existe contração no índice i, e que o único índice que subsiste é o contravariante k.

3.4.8 - A Operação de Rotacionar

Considere-se um campo vetorial covariante $V_i(\underset{\sim}{x})$. Isto é, para cada ponto $\underset{\sim}{x}$ do espaço, existe um vetor covariante característico V_i. Este campo vetorial pode ser caracterizado pela variação do vetor covariante de ponto a ponto: $\frac{\partial V_i}{\partial x^j}$. Entidades similares podem ser definidas no sistema de coordenadas $\bar{x}^i$: $\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}^j}$. A seguir, ver-se-á de que forma se relacionam estas entidades, assim definidas, para o mesmo ponto $\underset{\sim}{x}$ do espaço. Para isto, faz-se primeiro a transformação do vetor covariante dentro da derivada.

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}^j} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} V_k \right) = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^j \, \partial \bar{x}^i} V_k + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial V_k}{\partial \bar{x}^j}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial V_k}{\partial \bar{x}^j} \equiv \frac{\partial V_k}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j}$$

Com esta substituição, a expressão da derivada fica,

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}^j} \equiv \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^j \, \partial \bar{x}^i} V_k + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial V_k}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \tag{III.73}$$

Permutando-se os índices i e j, por inspecção, consegue-se a seguinte expressão nova:

$$\frac{\partial \bar{V}_j}{\partial \bar{x}^i} \equiv \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \, \partial \bar{x}^j} V_k + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial V_k}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} \tag{III.74}$$

Subtraindo-se (III.74) de (III.73), tem-se:

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial \bar{x}^i} \equiv \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial V_k}{\partial x^\ell} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial V_k}{\partial x^\ell}$$

Fazendo-se a troca dos índices mudos, k pelo ℓ e ℓ pelo k, respectivamente, o segundo termo do segundo membro, fica:

$$\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial V_\ell}{\partial x^k}$$

Portanto, a expressão anterior pode ser colocada em uma forma mais simplificada como segue,

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial \bar{x}^i} \equiv \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x^\ell} - \frac{\partial V_\ell}{\partial x^k} \right) \tag{III.75}$$

Resumindo os resultados obtidos até aqui, observam-se dois pontos de interesse. Primeiro, a grandeza $\frac{\partial V_i}{\partial x^j}$ não é, necessariamente, um tensor, conforme pode-se observar na equação (III.73) onde a pre sença do primeiro termo (segundo membro) estraga a relação de transformação de um tensor covariante. Isto, porém, é compensado com o segundo ponto de interesse a ser notado e que se encontra expresso na equação (III.75), onde pode-se reconhecer que é uma transformação correspondente a um tensor covariante de segunda ordem. Desta maneira, o que se fez foi construir um tensor covariante de segunda ordem

$$T_{ji} = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \frac{\partial V_j}{\partial x^i} \qquad \text{(III.76)}$$

Note-se que em coordenadas cartesianas ortogonais, os elementos do tensor covariante T_{ji} representam o rotacional do vetor $\underset{\sim}{V}$: $\nabla \times \underset{\sim}{V}$. Por esta razão, o procedimento que se acabou de desenvolver, e que consistiu da construção de um campo tensorial a partir de um campo vetorial, é chamado de *operação de rotacionar.*

3.4.9 - Módulo de um Vetor e Ângulo entre dois Vetores

No início da subseção 3.4.3, o módulo de um vetor elementar $d\underset{\sim}{l}$ no espaço das coordenadas foi definido mediante

$$(dl)^2 = (d\underset{\sim}{l}) \cdot (d\underset{\sim}{l}) \equiv g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad \text{(III.77)}$$

Por outro lado, lembre-se também que os tensores g_{ij} e g^{ij} (fundamental e recíproco) têm a propriedade de abaixar e levantar os índices contra variantes e covariantes, respectivamente, conforme foi mostrado nas relações (III.43) e (III.44). Assim, pode-se, também, escrever a equação (III.77) na forma:

$$(dl)^2 \equiv dx^i \, dx_i \qquad \text{(III.78)}$$

Desta maneira, fica definida a componente covariante do comprimento elementar $d\underset{\sim}{l}$.

Em analogia à equação (III.78), define-se o *módulo de um vetor* $|\underset{\sim}{V}|$ da seguinte maneira:

$$|\underset{\sim}{V}|^2 \equiv V_i \, V^i \equiv \pm g_{ij} \, V^j \, V^i \qquad \text{(III.79)}$$

onde os sinais $\pm$ são escolhidos de maneira que $|\underset{\sim}{V}|$ seja sempre um número real positivo.

O produto interno entre dois vetores $\underset{\sim}{V} \cdot \underset{\sim}{U}$ pode ser colocado também em função das suas componentes contravariantes:

$$\underset{\sim}{V} \cdot \underset{\sim}{U} \equiv V_i \, U^i \equiv g_{ij} \, V^j \, U^i \equiv |\underset{\sim}{V}| \, |\underset{\sim}{U}| \cos\theta \qquad \text{(III.80)}$$

O ângulo θ é definido como o ângulo entre os vetores contravariantes V^i e U^i. Esta última expressão é a generalização do ângulo entre dois vetores do espaço Euclidiano tridimensional. Se $\cos\theta = 0$, diz-se que os vetores são ortogonais.

As expressões (III.79) e (III.80) podem ser re-escritas em função das componentes covariantes dos vetores correspondentes. Assim,

$$|\underset{\sim}{V}|^2 \equiv \pm g^{ij} \; V_i \; V_j \tag{III.81}$$

$$\underset{\sim}{V} \cdot \underset{\sim}{U} \equiv g^{ij} \; V_i \; U_j \equiv |\underset{\sim}{V}| \; |\underset{\sim}{U}| \cos \theta \tag{III.82}$$

3.4.10 - Direções Principais de um Tensor

Lembra-se (subseção 2.6.3 do Capítulo II), que quando uma matriz quadrada se encontra expressa num sistema de coordenadas, onde suas direções coincidem com os seus próprios autovetores, a matriz é uma (diagonal) simplificada. Correspondentemente, um tensor covariante simétrico T_{ij}, quando expresso num sistema "especial" de coordenadas, pode também adquirir uma forma mais simples.

Considere-se um tensor covariante simétrico de segunda ordem T_{ij}, tal que

$$T_{ij} = \lambda \; g_{ij} \tag{III.83}$$

onde λ é um escalar (que de certa forma representa o "módulo" do tensor T_{ij}) e g_{ij}, é o tensor fundamental. Levando-se tudo ao primeiro membro, e tomando-se o determinante do resultado, tem-se que

$$\det(T_{ij} - \lambda \; g_{ij}) = 0 \tag{III.84}$$

Esta última expressão é equivalente à equação característica para o cálculo dos valores de uma matriz estudada no Capítulo II. Por outro lado, lembra-se que a transformação do determinante formado com as componentes de um tensor de segunda ordem, segundo foi encontrado no Exemplo 3.8, e aplicado ao determinante (III.84), é:

$$\det(T_{ij} - \lambda\, g_{ij}) = \det(\bar{T}_{k\ell} - \lambda\, \bar{g}_{k\ell}) \left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right|^2 = 0$$

Na suposição que exista transformação recíproca entre os sistemas de coordenadas x^i e $\bar{x}^j$ (i.e. $\left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right| \neq 0$), tem-se que

$$\det(T_{ij} - \lambda\, g_{ij}) = \det(\bar{T}_{k\ell} - \lambda\, \bar{g}_{k\ell}) = 0 \qquad \text{(III.85)}$$

Esta relação mostra que os valores de λ (designados por λ_I, λ_{II}, ... λ_N) podem ser obtidos, usando-se a equação (III.84) em qualquer dos dois sistemas de coordenadas. Observe-se que os valores de λ são equivalentes aos autovalores de uma matriz.

Portanto, e de uma maneira análoga ao feito para o caso das matrizes, pode-se formar um autoproblema da seguinte maneira:

$$T_{ij}\, E_J(i) \equiv \lambda_J g_{ij}\, E_J(j) \qquad \text{(III.86)}$$

onde λ_J é uma das raízes da equação (III.84), e $E_J(j)$ é uma grandeza que corresponde a cada valor de λ_J. (Deve ficar claro que os índices de letra maiúscula são usados apenas para individualizar as grandezas $E_J(j)$ e não podem ser confundidos com os índices tensoriais). Observe-se que, na equação (III.86), o primeiro membro envolve uma contração no índice i (sugerindo a natureza contravariante da nova grandeza). Apesar disto, não é possível afirmar que $E_J(i)$ seja um vetor contravariante (pelo Teorema do Quociente), uma vez que, no segundo membro, tem-se outra grandeza de natureza desconhecida. Por esta razão é necessária a análise que segue.

Levando-se tudo ao primeiro membro na equação (III.86), e efetuando-se a transformação das grandezas conhecidas, tem-se:

$$(T_{ij} - \lambda_J\, g_{ij})\, E_J(j) \equiv \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}\, \frac{\partial \bar{x}^\ell}{\partial x^j}\, (\bar{T}_{k\ell} - \lambda_J\, \bar{g}_{k\ell})\, E_J(j) = 0$$

Multiplicando-se a expressão transformada por $\dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^m}$, tem-se:

$$(\bar{T}_{m\ell} - \lambda_J\, \bar{g}_{m\ell})\, \frac{\partial \bar{x}^\ell}{\partial x^j}\, E_J(j) = 0$$

Esta expressão seria a mesma que a (III.86), escrita no sistema $\bar{S}$, sempre e quando

$$\bar{E}_J(\ell) \equiv \frac{\partial \bar{x}^\ell}{\partial x^j}\, E_J(j)$$

Esta relação mostra que $E_J(j) = E_J^i$ é um vetor contravariante. Esta grandeza é equivalente aos autovetores do problema matricial e, equivalentemente, formam também um espaço vetorial linearmente independente. Evidentemente, se se quiser, os módulos destes vetores podem ser normalizados à unidade, fazendo-se uso da relação (III.79)

$$\pm g_{ij}\ E_J^i\ E_J^j \equiv 1 \tag{III.87}$$

Em seguida, ver-se-á a relação que existe entre vetores contravariantes E_J^i correspondentes aos diferentes valores de λ_J. A equação (III.86) para λ_K fica:

$$T_{ij}\ E_K^j \equiv \lambda_K\ g_{ij}\ E_K^j$$

Fazendo-se o produto interno desta equação com E_J^i, e em seguida o produto interno da (III.86) com E_K^i, vem:

$$(T_{ij} - \lambda_K\ g_{ij})\ E_K^j\ E_J^i = 0$$

$$(T_{ij} - \lambda_J\ g_{ij})\ E_J^j\ E_K^i = (T_{ji} - \lambda_J\ g_{ji})\ E_J^i\ E_K^j = 0$$

onde, na última relação, foram trocados os índices mudos i pelos j, e vice-versa. Subtraindo-se membro a membro as duas últimas expressões, tem-se:

$$T_{ij}\ E_K^j\ E_J^i - T_{ji}\ E_K^j\ E_J^i + \lambda_J\ g_{ji}\ E_J^i\ E_K^j - \lambda_K\ g_{ij}\ E_K^j\ E_J^i = 0$$

Porém, o tensor T_{ij} é simétrico devido à sua definição (III.83). Logo,

$$(\lambda_J - \lambda_K)\, g_{ij}\, E_J^i\, E_K^j = 0$$

Todavia,

$$\lambda_J \neq \lambda_K$$

Logo:

$$g_{ij}\, E_J^i\, E_K^j = 0 \tag{III.38}$$

Esta relação, segundo a equação (III.80), implica que cos $\theta_{JK} = 0$ e, portanto, os vetores contravariantes E_J^i e E_K^j são ortogonais. Desta maneira, chega-se à mesma conclusão que para o caso das matrizes Hermitianas, a saber, *o tensor simétrico T_{ij} determina um sistema de vetores mutuamente ortogonais*, isto sempre e quando as raízes de λ sejam todas diferentes. Quando existem raízes múltiplas, os vetores contravariantes não são determinados de uma maneira unívoca e a propriedade anterior não se aplica. Os vetores unitários contravariantes E_J^i com a propriedade (III.88) são chamados de *direções principais* do tensor simétrico T_{ij}.

Para o caso do sistema cartesiano ortogonal $g_{ij} = \delta_{ij}$, e as grandezas λ_n e $\underset{\sim}{E}_n$ são chamadas de autovalores e autovetores respectivamente.

3.4.11 - Símbolos de Christoffel

A equação (III.73) mostra que, em geral, a derivada de um vetor não é necessariamente um tensor. Entretanto, se $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right) = 0$, segue-se que a grandeza $\frac{\partial V_i}{\partial x^j}$, transformar-se-ia como um tensor covariante. A razão disto não ser assim, é devido à matriz de transformação $\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}$ variar de ponto a ponto no espaço, e daí sua derivada é diferente de zero.

Em tensores cartesianos ortogonais, os elementos M_{ij}, das matrizes de transformação M, são constantes, de onde vem que as derivadas (ou melhor, o gradiente) de tensores formam outros tensores de ordem superior em uma unidade, conforme foi visto na subseção 3.2.5. Na próxima subseção, ver-se-á uma forma de fazer com que a derivada de um tensor generalizado seja um tensor. Isto é possível mediante o uso apropriado do tensor fundamental g_{ij}.

A seguir, definir-se-ão certas quantidades que depois serão de utilidade.

Considere-se o tensor fundamental cuja transformação é:

$$\bar{g}_{ij} \equiv \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j}\,g_{k\ell}$$

Derivando-se esta expressão em relação às coordenadas do sistema $\bar{S}$, vem:

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^m} \equiv \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} g_{k\ell} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^m} g_{k\ell} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^n}$$

Expressões para $\frac{\partial \bar{g}_{mi}}{\partial \bar{x}^j}$ e $\frac{\partial \bar{g}_{jm}}{\partial \bar{x}^i}$ são obtidas por analogia. Assim, pode-se ver que:

$$\frac{\partial \bar{g}_{mi}}{\partial \bar{x}^j} \equiv \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} g_{k\ell} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} g_{k\ell} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^n}$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{jm}}{\partial \bar{x}^i} \equiv \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m} g_{k\ell} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^i} g_{k\ell} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^n}$$

Somando-se as duas primeiras equações e subtraindo-se do resultado ã terceira, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial \bar{g}_{mi}}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial \bar{g}_{jm}}{\partial \bar{x}^i} \equiv & \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m} \right) g_{k\ell} + \\
& + \left(\frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} - \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \right) g_{k\ell} + \\
+ \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^n} \right. & \left. + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^n} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^n} \right)
\end{aligned}$$

(III.89

Para simplificar a notação, define-se o símbolo:

$$[jm, i] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i}\right) \qquad \text{(III.90)}$$

Esta entidade, assim definida, é de extrema importância nas aplicações do cálculo tensorial e é conhecida como *Símbolo de Christoffel de primeira espécie*. (Note-se que a sequência dos índices, neste símbolo, corresponde à dos índices do último termo). O último parêntesis da equação (III.89) pode ser ainda transformado, redefinindo-se os índices repetidos de uma maneira conveniente. Assim,

$$\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial g_{nk}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial g_{\ell n}}{\partial x^k} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^n} =$$

$$= \left[\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial g_{\ell n}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^n}\right]\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i} = 2[k\ell, n]\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i}$$

Por outro lado, o primeiro parêntesis da equação (III.89), depois de se trocar k por ℓ e vice-versa, fica:

$$\frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} g_{\ell k} + \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^m \partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} g_{\ell k} - \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} g_{\ell k}$$

Lembrando-se ainda que $g_{\ell k} = g_{k\ell}$, a soma deste termo com os termos contidos no segundo parêntesis da equação (III.89), é:

$$2 \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^m \, \partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} g_{k\ell}$$

Com estes resultados, a equação (III.89) fica:

$$\overline{[jm, i]} \equiv \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i} [k\ell, n] + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^m \, \partial \bar{x}^j} g_{k\ell} \qquad \text{(III.91)}$$

Esta equação resultante pode ainda ser resolvida para a segunda derivada. Para isto, faz-se, primeiro, o produto interno desta equação com $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}$. O resultado desta operação é:

$$\frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^m \, \partial \bar{x}^j} g_{r\ell} \equiv \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \overline{[jm, i]} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m} [k\ell, r]$$

Em seguida faz-se o produto interno deste resultado com g^{sr}, lembrando-se sempre que $g^{sr} \, g_{r\ell} = \delta^s_\ell$

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^m \, \partial \bar{x}^j} \equiv \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^q} \bar{g}^{pq} \overline{[jm, i]} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m} g^{sr} [k\ell, r]$$

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^m \, \partial \bar{x}^j} \equiv \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^p} \bar{g}^{pi} \overline{[jm, i]} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m} g^{sr} [k\ell, r]$$

Definindo-se a nova grandeza com o símbolo:

$$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \equiv g^{i\ell}\,[\,jk,\,\ell\,] = \textit{Símbolo de Christoffel de segunda espécie.} \qquad \text{(III.92)}$$

tem-se uma expressão simplificada que será de utilidade logo mais,

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^m\,\partial \bar{x}^j} \equiv \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^p}\,\overline{\begin{Bmatrix} p \\ jm \end{Bmatrix}} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^m}\begin{Bmatrix} s \\ k\ell \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.93)}$$

Note-se que para a transformação entre sistemas cartesianos em geral, as componentes do tensor fundamental g_{ij} são constantes e, portanto, os símbolos de Christoffel são nulos.

3.4.12 - Derivada Covariante

Considere-se, novamente, a equação (III.73). Substituindo-se, nesta relação, a expressão recentemente encontrada (III.93), para a segunda derivada, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p}\,\overline{\begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix}}\,V_k \equiv \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j}\,\frac{\partial V_k}{\partial x^\ell} - \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\,V_k\begin{Bmatrix} k \\ \ell m \end{Bmatrix}$$

Manipulando-se, apropriadamente, os índices no último termo, tem-se ainda que,

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p}\,\overline{\begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix}}\,V_k \equiv \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x^\ell} - V_m\begin{Bmatrix} m \\ k\ell \end{Bmatrix}\right)$$

Porém,

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^p} V_k = \bar{V}_p$$

Logo,

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}^j} - \overline{\left\{ \begin{matrix} p \\ ij \end{matrix} \right\}} \bar{V}_p \equiv \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \left[\frac{\partial V_k}{\partial x^\ell} - \left\{ \begin{matrix} m \\ k\ell \end{matrix} \right\} V_m \right] \qquad \text{(III.94)}$$

Observa-se que esta é a relação de transformação de um tensor covariante de segunda ordem. O tensor assim formado, e que pode ser mais simplificadamente representado por,

$$\nabla_j V_i \equiv \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} p \\ ij \end{matrix} \right\} V_p , \qquad \text{(III.95)}$$

é chamado de *derivada covariante do vetor covariante* V_i. De uma maneira similar, pode-se também obter a *derivada covariante de um vetor contravariante* V^i, verificando-se que o tensor resultante,

$$\nabla_j V^i \equiv \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ ip \end{matrix} \right\} V^p \qquad \text{(III.96)}$$

é um tensor misto de segunda ordem.

A derivada covariante de um tensor de ordem superior é obtida de uma maneira similar às relações (III.95) e (III.96), onde cada índice (covariante ou contravariante) tem o seu próprio termo contendo o símbolo de Christoffel correspondente. Assim, a derivada covariante de um tensor misto de segunda ordem é dada por:

$$\nabla_k T^i_j \equiv \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} \ell \\ jk \end{matrix} \right\} T^i_\ell + \left\{ \begin{matrix} i \\ km \end{matrix} \right\} T^m_j \tag{III.97}$$

Esta última relação tem uma demonstração simples, quando se considera o tensor misto como o produto externo de dois vetores, um covariante e outro contravariante, respectivamente, e depois se aplica a regra da derivada de um produto.

EXEMPLO 3.10

Usando-se as propriedades dos símbolos de Christoffel tornar-se-á provar a relação (III.75) do rotacional de um vetor covariante. Subtraindo-se da equação (III.94), a equação obtida da mesma expressão com os índices i e j trocados, vem,

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial \bar{x}^i} + \overline{\left\{ \begin{matrix} p \\ ji \end{matrix} \right\}} \bar{V}_p - \overline{\left\{ \begin{matrix} p \\ ij \end{matrix} \right\}} \bar{V}_p \equiv \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} \right) \frac{\partial V_k}{\partial x^\ell} +$$

$$+ \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^i} \left\{ \begin{matrix} m \\ k\ell \end{matrix} \right\} V_m - \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \left\{ \begin{matrix} m \\ k\ell \end{matrix} \right\} V_m$$

Porém, $\left\{ {p \atop ji} \right\} = \left\{ {p \atop ij} \right\}$, uma vez que $[ij,\ell] = [ji,\ell]$ conforme pode-se verificar pelas definições (III.92) e (III:90), respectivamente. Portanto, o terceiro e quarto termos do primeiro membro se cancelam entre si. Isto também acontece com os dois últimos termos do segundo membro. Assim,

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial \bar{x}^i} \equiv \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x^\ell} - \frac{\partial V_\ell}{\partial x^k} \right)$$

3.4.13 - O Gradiente, Divergente e Rotacional

Para uma melhor compreensão do que será tratado a seguir, é muito útil lembrar que, para o estudo dos campos escalares e vetoriais em coordenadas cartesianas, o operador ∇ (que em si representa o operador diferencial $\frac{\partial}{\partial x^i}$) é de extrema importância. Este operador pode atuar diretamente sobre um campo escalar (gradiente), ou mediante um produto escalar (divergente) e vetorial (rotacional) sobre um campo vetorial. Um operador semelhante em coordenadas generalizadas é o operador derivada covariante que se acabou de estudar, aliás, a derivada covariante é a generalização do operador ∇ dos campos vetoriais euclidianos tridimensionais. Com estas observações, podem-se escrever as operações correspondentes de gradiente, divergente a rotacional, conhecidas no cálculo vetorial, em forma de tensores generalizados por uma substituição do operador derivada pelo operador derivada covariante.

Considere-se um campo escalar em um espaço multidimensional, não-Euclidiano, $\Psi(\underset{\sim}{x})$, onde $\underset{\sim}{x}$ é o vetor de posição. Define-se o *gradiente do campo escalar* Ψ (grad Ψ) pela seguinte relação:

$$\text{grad } \Psi = \nabla_i \Psi \qquad \text{(III.98)}$$

Pode-se ver que, para este caso, o operador derivada covariante é um simples operador diferencial, i. e., $\nabla_i \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}$. Logo,

$$\text{grad } \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \qquad \text{(III.99)}$$

Esta grandeza, assim formada, segue a lei de transformação de um vetor covariante, conforme indicado na relação (III.51). Assim, o gradiente de um campo escalar é um campo vetorial covariante.

Para a definição tensorial do divergente, que em analogia com a definição ordinária de divergente implica numa contração, considere-se as componentes contravariantes do vetor $\underset{\sim}{V}$. O *divergente do vetor* $\underset{\sim}{V}$ é definido por:

$$\text{div } \underset{\sim}{V} \equiv \nabla_i V^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \left\{ \begin{matrix} i \\ ip \end{matrix} \right\} V^p \qquad \text{(III.100)}$$

Esta expressão pode ainda ser simplificada, devido à contração presente no símbolo de Christoffel.

$$\left\{ {i \atop ip} \right\} \equiv g^{i\ell} \left[ip, \ell \right] = \frac{1}{2} \left\{ g^{i\ell} \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^p} + g^{i\ell} \frac{\partial g_{p\ell}}{\partial x^i} - g^{i\ell} \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\ell} \right\}$$

Trocando-se os índices i por ℓ,, no último termo, e considerando-se que os tensores fundamental e recíproco são simétricos, vê-se que os dois últimos termos se cancelam. Assim,

$$\left\{ {i \atop ip} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{i\ell} \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^p}$$

Com este resultado, a expressão do divergente, fica:

$$\text{div } \underset{\sim}{V} \equiv \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} V^p g^{i\ell} \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^p} \qquad \text{(III.101)}$$

Pode-se ainda obter uma expressão alternativa, muito mais prática, para o div $\underset{\sim}{V}$, em termos do determinante do tensor fundamental, da seguinte maneira. O determinante det g, formado com os componentes do tensor fundamental, pode ser escrito na forma indicial mostrada na expressão (II.33) do Capítulo II

$$\det g \equiv \varepsilon_{abc \, \ldots \, n} \; g_{1a} \, g_{2b} \cdots g_{Nn}$$

Assim, o gradiente deste determinante, e de acordo com a propriedade c) dos determinantes (ver Capítulo II), é:

$$\text{grad det } g = \frac{\partial}{\partial x^k} \text{ det } g \equiv \varepsilon_{abc \, \ldots \, n} \frac{\partial g_{1a}}{\partial x^k} \, g_{2b} \cdots g_{Nn}$$

Evidentemente, e se assim se desejasse, a operação poderia ter sido feita derivando uma linha diferente à primeira, ou uma coluna qualquer. Observe-se na última expressão, que grad det g, em si, constitui também um determinante, e, portanto, sujeito às propriedades dos determinantes. Assim, este novo determinante pode ser expresso em termos dos cofatores da primeira linha:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \text{ det } g \equiv \frac{\partial g_{1a}}{\partial x^k} \text{ cof } g_{1a}$$

Por outro lado, segundo a relação (II.51) do Capítulo II, tem-se que

$$\text{cof } g_{ia} = (\text{det } g) \, (g^{-1})_{ai} = g^{ai} \text{ det } g$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \text{ det } g \equiv g^{a1} \text{ det } g \, \frac{\partial g_{1a}}{\partial x^k}$$

Esta expressão para o grad det g, foi obtida em termos da primeira linha da matriz g. Pode-se ver que expressões similares podem ser obtidas, também, em termos das outras linhas. Assim para uma linha qualquer i, tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \det g \equiv g^{ji} \det g \, \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

Substituindo-se $g^{ij} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ desta relação na equação (III.101), tem-se:

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{V} \equiv \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \, \frac{V^p}{\det g} \, \frac{\partial}{\partial x^p} (\det g) \tag{III.102}$$

Esta última expressão pode ser colocada numa forma ainda mais simplificada, observando-se que:

$$\frac{1}{2} \, \frac{1}{\det g} \, \frac{\partial}{\partial x^p} (\det g) = \frac{1}{2} \, \frac{\partial}{\partial x^p} (\ln \det g) = \frac{\partial}{\partial x^p} (\ln \sqrt{\det g}) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \, \frac{\partial}{\partial x^p} \sqrt{\det g}$$

Assim,

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{V} \equiv \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left[\sqrt{\det g} \, \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + V^i \, \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{\det g} \right]$$

Finalmente,

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{V} \equiv \frac{1}{\sqrt{\det g}} \, \frac{\partial}{\partial x^i} \left(V^i \sqrt{\det g} \right) \tag{III.103}$$

De uma maneira similar às difinições anteriores, e lembrando-se que em coordenadas cartesianas $\operatorname{rot} \underset{\sim}{V}|_i \equiv \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial V_k}{\partial x^j}$, o *rotacional de um vetor* $\underset{\sim}{V}$, é definido por

$$\text{rot } \underset{\sim}{V} \equiv \varepsilon^{ijk} \nabla_j V_k \qquad \text{(III.104)}$$

3.5 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO CÁLCULO TENSORIAL

Nesta seção, ver-se-ão algumas aplicações do cálculo tensorial, visando estabelecer apenas umas amostras da potencialidade deste importante campo de matemática.

3.5.1 - Geodésicas

No espaço Euclidiano tridimensional familiar, não é preciso muita imaginação para se provar que a distância mais curta entre dois pontos é a linha reta que os une. Porém, se este espaço for "curvo" (por exemplo, um espaço bidimensional que pode ser uma superfície não-plana), a menor distância entre dois pontos, neste espaço, não é mais a reta que os une. Por exemplo, a superfície da terra, de certa maneira, pode ser assemelhada a um espaço bidimensional curvo, onde a distância mais curta entre um ponto em Brasília e outro em Paris, encontra-se, aproximadamente, sobre o arco de círculo que resulta da intersecção do plano que passa por este dois pontos e o ponto central da terra, e a superfície terrestre. Evidentemente, neste caso, a distância mais curta corresponde a um arco de círculo, e não a uma linha reta.

De uma maneira análoga, e de acordo com as conclusões de Einstein, o espaço sideral é, de certa meneira, curvo. Esta curvatura é acentuada em regiões próximas às estrelas. Este é, aliás, o argumento geométrico que originou a teoria gravitacional de Einstein e que será tratada mais tarde.

Seja C uma linha curva dada pelas equações paramétricas

$$x^i = x^i\ (\xi) \tag{III.105}$$

no espaço Riemaniano. Considere-se um trecho desta curva entre os pontos $x^i\ (\xi_o)$ e $x^i\ (\xi_1)$. O comprimento elementar desta curva $|d\underset{\sim}{l}| = ds$, é

$$ds \equiv \sqrt{g_{ij}\ dx^i\ dx^j} = \sqrt{g_{ij}\ \frac{dx^i}{d\xi}\ \frac{dx^j}{d\xi}}\quad d \tag{III.106}$$

Logo, o comprimento sobre a linha curva entre os dois pontos será:

$$s = \int_{\xi_o}^{\xi_1} \sqrt{g_{ij}(x)\ \frac{dx^i}{d\xi}\ \frac{dx^j}{d\xi}}\quad d\xi \tag{III.107}$$

onde evidentemente, o tensor fundamental g_{ij} depende das coordenadas no ponto e foi assim colocado para ressaltar este fato.

Todavia, entre os pontos $x^i(\xi_o)$ e $x^i(\xi_1)$ existirão outras (infinito número de) curvas. Dentre todas as outras, a curva que oferecer o menor comprimento possível é chamada de *geodésica*.

Suponha-se que C é a geodésica entre os dois pontos considerados. Considere-se uma outra curva $\bar{C}$, muito próximo da primeira, tal que

$$\bar{x}^i = x^i + \delta x^i$$

onde δx^i é um vetor elementar arbitrário que varia de maneira contínua ao longo de C. (Ressalta-se que os $\bar{x}^i$ representam pontos sobre a curva $\bar{C}$, e não pontos de um outro sistema de coordenadas conforme fora referido anteriormente). Evidentemente, se $\bar{C}$ é uma curva que também une os pontos $x^i(\xi_o)$ e $x^i(\xi_1)$, ter-se-á que:

$$\delta x^i(\xi_o) = \delta x^i(\xi_1) = 0$$

Agora, o comprimento $\bar{s}$ da curva $\bar{C}$ entre estes dois pontos é:

$$\bar{s} = \int_{\xi_o}^{\xi_1} \sqrt{g_{ij}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^i}{d\xi} \frac{d\bar{x}^j}{d\xi}} \, d\xi$$

Por outro lado,

$$g_{ij}(\bar{x}) = g_{ij}(x) + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k$$

$$\bar{x}^i = x^i + \delta x^i$$

Chamando-se $g_{ij}(x) = g_{ij}$, a grandeza dentro do radical, fica

$$g_{ij}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^i}{d\xi} \frac{d\bar{x}^j}{d\xi} = (g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k) \left[\frac{dx^i}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(\delta x^i)\right] \left[\frac{dx^j}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(\delta x^j)\right]$$

Desprezando-se os termos de segunda ordem, vem

$$g_{ij}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^i}{d\xi} \frac{d\bar{x}^j}{d\xi} = g_{ij} \frac{dx^i}{d\xi} \frac{dx^j}{d\xi} + 2g_{ij} \frac{dx^i}{d\xi} \frac{d(\delta x^j)}{d\xi} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k \frac{dx^i}{d\xi} \frac{dx^j}{d\xi}$$

Assim, voltando-se à integral do comprimento, tem-se:

$$\bar{s} = \int_{\xi_o}^{\xi_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\xi} \frac{dx^j}{d\xi} \left(1 + \frac{2g_{ij} \frac{dx^i}{d\xi} \frac{d(\delta x^i)}{d\xi} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{dx^i}{d\xi} \frac{dx^j}{d\xi} \delta x^k}{g_{ij} \frac{dx^i}{d\xi} \frac{dx^j}{d\xi}} \right)} \, d\xi$$

$$= \int_{\xi_o}^{\xi_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\xi} \frac{dx^j}{d\xi}} \left(1 + \frac{2g_{ij} \frac{dx^i}{d\xi} \frac{d(\delta x^j)}{d\xi} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{dx^i}{d\xi} \frac{dx^j}{d\xi} \delta x^k}{g_{ij} \frac{dx^i}{d\xi} \frac{dx^j}{d\xi}} \right)^{1/2} d\xi$$

Observe-se que o segundo e terceiro termos do parênteses são grandezas de primeira ordem. Chamando-se

$$\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{d\xi}\frac{dx^j}{d\xi}\right)=\frac{2g_{ij}\dfrac{dx^i}{d\xi}\dfrac{d}{d\xi}(\delta x^i)+\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dfrac{dx^i}{d\xi}\dfrac{dx^j}{d\xi}\delta x^k}{g_{ij}\dfrac{dx^i}{d\xi}\dfrac{dx^j}{d\xi}}$$

e desenvolvendo-se o parênteses em série (binômio de Newton), tem-se:

$$\left[1+\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{d\xi}\frac{dx^j}{d\xi}\right)\right]^{1/2}=1+\frac{1}{2}\,\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{d\xi}\frac{dx^j}{d\xi}\right)-\frac{1}{8}\left[\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{d\xi}\frac{dx^j}{d\xi}\right)\right]^2+\dots$$

Desprezando-se, novamente, termos de segunda e ordem superior, a integral do comprimento da curva $\bar{C}$, fica,

$$\bar{s}=\int_{\xi_0}^{\xi_1}\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\xi}\frac{dx^j}{d\xi}}\,d\xi\;+$$

$$+\int_{\xi_0}^{\xi_1}\frac{g_{ij}\dfrac{dx^i}{d\xi}\dfrac{d}{d\xi}(\delta x^j)+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dfrac{dx^i}{d\xi}\dfrac{dx^j}{d\xi}\delta x^k}{\sqrt{g_{ij}\dfrac{dx^i}{d\xi}\dfrac{dx^j}{d\xi}}}\,d\xi$$

de onde segue que,

$$\delta s=\bar{s}-s=$$

$$= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{d\xi}{\sqrt{g_{ij}\dfrac{dx^i}{d\xi}\dfrac{dx^j}{d\xi}}} \left[g_{ij}\frac{dx^i}{d\xi}\frac{d}{d\xi}(\delta x^j) + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{d\xi}\frac{dx^j}{d\xi}\delta x^k \right]$$

Voltando-se ao comprimento elementar (III.106), nota-se que se pode simplificar a última integral fazendo-se a mudança:

$$d\xi = \frac{ds}{\sqrt{g_{ij}\dfrac{dx^i}{d\xi}\dfrac{dx^j}{d\xi}}}$$

Assim,

$$\delta s = \int_0^{s_1} \left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{d}{ds}(\delta x^j) + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\partial x^k \right) ds$$

Nesta expressão, s_1 é o comprimento da curva C entre os pontos $x^i(\xi_1)$. Integrando-se, por partes, o primeiro termo, tem-se que

$$\delta s = g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^i \Big|_0^{s_1} - \int^{1} \delta x^j \frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds} \right) ds + \frac{1}{2}\int_0^{s_1} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\delta x^k\, ds$$

O primeiro termo é zero, uma vez que δx^i se anula em ambos os extremos.

Por outro lado,

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^i}{ds} + g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2}$$

$$= g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^i}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

onde o último termo (que é igual ao segundo) foi obtido trocando-se os índices mudos i pelo k e vice-versa. Assim,

$$\delta s = -\int_0^{S_1}\left[\delta x^j\, g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\delta x^j\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right] ds$$

Trocando-se j por k, e vice-versa, nos índices mudos do segundo e terceiro termos, tem-se:

$$\delta s = -\int_0^{S_1}\left[g_{ik}\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right]\delta x^k\, ds$$

$$= - \int^{S_1} \left[g_{ik} \frac{d^2x^i}{ds^2} + [ij,\ k] \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right] \delta x^k \ ds$$

onde o $[ij,\ k]$, é o símbolo do Christoffel de primeira espécie.

Lembrando-se que se supôs C ser a curva geodésica, decorre que $\delta s = 0$ será a condição necessária para que isto aconteça. Assim, sendo δx^k um vetor (elementar) arbitrário, tem-se que

$$g_{ik} \frac{d^2x^i}{ds^2} + [ij,\ k] \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \qquad \text{(III.108)}$$

Esta equação representa a equação da geodésica.

Fazendo-se o produto interno de (III.108) com o tensor recíproco $g^{\ell k}$, segue-se uma outra forma da equação da geodésica, em termos do símbolo de Christoffel de segunda espécie.

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \ell \\ ij \end{Bmatrix} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \qquad \text{(III.109)}$$

3.5.2 - Teoria Gravitacional de Einstein

A teoria gravitacional de Einstein decorre como uma consequência da suposição que o espaço cósmico é um Riemaniano "curvo", cuja "curvatura" é notada apenas quando as distâncias consideradas são interestelares.

Conforme será visto a seguir, a teoria gravitacional de Einstein revela que os corpos, no espaço livre, movimentam-se seguindo trajetórias geodésicas estabelecidas pela geometria-curva do espaço, sendo que a curvatura do espaço é definida pela posição e densidade de massa dos corpos existentes no mesmo. Assim, pode-se imaginar, por exemplo, que os corpos representam poços de potencial onde a forma do poço representaria a curvatura do espaço e a profundeza do poço representaria a densidade da massa do corpo. Fica evidente que, para a dedução matemática da lei gravitacional de Einstein, é necessária a introdução de conceitos generalizados de curvatura.

Chama-se a atenção, ainda, que esta teoria (cujas implicações são tão grandes que em si constitui a base fundamental da Teoria Geral de Relatividade) é abordada de um ponto de vista geométrico, e não de força gravitacional, na qual se baseia a lei de Newton.

Considere-se a derivada covariante do vetor covariante V_i. Chamando-se $V_{i:j}$ ao resultado, tem-se:

$$V_{i:j} = \nabla_j V_i \equiv \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} p \\ ij \end{matrix} \right\} V_p$$

Tomando-se a derivada covariante desta nova expressão, e chamando-se

$$V_{i:jk} = \nabla_k (\nabla_j V_i)$$

tem-se:

$$V_{i:jk} \equiv \frac{\partial V_{i:j}}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} \ell \\ ik \end{Bmatrix} V_{\ell:j} - \begin{Bmatrix} \ell \\ jk \end{Bmatrix} V_{i:\ell}$$

$$\equiv \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^j \, \partial x^k} - V_p \frac{\partial}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \ell \\ ik \end{Bmatrix} \frac{\partial V_\ell}{\partial x^j} + \begin{Bmatrix} \ell \\ i\ell \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ \ell i \end{Bmatrix} V_p \; -$$

$$- \begin{Bmatrix} \ell \\ jk \end{Bmatrix} \frac{\partial V_i}{\partial x^\ell} + \begin{Bmatrix} \ell \\ jk \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ i\ell \end{Bmatrix} V_p$$

Constrói-se uma expressão semelhante com os índices j e k permutados. Assim,

$$V_{i:kj} \equiv \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^j \, \partial x^k} - V_p \frac{\partial}{\partial x^j} \begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \ell \\ ij \end{Bmatrix} \frac{\partial V_\ell}{\partial x^k} + \begin{Bmatrix} \ell \\ ij \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ \ell k \end{Bmatrix} V_p \; -$$

$$- \begin{Bmatrix} \ell \\ kj \end{Bmatrix} \frac{\partial V_i}{\partial x^\ell} + \begin{Bmatrix} \ell \\ kj \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ i\ell \end{Bmatrix} V_p$$

Subtraindo-se entre si as duas últimas equações, tem-se:

$$V_{i:jk} - V_{i:kj} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \ell \\ ij \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ \ell k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ell \\ ik \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ \ell j \end{Bmatrix} \right] V_p$$

Nesta grandeza, observe-se o seguinte. No primeiro membro, os dois termos são tensores covariantes de terceira ordem, logo sua diferença é também um tensor covariante de terceira ordem. Assim, no segundo membro, e dado que V_p é um vetor arbitrário, a grandeza entre colchetes (de acordo com o teorema do quociente) será um tensor misto de quarta ordem, contravariante no índice p e covariante nos demais índices. Este tensor, que será representado por

$$R^p_{ikj} = \frac{\partial}{\partial x^j}\begin{Bmatrix} p \\ ik \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} p \\ ij \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ell \\ ik \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} p \\ \ell i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \ell \\ ij \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} p \\ \ell k \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.110)}$$

é chamado de *Tensor de Riemann - Christoffel*, ou também de *tensor de Curvatura*. É interessante notar que este tensor depende apenas das características do tensor fundamental g_{ij}, uma vez que o símbolo de Christoffel é função das primeiras derivadas do tensor fundamental. Por outro lado, conforme foi ressaltado na subseção 3.4.5, o tensor fundamental exprime as características geométricas do elemento de comprimento no espaço Riemaniano. Assim, o tensor de Riemann-Christoffel representa um sistema de equações que descreve as características geométricas do espaço.

O tensor de curvatura R^p_{ikj} é relacionado com o conceito de *curvatura Riemaniana* K, através do *tensor covariante de curvatura*.

$$R_{rikj} \equiv g_{rp}\, R^p_{ikj} \qquad \text{(III.111)}$$

mediante a equação:

$$K = \frac{R_{rikj}\, A^r\, A^k\, B^i\, B^j}{(g_{ri}\, g_{kj} - g_{rj}\, g_{ki})\, A^r\, A^i\, B^k\, B^j} \tag{III.112}$$

onde os dois vetores contravariantes são arbitrários. A interpretação da equação (III,112), pode ser assemelhada ao conceito elementar de curvatura κ, da geometria analítica,

$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$

onde ρ é o raio de curvatura. Deve-se esclarecer que a relação entre curvatura e raio de curvatura é, na realidade, uma definição da geometria analítica, porém é conveniente para o presente objetivo. Evidentemente, quando $\kappa = 0$ ($\rho \to \infty$) a curva, nas vizinhanças do ponto onde sua curvatura é calculada, é uma reta.

De uma maneira análoga, quando a curvatura Riemaniana é tal que $K = 0$, diz-se que o espaço é "plano", ou também, que o espaço é Euclidiano (não-curvo). Para que aconteça esta situação, é necessário que $R_{rikj}\, A^r\, A^k\, B^i\, B^j = 0$. Porém, dado que os vetores contravariantes são arbitrários, esta condição reduz-se a $R_{rikj} = 0$. Como consequência, num espaço Euclidiano,

$$R^p_{ikj} = 0 \tag{III.113}$$

A veracidade da última equação pode ser comprovada de uma maneira trivial, para o caso de um sistema cartesiano fixo, onde todos as componentes do tensor fundamental são constantes. Entretanto, o que é mais importante ainda, para o mesmo espaço Euclidiano e usando-se coordenadas curvilíneas (onde as componentes do tensor fundamental não são mais constantes), verifica-se novamente a relação (III.113).

Considere-se novamente o tensor de Riemann-Christoffel R^{p}_{ikj} para um espaço curvo. Por razões que somente Einstein e, provavelmente, pouca gente saiba (o autor se exclui deste grupo), Einstein fez a contração do último índice covariante, e o resultado igualou a zero,

$$R^{\alpha}_{ik\alpha} = G_{ik} = 0 \qquad \text{(III.114)}$$

Esta expressão, de uma aparência inocente, representa a famosa *lei gravitacional de Einstein*. A equação (III.114) "descreve" a trajetória de uma partícula material num espaço onde apenas existe a inércia da partícula e o campo gravitacional (isto é, um espaço desprovido de materia e outros campos físicos). Neste espaço, a partícula se movimentará ao longo de geodésicas. Assim, num espaço Euclidiano, as trajetórias serão linhas retas, ao passo que num espaço Riemaniano a trajetória ficará restrita à curvatura do espaço. Portanto, e mais apropriadamente falando, o sistema de equações que representa a expressão (III.114) determina a geometria do espaço, uma vez que são equações diferenciais parciais dos elementos do tensor fundamental. Estes elementos, assim encontrados, podem ser substituídos na equação da geodésia (III.109), tendo-se, como consequência, a trajetória da partícula.

Uma pergunta natural que surge neste ponto é, por que razão a expressão (III.114) é chamada de lei gravitacional dado que, na sua dedução, não foi utilizado o conceito de força gravitacional? Mais ainda, como é que a relação (III.114) pode ser comparada com a lei de Newton? As respostas a estas perguntas não são óbvias e precisam de um pouco de elaboração, especialmente porque pretende-se comparar "geometria" com "força gravitacional".

Segundo Newton, a força de atração entre dois corpos de massas m_1 e m_2 é dada por

$$\underset{\sim}{F} = - \frac{G\, m_1\, m_2}{|\underset{\sim}{x}|^3}\, \underset{\sim}{x}$$

onde $\underset{\sim}{x}$ é o vetor de posição e G a constante gravitacional. Assim, a aceleração $\underset{\sim}{a}$ é:

$$\underset{\sim}{a} = - \frac{G'}{|\underset{\sim}{x}|^3}\, \underset{\sim}{x}$$

onde a constante G' se agrupa às outras constantes. Porém,

$$\frac{-\underset{\sim}{x}}{|\underset{\sim}{x}|^3} = \nabla\left(\frac{1}{|\underset{\sim}{x}|}\right)$$

Logo, chamando-se

$$\Phi = \frac{G'}{|\underset{\sim}{x}|} ,$$

de onde,

$$\underset{\sim}{a} = \nabla\Phi$$

e tomando-se o divergente desta expressão, tem-se:

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{a} = \nabla \cdot \nabla\Phi = \nabla^2\Phi$$

Todavia,

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{a} \equiv -G' \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r^3}\right) = -G'\left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

$$= -G'\left(\frac{3}{r^3} + x_i \frac{(-3)}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x_i}\right) = 0$$

onde $r = |\underset{\sim}{x}|$.

Logo, a lei gravitacional de Newton pode, também, ser expressa mediante a relação

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{III.115}$$

onde Φ é chamado de potencial gravitacional.

Por outro lado, a expressão (III.114), ou melhor a (III. 110), após se fazer a contração desejada, e considerando-se que,

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ ij \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2 \det g} \frac{\partial(\det g)}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (\ln \sqrt{\det g})$$

fica,

$$G_{ik} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^i \, \partial x^k} (\ln \sqrt{\det g}) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ik \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \ell \\ i\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \ell k \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \ell \\ ik \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x^\ell} (\ln \sqrt{\det g}) = 0 \tag{III.116}$$

Observe-se que o que se tem de comum entre as expressões (III.115) e (III.116), são as derivadas segundas de grandezas diferentes relativas às coordenadas. Desta comparação decorre que o tensor fundamental g_{ij} pode ser interpretado como o potencial gravitacional da mecânica Newtoniana. Contudo, pode aparecer que esta conclusão seja, de certa maneira, arbitrária, uma vez que g_{ij} é, por definição, apenas o tensor fundamental. Por esta razão, uma verdadeira comparação somente é possível com os resultados que são obtidos aplicando-se as duas teorias a problemas práticos.

Uma comparação relevante é obtida resolvendo-se o sistema (III.116) para um espaço tetradimensional (onde a quarta coordenada seja o tempo), esfericamente simétrica (solução de Schwarzschild), e aplicando-se as soluções à equação das geodésicas (III.109). O resultado desta análise fornece as equações da trajetória de uma partícula num campo central de forças. (Os detalhes matemáticos da análise mencionada podem ser encontrados um qualquer livro sobre mecânica relativística em capítulos referentes as órbitas planetárias). Estas equações são

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3\,m\,u^2 \qquad \text{(III.117)}$$

$$r^2\,\frac{d\phi}{ds} = h$$

onde, r é a distância entre o centro de coordenadas e a partícula, m e h são constantes de integração, ds é o arco subtendido por $d\phi$ (coordenada azimutal) e $u = \frac{1}{r}$.

Agora, trabalhando-se o problema de uma partícula se movimentando num campo central de forças, de acordo com a mecânica Newtoniana, tem-se que a trajetória da partícula é definida por:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{Gm_1}{h^2}$$

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = h \qquad \text{(III.118)}$$

Para o caso da órbita de um planeta em torno do sol (que é o exemplo mais ilustrativo do movimento de uma partícula num campo central de forças), r é a distância do sol ao planeta, m_1 é a massa do sol, G a constante gravitacional, $d\phi$ é o ângulo azimutal varrido pelo raio vetor correspondente à posição do planeta num tempo dt, e como antes, $u = \frac{1}{r}$.

Observando-se as equações (III.117) e (III.118), pode-se apreciar a semelhança de ambos os resultados. Em especial, nota-se que a constante de integração m da teoria Einsteiniana, é igual a Gm_1. A aparente discrepância de ambos os conjuntos de equações é representado pelo termo "a mais" $3\,m\,u^2$. Acontece que as *verdadeiras* relações que descrevem a órbita de um planeta são as fornecidas por (III.117). Em outras palabras, as relações Newtonianas são apenas uma "aproximação" das verdadeiras equações do movimento planetário. Esta conclusão foi verificada com observações diretas da órbita de Mercúrio. Segundo a teoria Newtoniana, Mercúrio deveria se encontrar numa órbita elíptica com uma pre cessão determinada do perihélio (ponto da órbita que se encontra mais próximo do sol). Porém, durante décadas de observações deste planeta, chegou-se à conclusão, definitiva, de que a precessão do perihélio não era 531 seg de arco/século (depois de feitas todas as correções perturbacionais dos outros planetas), conforme previa a mecânica Newtoniana, senão de 573 seg de arco/século, existindo, portanto, uma diferença não explicada de aproximadamente, 42 seg de arco/século. Pois bem, aplicando-se as equações (III.117) à orbita de Mercúrio, a presença do termo $3\ m\ u^2$ toma conta quase exata desta diferença!

Decorre, portanto, que a órbita de Mercúrio *não é* uma elipse, ou melhor, é uma elípse apenas em primeira aproximação. De certa maneira, poder-se-ia dizer que este planeta tem uma órbita elíptico--espiral. Para um melhor entendimento deste tipo de órbita é interessante imaginar que o espaço onde se movimenta um planeta é um espaço bidimensional curvo, devido à presença de uma estrela. Assim, a estrela cria, de certa maneira, um poço de "potencial" simétrico da forma mostrada na Figura III.6.

Este exemplo simplificado serve para visualizar alguns fatos importantes quanto ao movimento dos planetas. Devido à simetria do poço, não é difícil imaginar que um planeta que se movimente ao longo de pontos do espaço, onde o valor absoluto de curvatura seja sempre o mesmo, descreverá uma trajetória (órbita do planeta) circular. Esta trajetória será igual a das curvas de nível do chamado poço de potencial e que são ilustradas pelas curvas tracejadas, fechadas, da Figura III.6.

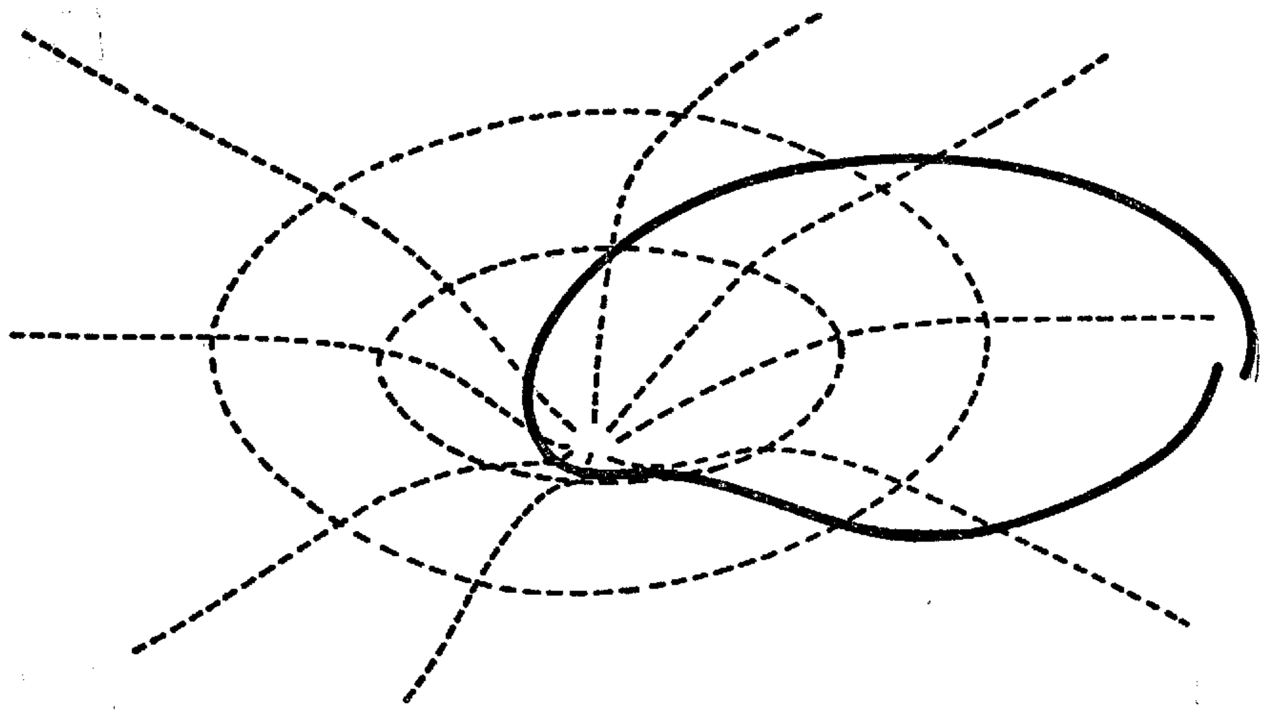

Fig. III.6 - Concepção bidimensional de um espaço curvo devido à presença de uma massa estelar. As curvas tracejadas fechadas representam curvas de nível do poço de "potencial" criado pela massa estelar. As tracejadas abertas são linhas geodésicas que passam pela estrela. A curva cheia mostra, de uma maneira exagerada, a trajetória "real" de um planeta.

(O planeta Vênus tem aproximadamente este tipo de órbita). Os corpos planetários que se encontram em órbitas excêntricas com perihélios muito afastados do sol, são os que menos sentem a curvatura do espaço interplanetário e, portanto, possuem órbitas aproximadamente elípticas. (Plutão é o planeta com estas características orbitais). Entretanto, corpos planetários de órbitas excêntricas, porém, com perihélios nas proximidades do sol, tal como o mostrado pela linha contínua na Figura III.6, são as que sentem em maior grau a curvatura do espaço, dando origem a órbitas elíptico-espirais. A este tipo de órbitas correspondem os cometas, e também, o planeta Mercúrio, cuja excentricidade orbital é suficiente para acusar o efeito da curvatura do espaço interplanetário.

Outro fato interessante que se pode apontar, aproveitando o exemplo do espaço bidimensional curvo, é que se a densidade de massa da estrela aumenta (por exemplo, diminuindo seu tamanho), o poço ficará mais "fundo", aumentando a curvatura do espaço próximo da massa estelar. Assim, se a estrela continuar a aumentar indefinidamente sua densidade de massa, poder-se-ia criar um "furo" no espaço, ou, falando-se em termos matemáticos, ter-se-ia uma singularidade no espaço. Estudos deste tipo de situações, no espaço interestrelar, são termos de pesquisa moderna em Astrofísica. Acredita-se que estas singularidades existem no espaço sideral, e que são criados pelos chamados *buracos negros* (black holes). Um buraco negro é definido como uma região do espaço-tempo (espaço tetradimensional) de onde nada pode encapar, nem mesmo a luz.

3.5.3 - Forma Relativística das Equações de Maxwell

Considere-se dois sistemas de referência como os indicadas na Figura III.7, um deles S fixo e outro S', movimentando-se com velocidades $\underset{\sim}{v} = v\underset{\sim}{\hat{e}}_1$. No espaço-tempo da Física, o tempo t é considerado como uma quarta coordenada, para definir a posição de um ponto. Assim, um ponto de coordenadas x, y, z e t no sistema S, tem as seguintes coordenadas no sistema S':

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \qquad \text{(III.119)}$$

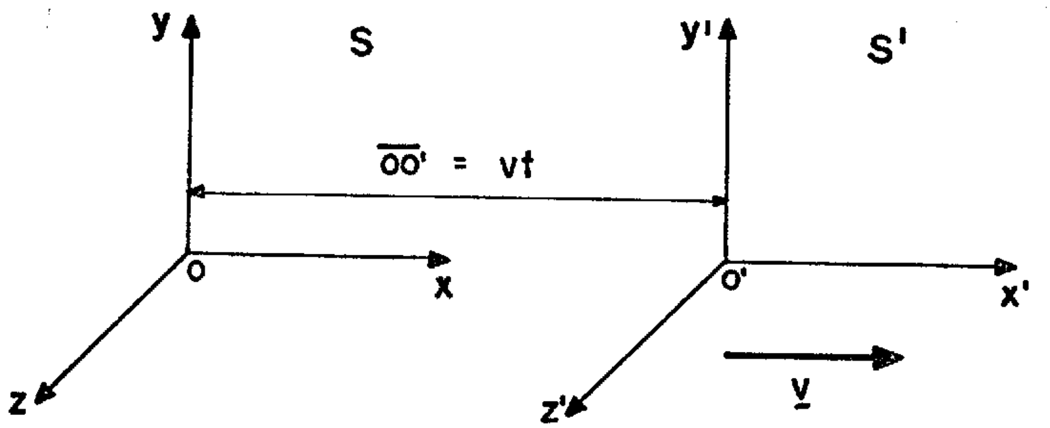

Fig. III.7 - Dois sistemas de referência, um S fixo e outro S' movimentando-se com velocidade $\underset{\sim}{v} = v\hat{\underset{\sim}{e}}_1$.

Estas relações de transformação de coordenadas são conhecidas como *relações de Galileo*, as quais são apropriadas quando $v \ll c$ (c = velocidade da luz no vácuo). Porém, quando v começa a ter alguma importância em relação a c, então as relações de transformação são as de *Lorentz:*

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned} \qquad \text{(III.120)}$$

onde, $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Nas relações (III.120) se encontram incluídos os efeitos relativísticos de *contração de FitzGerald-Lorentz* (contração de um comprimento orientado na direção de $\underset{\sim}{v}$ do sistema S', para um observador situado no sistema S) e de *retardação* (para um observador do sistema S', um relógio de sistema S aparenta funcionar mais lentamente do que um similar do S'). As relações de transformação (III.120), depois de multiplicar a última destas equações por c, podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\underset{\sim}{x}' = M\underset{\sim}{x} \tag{III.121}$$

onde,

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{III.122}$$

Pode-se ver, das relações (III.120), que:

$$c^2(dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

Em palavras, o elemento de "comprimento" tetradimensional ds dado por:

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

é uma grandeza invariante. Observe-se que esta relação implica que o espaço-tempo (espaço tetradimensional) é um espaço Euclidiano. Chamando-se:

$$x^o = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$$

o elemento ds pode ser escrito na forma:

$$(ds)^2 = (dx^o)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \qquad \text{(III.123)}$$

Fica claro que o termo fundamental g_{ij}, para este caso, tem como componentes:

$$g_{oo} = 1;\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \qquad g_{ij} = 0\ (i \neq j)$$

Logo, e fazendo-se uso das propriedades dos tensores fundamental e recíproco, de abaixar e levantar os índices, pode-se ver que as componentes covariantes e contravariantes de um vetor arbitrário $\underset{\sim}{V}$, são relacionadas por:

$$V_o = V^o, \quad V_1 = -V^1, \quad V_2 = -V^2, \quad V_3 = -V^3 \qquad \text{(III.124)}$$

de onde, e segundo (III.77):

$$|\underset{\sim}{V}|^2 = (V^o)^2 - (V^1)^2 - (V^2)^2 - (V^3)^2$$

É necessário esclarecer, neste ponto, que todas as propriedades e relações deduzidas nesta subseção, são válidas para dois sistemas inerciais, isto é, dois sistemas que tem movimentos relativos constantes (não envolvendo forças de aceleração). Esta é a característica principal da *Teoria da Relatividade Restrita*, ou *Especial*. Por outro lado, a existência de sistemas de referência dinâmicos (ou sistemas em espaços curvos) é que caracteriza à *Teoria da Relatividade Geral*. Portanto, as relações a serem obtidas, até onde não seja especificada outra coisa, são aplicáveis apenas à relatividade restrita.

No sistema de unidades MKS, as equações de Maxwell na eletrodinâmica são dadas por:

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{E} = \frac{1}{\varepsilon_o} \rho \tag{III.125}$$

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{B} = 0 \tag{III.126}$$

$$\nabla \times \underset{\sim}{B} = - \frac{\partial \underset{\sim}{B}}{\partial t} \tag{III.127}$$

$$\nabla \times \underset{\sim}{B} = \mu_o \underset{\sim}{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underset{\sim}{E}}{\partial t} \tag{III.128}$$

onde $\underset{\sim}{E}$ e $\underset{\sim}{B}$ são campos elétrico e magnético, respectivamente, ρ e $\underset{\sim}{J}$ são densidades de carga e corrente, respectivamente, ε_o é a constante de permitividade, e c a velocidade da luz. Por outro lado, os campos $\underset{\sim}{E}$ e $\underset{\sim}{B}$ são relacionados com o potencial elétrico Φ, e o vetor potencial magnético $\underset{\sim}{A}$, mediante:

$$\underset{\sim}{E} = - \nabla\Phi - \frac{\partial \underset{\sim}{A}}{\partial t} \tag{III.129}$$

$$\underset{\sim}{B} = \nabla \times \underset{\sim}{A} \tag{III.130}$$

Com as componentes contravariantes de $\underset{\sim}{A}$ e o potencial escalar Φ, pode-se formar um vetor contravariante de quatro componentes:

$$V^o = \Phi; \; V^1 = A^1, \quad V^2 = A^2, \quad V^3 = A^3$$

Assim as três componentes contravariante de $\underset{\sim}{E}$, são:

$$\left.\begin{aligned} E^1 &= - \frac{\partial V^o}{\partial x^1} - c\,\frac{\partial V^1}{\partial x^o} = -F^{10} \\ E^2 &= - \frac{\partial V^o}{\partial x^2} - c\,\frac{\partial V^2}{\partial x^o} = -F^{20} \\ E^3 &= - \frac{\partial V^o}{\partial x^3} - c\,\frac{\partial V^3}{\partial x^o} = -F^{30} \end{aligned}\right\} \tag{III.131}$$

onde, como antes, $x^o = ct$. A notação F^{m0} é conveniente para o que se segue. De uma maneira similar, as componentes contravariantes de $\underset{\sim}{B}$, são:

$$\left.\begin{aligned} B^1 &= \frac{\partial V^3}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^3} = F^{23} \\ B^2 &= \frac{\partial V^1}{\partial x^3} - \frac{\partial V^3}{\partial x^1} = F^{31} \\ B^3 &= \frac{\partial V^2}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^2} = F^{12} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.132)}$$

Note-se que as componentes da grandeza F^{ij} (que logo mais será demonstrado ser um tensor) determinam os vetores $\underset{\sim}{E}$ e $\underset{\sim}{B}$ do campo eletromagnético. Em vista de (III.124), observe-se, ainda, que:

$$E^1 = c\,\frac{\partial V_1}{\partial x^o} - \frac{\partial V_o}{\partial x^1} = F_{10} = -\,F_{01}$$

Analogamente,

$$\left.\begin{aligned} E^2 &= F_{20} = -F_{02} \\ E^3 &= F_{30} = -F_{03} \\ B^1 &= F_{23} = -F_{32} \\ B^2 &= F_{31} = -F_{13} \\ B^3 &= F_{12} = -F_{21} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.133)}$$

Assim, obtêm-se uma outra grandeza cujas componentes podem ser colocadas na seguinte forma matricial:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.134)}$$

Pode-se notar que F_C ê uma matriz anti-simêtrica que representa as grandezas $\underset{\sim}{E}$ e $\underset{\sim}{B}$ do campo eletromagnêtico. Na forma indicial, esta matriz pode ser expressa, de acordo com as definições (III.133), na forma:

$$F_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \frac{\partial V_j}{\partial x^i} \qquad (i,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \qquad \text{(III.135)}$$

onde deve-se lembrar que a constante c vai associada â coordenada x^o. Esta expressão corresponde â operação de rotacionar, estudada na subseção 3.4.6, e que foi demonstrada, mediante a equação (III.73), ser um tensor covariante. Como consequência, F^{ij} ê também um tensor. Os tensores F_{ij} e F^{ij} são chamados de *tensores do campo eletromagnêtico.*

Derivando-se a expressão (III.135), ou mais apropriadamente, tomando-se o gradiente desta expressão, e trocando-se os índices convenientemente, formam-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \frac{\partial V_j}{\partial x^i}\right]$$

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial V_j}{\partial x^k} - \frac{\partial V_k}{\partial x^j}\right]$$

$$\frac{\partial V_{ki}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial V_k}{\partial x^i} - \frac{\partial V_i}{\partial x^k}\right]$$

Somando-se membro a membro as três expressões, vem:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0 \qquad \text{(III.136)}$$

Dando-se valores numéricos aos índices, e identificando-se os elementos do tensor com os da matriz (III.134), chega-se à conclusão de que a última equação é a expressão simultânea das (III.126) e (III.127), que correspondem às equações de Maxwell.

Das relações (III.131) decorre que:

$$F^{i0} = - F^{0i}$$

Derivando-se estes elementos em relação às coordenadas x^i (ou seja, tomando-se o divergente destes elementos), e comparando-se o resultado com a equação (III.125), tem-se:

$$\frac{\partial F^{0i}}{\partial x^i} = \frac{\partial E^i}{\partial x^i} \equiv \frac{1}{\varepsilon_o} \rho \qquad \text{(III.137)}$$

Por outro lado, fazendo-se a mesma operação com os elementos F^{1i}, vem:

$$\frac{\partial F^{1i}}{\partial x^i} \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial F^{10}}{\partial x^o} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E^1}{\partial x^o} + \frac{\partial B^3}{\partial x^2} - \frac{\partial B^2}{\partial x^3}$$

Comparando-se este resultado com a equação (III.128), identifica-se que

$$\frac{\partial F^{1i}}{\partial x} \equiv \mu_o \, J^1$$

de onde é fácil deduzir que,

$$\frac{\partial F^{ki}}{\partial x^i} \equiv \mu_o \, J^k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3) \qquad \text{(III.138)}$$

As relações (III.137) e (III.138), quando somadas membro a membro, podem ser expressas mediante uma única relação:

$$\frac{\partial F^{0i}}{\partial x^i} + \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^i} \equiv \mu_o \, J^k + \frac{1}{\varepsilon_o} \rho$$

Chamando-se, ainda,

$$C^k = \mu_o J^k$$

$$C^o = \frac{1}{\varepsilon_o} \rho$$

tem-se, finalmente,

$$\frac{\partial F^{ki}}{\partial x^i} \equiv C^k \qquad \text{(III.139)}$$

onde C^k pode ser chamado de vetor contravariante de "densidade de ele tricidade". Esta última equação, em analogia com a (III.136), representa a expressão simultânea das equações restantes de Maxwell (III.125) e (III.128).

As equações (III.136) e (III.139) podem ainda ser colocadas numa notação mais simplicada, observando-se que o operador $\frac{\partial}{\partial x^i}$, na equação (III.139), funciona como um vetor covariante (uma vez que existe contração). Assim, chamando-se

$$F^{ki}_{,i} = \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^i} \qquad \text{e} \qquad F_{ij,k} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k}$$

as equações (III.136) e (III.139), respectivamente, ficam

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0 \qquad \text{(III.140)}$$

$$F^{ki}_{\cdot,i} \equiv C^k \qquad \text{(III.141)}$$

Desta maneira tem-se colocado às equações de Maxwell numa forma tetradimensional, que corresponde à forma da relatividade restrita.

Lembra-se que o tratamento seguido até aqui, é válido apenas para o caso da relatividade restrita que, sob o ponto de vista de um espaço Riemaniano, foi identificado como sendo Euclidiano tetradimensional. Para se encontrar as relações equivalentes para o caso relativístico geral, que vem a ser sinônimo de espaço Riemaniano curvo tetradimensional, lembra-se que as derivadas em relação às coordenadas do espaço Euclidiano, devem ser substituídas pelas derivadas covariantes respectivas.

Assim, chamando-se

$$F_{ij:k} = \nabla_k F_{ij} \equiv \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} - \begin{Bmatrix} m \\ ik \end{Bmatrix} F_{mj} - \begin{Bmatrix} n \\ ik \end{Bmatrix} F_{in} \qquad \text{(III.142)}$$

onde,

$$F_{ij} = \nabla_j V_i - \nabla_i V_j = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \frac{\partial V_j}{\partial x^i}$$

Pode-se ver que a definição relativística geral do tensor do campo eletromagnético, é a mesma que a da relatividade restrita.

Permutando-se os índices de $F_{ij:k}$, e somando-se as três expressões obtidas, tem-se:

$$F_{ij:k} + F_{jk:i} + F_{ki:j} = F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0 \qquad \text{(III.143)}$$

Este resultado significa que a equação (III.140), é também válida para a relatividade geral. Isto implica que as duas equações de Maxwell, a (III.126) e a (III.127), permanecem inalteradas num espaço Riemaniano curvo.

Resta encontrar a expressão relativística geral da equação (III.141). Para isto, aplica-se o mesmo tratamento anterior. Assim, a equação (III.141), escrita em termos da derivada covariante, fica:

$$F^{ki}_{:i} \equiv c^{k} \qquad \text{(III.144)}$$

No primeiro membro tem-se uma contração interessante no símbolo de Christoffel correspondente, a saber:

$$F^{ki}_{:i} \equiv \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^{i}} + \left\{ {k \atop mi} \right\} F^{mi} + \left\{ {i \atop ni} \right\} F^{kn} \qquad \text{(III.145)}$$

Lembra-se que este tipo de contração, no símbolo de Christoffel de segunda espécie, apareceu na equação (III.98) onde, depois de uma extensa manipulação, obteve-se o seguinte resultado:

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ ni \end{matrix} \right\} \equiv \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^n} \sqrt{\det g}$$

Por outro lado, e dado que F^{mi} é um tensor anti-simétrico, o segundo termo do segundo membro da equação (III.145), fica:

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ mi \end{matrix} \right\} F^{mi} = - \left\{ \begin{matrix} k \\ mi \end{matrix} \right\} F^{im} = - \left\{ \begin{matrix} k \\ im \end{matrix} \right\} F^{mi}$$

Logo,

$$2 \left\{ \begin{matrix} k \\ mi \end{matrix} \right\} F^{mi} = 0$$

de onde se conclui que

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ mi \end{matrix} \right\} F^{mi} = 0$$

Com estes resultados, a equação (III.145) fica

$$F^{ki}_{:i} \equiv \frac{\partial F^{ki}}{\partial x^i} + \frac{F^{ki}}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{\det g}$$

ou, também,

$$\sqrt{\det g}\ F^{ki}_{:i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} (F^{ki} \sqrt{\det g})$$

Finalmente, multiplicando-se a equação (III.144) por $\sqrt{\det g}$ e substituindo-se a relação recentemente encontrada, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (F^{ki} \sqrt{\det g}) \equiv \sqrt{\det g}\ \ C^k \qquad \text{(III.146)}$$

Esta é a forma relativística geral das outras duas equações de Maxwell. Esta expressão, comparada com a (III.139) mostra a semelhança qualitativa da mesma equação física tanto na relatividade restrita como na geral. Derivando-se (III.146), tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial x^k} (F^{ki} \sqrt{\det g}) = \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{\det g}\ \ C^k)$$

Devido à propriedade anti-simétrica do tensor F^{ki}, tem-se que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial x^k} (F^{ki} \sqrt{\det g}) = - \frac{\partial^2}{\partial x^i\, \partial x^k} (F^{ik} \sqrt{\det g})$$

de onde vem que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \, \partial x^k} \left(F^{ki} \sqrt{\det g} \right) = 0$$

ou, o que vem a ser mais significativo ainda,

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{\det g} \;\; C^k \right) = 0 \qquad \text{(III.147)}$$

Esta equação expressa a conservação da densidade de eletricidade na física da relatividade geral.

BIBLIOGRAFIA

ABRAM, J. *Tensor calculus through differential geometry.* London, Butterworths, 1965.

COBURN, N. *Vector and tensor analysis.* New York, N.Y., Dover, 1970.

DEFRISE, P. Tensor calculus in atmospheric mechanics. In: LANDSBERG, H.E.; MIEGHEM, J. Vam, ed. *Advances in geophysics.* New York, N.Y., Academic, 1964.

DIRAC, P.A.M. *General theory of relativity.* New York, N.Y., John Wiley & Sons, 1975.

EINSTEIN, A. *The meaning of relativity.* Prenceton, N.Y., Princeton. University Press, 1956.

EISELE, J.A.; MASON, R.M. *Applied matrix and tensor analysis.* New York, N.Y., Wiley - Interscience, 1970.

HARRIS, E.G. *Introduction to modern theoretical physics.* New York, N.Y., John Wiley & Sons, 1975.

JACKSON, J.D. *Classical electrodynamics.* New York, N.Y., John Wiley & Sons, 1962.

LICHNEROWICZ, A. *Elementos de calculo tensorial.* Madrid, Aguilar, 1972.

LIEBER, L.R.; LIEBER, H.G. *Einstein theory of relativity.* London, Dennis Dobson, 1949.

LOVELOCK, D.; RUND, H. *Tensor, differential forms, and variational principles.* New York, N.Y., John Wiley & Sons, 1975.

MCCONNELL, A.J. *Applications of tensor analysis.* New York, N.Y., Dover, 1957.

PANOFSKY, W.K.H.; PHILLIPS, M. *Classical electricity and magnetism.* Reading, MA, Addison - Wesley, 1962.

SOKOLNIKOFF, I.S. *Tensor analysis, theory and applications to geometry and mechanics of continua.* New York, N.Y., John Wiley & Sons, 1964.

SPAIN, B. *Tensor calculus.* Edinburgh, Oliver and Boyd, 1965.

SYNGE, J.L.; SCHILD, A. *Tensor calculus.* Toronto, University of Toronto Press, 1962.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Drs. I.J. Kantor e W.D. Gonzalez-A, e aos M.Sc.S W.C. Canesin e S.L.G. Dutra pelas críticas e sugestões que contribuiram para o aprimoramento deste trabalho. O manuscrito foi eficientemente datilografado por Maria de Fátima Santana.