1. Classificação *INPE-COM.4/RPE*
C.D.U.: 519.714

2. Período

4. Distribuição

interna [ ]

externa [X]

3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor)
CONTROLE SUB-ÓTIMO;
OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIAS;
OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS;
MÉTODO DO GRADIENTE

5. Relatório nº
INPE-1725-RPE/130

6. Data
Abril, 1980

7. Revisado por
Santiago A. Tavares

8. Título e Sub-Título

UM PROCEDIMENTO DE BUSCA DIRETA, UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR, PARA GERAR SOLUÇÕES NUMÉRICAS SUB-ÓTIMAS EM PROBLEMAS DE CONTROLE

9. Autorizado por
Nelson de Jesus Parada
Diretor

10. Setor *DSE/DDO* Código

11. Nº de cópias *08*

12. Autoria *Décio Castilho Ceballos*
Atair Rios Neto

13. Assinatura Responsável

14. Nº de páginas *06*

15. Preço

16. Sumário/Notas

Um procedimento numérico direto, de primeira ordem, utilizando programação linear, é proposto para obtenção de soluções sub-ótimas em problemas de controle de sistemas dinâmicos. Impõe-se uma forma matemática particular ao controle, envolvendo parâmetros desconhecidos. Por pertencer a uma classe de procedimentos que requerem pouca memória de computador e por suas características próprias, pode ser implementado em pequenos computadores e permite a realização de programas de computador de aplicação geral. Além de considerações de ordem qualitativa, a respeito da forma matemática adequada a ser imposta ao controle, são apresentados os resultados da aplicação a um problema de transferência de órbita Terra-Marte.

17. Observações

A ser apresentado no 3º Congresso Brasileiro de Automática .

1
Atair e Decio

DEIXE ESTE ESPAÇO EM BRANCO EM TODAS AS PÁGINAS/LEAVE THIS SPACE BLANK ON ALL PAGES

LAYOUT PARA A PRIMEIRA PÁGINA

THE LAYOUT FOR THE FIRST PAGE

UM PROCEDIMENTO DE BUSCA DIRETA, UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR, PARA GERAR SOLUÇÕES NUMÉRICAS SUBÓTIMAS EM PROBLEMAS DE CONTROLE

Décio C. Ceballos
Atair Rios Neto

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE/CNPq
Caixa Postal 515 - CEP 12200
São José dos Campos - SP - Brasil

COMEÇO DO TEXTO/COMMENCE TEXT

Resumo

Um procedimento numérico direto, de primeira ordem, utilizando programação linear, é proposto para obtenção de soluções subótimas em problemas de controle de sistemas dinâmicos. Impõe-se uma forma matemática particular ao controle, envolvendo parâmetros desconhecidos. Por pertencer a uma classe de procedimentos que requerem pouca memória de computador e por suas características próprias, pode ser implementado em pequenos computadores e permite a realização de programas de computador de aplicação geral. Além de considerações de ordem qualitativa, a respeito da forma matemática adequada a ser imposta ao controle, são apresentados os resultados da aplicação a um problema de transferência de órbita Terra-Marte.

A Direct Search Procedure Using Linear Programming to Generate Numerical Suboptimal Solutions in Control Problems

Abstract

A direct search procedure, of first order, using linear programming, is proposed to obtain numerical suboptimal solutions in dynamical systems control problems. A particular functional form, dependent upon a set of unknow parameters, is assumed for the control function. Due to its characteristics it can be used in small computers and to generate computer programs of general application. Considerations about the functional form of the control are done and the results of application to a Earth-Mars orbit transfer problem are presented.

1. INTRODUÇÃO

O procedimento de transformação de problemas de controle ótimo em problemas de otimização de parâmetros, pela imposição de uma forma matemática particular ao controle, envolvendo alguns parâmetros desconhecidos, foi tratado ultimamente em vários trabalhos (Ceballos, 1980; Rios Neto e Ceballos, 1979; Hull e Edgeman, 1975; Williamson, 1971). Neste trabalho, utiliza-se, para resolução do problema restrito gerado, um procedimento direto para a otimização do índice de desempenho e para a satisfação dos vínculos.

O problema associado a cada iteração típica foi construído de forma a permitir uma solução por programação linear, dando ao procedimento características de formulação e implementação bastante simples, inclusive para a realização de programa de computador de aplicação geral a problemas de controle de sistemas dinâmicos.

Os aspectos ligados à escolha do funcional adequado para representar o controle são discutidos, bem como são apresentados exemplos desses funcionais aplicados a um problema de transferência de órbita Terra-Marte.

2. PROBLEMA SUBÓTIMO

O problema de controle ótimo básico a ser tratado é o de encontrar a função ótima de controle u(t), no intervalo $t_o \le t \le t_f$, de modo a satisfazer as condições a seguir.

Minimizar:

$$IP = IP(x_f, t_f)$$

Sujeito a: (2.1)

$$\dot{x} = f(x,u,t),$$

$$M(x_f, t_f) = 0$$

No text below this line.

FAVOR NAO DOBRAR ESTA FOLHA PLEASE DO NOT FOLD THIS SHEET onde, x é o vetor de estado, nx1; $x(t_o)$ e t_o são dados; x_f é o vetor de estado final; u é o vetor de côntrole, px1; M é o vetor de condições terminais, mx1.

O problema (2.1) pode ser estendido para o caso de condições iniciais livres ou vinculadas. Neste caso, o tempo inicial e as variáveis de estado iniciais livres são tratadas como parâmetros otimizáveis. Outra extensão possível ao problema (2.1) é o tratamento de sistemas com parâmetros inerentes otimizáveis.

A partir da substituição de $u(t)$ por $u(a,t)$ ou, em uma forma mais geral, por $u(a,x,t)$, tem-se o problema a seguir.

Minimizar:

$$IP = IP(x_f,a_g),$$

Sujeito a: (2.2)

$$\dot{x} = f(x,a_1,a_2,\ldots a_{g-1},t),$$

$$M(x_f,a_g) = 0$$

onde, $x(t_o)$ e t_o são dados; a é o vetor gx1 de parâmetros a serem otimizados; a_g é o tempo final.

O funcional a ser adotado para o controle depende do problema que estiver sendo resolvido, do conhecimento ou não da forma típica do controle para o problema, etc. No entanto, os aspectos a seguir podem servir de base para a escolha do funcional.

i) - o número de parâmetros deve ser suficientemente grande, de modo a tornar consistente (Ceballos, 1980) o sistema (3.1).

ii) - Os parâmetros devem ser o mais independentes possível, de modo a garantir a independência linear das filas envolvidas no problema (3.4). Por exemplo, quando uma aproximação envolve um espaço de funções base, este deve ser preferivelmente ortogonal (Willianson, 1971).

iii) - O número de parâmetros deve ser limitado conforme o valor do tempo limite de convergência, pois o tempo por iteração depende do número de parâmetros.

iv) - O funcional deve ser compatível com a forma ótima do controle, ou seja, deve ser possível satisfazer, através do funcional, as principais características da forma ótima do controle. Este requisito está associado à precisão dos resultados a serem obtidos.

v) - A sensibilidade do controle, em relação a cada parâmetro a ser otimizado, deve preferivelmente, ser uniforme. Quando não os parâmetros de peso ω_i (problema 3.4) devem ser ponderados, de modo a contornar este problema (Ceballos, 1980).

vi) - Deve-se dar preferência a funcionais que apresentem boa correspondência entre os desvios nos valores do controle e o desvio no vetor de parâmetros em relação aos valores finais (Ceballos, 1980), ou seja, a um grande desvio no vetor de parâmetros deve corresponder um grande desvio nos valores resultantes e vice-versa. A partição em trechos do funcional para o controle tende a melhorar essa característica, por exemplo, aproximações com descontinuidades e aproximações por interpolações.

3. PROBLEMA ASSOCIADO À ITERAÇÃO TÍPICA

Considere-se o problema (2.2). A partir de uma perturbação linear das equações de restrições e do índice de desempenho, respeitados os vínculos dinâmicos, tem-se o sistema de equações a seguir.

$$\Delta M = M_{x_f} x_{fa} \Delta a + M_{a_g} \Delta a_g \qquad (3.1)$$

$$\Delta IP = IP_{x_f} x_{fa} \Delta a + IP_{a_g} \Delta a_g$$

onde, os subscritos referem-se a derivadas parciais de M, x_f e IP em relação a x_f, a e a_g.

A condição de caminhar na direção de satisfação dos vínculos e minimização de IP sugere as imposições a seguir.

$$\Delta M = \alpha M, \ -1 \leq \alpha < 0 \qquad (3.2)$$

$$\Delta IP \geq \gamma(|IP| + 1), \ \gamma < 0$$

O sinal maior ou igual na equação de ΔIP (equação 3.2) se prende ao fato de que nem sempre, ao longo do processo de convergência, é possível impor ΔM e ainda impor um valor para redução de ΔIP. Para a escolha do problema associado a cada iteração típica, dois aspectos devem ser considerados. O primeiro é que dentro do limite permitido nas equações (3.2) para ΔIP, este deve ser o menor possível, ou seja, deve ser minimizado. O segundo aspecto é que além de satisfazer as aproximações de primeira ordem, para se obter uma convergência mais rápida, faz-se necessário caminhar na direção do gradiente, ou seja, uma norma do vetor Δa deve ser minimizada. Das equações (3.1), (3.2) e das considerações anteriores, pode ser proposto o problema associado a cada iteração típica a seguir.

Minimizar:

$$G = \omega_1 |\Delta a_1| + \omega_2 |\Delta a_2| + \ldots + \omega_g |\Delta a_g| +$$

$$+ \bar{\omega}\Delta IP, \ \bar{\omega} > 0, \ \omega_i > 0$$

Sujeito a: (3.3)

$$M_{x_f} x_{fa} \Delta a + M_{a_g} \Delta a_g = \alpha M$$

$$IP_{x_f} x_{fa} \Delta a + IP_{a_g} \Delta a_g \geq \gamma(|IP| + 1)$$

A transformação do problema (3.3) para um problema equivalente na forma usual de programação linear é imediata (Ceballos, 1980), resultando:

3

Otair e Décio

Minimizar:

$$G = \sum_{i=1}^{2g+1} \eta_i s_i,\ \eta_i > 0$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{g} A_{Ji} s_i - \sum_{i=1}^{g} A_{Ji} s_{g+i} = \alpha M_J,\ J=1,2,\ldots,m \qquad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^{g} B_i s_i - \sum_{i=1}^{g} B_i s_{g+i} - s_{2g+1} = \gamma(|IP| + 1)$$

onde:

$$A_{ji} = \frac{\partial M_j}{\partial x_f}\frac{\partial x_f}{\partial a_i},\ \text{para } i=1,2,\ldots,g-1$$

$$A_{jg} = \frac{\partial M_j}{\partial x_f}\frac{\partial x_f}{\partial a_g} + \frac{\partial M}{\partial a_g}$$

$$B_i = \frac{\partial IP}{\partial x_f}\frac{\partial x_f}{\partial a_i},\ \text{para } i=1,2,\ldots,g-1$$

$$B_g = \frac{\partial IP}{\partial x_f}\frac{\partial x_f}{\partial a_g} + \frac{\partial IP}{\partial a_g}$$

4. PROCEDIMENTO NUMÉRICO

No problema (3.4) α, γ e os η_i são parâmetros bastante importantes para o cumprimento dos objetivos do método, para cada iteração. Para efeito de uma maior dinamização e garantia do processo de convergência, os parâmetros α, γ e η_{2g+1} devem ser controlados ao longo do processo de convergência e, para isto, é necessário ao final de cada iteração verificar se os objetivos esperados foram alcançados a contento. É fácil observar que estes objetivos podem ser diferentes ao longo do processo de convergência, por exemplo, quando os vínculos estiverem próximos de serem satisfeitos, o objetivo de estar mais próximo da satisfação dos vínculos em cada iteração pode ser relaxado, em favor do objetivo de diminuir IP.

O tratamento numérico envolve etapas típicas em cada iteração. As integrações numéricas, as derivações numéricas e a solução do problema de programação linear são as principais. Dependendo do procedimento adotado para cada uma dessas etapas, o programa para computador pode ser mais ou menos compacto, rápido ou confiável. Para este trabalho foi adotado um algoritmo de Runge Kutta de passo ajustável para a integração numérica, o algoritmo de Simplex com multiplicadores para resolução do problema de programação linear e derivação numérica direta para cálculo das derivadas parciais das variáveis de estado em relação aos parâmetros.

O procedimento de derivação é bastante importante no que se refere às características de facilidade de implementação (Ceballos, 1980; Rios Neto e Ceballos, 1979), tempo de computador por iteração e, inclusive, número de iterações para a convergência, na medida em que influi na precisão dos resultados obtidos por iteração.

5. TESTE DO PROCEDIMENTO

O problema de transferência de órbita Terra-Marte, órbitas circulares, trajetória plana, e tempo a ser minimizado pode em primeira aproximação ser tratado como a seguir.

Minimizar:

$$IP = t_f$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3^2/x_1 - \mu/x_1^2 + T\,\mathrm{sen}\beta/(m_o - \dot{m}t) \\ \dot{x}_3 &= x_2 x_3/x_1 + T\cos\beta/(m_o - \dot{m}t) \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Dados:

$x_1(to) = 1.0$; $x_2(to) = 0.0$; $x_3(to) = 1.0$;

$to = 0$; $x_1(t_f) = 1.5237$; $x_2(t_f) = 0.0$;

$x_3(t_f) = 0.8101$.

onde, x_1 é a distância do Sol a espaçonave; x_2 é a velocidade radial; x_3 é a velocidade tangencial; m é a massa da espaçonave; μ é a constante gravitacional; T é o empuxo; e β é o controle. Em unidades normalizadas (Bryson, 1975) $\mu = 1.0$; $mo = 1.0$; $\dot{m} = 0.074800391$; $T = 0.14012969$.

A seguir, apresentam-se algumas aproximações testadas para o controle do problema (5.1), com o intuito de comprovar a validade do procedimento e de ilustrar as considerações feitas no ítem 2 a respeito da forma matemática adequada para o controle.

<u>Aproximação por interpolações lineares</u> (AP1 e AP2): consiste na subdivisão do intervalo de tempo em subintervalos, sendo que, os valores do controle, correspondentes aos tempos nas extremidades dos subintervalos, são parâmetros a serem otimizados. Isto é, para $t_f = a_g$, g o número total de parâmetros otimizáveis, $\beta(t)$ o controle, t a variável tempo, e para $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ tem-se:

$$\beta(t) = a_i + (a_{i+1} - a_i)(t - ti)(g-2)/a_g \qquad (5.2)$$

<u>Descontinuidade com posição fixa</u> (AP3): a descontinuidade foi adotada na metade do intervalo e utilizou-se polinômios de Tchebyshev, de segundo grau, para as aproximações nos subintervalos. Isto é, para $t_f = a_7$, β, o controle, t a variável de tempo e t_w o tempo normalizado, tem-se:

4
Otair
e Décio

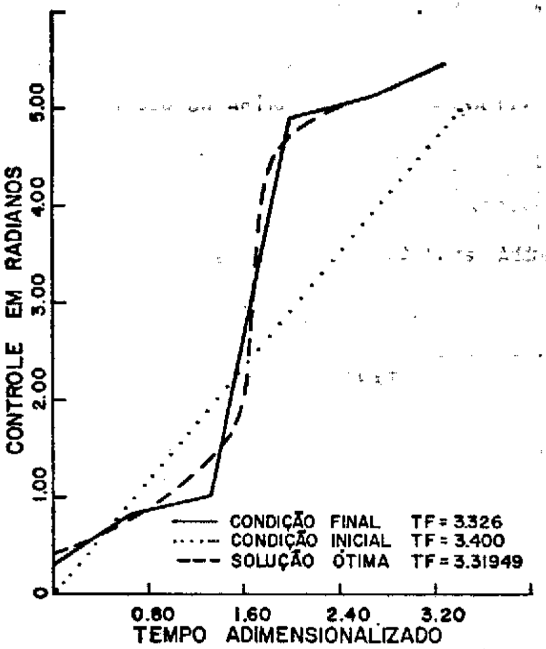

Fig. 5.1: Interpolações lineares (g=7).

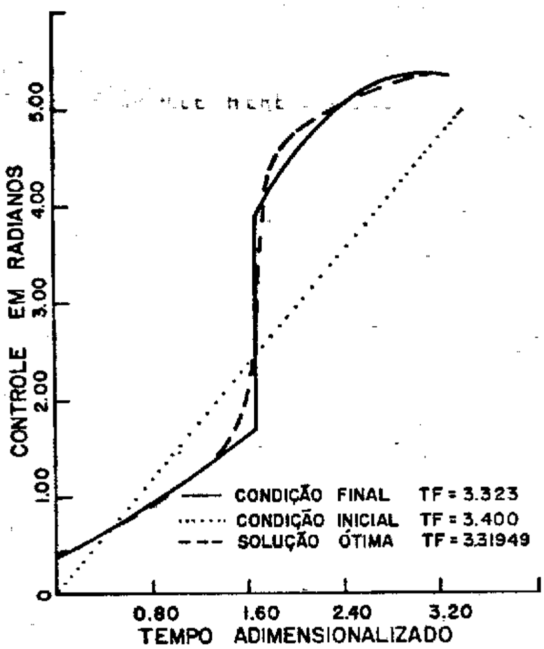

Fig. 5.3: Descontinuidade com posição fixa.

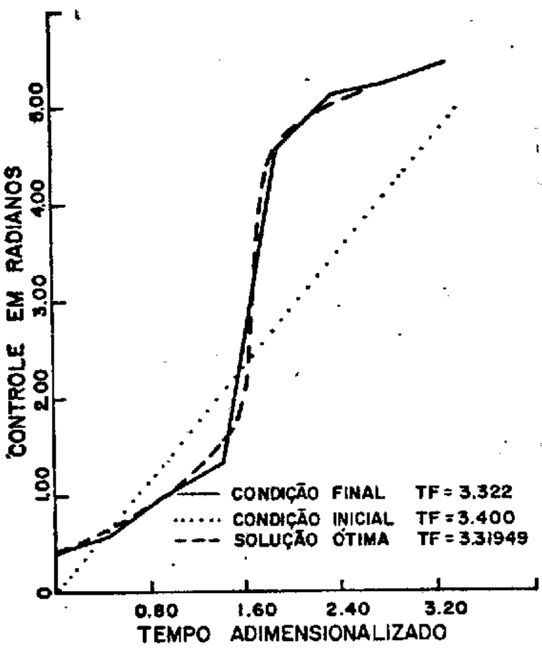

Fig. 5.2: Interpolações lineares (g=9).

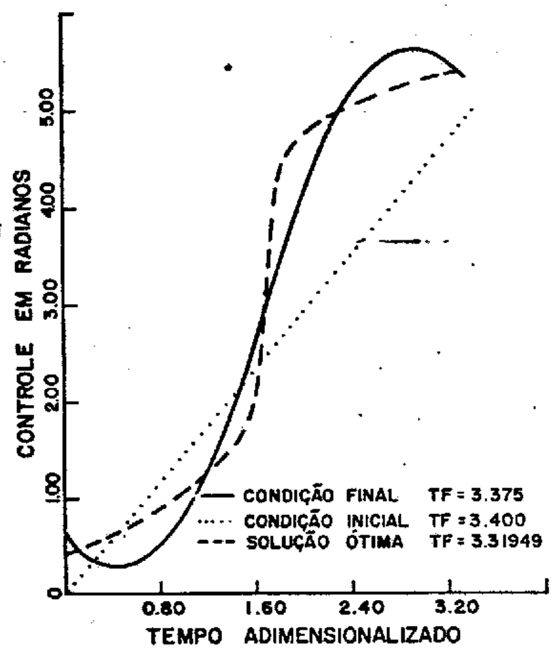

Fig. 5.4: Solução simétrica.

para $t < 0.5a_7$

$$\beta(t) = a_1 + a_2 t_w + a_3(2t_w^2-1),\ t_w = 2t/a_7-1 \quad (5.3)$$

para $t \geq 0.5a_7$

$$\beta(t) = a_4 + a_5 t_w + a_4(2t_w^2-1),\ t_w = 4t/a_7-3$$

TABELA 1 Valores obtidos

	AP1	AP2	AP3	AP4
g	7	9	7	4
a_1	.3175	.3965	1.000	7.222
a_2	.8421	.6008	.6500	4.898
a_3	1.041	1.012	.0247	2.970
a_4	4.926	1.336	4.858	3.375
a_5	5.145	4.588	.7325	-
a_6	5.497	5.130	-.2536	-
a_7	3.326	5.257	3.323	-
a_8	-	5.458	-	-
a_9	-	3.322	-	-
NAT	14	15	13	11
EP	.20	.08	.11	1.7
TRP	1.8	2.8	2.0	1.0

Solução com simetria (AP4): a simetria foi adotada em relação ao ponto médio da curva resultante e utilizou-se uma parábola para representar os semi-intervalos. Esta aproximação é bastante interessante por apresentar uma boa solução, utilizando-se o número mínimo possível de parâmetros, para resolução do problema Terra-Marte através da técnica de aproximação do controle por um funcional. Sendo, $t_f = a_4$, $t_w = 2t/a_4-1$, tem-se:

$$\beta(t) = a_3 + a_1 t_w + a_2 t_w^2,\ t_w \leq 0 \quad (5.4)$$

$$\beta(t) = a_3 + a_1 t_w - a_2 t_w^2,\ t_w > 0$$

Na tabela 1 são apresentados, para um erro da ordem 1.E-04 na satisfação dos vínculos, os valores finais dos parâmetros; o número (NAT) de atualização da matriz de derivadas das variáveis de estado finais, em relação aos parâmetros; o erro porcentual (EP) do IP obtido, em relação ao valor ótimo (IPot=3.31949); e o tempo relativo (TRP) de processamento. Em todos os casos o controle foi adotado, inicialmente, como sendo o segmento de reta (t_o=0, β=0; t_f=3.4, β=5). Nas figuras (5.1) a (5.4) são plotados os gráficos correspondentes às soluções de partida, convergidas e ótima.

6. CONCLUSÕES

A simplificação feita no problema de controle ótimo, através da imposição de uma forma matemática para representar o controle, e as particularidades do procedimento proposto para resolução do problema subótimo permitiram um método com as características gerais a seguir:

i) - necessidade de pouca memória de computador;

ii) - grande simplicidade de formulação e implementação;

iii) - possibilidade de desenvolvimento de programas gerais, para a classe de problemas tratados;

iv) - rapidez e boa precisão, uma vez escolhido adequadamente o funcional para o controle.

Uma análise comparativa deste método em relação a outros procedimentos, ótimos e subótimos, encontrados na literatura, foi feita no trabalho de Ceballos (1980). Essa análise mostrou que este procedimento e o de Williamson (1971), entre os procedimentos analizados, são os únicos a manter simultaneamente todas as características vantajosas acima. No entanto, o procedimento apresentado neste trabalho, ainda é mais simples e apresenta melhores características de convergência.

REFERÊNCIAS

Bryson, A.E. & Ho, Y.C., (1975). Applied Optimal Control, New York, John Wiley, 2a. ed., capítulo 2.

Ceballos, D.C. (1980). "Aproximações Subótimas para o Controle em Problemas Dinâmicos de Otimização". São José dos Campos, INPE-1676-TDL019.

Hull, D.G. & Edgeman, L.J., (1975). "Subotimal Control Using a Second-Order Parameter-Optimization Method". Journal of Optimization and Aplications, vol. 17, nºs 5 e 6:481-491.

Rios Neto, A. & Ceballos, D.C., (1979). "Approximation by Polynomial Arcs to Generate Suboptimal Numerical Solutions in Control Problems". V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Unicamp, Campinas, SP.

Willianson, W.E., (1971). "Use of Polynomial Approximations to Calculate Suboptimal Controls". AIAA Journal, vol. 9, nº 11:2271-2273.