1. Classificação *INPE-COM.4/RPE*
C.D.U.: 517.977.58

2. Período

4. Distribuição

interna [ ]

externa [X]

3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor)

CONTROLE SUBÓTIMO DE SISTEMAS DINÂMICOS;
OTIMIZAÇÃO;
ESTIMAÇÃO LINEAR;
SOLUÇÕES NUMÉRICAS PROBLEMAS DE CONTROLE

5. Relatório nº

INPE-1731-RPE/131

6. Data

Maio, 1980

7. Revisado por

Santiago A. Tavares

8. Título e Sub-Título

ESTIMAÇÃO LINEAR ÓTIMA APLICADA À GERAÇÃO DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS SUBÓTIMAS EM PROBLEMAS DE CONTROLE DE SISTEMAS DINÂMICOS

9. Autorizado por

Nelson de Jesus Parada
Diretor

10. Setor *DSE* Código

11. Nº de cópias *07*

12. Autoria *Atair Rios Neto*

14. Nº de páginas *05*

15. Preço

13. Assinatura Responsável

16. Sumário/Notas

O procedimento proposto se aplica a geração de soluções numéricas subótimas em problemas de controle ótimo de sistemas dinâmicos. A aproximação do controle por um funcional dependente de um número finito de parâmetros e a adoção de um esquema de pertubação linear, com critério de busca direta, reduz o problema, em cada iteração, a uma otimização de parâmetros. A interpretação estocática do critério de busca e dos erros devidos à aproximação linear torna possível determinar o incremento em cada passo, pelo emprego de estimação linear ótima.

17. Observações: *Submetido para apresentação no 3º Congresso Brasileiro de Automática, Rio de Janeiro, 16 a 19 de setembro de 1980.*

ESTIMAÇÃO LINEAR ÓTIMA APLICADA À GERAÇÃO DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS SUBÓTIMAS EM PROBLEMAS DE CONTROLE DE SISTEMAS DINÂMICOS

Atair Rios Neto

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE/CNPq
Caixa Postal 515 - São José dos Campos, S.P., Brasil

Resumo

O procedimento proposto se aplica a geração de soluções numéricas subótimas em problemas de controle ótimo de sistemas dinâmicos. A aproximação do controle por um funcional dependente de um número finito de parâmetros e a adoção de um esquema de pertubação linear, com critério de busca direta, reduz o problema, em cada iteração, a uma otimização de parâmetros. A interpretação estocástica do critério de busca e dos erros devidos à aproximação linear torna possível determinar o incremento em cada passo, pelo emprego de estimação linear ótima.

Optimal Linear Estimation Applied to Generate Suboptimal Numerical Solutions for Control Problems.

Abstract

The procedure proposed applies to the generation of suboptimal numerical solutions in dynamical systems optimal control problems. The approximation of the control by a functional dependent upon a finite number of parameters and the adoption of a linear perturbation scheme, with a direct search criterion, reduces the problem, in each iteration, to a parameter optimization. An estochastic interpretation of the search criterion and of the errors due to the linear approximation makes it possible to get the increment in each step by using optimal linear estimation.

1. INTRODUÇÃO

O procedimento proposto se aplica à solução numérica de problemas de controle ótimo de sistemas dinâmicos não lineares. A solução numérica gerada é subótima devido à aproximação do controle por um funcional dependente de um número finito de parâmetros (Ceballos, 1980; Rios Neto & Ceballos, 1979; Willianson, 1971). Adotando-se um critério de busca direta (Bryson & Ho, 1969) e um esquema de perturbação linear o problema de determinação do incremento de busca se reduz, em cada iteração, a uma otimização de parâmetros. Uma versão modificada de trabalho anterior do autor (Rios Neto, 1979) é utilizada para o cálculo desse incremento de busca, pela utilização de estimação linear ótima. Pretende-se que o trabalho apresentado seja uma contribuição original no sentido de estender o uso de estimação linear ótima para a solução numérica de problemas dinâmicos de controle ótimo. A aproximação subótima para o controle, além de permitir a extensão para o caso dinâmico, garante a característica de economia de espaço de memória no computador. O emprego de estimação linear permite maior facilidade no controle do passo, em cada iteração, de modo a garantir a convergência da solução.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O procedimento númerico proposto se aplica à solução de problemas de controle de sistemas dinâmicos, como formulado a seguir.

$$\text{Minimizar: } IP = G(x_o, x_f, t_o, t_f) \tag{2.1}$$

$$\text{Sujeito a: } I(x_o, t_o) = 0$$

$$\dot{x} = f(x,u,t)$$

$$F(x_f, t_f) = 0$$

onde, sem perda de generalidade, o problema de otimização é colocado como de minimização; x é o vetor de estado de dimensão n; u é o vetor de controle de dimensão n_u; $x_o \triangleq x(t_o)$, $x_f \triangleq x(t_f)$, sendo t_o e t_f os instantes inicial e final, respectivamente; $I(x_o, t_o)$ e $F(x_f, t_f)$ as funções vetoriais que caracterizam os vínculos de contorno, com dimensões m_o e m_f, respectivamente, e tais que $m_o + m_f = m < 2n + 2$

3. FUNDAMENTOS DO PROCEDIMENTO

A partir de $\bar{x}_o, \bar{x}_f, \bar{t}_o, \bar{t}_f$, $\bar{u}(t)$, valores nominais admitidos inicialmente ou obtidos da última iteração, pode-se propor a solução do problema a seguir, a cada iteração típica.

Minimizar:

$$G(\bar{x}_o + dx_o, \bar{x}_f + dx_f, \bar{t}_o + dt_o, \bar{t}_f + dt_f)$$

Sujeito a:

$$I(\bar{x}_o + dx_o, \bar{t}_o + dt_o) = \alpha\, \bar{I} \qquad (3.1)$$

$$(\dot{\bar{x}} + \delta\dot{x}) = f(\bar{x} + \delta x,\ \bar{u} + \delta u,\ t)$$

$$F(\bar{x}_f + dx_f, \bar{t}_f + dt_f) = \alpha \bar{F}$$

onde $\bar{I} \triangleq I(\bar{x}_o, \bar{t}_o)$, $\bar{F} = F(\bar{x}_f, \bar{t}_f)$, $0 \leq \alpha \leq 1$ e os símbolos d e δ indicam variações de primeira ordem, sendo que

$$dx = \dot{\bar{x}}\, dt + \delta x \qquad (3.2)$$

A solução do problema (3.1), a cada iteração, leva à satisfação de critério de busca direta, uma vez que a determinação das perturbações em x e u implicam em se caminhar na direção de satisfação dos vínculos terminais e de minimização do índice de desempenho. Admitindo-se que tais pertubações sejam suficientemente pequenas, resulta que

$$\delta\dot{x} = A(t)\ \delta x + B(t)\ \delta u$$

$$\dot{S}(t, \bar{t}_o) = A(t)\ S(t, \bar{t}_o),\ S(\bar{t}_o, \bar{t}_o) = I \qquad (3.3)$$

onde $A(t) \triangleq f_{\bar{x}}$ e $B(t) \triangleq f_{\bar{u}}$, são as matrizes de derivadas parciais de primeira ordem, avaliadas nos valores nominais, $S(t, \bar{t}_o)$ é a matriz de transição associada, de modo que

$$\delta x(t) = S(t, t_o)\delta x_o + \int_{\bar{t}_o}^{t} S(t,s)\ B(s)\ \delta u(s)\ ds \qquad (3.4)$$

Sendo qualquer tratamento numérico de caráter aproximado, justifica-se a adoção de uma aproximação subótima para o controle, da forma (Willianson, 1971)

$$u(t) \cong (a, t) \qquad (3.5)$$

onde a é um vetor de parâmetros. A escolha do controle como sendo um funcional dependente de um número finito de parâmetros, como em (3.5), deixa em aberto várias possibilidades quanto à escolha da forma específica deste funcional. Por simplicidade e com base em experiências anteriores (Rios Neto & Ceballos, 1979; Ceballos, 1980), torna-se, num intervalo típico

$$u(t) \cong u_k + (u_{k+1} - u_k)\ (t - t_k)/(t_{k+1} - t_k') \qquad (3.6)$$

onde

$$k = 0, 1, \ldots, K,\ \bar{t}_o \leq t_k < t_{k+1} \leq \bar{t}_f \triangleq t_K$$

O controle na forma de (3.6), tomado de volta (3.4) leva a

$$\delta x_f = S(t_f, t_o)\ \delta x_o + \sum_{k=0}^{K} C_k\ \delta u_k \qquad (3.7)$$

$$\delta u_k \triangleq u(t_k) - \bar{u}\ (t_k)$$

$$C_k \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_k} S(t_k, s) \cdot B(s) \cdot (s - t_{k-1})/(t_k - t_{k-1})\ ds +$$

$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} S(t_{k+1}, s) \cdot B(s) \cdot (t_{k+1} - s)/(t_{k+1} - t_k)\ ds$$

sendo $B(s) \equiv 0$ para $t < \bar{t}_o$ ou $t \geq \bar{t}_f$.

De (3.2) e (3.7) em (3.1) resulta o problema, a seguir, de otimização de parâmetros associado a cada iteração típica.

Minimizar:

$$G(\bar{x}_o + \dot{\bar{x}}_o\ dt_o + \delta x_o;\ \bar{x}_f + \dot{\bar{x}}_f\ dt_f + S(\bar{t}_f, t_o)\ \delta x_o + \sum_{k=0}^{K} C_k\ \delta u_k;\ \bar{t}_o + dt_o;\ \bar{t}_f + dt_f)$$

Sujeito a:

$$I(\bar{x}_o + \dot{\bar{x}}_o\ dt_o + \delta x_o;\ \bar{t}_o + dt_o) = \alpha\ \bar{I} \qquad (3.8)$$

$$F(\bar{x}_f + \dot{\bar{x}}_f\ dt_f + S(\bar{t}_f, \bar{t}_o)\ \delta x_o + \sum_{k=0}^{K} C_k\ \delta u_k;\ \bar{t}_f + dt_f) = \alpha\ \bar{F}$$

para variações suficientemente pequenas.

Em cada iteração a busca direta fica, pois, reduzida à determinação dos parâmetros correspondentes às variações em x_o, $u(t_k)$, t_o e

t_f, pela solução do problema das equações (3.8). Essa busca pode ser feita pela aplicação de qualquer método de otimização de parâmetros que se aplique à solução do problema (3.8). Neste trabalho, ela será feita através de procedimento baseado em método anteriormente desenvolvido pelo autor (Rios Neto, 1979) como apresentado a seguir.

4. PROCEDIMENTO

Para efeito de simplicidade de notação, o problema (3.8) será recolocado como a seguir.

Minimizar: $L(v)$

Sujeito a: $M(v) = \alpha \overline{M}$ (4.1)

onde $L(.)$ corresponde a $G(.)$; $M(.)$ a $I(.)$ e $F(.)$; a dependência nas variáveis sobre barra foi omitida, por serem elas constantes em cada iteração; e

$$v^{t} \triangleq \left[\delta x_o^T : \delta u_o^T : \ldots : \delta u_K^T : dt_o : dt_f \right]$$

Sob a hipótese de que v é suficientemente pequeno,

$$M_{\overline{v}}\, v + 0(2) = (\alpha - 1)\, \overline{M} = -q\overline{M} \qquad (4.2)$$

onde $M_{\overline{v}}$ é a matriz de derivadas parciais de $M(v)$ avaliadas em $\overline{v} = 0$ e $0(2)$ representa os termos de ordem superior.

Na equação (4.2), $0(2)$ é um erro dentro da faixa de *erro admissível* na satisfação dos vínculos, para a iteração considerada. Uma vez que qualquer valor do erro, desde que esteja dentro dos limites da faxia de erro admissível, é aceitável, então é razoável modelar-se $0(2)$ como um vetor aleatório de componentes não correlacionados, de média nula, uniformente distribuído na faixa de erro admissível, isto é,

$$M_{\overline{v}}\, v + E_M = q\, \overline{M} \qquad (4.3)$$

$$E\left[E_M \right] = 0,$$

$$E\left[E_M E_M^T \right] = \text{diag.} \left\{ \alpha_{m1}^2, \alpha_{m2}^2, \ldots \alpha_{mm}^2 \right\} \triangleq R$$

$$\alpha_{mi}^2 = \frac{1}{3}\, e_a^2, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

onde $e_a > 0$ é o máximo erro admissível.

Sendo o termo do segundo membro em (4.3) uma aproximação da primeira ordem, é razoável adotar-se o seguinte critério empírico para a determinação de q,

$$q = \text{Min} \left\{ q_1 : q_o = 1, \; q_1^2\, \overline{M}^T\, \overline{M} = m(\beta\, e_a)^2 \right\} \qquad (4.4)$$

onde $\beta >> 1$, tal que $(\beta . e_a)$ seja um erro de primeira ordem.

Para satisfazer a condição de se caminhar na direção do mínimo, é razoável considerar-se a condição, a seguir, para E_L' uniformemente distribuído, independente de E_M e de componentes não correlacionadas

$$-p\, L_{\overline{v}}^T = v + E_L', \; p > 0 \qquad (4.5)$$

$$E\left[E_L' \right] = -\frac{1}{2}\, p\, L_{\overline{v}}^T = \overline{E}_L'$$

$$E\left[(E_L' - \overline{E}_L')\, (E_L' - \overline{E}_L')^T \right] = \text{diag} \left\{ \alpha_{\ell 1}^2, \alpha_{\ell 2}^2, \ldots, \alpha_{\ell\ell}^2 \right\} = \overline{P} \qquad (4.6)$$

$$\alpha_{\ell j}^2 = \frac{1}{12}\, (p . (L_{\overline{v}})_j)^2, \; j = 1, 2, \ldots \ell$$

onde $L_{\overline{v}}$ é o gradiente de $L(v)$, em $v=0$. Por outro lado, subtraindo $\overline{E}_L'$ membro a membro na equação (4.5),

$$-\frac{1}{2}\, p\, L_{\overline{v}}^T = v + E_L \qquad (4.7)$$

$$E\left[E_L \right] = 0, \; E\left[E_L E_L^T \right] = \overline{P}$$

As equações (4.3) e (4.7) definem um problema de estimação linear com informação à priori (Bryson & Ho, 1969), cuja solução leva ao valor estimado, $\hat{v}$, para o incremento v, em cada iteração,

$$\hat{v} = -\frac{1}{2}\, p\, L_{\overline{v}}^T + K \left[-q\overline{M} - M_{\overline{v}} \left(-\frac{1}{2}\, p\, L_{\overline{v}}^T \right) \right]$$

$$K = P\, M_{\overline{v}}^T\, R^{-1} \qquad (4.8)$$

$$P' = \overline{P} - \overline{P}\, M_{\overline{v}}^T\, (M_{\overline{v}}\, \overline{P}\, M_{\overline{v}}^T + R)^{-1}\, M_{\overline{v}}\, \overline{P}$$

Devido ao fato do vetor aleatório E_L' ser independente do vetor aleatório E_M e deste último ter componentes não correlacionadas, o vetor de observação correspondente à equações (4.3) pode ser processado componente a componente, levando a uma forma alternativa da solução (4.8), em que o problema de inversão de matrizes é evitado (Rios Neto, 1979).

O valor de p deve ser escolhido de modo a se ter v suficientemente pequeno e de se garantir a prioridade de satisfação dos vínculos. Para tanto, impõe-se que o erro E_L (eq. (4.6)) seja de primeira ordem e compatível com e_a, enquanto a satisfação dos vínculos não atingir os limites da faixa de erro admissível. Após a satisfação desta condição, p é sempre mantido suficientemente pequeno de modo a garantir convergência no índice de desempenho (decréscimo) e nos vínculos (permanência da faixa de erro admissível), até se atingir as condições de convergência final. Tendo em vista essas exigências, considera-se o seguinte critério empírico para a determinação de p,

$$p = \text{Max.} \left\{ p_i : \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\ell} ((M_{\bar{v}})_{ij} \ (L_{\bar{v}})_j)^2 \ \ p_i^2 = \right.$$

$$\left. = \beta^2 \ e_a^2 \ , \ i = 1,2,\ldots, m \right\} \qquad (4.8)$$

Sendo que, se nem todos $|\bar{M}_i| \lesssim e_a$, o valor de β deve ser ajustado de modo a garantir que $M(\hat{v}) \lesssim \bar{M}$. Uma vez atingida a faixa de convergência pelos vínculos ($|\bar{M}_i| \lesssim e_a$ $i = 1, 2,\ldots,m$) mantém-se q = 1 e ajusta-se, quando necessário, o valor de β (diminui-se), para garantir o decréscimo do índice de desempenho e manter os vínculos dentro da faixa admissível. O valor de β é ajustado em iterações sucessivas até que $\beta e_a \lesssim e_d$, onde e_d é o erro numérico desprezível (zero numérico). A satisfação desta última condição é a indicação de convergência para o correspondente valor de e_a. A convergência final é obtida pela diminuição de e_a, em etapas seguintes, até que $e_a \lesssim e_d$, sendo que, para cada novo valor de e_a, deve-se reiniciar o valor de β (>> 1).

5. CONCLUSÕES

As duas peças básicas do procedimento proposto são: (i) a aproximação do controle por um funcional dependente de um número finito de parâmetros; (ii) o emprego de estimação linear ótima para solução do problema de otimização de parâmetros (3.8), associado a cada iteração típica da busca direta da solução númerica. Neste trabalho, essas duas peças básicas foram combinadas de modo a se obter um método subótimo para solução numérica de problemas de controle ótimo de sistemas dinâmicos, com as seguintes vantagens: (i) economia de espaço de memória no computador; (ii) sistematização do controle do passo em cada iteração, pela utilização de apenas um parâmetro (β) e de noções bastante acessíveis de precisão numérica (e_a,e_d). Espera-se que a aplicação do método conduza a resultados de boa qualidade, levando-se em conta a capacidade, já testada, tanto da aproximação subótima para o controle em fornecer soluções com um bom nível de aproximação (Rios Neto & Ceballos, 1979; Ceballos, 1980), quanto do procedimento de estimação linear para resolver, satisfatoriamente, problemas de otimização de parâmetros (Rios Neto, 1979).

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bryson, A.E & Ho, Y.C. (1969). *Applied Optimal Control*, Blaisdell Publishing Co., capítulo 7 e 12.

Ceballos, D.C. (1980). "Aproximações subótimas para o controle em problemas dinâmicos de otimização". Instituto de Pesquisas Espaciais", S.J.Campos, Relatório nº 1676-TDL-019.

Rios Neto, A & Ceballos, D.C. (1979). "Approximations by Polynomial Arcs to Generate Suboptimal Numerical Solutions in Control Problems". *Anais do V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Vol.C: 034-043.

Rios Neto, A. (1979). "Estimação Linear Ótima Aplicada à Geração de Método Direto de Busca em Otimização de Parâmetros". *Anais do V Congresso de Engenharia Mecânica*, Vol. D: 240-246.

Willianson, W.E. (1971). "Use of Polynomial Approximations to Calculate Suboptimal Controls". *AIAA Jornal*, Vol.9, nº11: 2271-2273.

ERRATA

Ref.: 3º Congresso Brasileiro de Automática.

Título do Trabalho: Estimação Linear Ótima Aplicada à Geração de Soluções Numéricas Subótimas em Problemas de Controle de Sistemas Dinâmicos (pág. 123).

Autor: Atair Rios Neto

Correções:

1. A expressão para C_k, logo abaixo da equação (3.7), pág. 124, deve ser corrigida para:

$$C_k \triangleq \int_{t_{k-1}}^{t_k} S(\bar{t}_f,s).B(s).(s-t_{k-1})/(t_k-t_{k-1})\ ds + $$
$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} S(\bar{t}_f,s).B(s).(t_{k+1}-s)/(t_{k+1}-t_k)\ ds$$

2. A expressão para $\alpha^2_{\ell j}$, correspondente à equação (4.6), deve ser corrigida para:

$$\alpha^2_{\ell j} = \frac{1}{12\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (p.(L_{\bar{v}})_i)^2,\ j = 1,2,\ldots,\ell.$$