

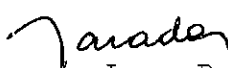


1. Publicação nº <i>INPE-3257-TDL/177</i>	2. Versão	3. Data <i>Agosto, 1984</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DRH-DMC</i>	Programa <i>FRH/CEA</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>SISTEMAS INERCIAIS AUXILIADOS DETERMINAÇÃO DE ATITUDE DE SATÉLITES ESTIMAÇÃO ESTOCÁSTICA DE ESTADOS E SISTEMAS DINÂMICOS</i>			
7. C.D.U.: <i>681.5.015.42:629.7.062.2</i>			
8. Título <i>ANÁLISE E SIMULAÇÃO DE UM SISTEMA INERCIAL (STRAPDOWN) DE DETERMINAÇÃO DE ATITUDE AUXILIADO POR ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA DA DERIVA</i>		10. Páginas: <i>138</i>	
		11. Última página: <i>E.3</i>	
		12. Revisada por	
9. Autoria <i>Nei Cardoso Cardenuto</i>		 <i>Atair Rios Neto</i>	
		13. Autorizada por	
Assinatura responsável 		 <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor Geral	
14. Resumo/Notas <i>A determinação de atitude de veículos com sistemas inerciais auxiliados, do tipo "strapdown", consta basicamente de: (a) propagação de atitude utilizando medidas de sensores inerciais; e (b) reinicialização periódica da atitude e de parâmetros de calibração dos sensores inerciais, através da utilização de sensores não-inerciais e respectivos procedimentos de determinação de atitude. Neste trabalho, a partir da análise e simulação de sistemas deste tipo para utilização em satélites, implementa-se e testa-se um procedimento de estimação de atitude e de parâmetros de calibração (erros de medida em girômetros). A partir da adoção de um modelo estocástico para a propagação da atitude, utiliza-se o Filtro Estendido de Kalman com procedimento adaptativo de estimação do ruído no estado, num esquema de filtragem direta onde a frequência de filtragem é sensivelmente menor do que a frequência de propagação. Os resultados obtidos pela simulação digital constituem uma qualificação preliminar do procedimento para o caso de determinação de atitude de satélites artificiais.</i>			
15. Observações <i>Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial, aprovada em 31 de julho de 1984.</i>			

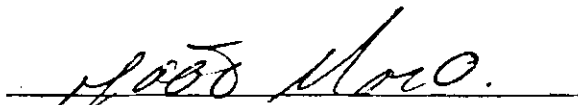
ABSTRACT

The attitude determination of space vehicles equipped with aided inertial systems, such as strapdown, consists basically of: (a) propagation of attitude utilizing measures of inertial sensors, (b) periodical reinitialization of the attitude and parameters of calibration of the inertial sensors, through the use of non-inertial sensors and respective attitude determination procedures. In this work, starting from the analysis and simulation of systems like this for satellite use, it is implemented and tested a procedure for attitude estimation of the calibration parameters (measurement errors in gyros). A stochastic model for attitude propagation is adopted and the extended Kalman filter is used with an adaptive procedure for estimation of the noise in the state, in a scheme of direct filtering whose frequency is slightly less than that of propagation. The results obtained by digital simulation constitute a preliminar qualification of the procedure for the case of attitude determination of artificial satellites.

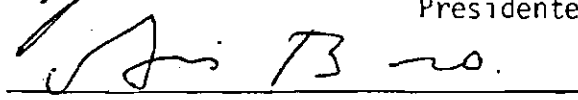
Aprovada pela Banca Examinadora

Em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Ciência Espacial

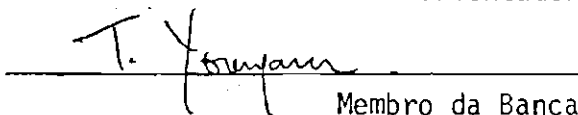
Dr. João Moro


Presidente

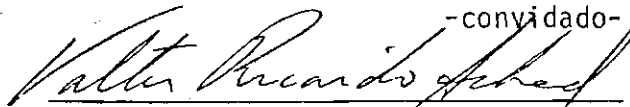
Dr. Atair Rios Neto


Orientador

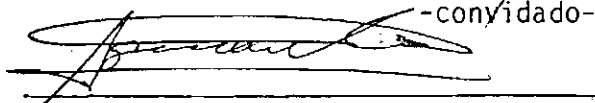
Dr. Takashi Yoneyama


Membro da Banca
-convidado-

Engº Valter Ricardo Schad, Mestre


Membro da Banca
-convidado-

Engº Amauri Silva Montes, Mestre


Membro da Banca

Candidato: Nei Cardoso Cardenuto

São José dos Campos, 31 de julho de 1984

Na Universidade, toda grande tese é adiada até que o autor atinja um julgamento imparcial e um perfeito conhecimento. Se um cavalo pudesse esperar o mesmo tempo pelas suas ferraduras, pagando-as antecipadamente, nossos ferreiros seriam todos reitores.

O cérebro de um tolo digere a filosofia em tolice, a ciência em superstição, a arte em pedantismo. Daí a educação universitária.

Ninguém pode ser um especialista puro sem ser no sentido estrito um tolo.

BERNARD SHAW

•
• •

À Bruna, ao Luiz Henrique
e à Márcia Maria.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Atair Rios Neto pela dedicada orientação deste trabalho e colaboração constante sempre que solicitado.

Aos colegas Valdemir Carrara e HÉlio Koiti Kuga pela facilidade de implementação proporcionada pelas rotinas básicas de apoio, sem o que o procedimento de testes estaria prejudicado.

Aos membros da Banca Examinadora pelas sugestões relevantes por ocasião da apresentação preliminar do trabalho.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	xiii
LISTA DE TABELAS	xv
LISTA DE SÍMBOLOS	xvii
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
1.1 - Considerações gerais	1
1.2 - Considerações sobre o trabalho	2
<u>CAPÍTULO 2 - SISTEMAS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL</u>	3
2.1 - Introdução	3
2.2 - Considerações sobre girômetros	7
2.3 - Tipos de girômetros	10
2.3.1 - Girômetro integrador	10
2.3.2 - Girômetro sintonizado	11
2.3.3 - Girômetro a laser	13
2.3.4 - Outros girômetros	15
2.4 - Configurações básicas de sistemas de navegação inercial ...	16
2.5 - Realização prática de sistemas de navegação inercial	22
<u>CAPÍTULO 3 - ESTIMAÇÃO ÓTIMA EM NAVEGAÇÃO E DETERMINAÇÃO DE ATITUDE</u> <u>DE</u>	27
3.1 - Introdução	27
3.2 - Sistemas de Navegação Inercial Auxiliado (SNIA)	28
3.3 - Determinação de atitude através do Filtro Estendido de Kalman e estimação adaptativa do nível de ruído dinâmico	31
3.3.1 - Introdução	31
3.3.2 - Cinemática de atitude	31
3.3.3 - Propagação de atitude	36
3.3.4 - Determinação das matrizes de transição de estado e ruído.	37
3.3.5 - Esquema de filtragem adaptativa	39
3.3.6 - Equação das observações	42

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO 4 - GIRÔMETRO INTEGRADOR</u>	47
4.1 - Modelo de avaliação	47
4.2 - Eletrônica de torqueamento	58
<u>CAPÍTULO 5 - RESULTADOS E CONCLUSÕES</u>	63
5.1 - Esquema e dados de simulação	63
5.1.1 - Simulação de atitude	65
5.1.2 - Simulação das observações	66
5.1.3 - Simulação do girômetro	66
5.2 - Resultados obtidos	67
5.3 - Efeitos das não-linearidades	76
5.4 - Conclusões sobre o modelo de deriva de girômetros	77
5.5 - Conclusões e uma alternativa sobre o modelo de propagação e filtragem utilizado	80
5.6 - Sugestões	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89
APÊNDICE A - DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES $\phi(t, t_0)$ E $\Gamma(t, t_0)$.	
APÊNDICE B - FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN E PROCESSAMENTO SEQUEN CIAL.	
APÊNDICE C - TÉCNICA DE RUÍDO ADAPTATIVO.	
APÊNDICE D - MODELO DE AVALIAÇÃO (GIRÔMETRO INTEGRADOR) E DESEN VOLVIMENTO DE EQUAÇÕES.	
APÊNDICE E - EQUAÇÃO DAS OBSERVAÇÕES.	

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Acelerômetro pendular básico	4
2.2 - Acelerômetro massa-mola básico	4
2.3 - Acelerômetro pendular realimentado	5
2.4 - Acelerômetro massa-mola realimentado	5
2.5 - Navegação	6
2.6 - Girômetro básico	8
2.7 - Girômetro sintonizado	12
2.8 - Girômetro a laser	14
2.9 - Sistema inercial	16
2.10 - Sistema horizontal local	17
2.11 - Sistema móvel	17
2.12 - Plataforma inercial convencional	19
2.13 - Plataforma inercial "strapdown" (solidária)	19
2.14 - Navegação convencional	22
2.15 - Forças atuantes no acelerômetro básico	23
2.16 - Navegação "strapdown"	24
3.1 - Filtragem direta	29
3.2 - Filtragem indireta	29
3.3 - Algoritmo de determinação de atitude	41
3.4 - Evolução do algoritmo no tempo	41
3.5 - Algoritmo de filtragem adaptativa	42
3.6 - Ângulos entre os versores de (x,y,z) com as direções OS e OT	43
4.1 - Esquema básico do giro integrador	48
4.2 - Desalinhamento do "float" em relação ao "case"	49
4.3 - Desalinhamento do rotor em relação ao anel	50
4.4 - "Float" (anel e rotor) do girômetro	53
4.5 - Anisoeelasticidade	54
4.6 - Aspectos comparativos das fontes de erros em girômetros ..	57
4.7 - Malha de torqueamento de girômetros	59
4.8 - Malha de torqueamento analógica	59

4.9 - Disposição dos eixos dos girômetros em relação aos eixos do veículo	61
5.1 - Esquema de simulação	63
5.2 - Modelo de avaliação e modelo de trabalho	64
5.3 - Velocidades angulares real e medida (dinâmica lenta): a) eixo x; b) eixo y; c) eixo z	70
5.4 - Dinâmica lenta: a) erro em quatêrnion; b) erro em deriva; c) resíduo normalizado; d) deriva no eixo x; e) deriva no eixo y; f) deriva no eixo z	71
5.5 - Velocidades angulares real e medida (dinâmica média): a) eixo x; b) eixo y; c) eixo z	73
5.6 - Dinâmica média: a) erro em quatêrnion; b) erro em deriva; c) resíduo normalizado; d) deriva no eixo x; e) deriva no eixo y; f) deriva no eixo z	74
5.7 - Fontes de erros do girômetro	78
5.8 - Modelo de avaliação do girômetro	79
5.9 - Erros predominantes na simulação	80
5.10 - Dinâmica lenta: a) erro em quatêrnion; b) erro em deriva; c) resíduo normalizado; d) deriva no eixo x; e) deriva no eixo y; f) deriva no eixo z	82
5.11 - Dinâmica média: a) erro em quatêrnion; b) erro em deriva; c) resíduo normalizado; d) deriva no eixo x; e) deriva no eixo y; f) deriva no eixo z	84

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Aspectos comparativos entre sistemas de navegação convencional e "strapdown"	21
5.1 - Parâmetros específicos de um girômetro integrador	67
5.2 - Resultados da simulação	68

LISTA DE SÍMBOLOS

A	- Aceleração absoluta do veículo.
A_C	- Aceleração centrípeta.
A_{Cz}	- Aceleração do coriolis.
A_ℓ	- Aceleração linear.
A_m	- Aceleração medida.
B	- Constante de viscosidade.
\bar{B}	- Matriz de rotação em quatérnions.
b	- Vetor das componentes de deriva.
C	- Tensor de elasticidade.
C_a^b	- Matriz de rotação das coordenadas a para b.
d	- Vetor distância entre centro de massa e centro geométrico do rotor do girômetro.
$F(W,A)$	- Função genérica do vetor W e do vetor A .
g	- Aceleração gravitacional local.
H	- Momento angular total.
H_r	- Momento angular do rotor do girômetro.
$h(x)$	- Função vetorial da observação.
$H(x)$	- Matriz das derivadas parciais da observação.
I_{ii}, I_{oo}, I_{ss}	- Momentos de inércia relativos ao girômetro.
I_{io}, I_{is}, I_{os}	- Produtos de inércia relativos ao girômetro.
I_{osg}, I_{sig}	- Produtos de inércia do "gimbal".
I_{iir}, I_{oor}	- Momentos de inércia do rotor.
I_x, I_y, I_z	- Momentos de inércia do satélite.
$i(t)$	- Corrente elétrica.
K	- Constante de elasticidade.

K_1, K_T	- Ganhos escalares.
K_k	- Vetor ganho de Kalman no instante t_k .
$K(W)$	- Função genérica do vetor W .
M	- Torque.
M_0	- Torque no eixo 0.
M_t	- Torque gerado pelo gerador de torque.
M_k	- Vetor pseudo-observações em t_k .
m	- Massa do rotor do girômetro.
n	- Vetor de ruído no estado.
n_1, n_2	- Partição do vetor n .
P	- Matriz de covariância do erro no estado.
Q	- Matriz de covariância do ruído no estado.
q	- Vetor das componentes do quatérnion.
R	- Matriz de covariância do ruído nas observações.
r	- Resíduo da observação.
r_v	- Resíduo verdadeiro.
S_x, S_y, S_z	- Versores representativos da direção satélite-Sol.
T_x, T_y, T_z	- Versores representativos da direção satélite-Terra.
u	- Vetor das medidas dos girômetros nos três eixos.
v	- Vetor de ruído nas observações.
x	- Vetor de estado.
Y	- Vetor de observações.
$Z(q)$	- Matriz composta pelo quatérnion.
z_k	- Vetor pseudo-observações em t_k .
W	- Vetor velocidade angular.
w	- Vetor velocidade angular.

$\alpha_{0,i,s}, \beta_{0,i}$	- Ângulos relativos ao desalinhamento interno dos girômetros.
$\alpha_{x,y,z}$	- Ângulos relativos aos co-senos diretores da direção satélite-Terra.
$\beta_{x,y,z}$	- Ângulos relativos aos co-senos diretores da direção satélite-Sol.
$\gamma_{x,y,z}$	- Ângulos relativos aos desalinhamentos externos do bloco girométrico.
δ	- Incremento.
σ	- Constante de decaimento.
σ_0	- Desvio padrão da medida de observação.
$\Omega(\omega)$	- Matriz composta pelas velocidades angulares.
ω	- Velocidade de rotação do rotor do girômetro.
ω_d	- Frequência natural amortecida.
α_0	- Ângulo de "pickoff".
$\theta(t, t_0)$	- Matriz de transição do quatérnio.
$\phi(t, t_0)$	- Matriz de transição do estado.
$\psi(t, t_0)$	- Partição da matriz $\phi(t, t_0)$.
$\Gamma(t, t_0)$	- Matriz de propagação do ruído.
$\Sigma(t, t_0)$	- Partição da matriz $\Gamma(t, t_0)$.
Δq	- Erro real em quatérnio.
Δb	- Erro real em deriva.
$\Delta \tilde{q}$	- Erro estimado em quatérnio.
$\Delta \tilde{b}$	- Erro estimado em deriva.
$(\cdot)_k$	- Grandeza no instante t_k .
$E[\cdot]$	- Operador expectativa.
$(\cdot)_{ab}^c$	- Grandeza de b em relação a a nas coordenadas c.

- $\hat{\cdot}$ - Denota valor estimado.
- $\bar{\cdot}$ - Denota valor de referēncia.
- $\vec{\cdot}$ - Denota grandeza vetorial.
- $\dot{\cdot}$ - Denota derivada no tempo.
- \perp - Denota perpendicularidade.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Sistemas de navegação inercial atualmente são de importância fundamental para aplicação em veículos espaciais, marítimos e mesmo terrestres, sendo suas principais vantagens a autonomia, a insensibilidade às condições meteorológicas, a orientação praticamente contínua e a disponibilidade geográfica sem limitações. Após uma breve introdução neste capítulo sobre os problemas envolvidos, natureza deste trabalho bem como seus objetivos dentro do contexto da área, são abordados no Capítulo 2 aspectos mais específicos sobre sistemas de navegação inercial e sensores inerciais. No Capítulo 3 são apresentados sistemas de navegação inercial auxiliados, propagação de atitude e estimação de estados, e o esquema de trabalho utilizado. No Capítulo 4 apresenta-se o modelo de avaliação do girômetro integrador utilizado na simulação, suas fontes de erros e considerações sobre a eletrônica associada. No Capítulo 5 são apresentados testes e críticas inerentes, considerações sobre não-linearidades envolvidas, conclusões sobre modelo de girômetros e sugestões para aprimoramento, e continuidade deste trabalho.

1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Satélites para aplicações mais específicas normalmente necessitam manter equipamentos ópticos e antenas apontados para alguma direção e com precisão preestabelecida; assim, é necessário um sistema capaz de executar uma ação de controle com a finalidade de manter a apontagem, ou seja, um controle de atitude. Porém, para o bom desempenho do procedimento, é fundamental a determinação da atitude do veículo (Wertz, 1978; Lopes, 1982), a qual é o assunto tratado neste trabalho.

1.2 - CONSIDERAÇÕES SOBRE O TRABALHO

O procedimento utilizado neste trabalho (Lefferts et alii, 1982), aliado ao Filtro Estendido de Kalman e teoria de estimação adaptativa do nível de ruído na dinâmica (Rios Neto e Kuga, 1982), tem como um dos objetivos avaliar a possibilidade de realizar propagação de atitude com sensores inerciais auxiliados periodicamente por sensores de atitude não-inerciais.

Em resumo, como objetivos considerados principais, podem-se citar:

- a) Familiarizar-se com sistemas de navegação inercial, mais propriamente um estudo sobre sensores inerciais, suas fontes de erros e aplicações específicas.
- b) Desenvolver um modelo de avaliação aplicável à simulação digital.
- c) Analisar material bibliográfico com a finalidade de determinar as necessidades para o desenvolvimento da área.
- d) Desenvolver, como um primeiro estágio, um procedimento realizável para a determinação de atitude a bordo de veículos espaciais.

As situações simuladas foram orientadas no sentido de acentuar os erros envolvidos a fim de verificar seus níveis, bem como produzir correlações entre as medidas dos sensores inerciais; panes não-fatais foram simuladas com o objetivo de sugerir um procedimento estocástico de alinhamento automático a bordo.

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

Neste capítulo são considerados conceitos básicos sobre navegação inercial. Inicialmente é abordado o acelerômetro básico, conceitos sobre navegação e, a seguir, é descrito um girômetro usual com definições inerentes às suas partes principais. Vários tipos de girômetros são mostrados envolvendo mecanismos de origem diferentes, tais como, girômetro sintonizado, girômetro a laser, etc. Com o conhecimento da natureza dos sensores inerciais são introduzidas configurações de sistemas de navegação, sistemas de coordenadas utilizados e os dois tipos de mecanizações existentes, denominados plataforma inercial física e plataforma inercial analítica ("strapdown"). Aspectos referentes a estas duas configurações são compilados e reunidos em uma tabela comparativa. Na sequência são abordadas realizações das duas configurações.

2.1 - INTRODUÇÃO

Um sistema de navegação em geral é definido com um sistema capaz de fornecer a posição de um veículo em relação a um referencial a cada instante. Já um Sistema de Navegação Inercial (SNI) é aquele capaz de determinar a posição do veículo a partir de medidas do movimento obtidas por sensores inerciais, ou seja, sensores que utilizam propriedades inerciais. Assim sendo, se a aceleração inercial a que está sujeito o veículo for conhecida, tanto em magnitude quanto em direção, é possível realizar uma integração numérica a partir de condições iniciais, obtendo-se a velocidade e a posição do veículo. Para a obtenção das medidas de magnitude da aceleração, o princípio básico é simples: qualquer massa é sensível à aceleração, assim existem diversos tipos de sensores de aceleração ou acelerômetros, fundamentados em sistemas pendulares ou sistemas massa-mola (Figuras 2.1 e 2.2).

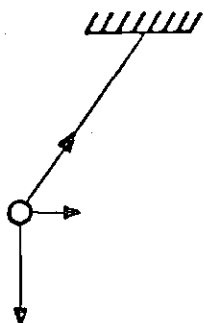


Fig. 2.1 - Acelerômetro pendular básico.

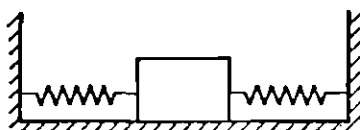


Fig. 2.2 - Acelerômetro massa-mola básico.

É evidente que acelerômetros envolvem sofisticações, visto que qualquer erro na medida de aceleração será propagado pela integração numérica; no entanto vale ressaltar que qualquer acelerômetro engloba um dos princípios básicos citados (massa-mola ou pendular). Um exemplo de um estágio de sofisticação dos sistemas anteriores é mostrado nas Figuras 2.3 e 2.4, onde a realimentação visa manter os deslocamentos próximos do nulo, o que evita não-linearidades, obtendo-se ainda uma maneira de extrair medidas elétricas correspondentes. Considerações mais detalhadas sobre medidas de aceleração serão abordadas na Seção 2.5.

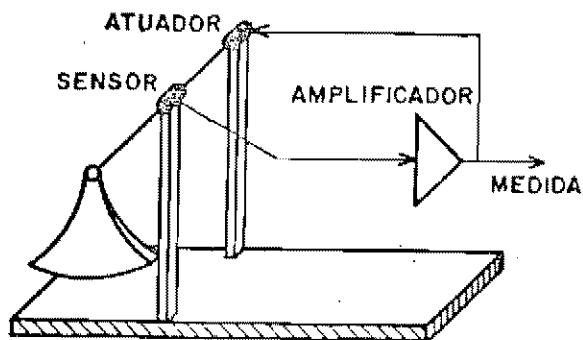


Fig. 2.3 - Acelerômetro pendular realimentado.

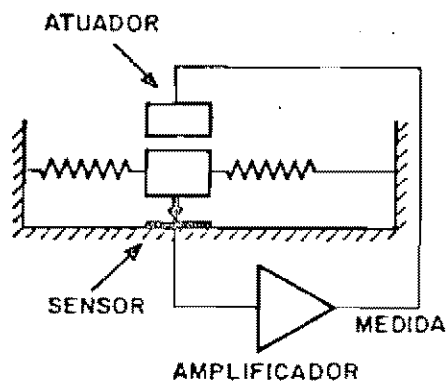


Fig. 2.4 - Acelerômetro massa-mola realimentado.

Ainda sobre as medidas de aceleração, há necessidade, como dito, do conhecimento da direção, ou seja, devem existir direções de referência fixas em algum sistema de coordenadas. Esta referência é obtida utilizando giroscópios que, a princípio, mantêm o eixo de rotação do rotor apontado em uma direção preestabelecida. Na Figura 2.5 um aspecto generalizado sobre navegação é mostrado.

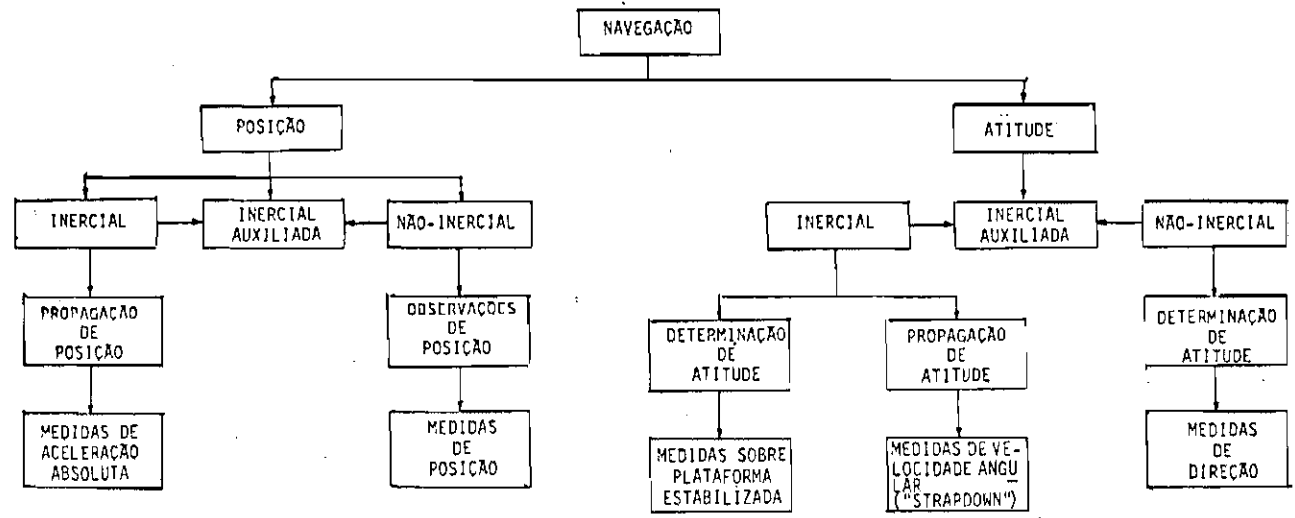


Fig. 2.5 - Navegação.

Concluindo, nota-se que no sentido conceitual do assunto, sã serã possível realizar navegaçãõ se existir alguma referênciã que se mantenha fixa independente de qualquer referencial, ou seja, alguma grandeza física constante em qualquer sistema de coordenadas como massa e velocidade da luz (sensores a laser); sendo estas duas grandezas atualmente as bases de qualquer sensor inercial, como ficarã esclarecido em seções posteriores.

2.2 - CONSIDERAÇÕES SOBRE GIRÔMETROS

Para que um giroscópio permaneça apontado em uma dada direção indefinidamente, hã a necessidade de que o rotor seja uma massa perfeitamente balanceada girando a uma velocidade constante sem praticamente ter contatos com o meio, ou seja, um girômetro ideal. Mas na realidade, desde que existe um motor para acionar o rotor que estã apoiado em mancais, e um dispositivo sensor com a finalidade de extrair medidas, surgem inúmeros fenômenos que ocasionam torques indesejãveis, levando o instrumento a sofrer um desvio da direção inicialmente apontada, ou seja, hã uma tendênciã de perda de referênciã, comumente denominada deriva ("drift") do instrumento. Assim sendo, hã uma motivação para o desenvolvimento de sensores mais sofisticados, visando minimizar os efeitos indesejãveis, reduzindo na medida do possível a ocorrênciã de derivas.

Quanto ao princípio básico de um girômetro, como o prôprio nome sugere, trata-se de um instrumento sensível a movimentos de rotaçãõ, o qual fornece medidas relativas às variações de atitude. Um esquema básico de montagem consta de um rotor suspenso em um anel que ê apoiado em mancais no invólucro do instrumento (Figura 2.6).

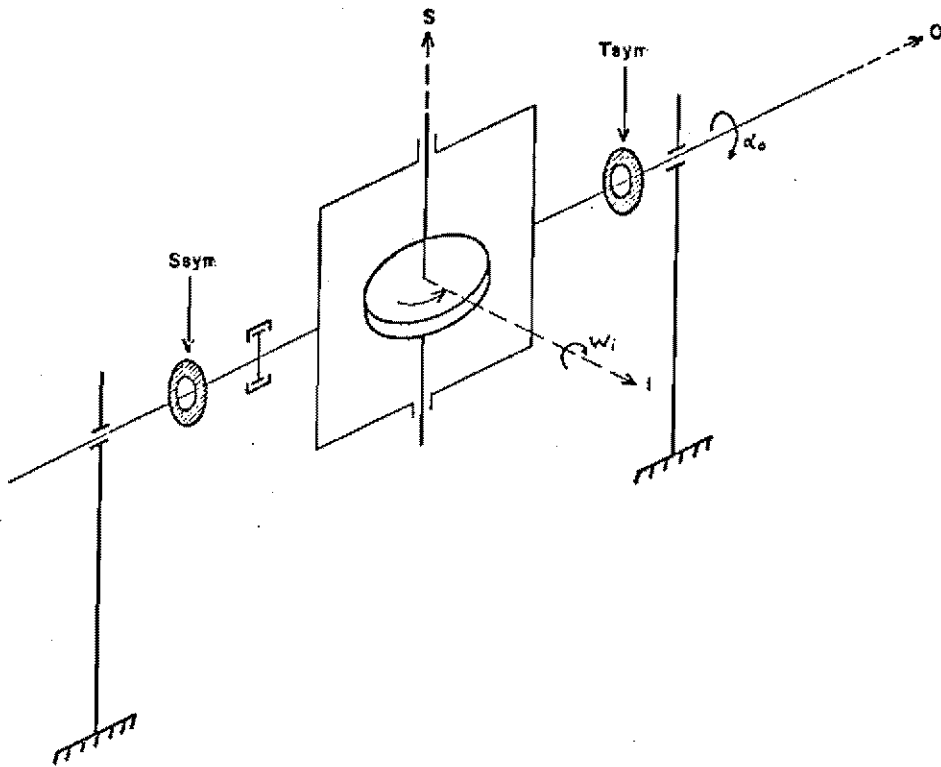


Fig. 2.6 - Girômetro básico.

O rotor gira acionado por um motor em torno do eixo de rotação s e é suspenso em um anel que gira em torno do eixo de saída o ; i é o eixo de entrada do girômetro. O rotor fornece um momento angular H_r na direção s . Efeitos de elasticidade e viscosidade são considerados. Os símbolos S_{syn} e T_{syn} são respectivamente "syncros", sensor de deslocamento angular, e motor de torque, onde S_{syn} mede o ângulo α_0 e T_{syn} mantém α_0 próximo do nulo em um procedimento que será posteriormente esclarecido.

Seja:

- α_0 - o ângulo medido a partir da posição $s \perp i$,
- ω_i - a velocidade angular no eixo de entrada i ,
- H_r - o momento angular do rotor do girômetro,

M_o - o torque giroscópico desenvolvido no eixo de saída o , e desde que α_o ("pickoff") é mantido pequeno, e ainda supondo H_r constante, tem-se:

$$M_o \cong W_i \cdot H_r \cdot \text{sen}(90^\circ - \alpha_o) , \text{ ou}$$

$$M_o \cong W_i \cdot H_r :$$

O torque M_o induz uma reação viscosa e elástica da forma:

$$M_o = -K \cdot \alpha_o - B \cdot \dot{\alpha}_o ,$$

ou seja:

$$W_i = - \left\{ \frac{K}{H_r} \right\} \alpha_o - \left\{ \frac{B}{H_r} \right\} \dot{\alpha}_o .$$

Se a elasticidade K é acentuada em relação à viscosidade B , então:

$$W_i = - \left\{ \frac{K}{H_r} \right\} \alpha_o ,$$

onde $B \ll K$, daí:

$$\alpha_o = - \left\{ \frac{H_r}{K} \right\} W_i ,$$

ou seja, o ângulo α_o ("pickoff") no eixo de saída é proporcional à velocidade angular de entrada, desta forma tem-se o chamado girômetro ou "rate-gyro". Por outro lado, se a viscosidade for significativa e a elasticidade desprezível:

$$W_i = - \left(\frac{B}{H_r} \right) \dot{\alpha}_0 ,$$

onde $K \ll B$, daí:

$$\alpha_0 = - \left(\frac{H_r}{B} \right) \int W_i dt ,$$

ou seja, o ângulo de saída será proporcional ao deslocamento angular do eixo de entrada no intervalo medido; desta forma tem-se o girômetro integrador ou "rate-integrating-gyro". Vale observar que neste caso os efeitos da elasticidade e viscosidade podem ser obtidos de várias maneiras, de natureza física diferentes. Assim sendo, qualquer dispositivo sensor a variações angulares obedece as denominações anteriores quanto ao significado de suas medidas. Expressões mais abrangentes do que as já relacionadas serão desenvolvidas no Capítulo 4.

2.3 - TIPOS DE GIRÔMETROS

Existe uma série de girômetros em fase operacional como o "floating-gyro" ou giro integrador, "dry-tuned-gyro" ou giro sintonizado, "eletrostatic-suspended-gyro" ou giro com suspensão eletrostática; em fase experimental existem os girômetros a laser e o de ressonância nuclear magnética. A seguir descreve-se sucintamente cada um deles.

2.3.1 - GIRÔMETRO INTEGRADOR

Pode-se dizer que este foi o primeiro girômetro a ser desenvolvido, e desde a fase de pesquisa até os dias de hoje conta-se aproximadamente 30 anos (Koning, 1978); consta basicamente de uma montagem semelhante à Figura 2.6, onde o rotor e o anel são selados e imersos em um fluido de alta densidade. Desta maneira, o conjunto fica praticamente flutuando, além de estar apoiado nos mancais do invólucro.

O efeito de viscosidade acentuada, como visto na Seção 2.2.1, faz com que a saída seja uma medida de incrementos de ângulos no eixo de entrada; assim o ângulo de saída ("pickoff") é a integral da velocidade no eixo de entrada. O princípio de funcionamento não apresenta novidades, mas para atingir precisões elevada, ou seja, derivas de décimos de grau por hora, o problema de construção torna-se crítico. Além do problema citado, pode-se avaliar a dificuldade envolvida neste sistema em se tratando do fluido, pois efeitos como temperatura, vibrações, têm influência significativa no desempenho destes giros.

Porém, como foi um dos precursores, existe a vantagem de uma estrutura de produção e testes em fase operacional, portanto com custos otimizados, onde possíveis modificações têm por objetivo somente melhorar o dispositivo. Assim sendo, justificam-se hoje as aplicações destes sensores em veículos, como os lançadores DELTA e AGENA, citados por Savage (1978), e no desenvolvimento do satélite MIRANDA (Jude, 1977).

A medida que um sensor é construído para precisões maiores, é evidente que os erros na sua montagem devem ser, no máximo, da mesma ordem de grandeza do erro na medida desejada; daí decorre uma série de problemas na sua fabricação que envolvem desde o material utilizado até as condições ambientais. Um modelo aproximado será desenvolvido posteriormente.

2.3.2 - GIRÔMETRO SINTONIZADO

Como o próprio nome original sugere, este girômetro envolve um novo conceito de operação; trata-se a princípio de dois anéis concêntricos ligados ao eixo motor da forma de uma junta universal como na Figura 2.7.

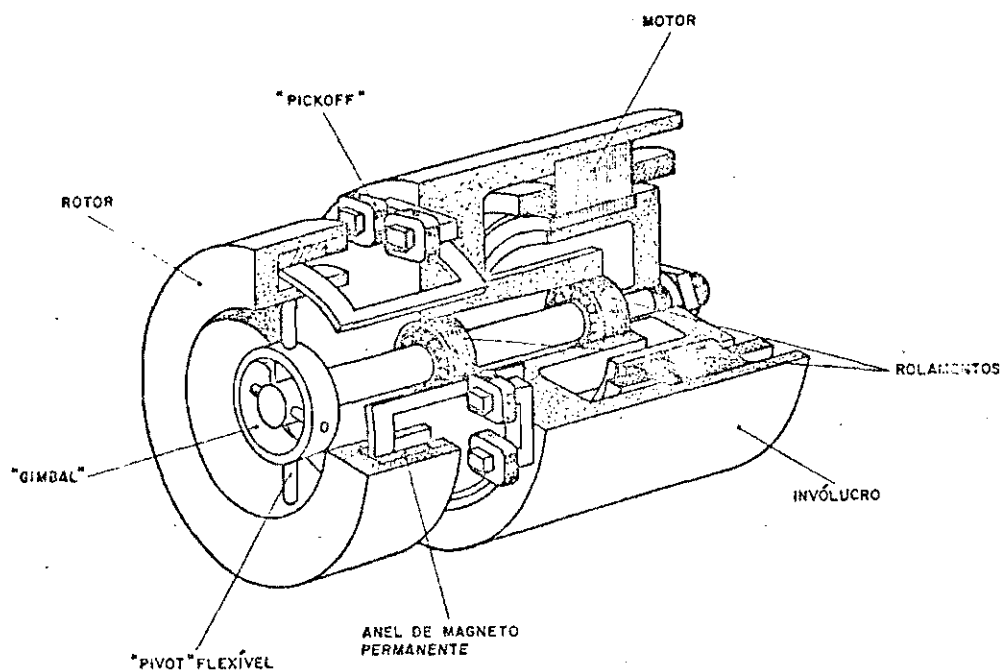


Fig. 2.7 - Girômetro sintonizado.

Admite-se inicialmente que a junta universal está acoplada por barras e rolamentos, permitindo total liberdade de movimento. O conjunto é feito de maneira que o anel externo (rotor) possua momento de inércia superior ao do anel interno ("gimbal").

Quando o conjunto gira, o rotor tende a manter seu plano de rotação; porém ocorrendo uma mudança de orientação (atitude) do conjunto, o acoplamento entre os anéis e o motor produz uma oscilação até que os anéis (rotor e "gimbal") assumam o novo plano de rotação. A análise dinâmica mostra que o torque de reação sobre o rotor possui uma componente que é proporcional ao deslocamento angular ("pickoff"), porém de natureza elástica com coeficiente negativo (Savage, 1978). Agora, se ao invés de barras acopladas por rolamentos, estas forem fixadas nos anéis e ainda possuírem elasticidade torsional de mesmo valor da gerada dinamicamente, observa-se que os efeitos se anulam ocasionando assim um desacoplamento do rotor em relação ao eixo motor como se estivesse fisicamente desacoplado deste (Craig, 1972 a e b; Savage, 1978).

Como a elasticidade gerada dinamicamente depende da velocidade de rotação do motor, é possível, uma vez conhecidas as propriedades torsionais das barras, *sintonizar* a rotação do motor até que haja desacoplamento dinâmico do rotor, daí a denominação girômetro sintonizado ("dynamically-tuned-gyro").

Comparando o giro sintonizado com o giro integrador, apesar da análise superficial nos dois casos, é notória a vantagem em termos tecnológicos do giro sintonizado, pois não possui líquidos ("dry-tuned-gyro") como no caso do "floating-gyro", contém menor número de peças, a influência da temperatura é bem menor e possui dois eixos de entrada e dois eixos de saída, enquanto o giro integrador conta somente com um eixo de entrada e um eixo de saída. Vale frisar também que a principal fonte de erros em girômetros se deve ao acoplamento entre eixos, como será visto adiante, e neste caso o giro sintonizado leva grande vantagem (Joos, 1977).

Como não é objetivo deste trabalho a análise minuciosa do giro sintonizado, maiores detalhes podem ser encontrados nos trabalhos de Savage (1978) e Craig (1972 a e b), onde no primeiro é desenvolvido um modelo matemático simplificado, e o segundo utiliza formalismo de análise em frequência para chegar ao modelo de erros.

2.3.3 - GIRÔMETRO A LASER

Este dispositivo envolve técnicas completamente diferentes dos giros mecânicos, mas utiliza a propriedade básica da velocidade da luz citada no final da Seção 2.1.

Trata-se de uma cavidade laser com os mesmos princípios básicos de uma cavidade convencional, mas na forma triangular como mostrado na Figura 2.8, possuindo três espelhos. Nesta configuração a cavidade permite oscilação nos dois sentidos, cuja frequência é determinada pelo comprimento (perímetro do triângulo) da cavidade.

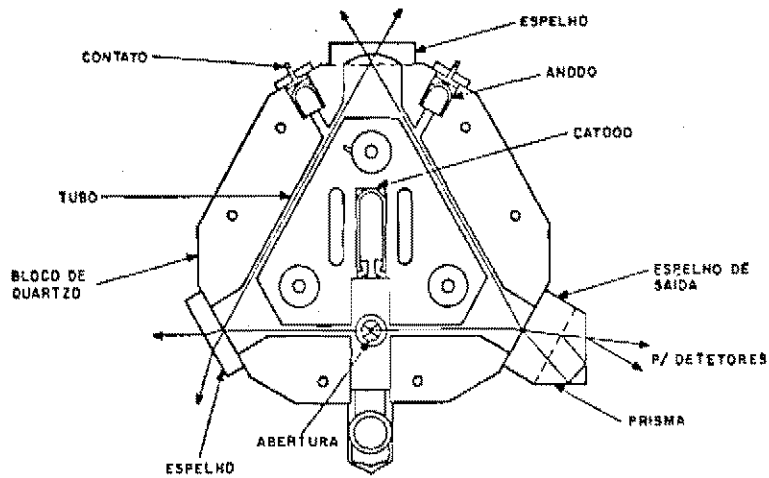


Fig. 2.8 - Girômetro a laser.

Quando o conjunto gira, surge uma diferença de percurso dos feixes laser pelo efeito relativístico (efeito SAGNAC) (Nisbet and Scott, 1978), logo para um sentido a frequência de oscilação torna-se diferente da frequência do laser no outro sentido. Comparando os dois sinais percebem-se franjas de interferência devido à diferença das frequências; assim obtêm-se uma medida proporcional à rotação.

A princípio este sensor parece ser ideal, não possuindo os inconvenientes mecânicos dos outros giros, além de ser imune às acelerações, pois não possui massas móveis ou suspensas. Porém, existem vários fatores que colocam o giro laser com o mesmo nível de dificuldades encontradas nos outros giros.

O primeiro surge no fenômeno de zona cega ("lock-in"); trata-se de um acoplamento de modos de propagação devido ao fenômeno de espalhamento, e isto faz com que não haja diferença entre os dois feixes, não permitindo assim medidas em baixas velocidades (Nisbet and Scott, 1978).

As soluções encontradas são várias, porém a mais utilizada atualmente é a introdução de um "DITHER" mecânico. O "DITHER" envolve o mesmo princípio citado na maioria das referências sobre sistemas

não-lineares. Deste modo pode-se eliminar o efeito de zona cega com o inconveniente do aparato mecânico para fazer o conjunto vibrar.

Outro problema é a vedação da cavidade, pois é utilizado uma mistura de hélio e neônio, e como o hélio é um gás difícil de ser confinado há a necessidade de que a cavidade seja monolítica, envolvendo problemas tecnológicos altamente sofisticados. Por exemplo, o procedimento de perfuração do bloco (quartzo) é realizado por impacto e com brocas especiais.

Há também a tecnologia envolvendo os espelhos que devem ser de qualidade excepcional para evitar perdas por espalhamento. A colagem destes espelhos no bloco óptico é realizada por aderência, ou seja, polimento das superfícies e posterior contato, sendo este tipo de técnica conhecida como colagem molecular (forças de Van der Waals).

Para maiores detalhes podem-se citar: Killpatrick (1967), onde se faz uma abordagem genérica desde a construção até o problema de zona cega; Smith (1979), onde se mostra um tratamento sensivelmente mais detalhado; Edwards Jr. (1971), onde alguns dados de operação são fornecidos; Savage (1978) mostra o desenvolvimento de um modelo matemático simplificado; Levinson (1978) incorpora o modelo do giro laser em um sistema de navegação e realiza simulações.

2.3.4 - OUTROS GIRÔMETROS

Existem sensores em fase de pesquisa como por exemplo o giro laser com fibra óptica, giro de ressonância nuclear magnética (Kanesberg, 1978), que basicamente envolve momento angular molecular, vibragiros (Magnus, 1978). Em fase operacional existe também o giro eletrostático que consta de uma esfera de precisão elevadíssima suspensa em campo eletrostático girando por indução magnética (Christensen, 1966; Savage, 1978); este sensor atualmente é o mais preciso para aplicações em plataformas inerciais convencionais.

Concluindo nota-se a necessidade de procurar um equilíbrio entre sofisticação tecnológica, aplicações a que se destina e custos envolvidos, como também o desenvolvimento de "software" para tratar medidas contaminadas com a finalidade de diminuir a carga de exigências sobre o sensor, ou seja, um estudo de otimização reunindo todos estes fatores é fundamental.

2.4 - CONFIGURAÇÕES BÁSICAS DE SISTEMAS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

Como foi citado na Seção 2.1, um sistema de navegação necessita do conhecimento do vetor aceleração, ou seja, módulo e direção. Quanto ao sistema de coordenadas é importante sua escolha considerando o objetivo da missão, ou seja, deve-se utilizar um sistema que relacione, da maneira mais simples possível os referenciais inercial e a bordo do veículo (Britting, 1971; Broxmeyer, 1964). Baseados nestas considerações existem três sistemas de coordenadas que são mais utilizados: inercial, horizontal local e móvel.

a) Inercial

As medidas realizadas a bordo do veículo são tomadas em um referencial fixo apontado para uma estrela por exemplo (Figura 2.9). Através de mecanizações que serão vistas a seguir, os eixos dos sensores são mantidos neste referencial.

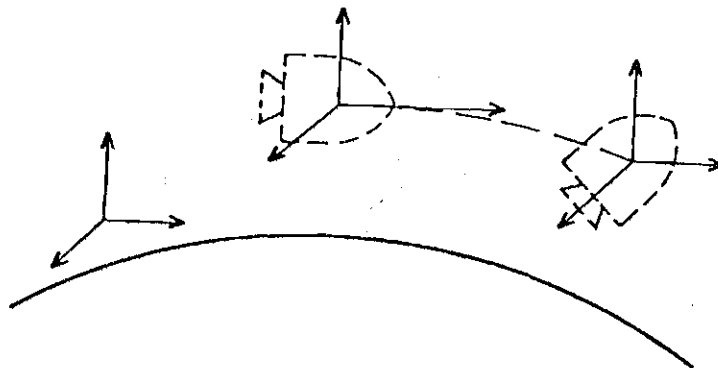


Fig. 2.9 - Sistema inercial.

b) Horizontal Local

Utilizado em veículos que navegam em altitudes desprezíveis em relação ao raio terrestre, como navios, aviões, satélites próximos, etc. Em resumo, é adequado quando se deseja uma fase do veículo sempre voltada para a superfície da Terra (Figura 2.10).

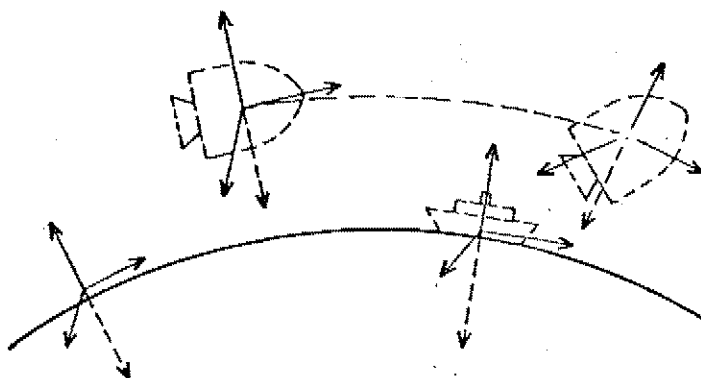


Fig. 2.10 - Sistema horizontal local.

c) Móvel

Utilizado para sistemas com outra configuração de sensores ("strapdown") a ser descrito adiante, onde o referencial está acoplado no próprio veículo (Figura 2.11).

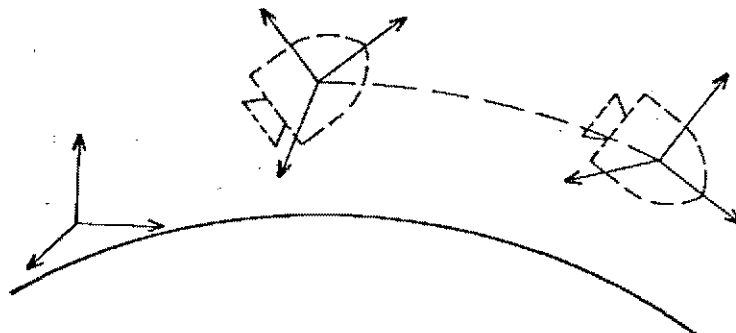


Fig. 2.11 - Sistema móvel.

Como visto nos casos anteriores, os sensores devem ser montados de tal maneira que seus eixos de entrada formem um sistema de coordenadas os quais definem duas configurações básicas: plataforma inercial convencional e plataforma inercial analítica ("strapdown").

A configuração de plataforma inercial física (convencional) realiza-se com a montagem dos sensores sobre uma base onde os eixos de entrada definem um triedro ortogonal. Esta base, comumente denominada *elemento estável* é suspensa por dois ou mais anéis concêntricos, como mostrado na Figura 2.12, permitindo movimentos em três graus de liberdade. Nota-se que se não existisse atritos, qualquer mudança de orientação (atitude) não seria transmitida ao elemento estável, porém como este está sujeito a torques transmitidos pelos apoios, deve ser mantido orientado de forma ativa.

Com a montagem dos girômetros formando um triedro ortogonal, pode-se detetar qualquer tendência de variação de atitude onde estes sinais são realimentados para os servomotores nos anéis (Figura 2.12) e assim obtêm-se um procedimento de orientação ativa do elemento estável. Em consequência os acelerômetros realizam medidas sempre em um referencial predeterminado.

A outra configuração é a denominada "strapdown" (solidária), citada na totalidade de referências sobre assunto. Trata-se da montagem dos sensores fixos no próprio veículo, formando um triedro ortogonal de preferência alinhado com os eixos principais de inércia do veículo (Figura 2.13).

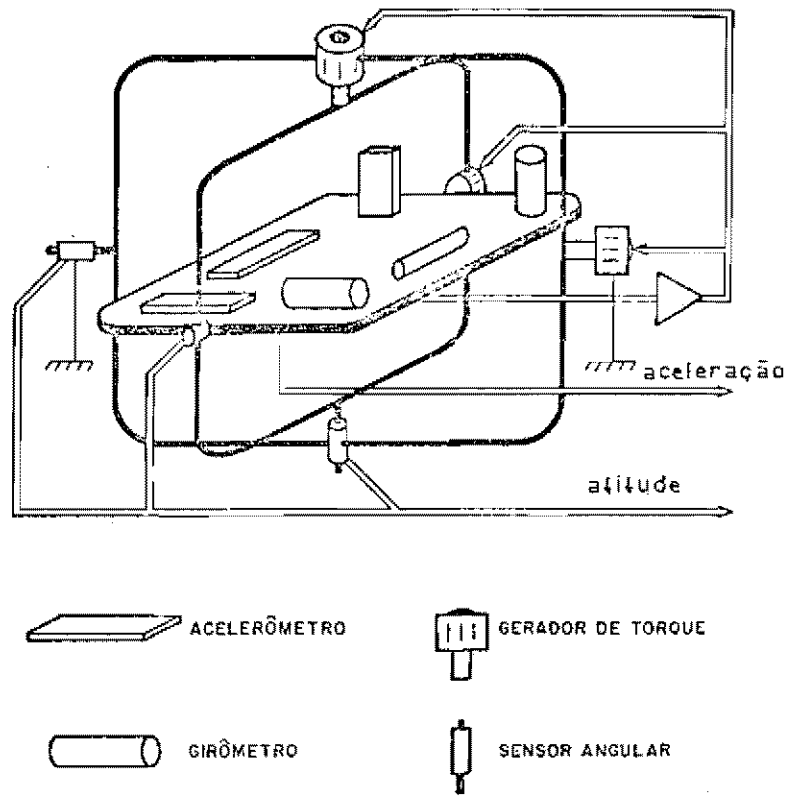


Fig. 2.12 - Plataforma inercial convencional.

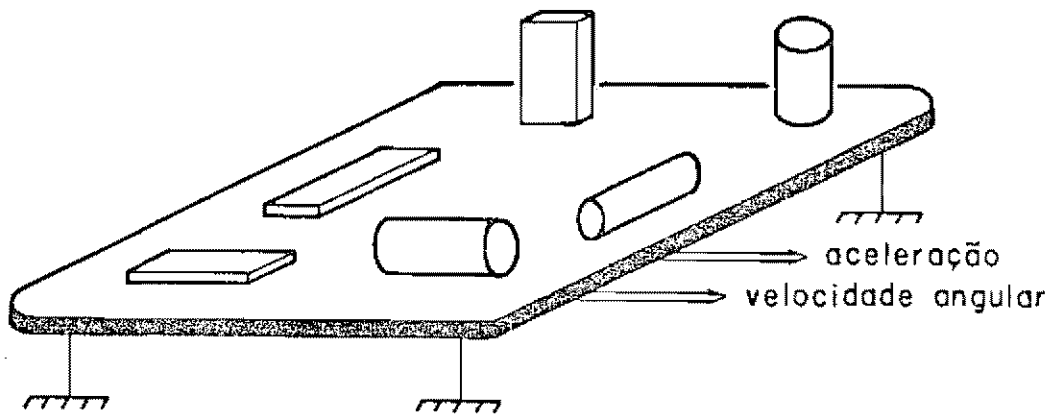


Fig. 2.13 - Plataforma inercial "strapdown" (solidária).

Nesta configuração, as medidas são tomadas no referencial móvel do próprio veículo, necessitando de transformação de coordenadas para o sistema de referência adotado, envolvendo assim uma tarefa adicional para o computador de bordo. Atualmente o bloco sensor consta de girômetros e acelerômetros, onde os primeiros têm a finalidade de fornecer medidas angulares e os acelerômetros exercem a mesma função citada anteriormente.

A necessidade de girômetros nesta configuração é discutível, pois, a princípio, com dois acelerômetros colocados a uma distância razoável dentro do veículo e alinhados em uma direção, é possível determinar rotações do veículo em um eixo; porém, no caso de rotações lentas como em satélites, a escala de medida atingiria valores com grande dificuldade de ser lidos por acelerômetros reais, mas já existe conjecturas em andamento para contornar estes problemas.

Retornando às configurações, nota-se que a diferença básica entre a plataforma física e a analítica reside na forma de manter um sistema de referência, a primeira de forma mecânica (física) e a segunda por computação de bordo (analítica).

A seguir uma tabela (Tabela 2.1) aponta uma série de aspectos relevantes na comparação entre as duas mecanizações.

TABELA 2.1

ASPECTOS COMPARATIVOS ENTRE SISTEMAS DE
NAVEGAÇÃO CONVENCIONAL E "STRAPDOWN"

CONFIGURAÇÃO DE SENSORES ITENS DE COMPARAÇÃO	PLATAFORMA INERCIAL	"STRAPDOWN"
Referência de atitude	Mantida mecanicamente por eixos, servomecanismos, motores, etc.	Mantida por computador, sem partes mecânicas.
Obtenção de atitude	Através de dispositivos de saída, como sincros, normalmente ruídos.	Obtenção direta por computador.
Finalidade de pilotagem automática	Velocidade angular e aceleração linear não são obtidas nas coordenadas do veículo.	Velocidades angulares obtidas nas coordenadas do veículo; utilização na estabilização do veículo.
Faixa de operação dos sensores	Devido à ação dos servomecanismos, os sensores angulares operam em torno do nulo (faixa estreita).	Os movimentos no veículo são transmitidos diretamente para os sensores exigindo uma ampla faixa de operação.
Efeito de vibrações do veículo	Os sensores praticamente estão isolados do veículo, assim o efeito é reduzido.	Os sensores ficam sujeitos às vibrações, uma vez que estão solidários ao veículo.
Complexidade no modelamento dos sensores	Devido ao fato de a faixa de operação ser estreita, o modelo completo tem efeito reduzido.	Devido à ampla faixa de operação, há necessidade de modelos sofisticados para evitar erros cumulativos.
Propagação de erros devido à incerteza nas condições iniciais	Devido à natureza do sistema baseado em realimentação, após uma manobra os efeitos não se propagam.	O efeito se propaga pois o processamento se faz sem realimentação.
Volume	Volume comparativo maior devido aos apoios mecânicos e servomecanismos.	Volume reduzido desde que se trata basicamente dos sensores mais computador de bordo.
Custo	Custo elevado pois engloba "syncros", "slip-rings", "torquers" e montagem mecânica com precisão elevada.	Custo reduzido devido à ausência dos elementos citados ao lado.
Consumo de energia	Alimentação dos sensores e servos.	Alimentação dos sensores e computador, portanto menor consumo.
Redundância	Impraticável ao nível de sensores inerciais.	Admite redundância de sensores inerciais e não-inerciais de maneira bem flexível, permitindo um tratamento estocástico para melhora do desempenho e possibilidade de reprogramação na presença de falhas, muito importante para aplicação a satélites.
Alinhamento	Facilidade devido à liberdade de elemento estável.	Dificuldade de alinhamento mecânico, pois os sensores estão acoplados.

2.5 - REALIZAÇÃO PRÁTICA DE SISTEMAS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

Apesar de existir uma variedade de realizações de SNIs, tudo se resume no sistema de coordenadas escolhido, ou seja, as modificações entre realizações (Schmidt, 1978) reduz-se apenas a um problema de programação de computador de bordo. A seguir é mostrado (Figura 2.14) uma descrição de um SNI básico na configuração de uma plataforma física, a qual utiliza um sistema de coordenadas *horizontal local* (Smith, 1979). Nota-se que a correção W_c é introduzida nos girômetros a fim de realizar a precessão da plataforma para que mantenha a horizontal local. Se a mecanização fosse em coordenadas inerciais, não haveria necessidade da correção W_c .

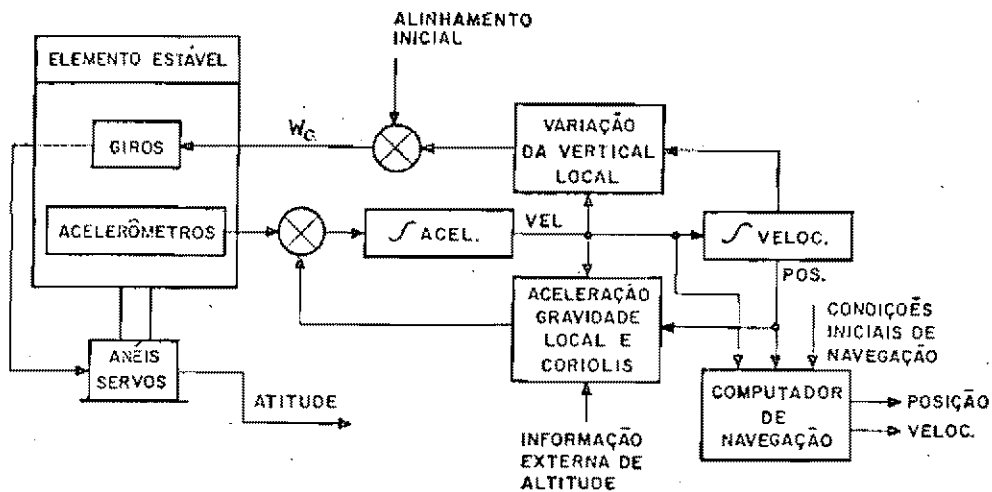


Fig. 2.14 - Navegação convencional.

No início de operação de um SNI, é necessário posicionar o elemento estável com alguma referência, normalmente no plano horizontal. Dado o início do movimento, qualquer tendência à mudança de orientação (atitude) do elemento estável é detetada pelos girômetros, os quais realimentam sinais para os servomotores a fim de realinhar o elemento estável; através de sensores angulares acoplados nestes eixos (Figura 2.12), obtêm-se a atitude do veículo. A partir da aceleração medi

da obtêm-se a posição e a velocidade nas coordenadas desejadas de acordo com a programação do computador de navegação. A correção de aceleração é explicada a partir do acelerômetro básico (Figura 2.15).

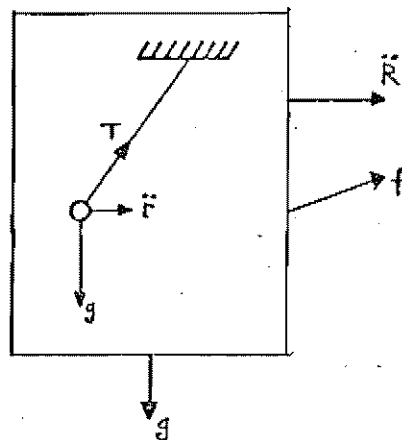


Fig. 2.15 - Forças atuantes no acelerômetro básico.

Para o conjunto invólucro + massa, tem-se a aceleração absoluta \ddot{R} como:

$$\ddot{R} = f + g ,$$

e para a massa m tem-se a aceleração absoluta \ddot{r} como:

$$\ddot{r} = T + g ,$$

no equilíbrio entre invólucro e massa tem-se:

$$\ddot{R} = \ddot{r} \Rightarrow f = T ,$$

assim, o acelerômetro não mede a gravidade, daí a necessidade de correção das medidas acelerométricas. Desta forma define-se força específica como a soma das forças aplicadas em uma unidade de massa, ou seja:

$$f = \ddot{R} - g ,$$

Lembrando que a aceleração absoluta \ddot{R} para referenciais girantes \bar{e} da da por:

$$\ddot{R} = \ddot{R}_t + A_C + A_{Cl} ,$$

onde A_C \bar{e} a aceleração centrípeta devida \bar{a} rotação terrestre, A_{Cl} \bar{e} a aceleração de coriolis, e \ddot{R}_t \bar{e} a aceleração absoluta devida \bar{a} translação; assim:

$$\ddot{R}_t = f + (g - A_C) - A_{Cl} .$$

As Figuras 2.14 e 2.16 mostram as correções citadas.

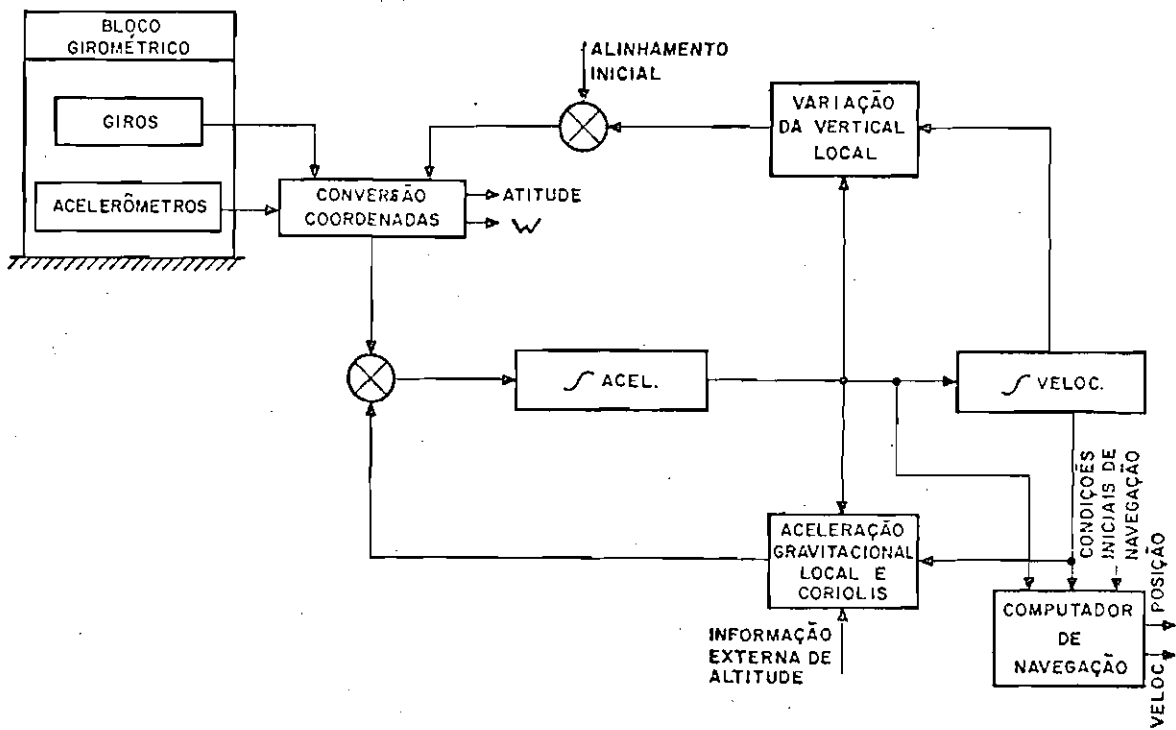


Fig. 2.16 - Navegação "strapdown".

Como já mencionado, para a mecanização em vertical local, existe o aspecto da curvatura da Terra onde \bar{e} evidente a variação da vertical local com a latitude terrestre. Computando estas variações, \bar{e}

obtida a taxa de variação da vertical local, o elemento estável passa a ser corrigido (W_c), formando assim a familiar malha de Schuler, onde detalhes podem ser encontrados nos trabalhos de Smith (1979), Radix (1972 e 1978), Carpentier et alii (1962).

Em termos de realização, a configuração "strapdown" (Figura 2.16) difere da primeira basicamente na obtenção da atitude, onde as malhas de correção são de mesma natureza, porém a atitude e a malha de Schuler são realizadas por computação de bordo.

Como foi descrito anteriormente, as medidas obtidas a partir dos sensores na configuração "strapdown" estão no referencial móvel do próprio veículo, assim surge a necessidade da transformação de coordenadas para um sistema de referência adotado. A transformação de coordenadas basicamente não contém novidades, porém como deve ser executada por computador de bordo, a simplicidade das operações torna-se importante; deriva-se então o formalismo dos quatérnions, cujas vantagens praticamente estão consagradas face ao formalismo dos ângulos de Euler e dos co-senos diretores. Detalhes e aspectos comparativos podem ser encontrados nas seguintes referências: Robinson (1958), Catford (1978), Plotnikov e Chelnokov (1979), Wertz (1978), Lopes (1982), Cardenuto (1979).

CAPÍTULO 3

ESTIMAÇÃO ÓTIMA EM NAVEGAÇÃO E DETERMINAÇÃO DE ATITUDE

Neste capítulo inicialmente será esclarecida a necessidade de medidas auxiliares à navegação inercial para em seguida definir sistemas auxiliados e procedimentos utilizados, citando-se referências básicas e comentários a respeito. A abordagem específica é realizada na Seção 3.3 onde o desenvolvimento do procedimento juntamente com os apêndices completam o modelo utilizado neste trabalho. Finalizando, as equações das observações são descritas, bem como o algoritmo geral.

3.1 - INTRODUÇÃO

Apesar da sofisticação envolvida na fabricação de sensores inerciais, existem diversos fatores que levam a medidas errôneas; em se tratando de girômetros estes erros tendenciosos, como já visto, são conhecidos como deriva ("drift"), porque os sistemas de orientação inercial pioneiros são do tipo *plataforma convencional* e qualquer erro provoca uma deriva da direção preestabelecida. Ainda em relação às fontes de erros, neste estágio de abordagem do assunto pode-se citar que as derivas dos girômetros possuem origens distintas. A primeira denominada *estática*, provém de imperfeições desde a fabricação até a eletrônica associada ao instrumento, e a segunda, denominada deriva, *dinâmica* surge quando o sensor está em operação, ou seja, depende do movimento (dinâmica) do veículo. Vale frisar que estes erros podem ser determinados em laboratório e assim realiza-se um esquema de compensação (Savage, 1978; Maybeck, 1979) que visa extrair a medida correta. Para aplicações em navegação de curto período, como lançadores e mísseis de médio alcance, este procedimento, aliado a girômetros de qualidade excepcionais, garante uma navegação precisa, porém para navegação de longa duração como em aviões, mísseis estratégicos e determinação de atitude em satélites, surge a necessidade de referências externas a fim de corrigir o acúmulo de erros imprevisíveis, conduzindo ao que é deno

minado Sistema de Navegação Inercial Auxiliado (SNIA); lembrando que para satélites trata-se de determinação de atitude com sistemas inerciais auxiliados.

3.2 - SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL AUXILIADO (SNIA)

Como visto anteriormente, este tipo de sistema conta basicamente com sensores inerciais e sensores não-inerciais. Sabe-se porém que sensores não-inerciais utilizados atualmente como radares, sensores ópticos em geral, identificam uma direção em instantes discretos, pois nem sempre estão dispostos em direção favorável. Assim, apesar de já existirem métodos de determinação de atitude (apesar de já existirem métodos de determinação de atitude) somente com sensores não-inerciais (Wertz, 1978; Rios Neto et alii, 1982), a dinâmica envolvida neste caso deve ser estabelecida apenas para aplicações específicas, tal como em satélites (dinâmica lenta) e onde a determinação de atitude não seja necessária em toda a trajetória.

Atualmente com o emprego de computação de bordo, realiza-se determinação de atitude e navegação inercial auxiliados periodicamente por medidas de sensores não-inerciais, onde todo este procedimento é realizado por estimação ótima. Por exemplo, para aplicações em aviões, Erzberger (1967) utiliza filtragem ótima para correção de erros de navegação com auxílio de medidas "Doppler" para velocidade e medidas de posição. Aqui vale destacar dois formalismos importantes em filtragem ótima aplicada à navegação (Maybeck, 1979), ou determinação de atitude somente: filtragem direta e indireta.

a) Filtragem Direta

Nesta configuração, o estado é estimado diretamente, ou seja, o processo de filtragem é realizado sobre as próprias grandezas desejadas (Figura 3.1).

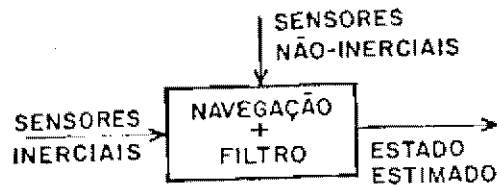


Fig. 3.1 - Filtragem direta.

Este esquema possui o inconveniente de depender diretamente do desempenho do filtro, pois no caso de ocorrência de falha o sistema de navegação interrompe sua função.

b) Filtragem Indireta

Este esquema (Figura 3.2) é o mais utilizado principalmente em aviões (Kubbat, 1978); o estado estimado, ao invés das grandezas de interesse, é representado por pequenas variações destas mesmas grandezas.

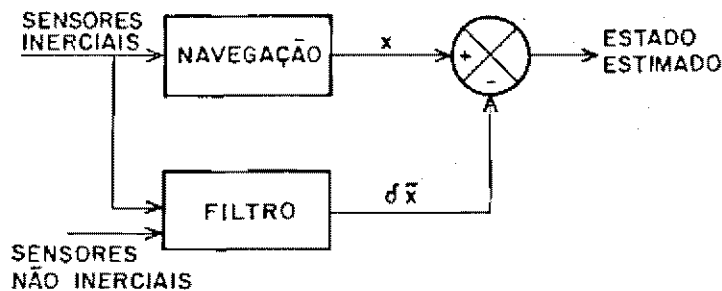


Fig. 3.2 - Filtragem indireta.

Nota-se que nesta configuração a ocorrência de falha no filtro não compromete a navegação de imediato. Uma aplicação similar em aviões envolvendo alinhamento em solo e durante o voo é realizada por Levinson (1978).

Outras aplicações tanto para navegação como para determinação de atitude podem ser citadas, como o sistema de navegação NAVSTAR GPS (Kruczynski, 1977) envolvendo sensores inerciais e informação de posição relativa a uma rede de satélites e utilizando para processamento o esquema de filtragem ótima. Potter e Vander Velde (1967) demonstram um esquema aplicado a satélites com sensores de estrelas e plataforma estabilizada (convencional), onde o processo de filtragem fornece como componentes do estado estimado as derivas ("drifts") nos três eixos; trabalho semelhante foi realizado por Nash e Wells (1975). Um procedimento que utiliza manobras em órbita com a finalidade de calibrar o bloco inercial é implementado por Lorell (1976). Jude (1977) desenvolve outro esquema ("strapdown") para aplicações em satélites de sensoriamento remoto onde a precisão de apontagem é crítica. Na área de mísseis, o mesmo esquema básico é encontrado nos trabalhos de Bar-Itzhack et alii (1982), Vergez e McClendon (1982) e Bose (1979).

Em resumo, a base de todo sistema auxiliado consta de um modelo de propagação, tanto de atitude quanto de trajetória, e dois conjuntos de medidas onde o primeiro é obtido por sensores inerciais e o segundo através de sensores não-inerciais. De acordo com o objetivo da missão, a filtragem pode ser simplificada conduzindo ao que se denomina filtragem subótima (filtro de ordem reduzida) (Cattan an Michelin, 1978; Maybeck, 1979), consistindo basicamente na diminuição da ordem do sistema, ou seja, menor número de estados na dinâmica.

Considerando aplicações em satélites, é evidente a impossibilidade de manutenção ou recalibração do bloco inercial em solo: logo surge a necessidade de executar esta tarefa a bordo. Os procedimentos citados reúnem uma característica comum: a necessidade de repetibilidade (estabilidade) do bloco inercial em longos períodos; porém devido à possibilidade de ocorrência de falhas não-fatais, ou mesmo variações em relação ao desempenho do bloco inercial e eletrônica associada, vem a necessidade de um esquema adaptativo para evitar problemas de divergência no filtro (Jazwinski, 1970). Este esquema, conjugado com o

desenvolvimento de Lefferts et alii (1982), é um dos objetivos deste trabalho, que será detalhado a seguir.

3.3 - DETERMINAÇÃO DE ATITUDE ATRAVÉS DO FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN E ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA DO NÍVEL DE RUÍDO DINÂMICO

Após uma breve noção geral do problema de determinação de atitude, será abordado e mostrado todo o desenvolvimento do esquema de propagação de atitude, o procedimento de filtragem utilizado, a equação das observações e considerações de caráter específico (Lefferts et alii, 1982).

3.3.1 - INTRODUÇÃO

Para aplicações em satélites, no que se refere à órbita, sabe-se que existem métodos de propagação (Brouwer, 1959; Silva, 1982; Medeiros, 1983) e de determinação (Wertz, 1978; Tapley, 1974), que possuem precisão suficiente a ponto de determinar em solo a posição do satélite satisfatoriamente. Porém, em missões espaciais isto não se aplica quanto à propagação para a orientação (atitude) do veículo que é de importância fundamental, pois é necessário o apontamento de antenas e sensores ópticos em direções determinadas e com precisão preestabelecida. Daí a necessidade de sensores e procedimentos precisos a bordo.

O procedimento proposto leva em conta vínculos de rapidez de procedimento para operação a bordo em tempo real com a finalidade de permitir a determinação de atitude mesmo em situações críticas como, por exemplo, ocorrência de falha não-fatal nos girômetros. A seguir descreve-se a cinemática de atitude do satélite utilizando formalismo dos quatérnions.

3.3.2 - CINEMÁTICA DE ATITUDE

A cinemática de atitude com formalismo de quatérnions é dada por (Wertz, 1978; Lopes, 1982; Cardenuto, 1979):

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \cdot \Omega(w)q, \quad (3.1)$$

onde q é o vetor das componentes do quatérnio e $w = (w_x, w_y, w_z)^T$ é a velocidade angular nas coordenadas do veículo,

$$\Omega(w) = \begin{bmatrix} 0 & w_z & -w_y & w_x \\ -w_z & 0 & w_x & w_y \\ w_y & -w_x & 0 & w_z \\ -w_x & -w_y & -w_z & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Desde que a medida do girômetro possui uma componente de erro tendencioso (deriva) e um ruído de natureza aleatória, ela pode ser modelada por:

$$u = w + b + n_1,$$

onde u é a leitura do girômetro, w é o valor real da velocidade angular, b é o erro tendencioso (deriva) e n_1 é o ruído modelado por uma distribuição gaussiana de média nula e covariância dada por:

$$E[n_1(t) \cdot n_1^T(\tau)] = Q_1 \cdot \delta(t - \tau), \quad (3.4)$$

sendo:

$$w = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}; \quad n_1 = \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{bmatrix}.$$

Assim, w é uma variável aleatória e u é um valor lido a cada instante. Substituindo a Equação 3.4 na Equação 3.1, tem-se:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \cdot \Omega(u - b + n_1)q , \quad (3.5)$$

$$\dot{b} = n_2 ,$$

onde n_2 é um ruído branco com média nula e covariância dada por:

$$E[n_2(t) \cdot n_2^T(\tau)] = Q_2 \cdot \delta(t - \tau) . \quad (3.6)$$

Assim as Equações 3.5 e 3.6 representam, respectivamente, a dinâmica do processo e o movimento browniano onde o erro de medida do girômetro ("rate-drift" b) foi modelado como uma componente constante, pois para as aplicações propostas (satélites), a modelagem é satisfatória (Lefferts et alii, 1982).

Nota-se porém que $\Omega(w)$ na Equação 3.2 é linear em w , logo:

$$\Omega(u - b + n_1) = \Omega(u) - \Omega(b) + \Omega(n_1) , \quad (3.7)$$

assim tem-se:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \cdot [\Omega(u)q - \Omega(b)q + \Omega(n_1)q] , \quad (3.8)$$

$$\dot{b} = n_2 ,$$

observando que (Lefferts et alii, 1982)

$$\Omega(w)q = Z(\dot{q})w , \quad (3.9)$$

onde:

$$Z(q) = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} . \quad (3.10)$$

Supondo a Equação 3.8 da forma:

$$\dot{q} = f(u, q, b, n_1) , \quad (3.11)$$

e linearizando-a em torno das estimativas de q , b e n_1 (Apêndice B), tem-se:

$$\begin{aligned} f(u, q, b, n_1) &= f(u, \bar{q}, \bar{b}, \bar{n}_1) + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} (q - \bar{q}) + \frac{\partial f}{\partial \bar{b}} (b - \bar{b}) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \bar{n}_1} (n_1 - \bar{n}_1) + O(2) , \end{aligned} \quad (3.12)$$

sendo \bar{x} a estimativa mais recente de x , $O(2)$ os termos de ordem superior e

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}} , \text{ ou}$$

$$\begin{aligned} f(u, q, b, n_1) &= f(u, \bar{q}, \bar{b}, \bar{n}_1) + \frac{1}{2} [\Omega(u) - \Omega(\bar{b}) + \Omega(\bar{n}_1)](q - \bar{q}) - \\ &- \frac{1}{2} \cdot Z(\bar{q})(b - \bar{b}) + \frac{1}{2} \cdot Z(\bar{q})(n_1 - \bar{n}_1) + O(2) , \end{aligned} \quad (3.13)$$

mas, lembrando que:

$$\bar{n}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \bar{w} = u - \bar{b} ,$$

tem-se:

$$f(u, q, b, n_1) - f(u, \bar{q}, \bar{b}, \bar{n}_1) = \frac{1}{2} [\Omega(u - \bar{b})\delta q - Z(\bar{q})\delta q + Z(\bar{q})n_1] , \quad (3.14)$$

ou seja:

$$\frac{d(\delta q)}{dt} = \frac{1}{2} [\Omega(\bar{w})\delta q - Z(\bar{q})\delta b + Z(\bar{q})n_1] , \quad (3.15)$$

$$\frac{d(\delta b)}{dt} = n_2 . \quad (3.16)$$

As Equações 3.15 e 3.16 formam assim a dinâmica linearizada do processo; colocando-as na forma matricial, tem-se:

$$\delta \dot{x} = F(\bar{x}, t)\delta x + G(\bar{x}, t)n , \quad (3.17)$$

onde:

$$F(\bar{x}, t) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} \Omega(\bar{w}) & -\frac{1}{2} Z(\bar{q}) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]_{(7 \times 7)} , \quad (3.18)$$

$$G(\bar{x}, t) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} Z(\bar{q}) & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]_{(7 \times 6)} , \quad (3.19)$$

e:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ \text{---} \\ b \end{bmatrix}_{(7 \times 1)} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ \text{---} \\ n_2 \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} \quad (3.20)$$

3.3.3 - PROPAGAÇÃO DE ATITUDE

Lembrando o que foi visto, surge aqui uma vantagem da modelagem adotada para a deriva. A propagação do vetor de estado se faz somente na parte referente aos quatérnions, pois a deriva estimada permanece a mesma durante a propagação, assim:

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2} \Omega(\bar{w})\hat{q} , \quad (3.21)$$

$$\dot{\hat{b}} = 0 . \quad (3.22)$$

A solução para a Equação 3.21 (Catford, 1978; Wertz, 1978) fica:

$$q(t) = \theta(t, t_0)q(t_0) , \quad (3.23)$$

onde:

$$\theta(t, t_0) = I \cdot \cos \left[|\bar{w}| \cdot \frac{\Delta t}{2} \right] + \left\{ \frac{\Omega(\bar{w})}{|\bar{w}|} \right\} \cdot \text{sen} \left[|\bar{w}| \cdot \frac{\Delta t}{2} \right] , \quad (3.24)$$

e:

$$\Delta t = t - t_0 , \quad (3.24a)$$

$$|\bar{w}| = (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)^{1/2} ,$$

e I é a matriz identidade.

Vale frisar que esta solução é válida somente quando o intervalo de propagação Δt é suficientemente pequeno para que a hipóte

se de comutatividade (Wertz, 1978) possa ser considerada. Procedimento mais detalhado sobre integração do quatérnio, separando a solução do vetor rotação $\Delta\theta$ da propagação do quatérnio de atitude, é mostrado por Miller (1983). Lembrando que $\Delta\theta = W \cdot \Delta t$ para Δt pequeno e W constante é denominado vetor rotação.

3.3.4 - DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES DE TRANSIÇÃO DE ESTADO E RUÍDO

Para a propagação da matriz de covariância é necessário conhecer a matriz de transição do estado $\phi(t, t_0)$ e transição do ruído $\Gamma(t, t_0)$. Assim, resolvendo a equação:

$$\dot{\phi} = F(x, t)\phi, \quad (3.25)$$

obtem-se (Apêndice A):

$$\phi(t, t_0) = \left[\begin{array}{c|c} \theta(t, t_0) & \psi(t, t_0) \\ \hline 0 & I \end{array} \right]_{(7 \times 7)} \quad (3.26)$$

onde (Apêndice A):

$$\psi(t, t_0) = - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \theta(t, s) \cdot Z(\bar{q}(s)) ds. \quad (3.27)$$

Para a matriz $\Gamma(t, t_0)$, resolvendo

$$\Gamma(t, t_0) = \int_{t_0}^t \phi(t, s) \cdot G(\bar{x}, s) ds, \quad (3.28)$$

obtem-se (Apêndice A):

$$\Gamma(t, t_0) = \left[\begin{array}{c|c} I(t, t_0) & \Sigma(t, t_0) \\ \hline 0 & I \cdot \Delta t \end{array} \right]_{(7 \times 6)}, \quad (3.29)$$

onde Δt , definindo na Equação 3.24a, é:

$$\Sigma(t, t_0) = \int_{t_0}^t \psi(t, s) ds = \int_{t_0}^t \left[-\frac{1}{2} \right] \int_s^t \theta(t, t') Z(\bar{q}(t')) dt' ds, \quad (3.30)$$

A solução numérica adotada para $\psi(t, t_0)$ e $\Sigma(t, t_0)$ será por uma simples regra de trapézio, onde esta aproximação será justificada adiante, na Seção 3.3.5, assim:

$$\begin{aligned} \psi(t, t_0) &= -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \theta(t, s) Z(\bar{q}(s)) ds = \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \right] \Delta t \cdot [\theta(t, t) Z(\bar{q}(t)) + \theta(t, t_0) Z(\bar{q}(t_0))] \right\}, \end{aligned}$$

desde que $\theta(t, t) = I$, resulta em:

$$\psi(t, t_0) = \left[-\frac{1}{4} \right] \Delta t \cdot [Z(\bar{q}(t)) + \theta(t, t_0) Z(\bar{q}(t_0))] \quad (3.31)$$

e:

$$\Sigma(t, t_0) = \int_{t_0}^t \psi(t, s) ds = \left[\frac{1}{2} \right] \Delta t \cdot [\psi(t, t) + \psi(t, t_0)],$$

mas $\psi(t, t) = 0$, logo:

$$\Sigma(t, t_0) = \left[\frac{1}{2} \right] \Delta t \cdot \psi(t, t_0),$$

ou:

$$\Sigma(t, t_0) = -\frac{1}{8} (\Delta t)^2 \cdot [Z(\bar{q}(t)) + \theta(t, t_0)Z(\bar{q}(t_0))] . \quad (3.32)$$

Em resumo:

$$Z'(\bar{q}(t)) = Z(\bar{q}(t)) + \theta(t, t_0)Z(\bar{q}(t_0)) , \quad (3.32a)$$

$$\psi(t, t_0) = \left[-\frac{1}{4} \right] \Delta t \cdot Z'(\bar{q}(t)) , \quad (3.32b)$$

$$\Sigma(t, t_0) = \left[-\frac{1}{8} \right] (\Delta t)^2 \cdot Z'(\bar{q}(t)) . \quad (3.32c)$$

3.3.5 - ESQUEMA DE FILTRAGEM ADAPTATIVA

Obtida a dinâmica do processo, o procedimento de filtragem é aplicado, ressaltando-se que a nomenclatura de *Filtro Estendido* cabe a casos não-lineares, mais exatamente ao Filtro de Kalman aplicado na dinâmica linearizada em torno da estimativa do estado mais recente; o desenvolvimento está detalhado no Apêndice B.

Em relação ao procedimento adaptativo pode-se colocar o seguinte problema. Ao realizar modelagem matemática de sistemas físicos, surge um compromisso entre simplicidade versus precisão do modelo, lembrando que modelos complexos geram processamento numérico lento, conduzindo a dificuldades de operação em tempo real. Daí o esforço no sentido de utilizar modelos simplificados com o objetivo de tornar possível a computação a bordo em tempo real. Porém, a dinâmica simples pode ocasionar problemas de divergência no filtro (Maybeck, 1979; Jazwinski, 1970), conduzindo a uma estimativa errônea do estado.

Existem vários métodos que podem contornar este problema, todos visando umaumento do ganho, obedecendo formalismo matemático envolvido. Podem-se citar filtros de memória limitada (Jazwinski, 1970), que tratam um conjunto de observações forçando a um *esquecimento* da influência de estimativas bem anteriores nas estimativas mais recentes;

outro filtro (Jazwinski, 1970) que faz com que a influência das observações diminua exponencialmente a medida que estas se tornam ultrapassadas; outros procedimentos de aumento da matriz de covariância do ruído no estado; e aumento artificial do ganho, podendo-se citar como referências básicas Jazwinski (1970) e Maybeck (1979). Em resumo pode-se dizer que estes métodos são baseados em considerações de ordem prática.

O procedimento utilizado (Rios Neto e Kuga, 1982) neste trabalho apresenta um esquema de estimação adaptativa do ruído no estado a ser adicionado na matriz de covariância do erro, como detalhado no Apêndice C; possui embasamento matemático suficiente a ponto de reduzir as considerações práticas ao nível de inicialização somente e contando ainda com grandes características de um procedimento generalizado. A seguir será esquematizado o algoritmo por tarefas (Figura 3.3), e na Figura 3.4 as tarefas são escalonadas no tempo.

Na Figura 3.3, a propagação da atitude (denotada entre instantes T_k e T_{k+1}) é realizada a cada nova medida do girômetro u , onde a correção b é mantida em toda a propagação de T_0 a T_{n-1} . No instante T_n , inicia-se parte da propagação da matriz de covariância do estado e, pelo tratamento da observação Y_n em T_n , determina-se a matriz Q através do procedimento de estimação do ruído adaptativo; a seguir completa-se a propagação da covariância.

A mesma observação Y_n é utilizada na atualização do estado, obtendo-se então, a atitude em T_n e a deriva em velocidade \hat{b}_n a ser considerada no próximo intervalo de T_n a T_{2n} , como mostrado na Figura 3.4.

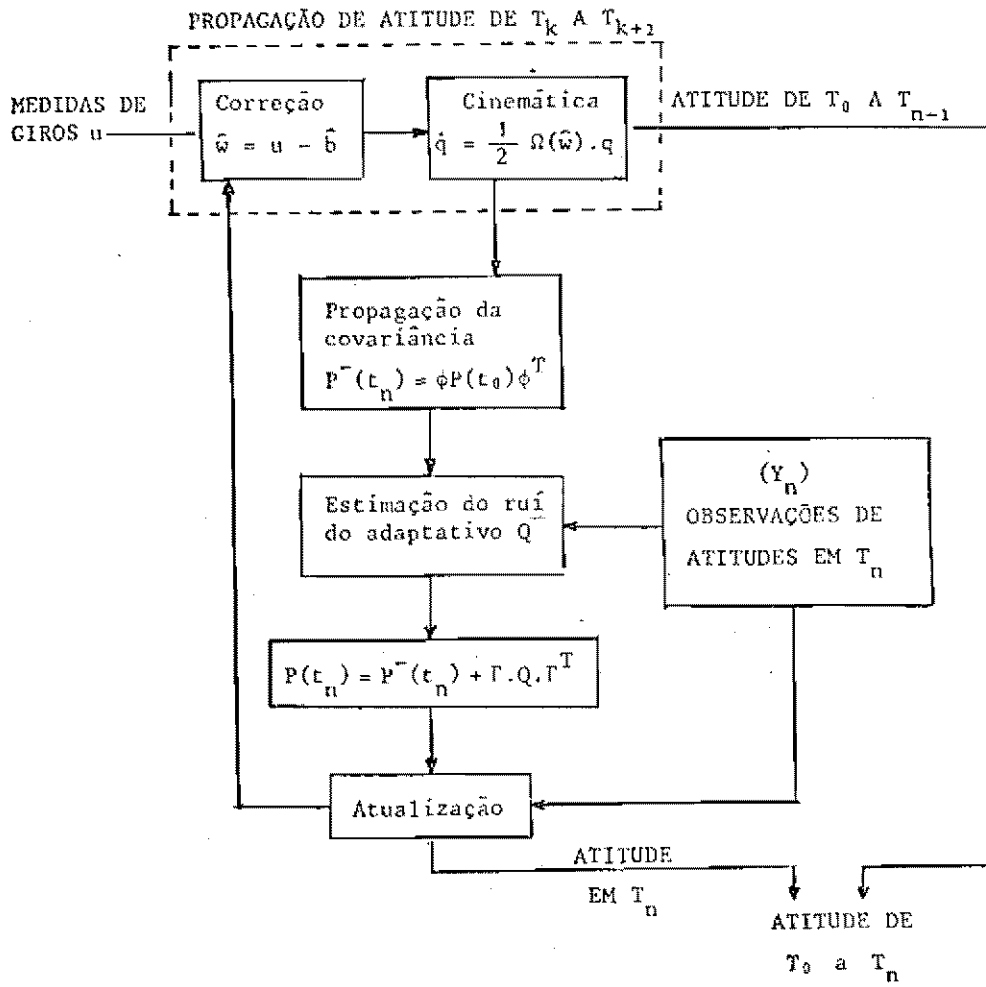


Fig. 3.3 - Algoritmo de determinação de atitude.

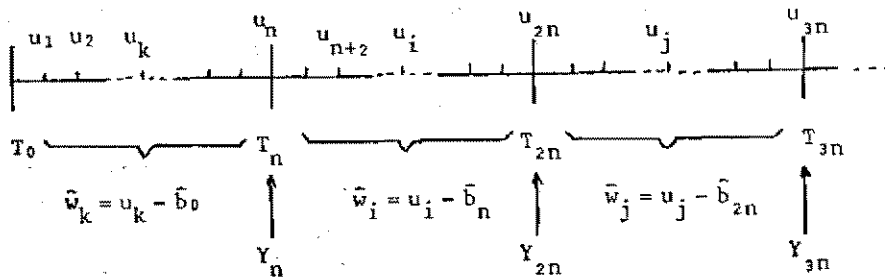


Fig. 3.4 - Evolução do algoritmo no tempo.

Assim, vê-se que a correção de medida do girômetro e a propagação são realizadas em taxas superiores à atualização, o que permite a todo instante a leitura dos girômetros, sendo esta característica a grande vantagem do método (Lefferts et alii, 1982), desde que permite aplicações em computação de bordo. Quanto ao algoritmo, a Figura 3.5 mostra o procedimento utilizado em outro aspecto funcional.

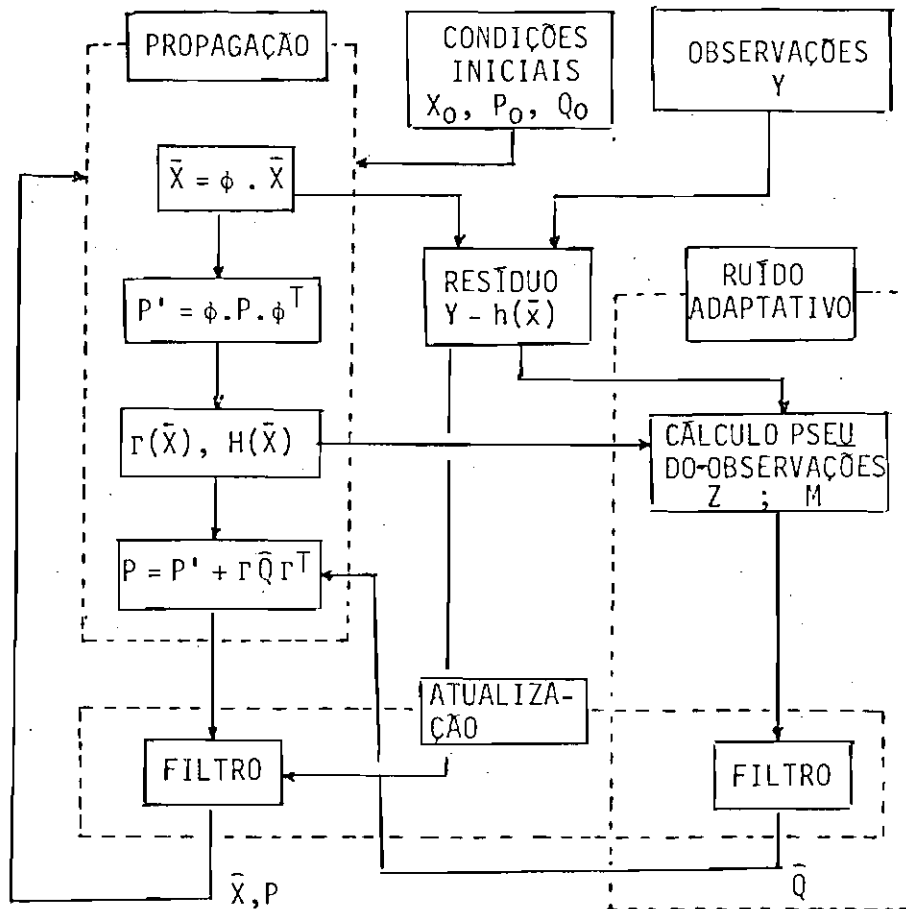


Fig. 3.5 - Algoritmo de filtragem adaptativa.

3.3.6 - EQUAÇÃO DAS OBSERVAÇÕES

Para aplicações em satélites foi citada a necessidade de um SNIA, onde os sensores de atitude não-inerciais forneceriam as medidas externas (observações). Estas medidas de direção normalmente são

obtidas em relação a corpos celestes como Sol, Terra, estrelas e ainda variam no tempo desde que o satélite esteja em movimento orbital. Porém, estas variações comparadas com a dinâmica de atitude são lentas, assim optou-se por simular o movimento do satélite com direções externas de referências fixas, representando uma direção adquirida com sensores solares e outra direção com sensores de horizonte terrestre. Importante é o fato de que as observações não envolvem o modelo completo dos sensores, mas apenas medidas de direção contaminadas por ruído, pois o objetivo é a análise do procedimento com ênfase nos sensores inerciais.

As observações serão medidas de ângulos formados entre os eixos do referencial do satélite (x, y, z) e a direção OS do Sol e também com a direção da Terra OT (Moro, 1983). Aqui neste trabalho, as expressões serão relativas a duas direções fixas como mostrado na Figura 3.6.

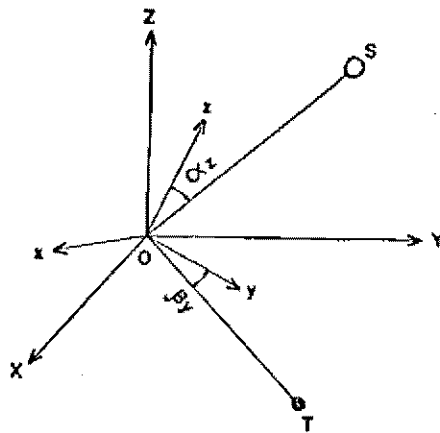


Fig. 3.6 - Ângulos entre os versores de (x, y, z) com as direções OS e OT.

Os ângulos que definem a direção OT são dados por (Moro, 1983):

$$\begin{bmatrix} \cos x \\ \cos y \\ \cos z \end{bmatrix} = \bar{B} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

onde \bar{B} é a matriz de rotação do referencial inercial para o referencial do satélite (Wertz, 1978), e $(T_x, T_y, T_z)^T$ o versor relativo a OT; analogamente para a direção OS:

$$\begin{bmatrix} \cos x \\ \cos y \\ \cos z \end{bmatrix} = \bar{B} \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Assim, a partir das Equações 3.33 e 3.34, a equação das observações fica:

$$Y = h(x) + v,$$

onde v é um ruído branco com média nula e covariância:

$$E[v(t) \cdot v^T(\tau)] = R \cdot \delta(t - \tau)$$

e

$$Y = \begin{bmatrix} \cos \alpha_x \\ \cos \alpha_y \\ \cos \alpha_z \\ \cos \beta_x \\ \cos \beta_y \\ \cos \beta_z \end{bmatrix}, \quad h(x) = \begin{bmatrix} h_i(x) \\ \dots \\ h_j(x) \end{bmatrix}$$

sendo:

$$h_i(x) = T_x \cdot B_{i1} + T_y \cdot B_{i2} + T_z \cdot B_{i3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$h_j(x) = S_x \cdot B_{j1} + S_y \cdot B_{j2} + S_z \cdot B_{j3}, \quad j = 1, 2, 3,$$

em que B_{ij} é o elemento da matriz \bar{B} .

Como as observações são relacionadas de forma não-linear com o estado, a linearização torna-se necessária, obtendo-se (Apêndice B):

$$\delta Y = H(\bar{x}) \delta x + v, \quad (3.35)$$

onde:

$$H(x) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \partial h_i(x) / \partial \bar{x}_j \\ (i = 1, 2, 3) \end{array} & 0 \\ \hline \begin{array}{l} \partial h_i(x) / \partial \bar{x}_j \\ (i = 4, 5, 6) \end{array} & 0 \end{array} \right]_{(6 \times 7)}, \quad j = 1, 2, \dots, 7,$$

em que $\partial h(x) / \partial \bar{x}_j = \partial h(x) / \partial x_j |_{\bar{x}_j}$.

Desde que $\partial h_i(x) / \partial \bar{x}_j = 0$ para $j = 5, 6, 7$ (pois $h(x)$ é somente função dos quatêrions), a Equação 3.5 pode ser escrita na forma:

$$\delta Y = H(\bar{q}) \delta x + v, \quad (3.36)$$

onde os elementos de $H(\bar{q})$ são descritos no Apêndice E; completa-se assim a equação de observações a ser utilizada no Filtro Estendido (Apêndice B).

CAPÍTULO 4

GIRÔMETRO INTEGRADOR

Será detalhado o modelo matemático do girômetro integrador sem considerações quanto à influência da temperatura, pois seu efeito sobre a deriva é de longo período face à taxa de atualização. Assim, os erros considerados basicamente são relativos à deriva dinâmica citada anteriormente, isto devido à grande influência dos erros de montagem e da eletrônica associada, predominantes na realização de um bloco girométrico. Ainda os efeitos da aceleração linear (força específica), apesar de integrarem o modelo, não devem influenciar a deriva, pois, devido à ordem de grandeza de seus valores adotada nas simulações, os termos relativos a estas componentes são desprezíveis. Aspectos com mais detalhes serão abordados nas próximas seções.

Em resumo, as hipóteses adotadas pelo autor, com base em modelo desenvolvido por Joos (1977), correspondem à possibilidade real de projeto e realização de um bloco girométrico de acordo com as condições atuais no que tange à mecânica fina, aos meios de testes e aos custos.

O modelo proposto possui fontes de erros inerentes às imperfeições do próprio girômetro, desalinhamentos na montagem do bloco girométrico, e ainda erros provocados pela eletrônica associada. Concluindo, o esquema visa um procedimento de compensação (Savage, 1978) automático a bordo, e a utilização do girômetro integrador neste trabalho foi devida a sua larga aplicação em navegação inercial atualmente.

4.1 - MODELO DE AVALIAÇÃO

O modelo de avaliação do girômetro desenvolvido aqui será o mais completo possível, visando avaliar o modelo de deriva proposto. Assim, de acordo com Joos (1977) e partindo da Figura 4.1, será ob

tida a equação do torque no eixo de saída o , uma vez que as medidas do girômetro são tomadas neste eixo.

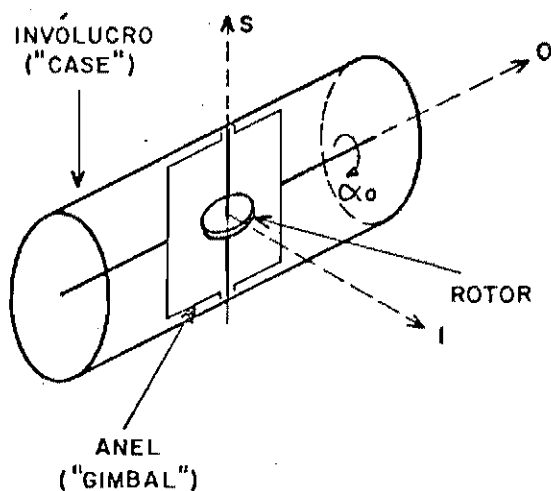


Fig. 4.1 - Esquema básico do giro integrador.

Legenda:

- i -- eixo de entrada nas coordenadas do invólucro ("case"),
- o -- eixo de saída nas mesmas coordenadas,
- s -- eixo de rotação do rotor ("spin") nas coordenadas "case",
- $(\cdot)_{if}$ - denota grandeza de f em relação a i , expressa nas coordenadas c ,
- $(\cdot)_f^c$ - denota grandeza de f nas coordenadas c ,
- C_f^c - matriz de rotação da coordenada f para a coordenada c .

O esquema básico mostra o rotor sustentado por um anel ("gimbal") e este apoiado no eixo de saída. Como visto na Seção 2.2, uma entrada de velocidade no eixo i produz um torque no eixo o , que por sua vez, desloca o anel com o ângulo α_0 ("pickoff"). Considerando que a montagem não é perfeita, além do ângulo α_0 ("pickoff"), existem desalinhamentos α_s e α_i , normalmente pequenos e α_0 mantido pequeno pelo gerador de torque.

Da rotação mostrada na Figura 4.2, obtêm-se para α_j , α_0 e α_s pequenos a matriz de rotação do invólucro para o conjunto anel-rotor ("case" para "float") é:

$$C_C^f = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_s & -\alpha_0 \\ -\alpha_s & 1 & \alpha_j \\ \alpha_0 & -\alpha_j & 1 \end{bmatrix} .$$

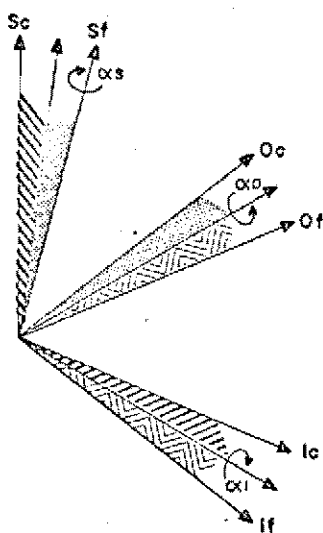


Fig. 4.2 - Desalinhamento do "float" em relação ao "case".

Há também o desalinhamento do rotor em relação ao anel, mostrado na Figura 4.3.

Como o desalinhamento do rotor é em dois eixos somente, tem-se:

$$C_f^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_0 \\ 0 & 1 & \beta_j \\ \beta_0 & -\beta_j & 1 \end{bmatrix} .$$

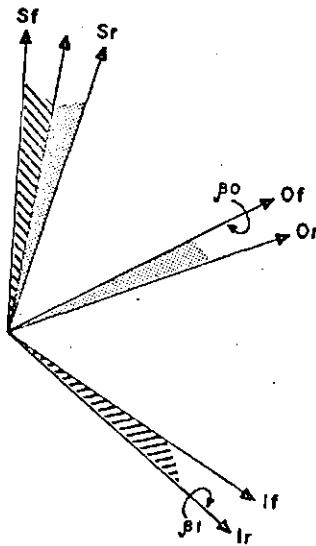


Fig. 4.3 - Desalinhamento do rotor em relação ao anel.

O objetivo básico é determinar o torque desenvolvido no eixo de saída o , pois neste eixo será realizada a medida. As equações fundamentais deste desenvolvimento podem ser encontradas no trabalho de Joos (1977). Partindo do teorema do momento angular:

$$M = \dot{H} ,$$

e como o torque desenvolvido é sobre o "float", expressa-se o torque nas coordenadas f da seguinte maneira:

$$M_f^f = \dot{H}_f^f + W_{if}^f \times H_f^f , \quad (4.1)$$

onde W_{if}^f é a velocidade angular do "float" em relação ao espaço inercial, expressa nas coordenadas f ("float").

Sabe-se ainda que:

$$W_{if} = W_{ic} + W_{cf} ,$$

o qual expresso nas coordenadas f fica:

$$W_{if}^f = C_c^f \cdot W_{ic}^c + W_{cf}^f,$$

onde:

$$W_{if}^f = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}, \quad W_{ic}^c = \begin{bmatrix} W_i \\ W_o \\ W_s \end{bmatrix}, \quad W_{cf}^f = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}_o \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (4.3)$$

o momento angular do "float" é constituído pelo momento angular do anel ("gimbal") e o do rotor, assim:

$$H_f = H_g + H_r, \quad \text{ou}$$

$$H_f = I_g \cdot W_{if}^f + I_r \cdot W_{ir}^r, \quad (4.4)$$

onde:

$$W_{ir}^r = W_{if}^f + W_{fr}^r$$

que expresso nas coordenadas f fica:

$$\begin{aligned} H_f^f &= I_g^f \cdot W_{if}^f + C_r^f \left[I_r^r (C_f^r \cdot W_{if}^f + W_{fr}^r) \right] = \\ &= I_g^f \cdot W_{if}^f + \left[C_r^f I_r^r C_f^r \right] W_{if}^f + C_r^f I_r^r W_{fr}^r, \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde:

$$I_g^f = \begin{bmatrix} I_{ii} & I_{io} & I_{is} \\ I_{oi} & I_{oo} & I_{os} \\ I_{si} & I_{so} & I_{ss} \end{bmatrix}, \quad I_r^r = \begin{bmatrix} I_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & I_{oo} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ss} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$W_{fr}^r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} .$$

Após desenvolvimento e aproximações realizadas e justificadas no Apêndice D, a equação do torque M_0 no eixo de saída o, fica:

$$\begin{aligned} M_0 = & -H_r \cdot W_i + I_{oo} \cdot \ddot{\alpha}_o + I_{oo} \cdot \dot{W}_o + (I_{ii} - I_{ss})W_i \cdot W_s + \\ & + I_{osg}(\dot{W}_s - W_i \cdot W_o) + I_{oig}(\dot{W}_i + W_o \cdot W_s) + I_{sig}(W_s^2 - W_i^2) + \\ & + \alpha_o[(I_{ss} - I_{ii})(W_s^2 - W_i^2) + H_r \cdot W_s] + \alpha_s[(I_{ii} - I_{ss})W_o \cdot W_s - \\ & - H_r \cdot W_o - I_{oo} \cdot \dot{W}_i] + \alpha_i[(I_{ss} - I_{ii})W_o \cdot W_i + I_{oo} \cdot \dot{W}_s] + \\ & + \beta_o[(I_{ssr} - I_{iir})(W_s^2 - W_i^2) + H_r \cdot W_s] + \beta_i[(I_{ssr} - \\ & - I_{oor})(-\dot{W}_s + W_o \cdot W_i) - I_{ss} \cdot \dot{\omega}] \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde:

$$I_{ii} = I_{iig} + I_{iir}$$

e

$$I_{oo} = I_{oog} + I_{oor}$$

Efeitos devido ao desbalanceamento do rotor e anisotropia são mostrados a seguir, porém estes efeitos são relevantes somente no caso de altas acelerações e vibrações respectivamente; maiores detalhes podem ser encontrados no trabalho de Joos (1977):

a) Desbalanceamento do Rotor

Da Figura 4.4 as coordenadas do centro de massa (CG) não coincidem com os do centro geométrico, onde as componentes são:

$$d = \begin{bmatrix} d_i \\ d_o \\ d_s \end{bmatrix} .$$

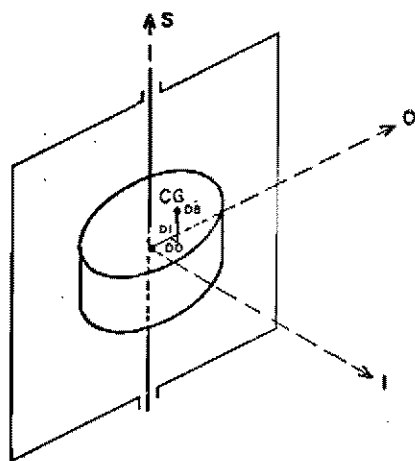


Fig. 4.4 - "Float" (anel e rotor) do girômetro.

Uma força F , agindo sobre o CG:

$$F = m \begin{bmatrix} A_i \\ A_o \\ A_s \end{bmatrix}$$

provoca um torque da forma:

$$M_d = d \times F ,$$

onde M_d , tomado do eixo de interesse (saída), fica:

$$M_{do} = m(d_s \cdot A_i - d_i \cdot A_s) \quad (4.8)$$

b) Anisoeelasticidade

Se o "float" possui elasticidade diferente nos três eixos, surge um torque proporcional as acelerações lineares (Figura 4.5).

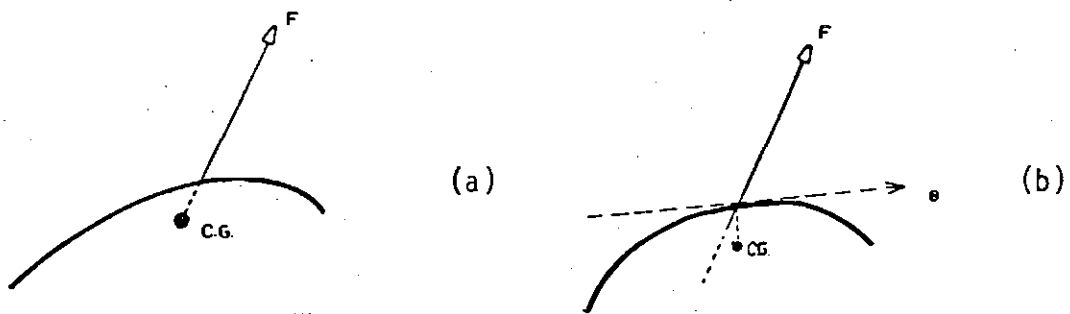


Fig. 4.5 - Anisoeelasticidade.

Observa-se que uma força F inicialmente aplicada no CG (Figura 4.5a) produz uma deformação e o CG permanece na linha de ação da força. Porém, se houver propriedades elásticas diferentes nos três eixos, a deformação faz com que o CG não esteja na linha de ação da força, desta forma, surge um binário em torno do eixo o (Figura 4.5b), causando um torque neste mesmo eixo. Sendo o tensor de elasticidade definido por (Joos, 1977):

$$C = \begin{bmatrix} C_{ii} & C_{io} & C_{is} \\ C_{oi} & C_{oo} & C_{os} \\ C_{si} & C_{so} & C_{ss} \end{bmatrix},$$

o deslocamento devido à elasticidade é dado por:

$$d = C \times F$$

e o torque \bar{e} é dado por:

$$M_a = d \times F ;$$

assim no eixo de saída tem-se:

$$M_{a0} = m^2 [(C_{ss} - C_{ii})A_i \cdot A_s - C_{is} \cdot A_s^2 + C_{si} \cdot A_i^2 - C_{i0} \cdot A_0 \cdot A_s + C_{s0} \cdot A_0 \cdot A_i] . \quad (4.9)$$

Por outro lado, o torque M_0 induz reações viscosa e do gerador de torque T_{syn} (Seção 2.2.1), assim:

$$M_0 = -B \cdot \dot{\alpha}_0 + M_t ,$$

onde o torque M_t será gerado por uma eletrônica de realimentação como função de α_0 ("pickoff").

Ainda será introduzido um desalinhamento dos girômetros em relação aos seus respectivos eixos de entrada; assim:

$$\begin{bmatrix} W_i \\ (A_i) \\ W_0 \\ (A_0) \\ W_s \\ (A_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_z & -\gamma_y \\ -\gamma_z & 1 & \gamma_x \\ \gamma_y & -\gamma_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_x \\ (A_x) \\ W_y \\ (A_y) \\ W_z \\ (A_z) \end{bmatrix} ,$$

ou

$$W_i = W_x + \gamma_z \cdot W_y - \gamma_y \cdot W_z , \quad (4.10a)$$

$$W_0 = W_y + \gamma_x \cdot W_z - \gamma_z \cdot W_x , \quad (4.10b)$$

$$W_s = W_z + \gamma_y \cdot W_x - \gamma_x \cdot W_y , \quad (4.10c)$$

$$A_i = A_x + \gamma_z \cdot A_y - \gamma_y \cdot A_z, \quad (4.10d)$$

$$A_o = A_y + \gamma_x \cdot A_z - \gamma_z \cdot A_x, \quad (4.10e)$$

$$A_s = A_z + \gamma_y \cdot A_x - \gamma_x \cdot A_y; \quad (4.10f)$$

deste modo, reunindo as Equações 4.7 a 4.10 e de acordo com as aproximações citadas no Apêndice D, a forma final fica:

$$\begin{aligned}
 M_z = & - H_r \cdot \dot{w}_x - H_r (\gamma_z \dot{w}_y - \gamma_y \dot{w}_z) + \quad \text{(termo fundamental)} \\
 & + I_{oo} \cdot \ddot{\alpha}_o + \quad \text{(dinâmica angular)} \\
 & + B \cdot \ddot{\alpha}_o - \\
 & + I_{oo} \cdot \ddot{w}_y + I_{oo} (\gamma_x \ddot{w}_z - \gamma_z \ddot{w}_x) + \quad \text{(aceleração angular)} \\
 & + \left. \begin{aligned} & (I_{ii} - I_{ss}) \dot{w}_x \cdot \dot{w}_z + (I_{ii} - I_{ss}) (\dot{w}_x^2 - \dot{w}_z^2) \gamma_y + \\ & (I_{ii} - I_{ss}) (\gamma_z \dot{w}_z - \gamma_x \dot{w}_x) \dot{w}_y + \end{aligned} \right\} \text{(anisotropia)} \\
 & + \left. \begin{aligned} & I_{osg} (\dot{w}_z - \dot{w}_x \dot{w}_y) + I_{oig} (\dot{w}_x + \dot{w}_y \dot{w}_z) + \\ & + I_{sig} (\dot{w}_z^2 - \dot{w}_x^2) + \end{aligned} \right\} \text{(produtos de inércia do "gimbal")} \\
 & + \alpha_o [(I_{ss} - I_{ii}) (\dot{w}_z^2 - \dot{w}_x^2) + H_r \dot{w}_z] + \\
 & + \alpha_s [(I_{ii} - I_{ss}) \dot{w}_y \dot{w}_z - H_r \cdot \dot{w}_y - I_{oo} \cdot \dot{w}_x] + \quad \text{(desalinhamento "case-float")} \\
 & + \alpha_i [(I_{ss} - I_{ii}) \dot{w}_y \dot{w}_x + I_{oo} \cdot \dot{w}_z] + \\
 & + \beta_o [(I_{ssr} - I_{iir}) (\dot{w}_z^2 - \dot{w}_x^2) + H_r \cdot \dot{w}_z] + \\
 & + \beta_i [(I_{ssr} - I_{oor}) (\dot{w}_x \dot{w}_y - \dot{w}_z) - I_{ssr} \cdot \dot{\omega}] + \quad \text{(desalinhamento "gimbal"-rotor)} \\
 & + m[d_s \cdot A_x - d_i \cdot A_z] + \quad \text{(desbalanceamento do rotor)} \\
 & + m^2 [(C_{ss} - C_{ii}) A_x A_z - C_{is} \cdot A_z^2 + C_{si} \cdot A_x^2 - \\
 & - C_{io} \cdot A_y A_z + C_{so} \cdot A_y A_x + (C_{ss} - C_{ii}) \gamma_y (A_x^2 - A_z^2) + \\
 & + A_y (\gamma_z \cdot A_z - \gamma_x \cdot A_x)] + \quad \text{(anisotropia)} \\
 & \quad \quad \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

De acordo com Joos (1977) um gráfico comparativo dos efeitos citados é apresentado na Figura 4.6.

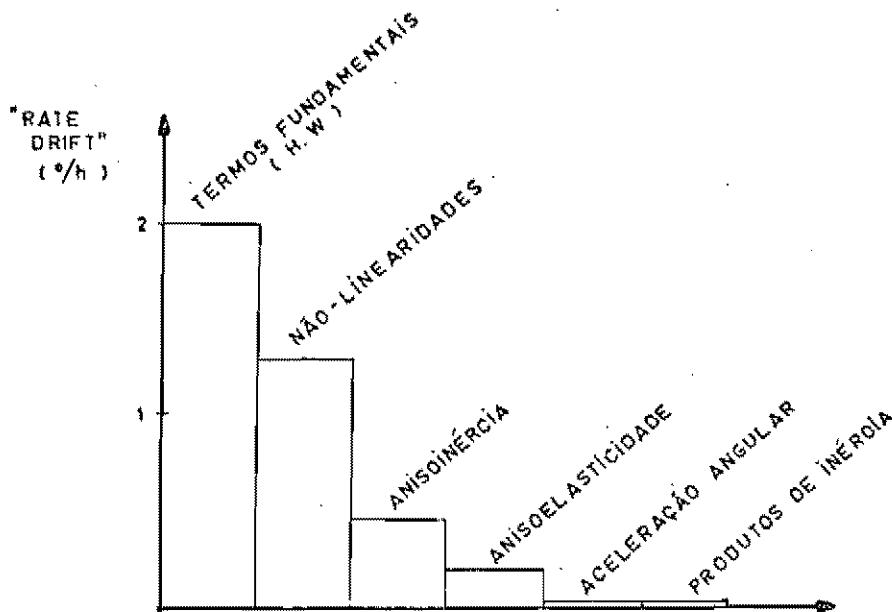


Fig. 4.6 - Aspectos comparativos das fontes de erros em giroscópios.

A Figura 4.6 foi obtida com entradas da forma: (Joos, 1977):

$$w = W \cdot \cos(w_t) \quad \text{vibrações angulares}$$

$$a = A \cdot \cos(w_t) \quad \text{vibrações lineares}$$

com $W = 0.1 \text{ rd/s}$ nos três eixos e $A = 5.g$ nos três eixos.

As não-linearidades mencionadas na Figura 4.6, referem-se ao fator de escala, aos "syncros" sensor angular e gerador de torque, e à malha de torqueamento.

A partir da Equação 4.11, a dinâmica sem torqueamento (malha aberta) pode ser escrita como:

$$I_{00} \cdot \ddot{\alpha}_0 + B \cdot \dot{\alpha}_0 + K(W)\alpha_0 = H_r \cdot W_x - F(W,A) , \quad (4.12)$$

onde:

$$K(W) = ((I_{ss} - I_{ii})(W_z^2 - W_x^2) + H_r \cdot W_z) , \text{ e}$$

$F(W,A)$ - representa os termos restantes da Equação 4.11.

As Equações 4.10, 4.11 e 4.12 referem-se a um girômetro com eixo de entrada na direção x, para este caso:

$$W = (W_x, W_y, W_z)^T \quad \text{e} \quad A = (A_x, A_y, A_z)^T .$$

A seguir é detalhada a eletrônica de torqueamento.

4.2 - ELETRÔNICA DE TORQUEAMENTO

Foi citado anteriormente a necessidade de manter o ângulo de "pickoff" (α_0) próximo do nulo a fim de minimizar a influência de erros por acoplamento de eixos, assim a solução adotada é a utilização de um servoposicionador que mantenha α_0 o menor possível. Vários esquemas de torqueamento podem ser implementados, dependendo das características desejadas como, por exemplo, precisão, constante de tempo, linearidade e outros requisitos inerentes a um servoposicionador. Assim, a Figura 4.7 mostra a configuração geral dos procedimentos normalmente utilizados.

Dentre os procedimentos usuais, podem-se citar os digitais (binário, ternário e modulado) e o analógico, sendo este último de implementação mais simples. Tratamento completo e mais detalhado pode ser encontrado no trabalho de Todman et alii (1977), e particulari

dades sobre a leitura das medidas de girômetros são encontradas no trabalho de Cattan e Michelin (1978).

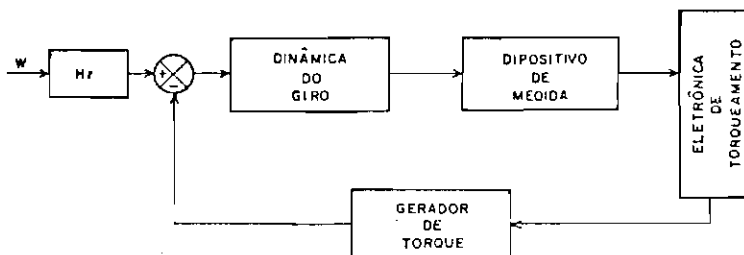


Fig. 4.7 - Malha de torqueamento de girômetros.

A malha analógica, que é a mais simples, é uma primeira hipótese de realização e, portanto, será utilizada neste trabalho.

Conforme a Figura 4.8, K_1 é o ganho do "syncro" sensor (S_{syn}) e K_t é o ganho do gerador de torque T_{syn} ; na realidade, estes ganhos dependem da frequência envolvida. Como as entradas consideradas não são oscilatórias, os ganhos constantes K_1 e K_t satisfazem ao modelo.

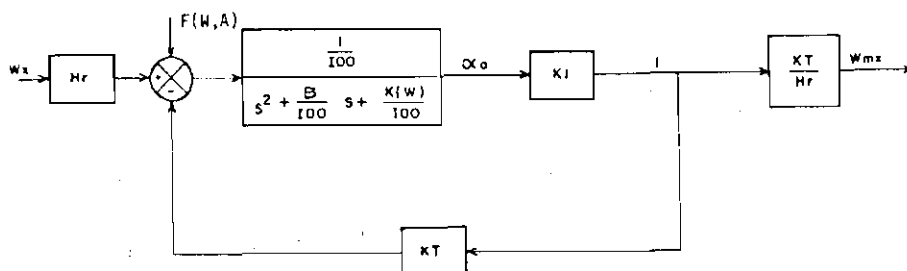


Fig. 4.8 - Malha de torqueamento analógica.

Da Figura 4.8, I é a corrente proporcional ao "pickoff", W_{mx} é a medida do girômetro na forma de corrente elétrica e o restante dos dados estão relacionados com a Equação 4.12.

Para a obtenção das medidas (no pior caso) considera-se que a amostragem das medidas (W_m) dos girômetros serão processadas em um intervalo de tempo finito, logo, durante esse intervalo seu valor não muda; portanto, a cada amostragem a entrada de velocidade W_x pode ser considerada constante também neste intervalo de tempo e, em consequência, $F(W,A)$ e $K(W)$ da Equação 4.12 não variam durante esse período. Assim, a resposta de regime de malha fechada para cada entrada constante W_x fica:

$$I(t) = K_1 \cdot \frac{H_r \cdot W_x - F(W,A)}{K(W) + K_1 \cdot K_t}$$

A constante de tempo para a malha é I_{00}/B , que para dados fornecidos por Bosgra e Reummers (1981) e Todman et alii (1977), é de aproximadamente $40 \mu s$, assim o período de amostragem da saída de $50 ms$, como adotado neste trabalho, não tem efeito relevante. Desta forma, a medida correspondente à velocidade angular de um girômetro com eixo de entrada na direção x (Figura 4.9) fica:

$$W_{mx} = \left[\frac{K_t}{H_r} \right] \cdot I(t) \quad (4.14)$$

Finalizando, adicionando um ruído branco (definido na Seção 3.3.2) na medida de W_m :

$$W_m = \left[\frac{K_t}{H_r} \right] \cdot I(t) + n_1(t),$$

tem-se um modelo realista (pior caso) do comportamento de um girômetro integrador.

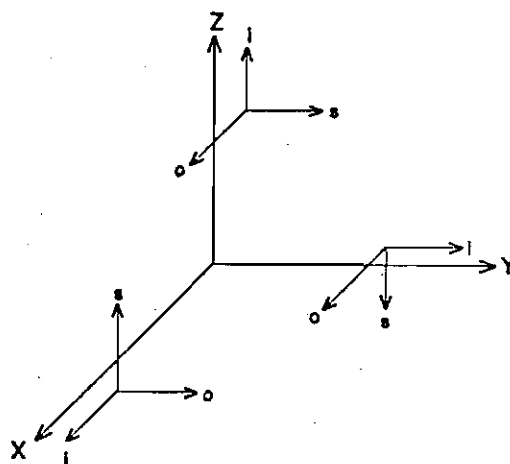


Fig. 4.9 - Disposição dos eixos dos girômetros em relação aos eixos do veículo.

Para as simulações realizadas neste trabalho, foram consideradas situações de pior caso em relação aos desalinhamentos internos dos girômetros, desalinhamentos do bloco inercial em si e eletrônica de torqueamento. Considerações qualitativas serão abordadas no capítulo posterior.

Concluindo, podem-se distinguir duas aplicações para sensores inerciais: em navegação inercial pura, onde os sensores devem possuir um modelo bem abrangente, levantado em laboratório, para evitar ao máximo o acúmulo de erros durante a propagação; e a outra aplicação em navegação inercial auxiliada (SNIA), utilizando modelamento simples e onde a precisão da navegação depende tanto de sensores inerciais como de sensores não-inerciais.

É importante notar que apesar de sensores inerciais possuírem precisão excelente, esta é de natureza local e, como visto, o acúmulo de erros somente será minimizado com o auxílio de outras fontes de referência, como, por exemplo, sensores não-inerciais.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E CONCLUSÕES

Neste capítulo serão apresentados o esquema de simulação utilizado, os dados de entrada para simulação, gráficos obtidos, efeitos de não-linearidades e comentários, e com sugestões para continuidade de deste trabalho.

5.1 - ESQUEMA E DADOS DE SIMULAÇÃO

Consta basicamente do modelo de avaliação, formado pelos simuladores de atitude e do girômetro, e do modelo de trabalho, que reúne tarefas como modelo de propagação de atitude e modelo de observações em procedimento de filtragem ótima já citado; a Figura 5.1 mostra o esquema básico de simulação, e na Figura 5.2 é mostrada uma descrição esquemática (algoritmo) da simulação executada.

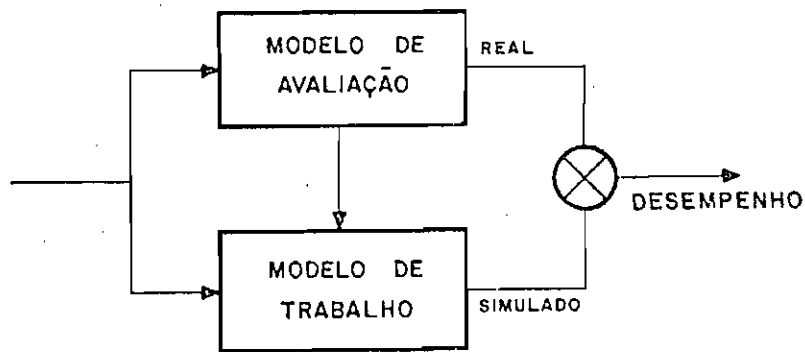


Fig. 5.1 - Esquema de simulação.

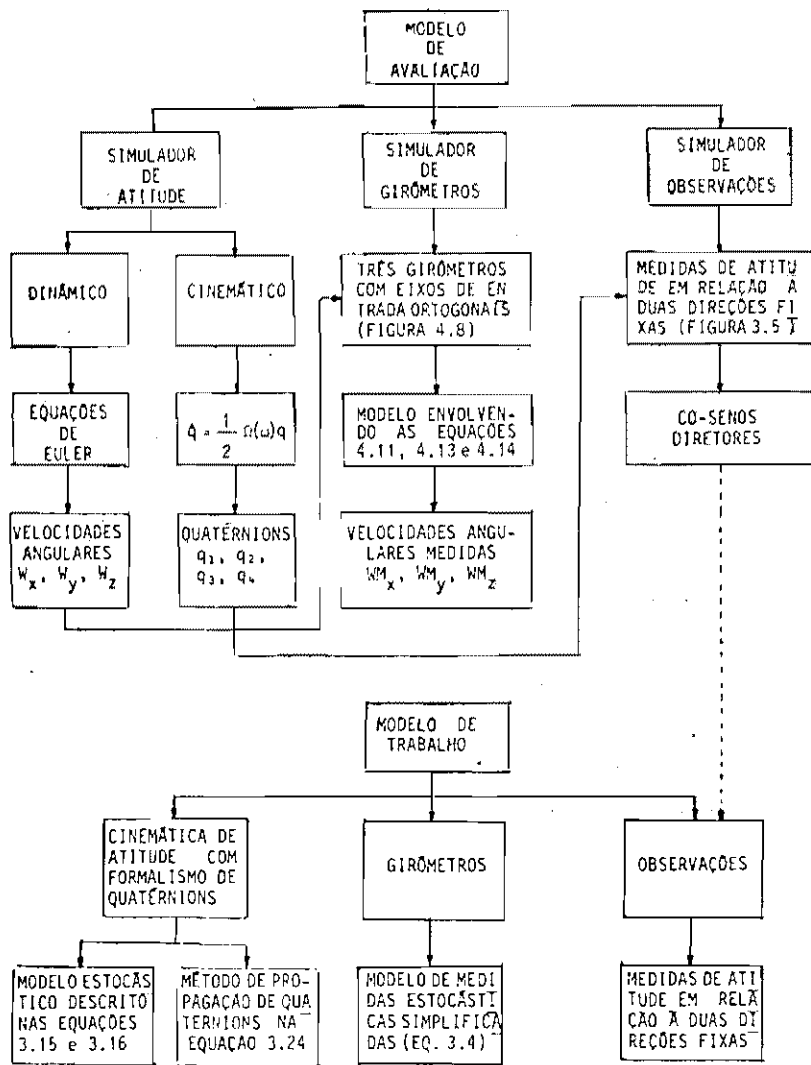


Fig. 5.2 - Modelo de avaliação e modelo de trabalho.

Quanto aos parâmetros de simulação, em relação à cinemática foram criadas situações que englobam a faixa de variação da dinâmica real de um satélite de sensoriamento remoto, ou seja, velocidades compatíveis com o movimento angular da órbita. Em relação aos sensores inerciais, dados relativos aos girômetros integradores reais foram utilizados; a seguir uma síntese dos parâmetros de simulação de atitude e do girômetro é mostrada.

5.1.1 - SIMULAÇÃO DE ATITUDE

Desde que às entradas necessárias são velocidades angulares nos eixos do veículo, e ainda em ambiente de acelerações desprezíveis, as equações de "Euler" satisfazem ao propósito:

$$\dot{W}_x = \left[\frac{I_y}{I_x} - \frac{I_z}{I_x} \right] W_y W_z + \frac{L_x}{I_x} ,$$

$$\dot{W}_y = \left[\frac{I_z}{I_y} - \frac{I_x}{I_y} \right] W_x W_z + \frac{L_y}{I_y} ,$$

$$\dot{W}_z = \left[\frac{I_x}{I_z} - \frac{I_y}{I_z} \right] W_x W_y + \frac{L_z}{I_z} ,$$

com torques externos (L_x , L_y , L_z) nulos e momentos principais de inércia:

$$I_x = 9.56 \text{ kg.m}^2 ,$$

$$I_y = 10.4 \text{ kg.m}^2 ,$$

$$I_z = 11.0 \text{ Kg.m}^2 .$$

Condições iniciais de velocidade angular e atitude são:

a) Dinâmica média:

$$W_x(0) = 0.05 \text{ rd/s} ,$$

$$W_y(0) = 0.05 \text{ rd/s} ,$$

$$W_z(0) = 0.08 \text{ rd/s} .$$

b) Dinâmica lenta:

$$W_x(o) = 0.005 \text{ rd/s} ,$$

$$W_y(o) = 0.003 \text{ rd/s} ,$$

$$W_z(o) = 0.01 \text{ rd/s} .$$

c) Atitude:

$$q_1(o) = 0 ,$$

$$q_2(o) = 0 ,$$

$$q_3(o) = 0 ,$$

$$q_4(o) = 1 .$$

5.1.2 - SIMULAÇÃO DAS OBSERVAÇÕES

De acordo com a Seção 3.3.6 a equação das observações fica:

$$y = h(q) + v ,$$

onde o ruído para a simulação possui desvio padrão $\sigma_o = 1 \cdot 10^{-3}$, ou seja, o ruído na medida de observação é da ordem de 1 milirradiano.

5.1.3 - SIMULAÇÃO DO GIRÔMETRO

Baseado no girômetro integrador (Todman et alii, 1977), seguem os parâmetros utilizados para a simulação (Tabela 5.1).

TABELA 5.1

PARÂMETROS ESPECÍFICOS DE UM
GIRÔMETRO INTEGRADOR

MOMENTO ANGULAR DO MOTOR	H	0.03	Nm.s
MOMENTOS DE INÉRCIA DO "FLOAT"	I_{ob}	3.2×10^{-7}	Kg.m ²
	I_{ss}	3.2×10^{-7}	
	I_{it}	3.2×10^{-7}	
MOMENTOS DE INÉRCIA DO ROTOR	I_{obr}	1.5×10^{-7}	Kg.m ²
	I_{ir}	1.5×10^{-7}	
	I_{ssr}	2.0×10^{-7}	
MOMENTOS DE INÉRCIA NO "GIMBAL"	I_{osg}	1.5×10^{-7}	Kg.m ²
	I_{org}	1.2×10^{-8}	
	I_{sig}	1.5×10^{-8}	
GANHO DO SINCRÓ SENSOR "Ssyn"	K_s	10	V/rd
GANHO DO SINCRÓ GERADOR DE TORQUE "Tsyn"	K_t	5×10^{-4}	Nm/V

Os valores utilizados para os desalinhamentos internos do girômetro foram típicos; o ruído branco com desvio padrão de $1 \cdot 10^{-5}$ (rd/s) foi adicionado como o "pior caso" (Seção 4.2).

5.2 - RESULTADOS OBTIDOS

Entre uma série de simulações realizadas é apresentada uma sequência de testes relacionados na Tabela 5.2, onde as partes citadas referem-se a desalinhamentos repentinos do bloco giroscópico nos três eixos. Vale frisar que o objetivo é criar situações críticas para teste de desempenho do procedimento.

TABELA 5.2

RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

VARIAVEIS	DINÂMICA MÉDIA	DINÂMICA LENTA	DESEMPENHO	CAUSAS POSSÍVEIS
Figuras representativas	Figuras 5.5 e 5.6	Figuras 5.3, 5.4	---	-----
Período de simulação (seg.)	500	2000	D	-----
Intervalo de propagação (seg) ($T_{k+1} - T_k$)	0.1	0.5	A	- Quebra de H.L. - Erro na integração do quatérnio (comutatividade), vide Seção 3.3.3
Intervalo de atualização (seg)(filtragem)	1	10	B	- Acumulo de erros podem quebrar H.L.
Instantes de ocorrência de panes (seg)	200	300, 600, 1100 e 1400	D	-----
Precisão nas condições iniciais do quatérnio	$\sigma_q = 10^{-4}$	$\sigma_q = 10^{-7}$	B	- Inconsistência com variâncias iniciais. - Quebra de H.L.
Precisão nas condições iniciais na deriva	$\sigma_b = 10^{-3}$	$\sigma_b = 10^{-3}$	B	- Inconsistência com variâncias iniciais. - Quebra de H.L.
Variâncias iniciais do quatérnio e deriva	$\begin{bmatrix} P_Q & 0 \\ \hline 0 & P_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-10} & \vdots \\ \hline \vdots & 10^{-5} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_Q & 0 \\ \hline 0 & P_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-10} & \vdots \\ \hline \vdots & 10^{-5} \end{bmatrix}$	A	- Estimativas iniciais errôneas podem ocasionar divergência inicial elevada e quebra de H.L.
Variâncias iniciais do ruído no estado	$\begin{bmatrix} Q_Q & 0 \\ \hline 0 & Q_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-10} & \vdots \\ \hline \vdots & 10^{-6} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Q_Q & 0 \\ \hline 0 & Q_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-10} & \vdots \\ \hline \vdots & 10^{-6} \end{bmatrix}$	A	- Estimativas iniciais errôneas podem ocasionar divergência inicial elevada e quebra de H.L.
Variância do ruído nas observações	$R = \text{diag}(10^{-6})$	$R = \text{diag}(10^{-6})$	B	- Inconsistência entre precisões envolvidas, estimativas incoerentes
Variâncias iniciais do estado (níveis de ruído dinâmico) referente ao filtro adaptativo	$P_{qk} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & \vdots \\ \hline \vdots & 10^{-12} \end{bmatrix}$	$P_{qk} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & \vdots \\ \hline \vdots & 10^{-12} \end{bmatrix}$	A	- Dosagem de ruído inconsistente produz quebra de H.L. nas estimativas do estado

Com o propósito de mostrar de maneira sucinta a influência relativa das grandezas envolvidas no desempenho do procedimento, serão utilizadas as seguintes classificações de desempenho (Tabela 5.2):

- A - influência drástica,
- B - influência moderada,
- C - influência pequena,
- D - sem influência,

e ainda:

H.L. - que significa hipóteses de linearidades.

As Figuras 5.3 a 5.6 estão mencionadas na Tabela 5.2.

As fontes de erro predominantes na simulação foram (para uma entrada W_x):

- desalinhamento interno devido ao "pickoff" não nulo

$$\alpha_0 (H_r \cdot W_z) ,$$

- desalinhamento externo do bloco girométrico

$$H_r (\gamma_z \cdot W_y - \gamma_y \cdot W_z) .$$

Vale frisar que apesar de grande número de componentes de erro (Equação 4.11) não influírem nesta simulação, os efeitos predominantes citados satisfazem ao propósito do trabalho, pois, como se nota, os erros englobam as outras componentes de velocidade angular, correlacionando as derivas nos três eixos.

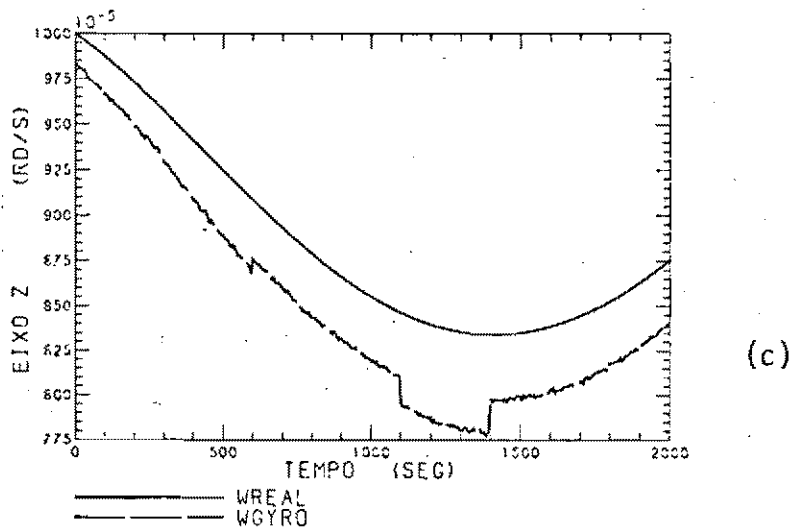
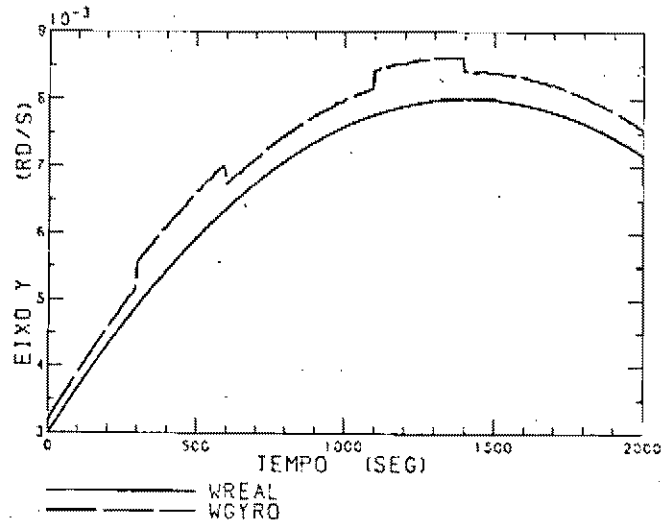
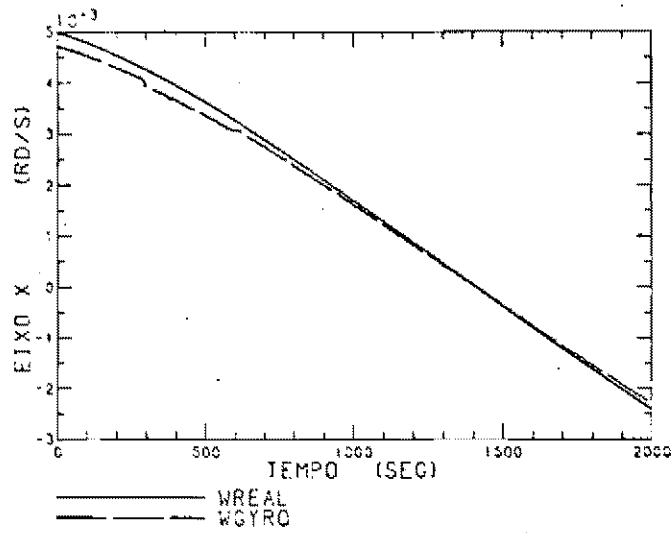


Fig. 5.3 - Velocidades angulares real e medida (dinâmica-lenta):
a) eixo x; b) eixo y; c) eixo z.

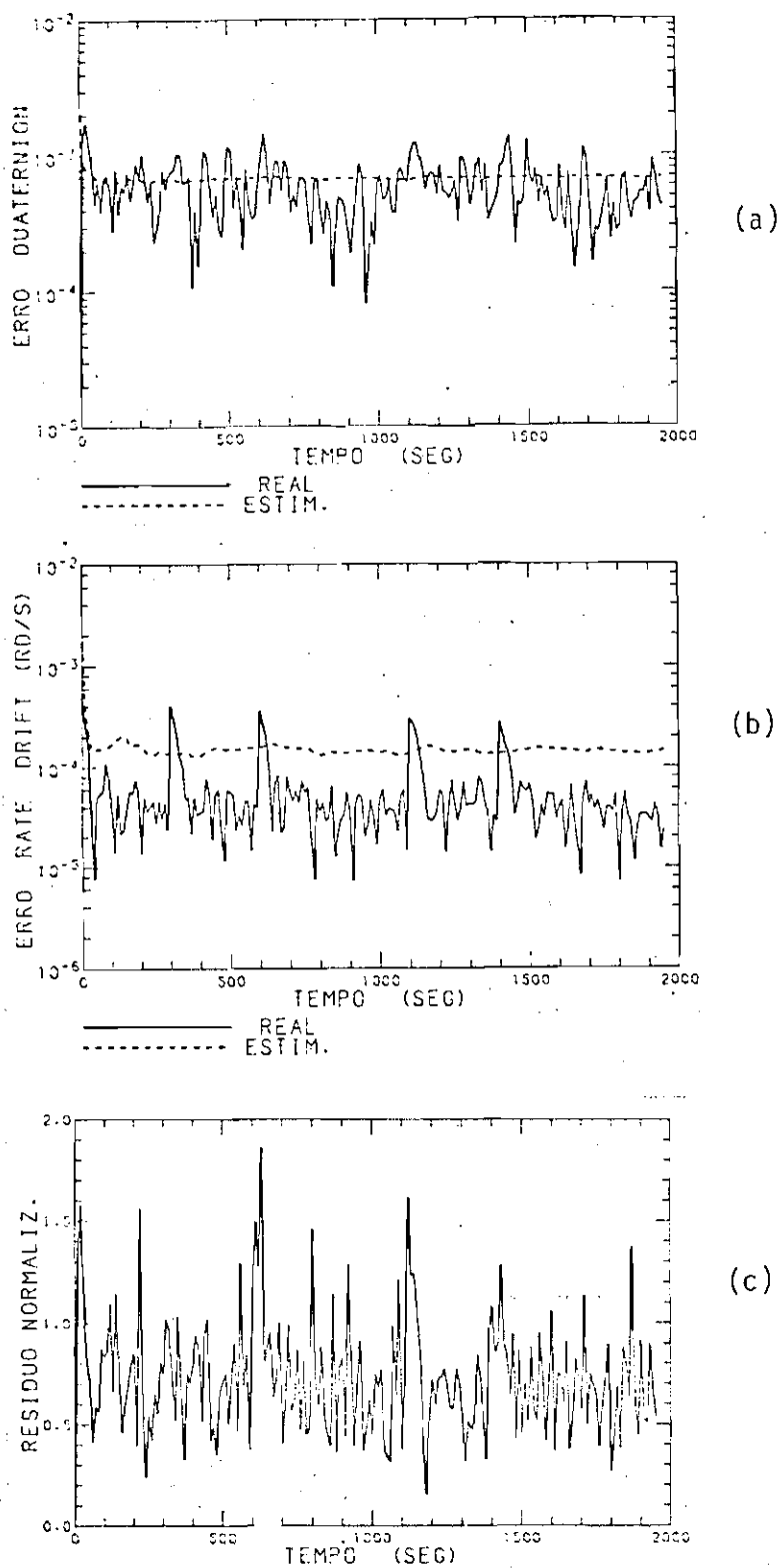


Fig. 5.4 - Dinâmica lenta: a) erro em quat̄ernion; b) erro em deriva; c) res̄iduo normaliz.; d) deriva no eixo \bar{x} ; e) deriva no eixo \bar{y} ; f) deriva no eixo \bar{z} . (continua)

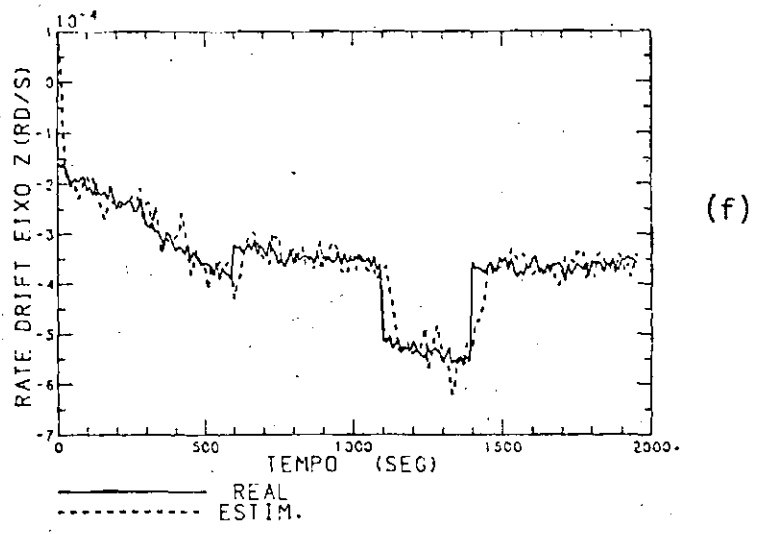
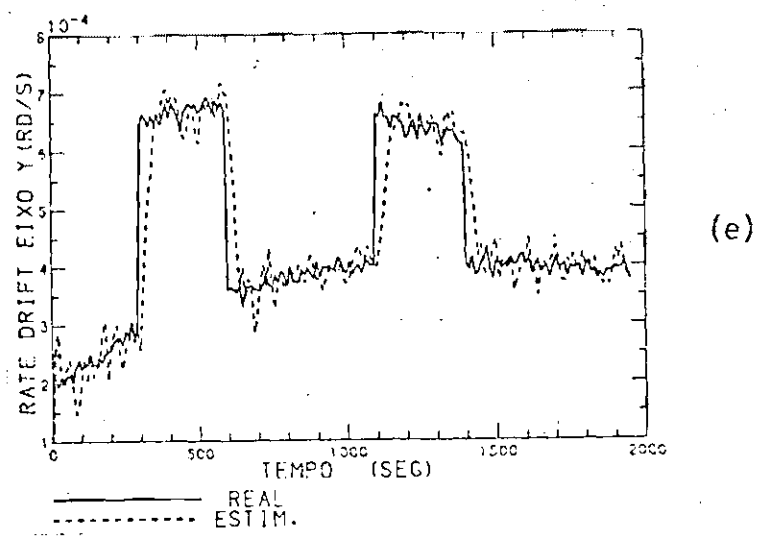
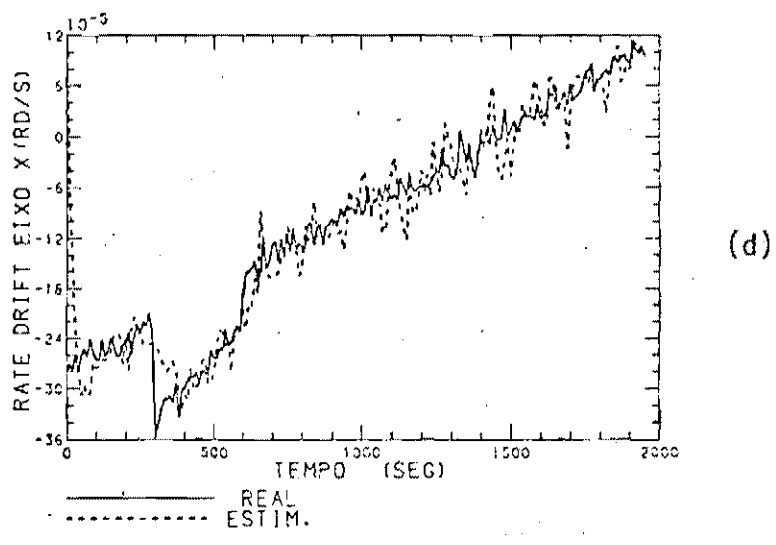


Fig. 5.4 - Conclusão

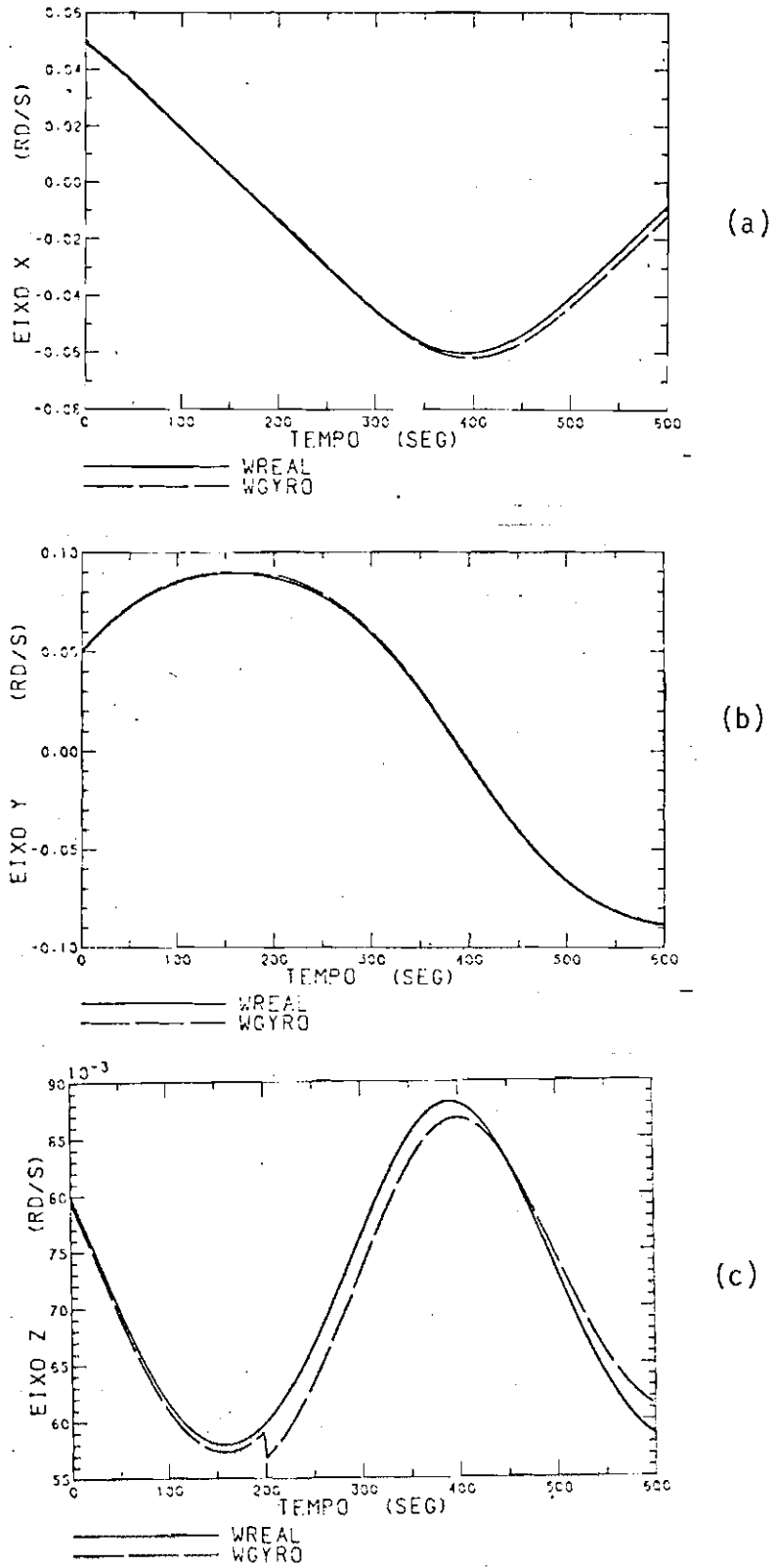


Fig. 5.5 - Velocidades angulares real e medida (dinâmica média): a) eixo x; b) eixo y; c) eixo z.

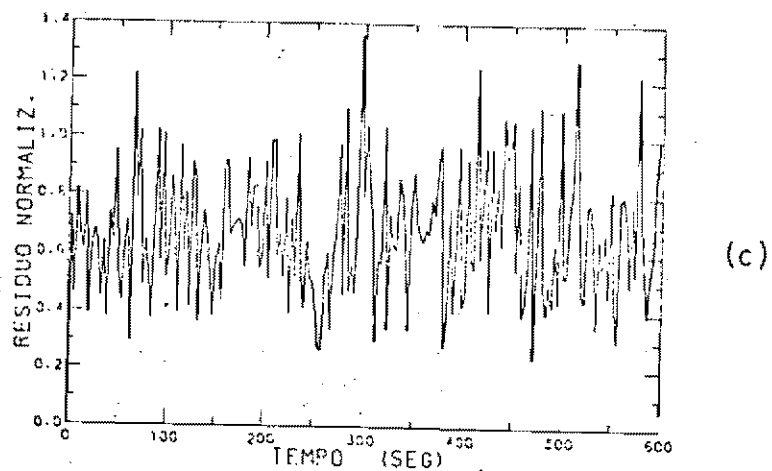
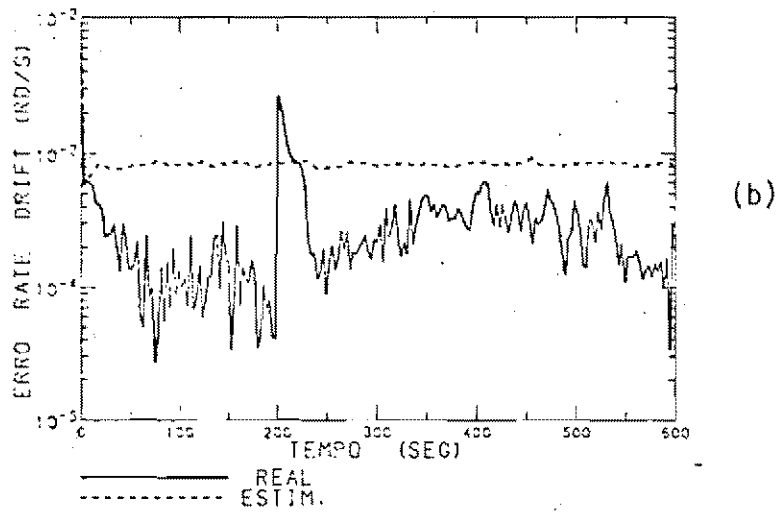
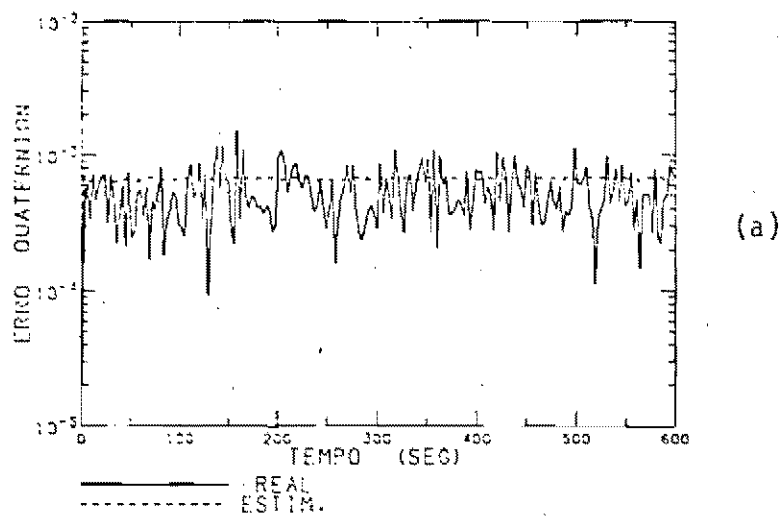
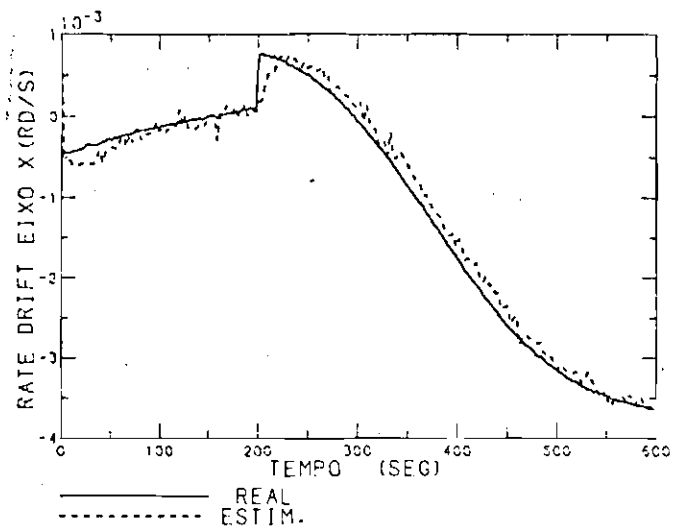
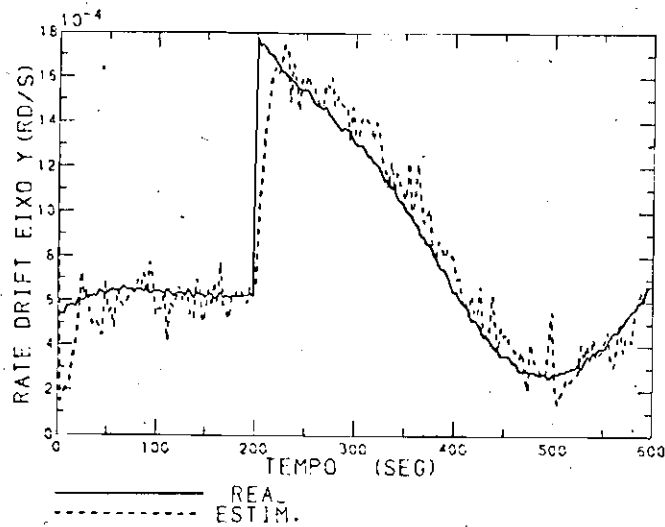


Fig. 5.6 - Dinâmica média: a) erro em quatérnion; b) erro em deriva; c) resíduo normaliz.; d) deriva no eixo x; e) deriva no eixo y; f) deriva no eixo z.

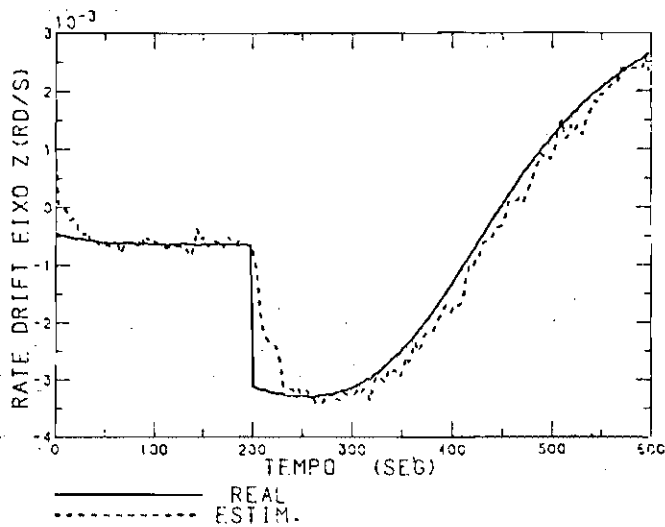
(continua)



(d)



(e)



(f)

Fig. 5.6 - Conclusão

A seguir definem-se os parâmetros característicos do desempenho do procedimento:

$$\Delta q = \left[\sum_{i=1}^4 (q_i - \hat{q}_i)^2 \right]^{1/2} \quad \text{é o erro real em quatêrnions,}$$

$$\Delta \hat{q} = \left[\sum_{i=1}^4 P(i,i) \right]^{1/2} \quad \text{é o erro estimado em quatêrnion com } i = 1, 2, 3, 4 \text{ (diagonal da matriz de covariância do erro).}$$

Analogamente para as derivas:

$$\Delta b = \left[\sum_{i=1}^3 (b_i - \hat{b}_i)^2 \right]^{1/2} \quad \text{é o erro em deriva,}$$

$$\Delta \hat{b} = \left[\sum_{i=5}^7 P(i,i) \right]^{1/2} \quad \text{é o erro estimado em deriva, com } i = 5, 6, 7.$$

$$r = \left[\sum_{i=1}^6 r_i^2 \right] / 6\sigma_0 \quad \text{é o resíduo normalizado, uma vez que } \sigma_0 \text{ é o desvio padrão da observação.}$$

Nota-se que a partir das Figuras 5.4 e 5.6 que as panes são visíveis, e logo que são percebidas as estimativas voltam a convergir e o resíduo normalizado permanece dentro da faixa de $3\sigma_0$.

5.3 - EFEITOS DAS NÃO-LINEARIDADES

Como visto anteriormente, as Equações 3.17 e 3.18 foram obtidas por linearizações. Sabe-se, porém, que termos de ordem superior estão presentes nestas aproximações, e é fundamental conhecer seus efeitos e suas ordens de grandeza para a realização de um esquema de estimação operacional.

Não-linearidades significativas podem ocorrer tanto na equação da dinâmica quanto na equação de observações. No primeiro caso, pode-se dizer (sem rigor) que se o nível de ruído na dinâmica for inferior aos termos de segunda ordem, estes erros serão propagados e conseqüentemente acumulados; um procedimento de aumento artificial do nível de ruído na dinâmica (como utilizado neste trabalho) pode a princípio controlar este problema. No segundo caso, os efeitos dos termos de segunda ordem provenientes da linearização da equação das observações dependem também da matriz de covariância do erro P (Jazwinski, 1970), assim, da mesma forma, aumentando o nível de ruído das observações a ponto de mascarar estes termos o problema pode ser contornado. Maiores detalhes são abordados em Jazwinski (1970).

Vale frisar que nos procedimentos anteriores a perda de precisão é evidente, assim é necessário um estudo detalhado a fim de se chegar a um procedimento satisfatório.

5.4 - CONCLUSÕES SOBRE O MODELO DE DERIVA DE GIRÔMETROS

A medida que a navegação inercial é solicitada por intervalos de tempo maiores, o modelo de deriva torna-se inadequado, pois surge a necessidade de mais informações sobre a propagação desta deriva. Assim, de acordo com a duração da navegação inercial pura, um modelo mais detalhado é exigido. A Figura 5.7 mostra praticamente todos os efeitos que influenciam a deriva, onde o erro de *retificação* mencionado é produzido por entradas oscilatórias em quadratura e termos não-lineares da Equação 4.11 (Joos, 1977).

Neste trabalho foi utilizado um modelo de avaliação mais detalhado, como mostrado na Figura 5.8.

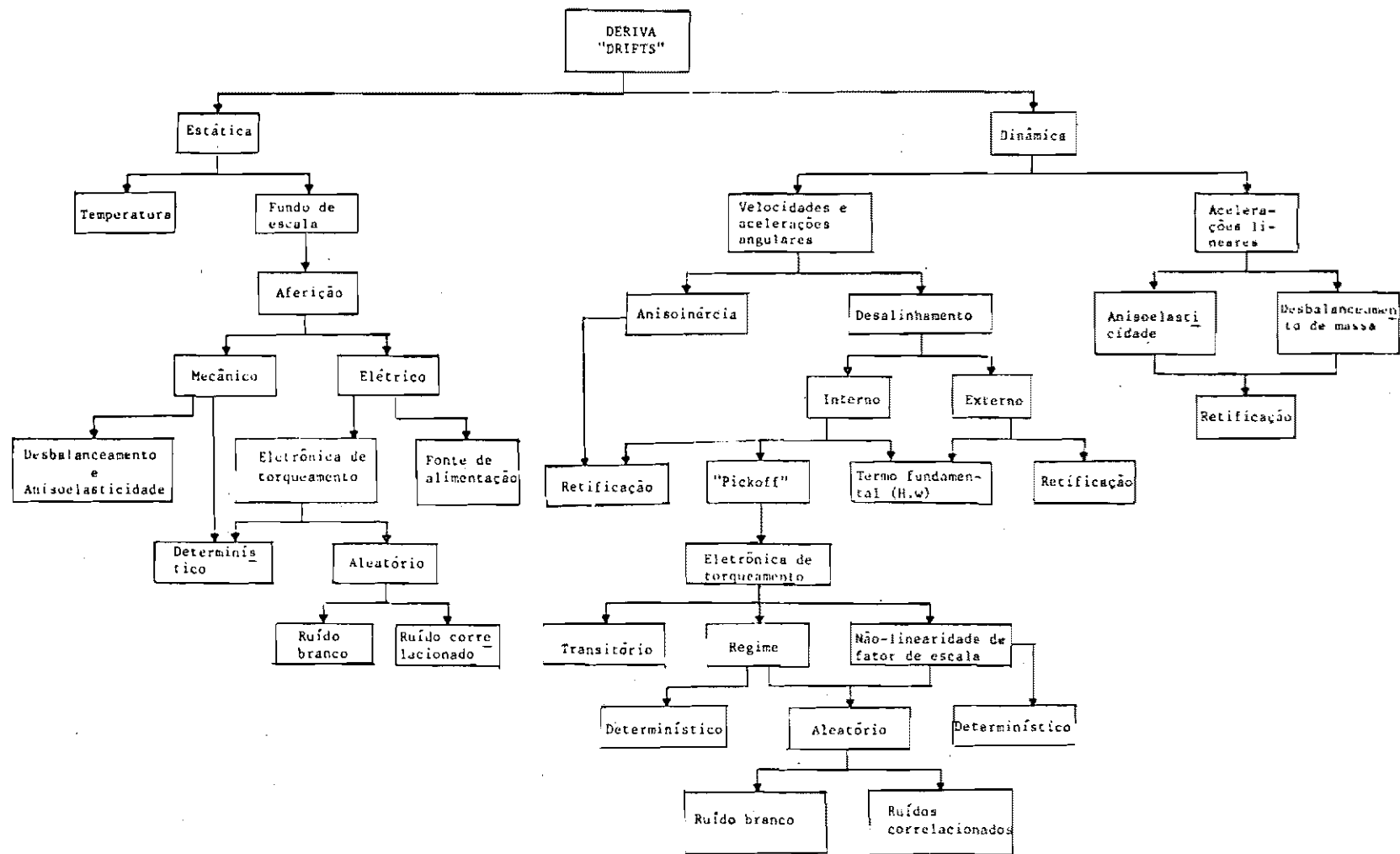


Fig. 5.7 - Fontes de erros do girômetro.

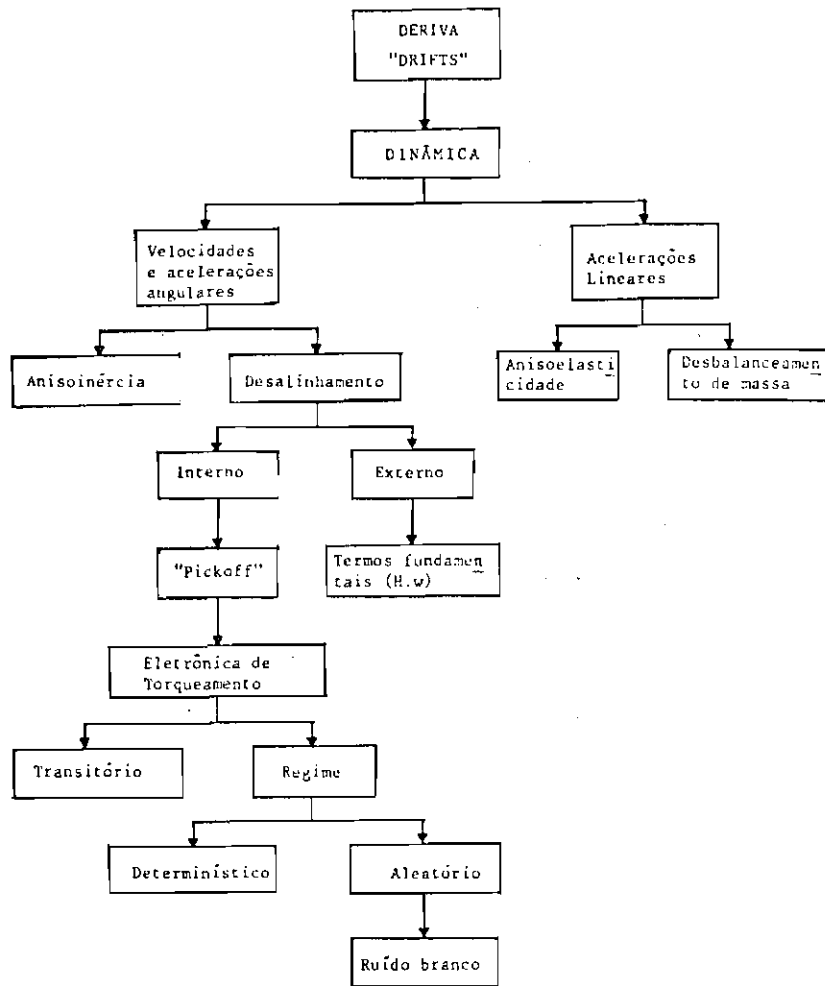


Fig. 5.8 - Modelo de avaliação do girômetro.

De acordo com a dinâmica simulada, efeitos devidos a acelerações lineares e oscilações não estão presentes, assim como fontes de erros com n^{íveis} abaixo do ruído considerado. Na Figura 5.9 são mostradas as fontes de erros que predominaram na simulação.

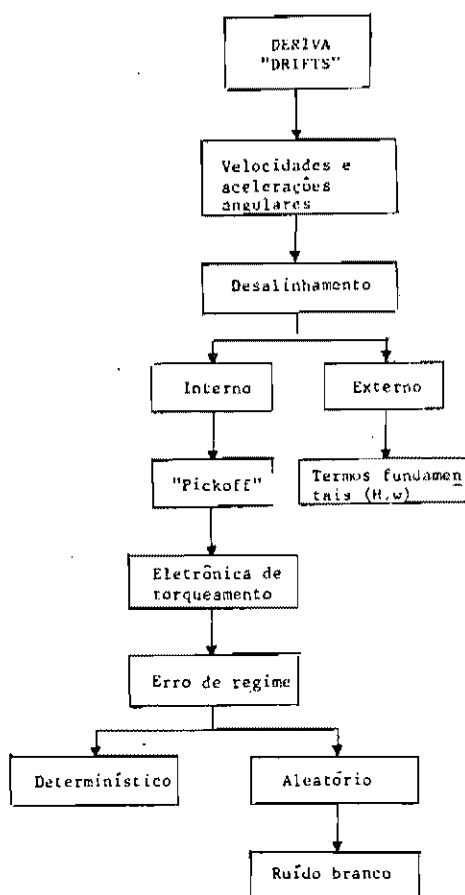


Fig. 5.9 - Erros predominantes na simulação.

5.5 - CONCLUSÕES E UMA ALTERNATIVA SOBRE O MODELO DE PROPAGAÇÃO E FILTRAGEM UTILIZADO

Como visto anteriormente, na Equação 3.13 nota-se a existência de erros de aproximação devidos à linearização. Partindo do princípio de que estes erros possam atingir valores significativos comparados com a parcela de ruído proveniente das medidas dos girômetros $(Z(\bar{q}) \cdot n_1)$, implementou-se um procedimento onde os erros de linearização foram modelados com ruído branco e ainda considerou-se a hipótese de que o ruído nas medidas do girômetro fosse desprezível comparado com os erros de linearização; assim as Equações 3.15 e 3.16 tomam a forma:

$$\delta \dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} [\Omega(\bar{w})\delta q + Z(\bar{q})\delta b] + n_1'$$

$$\delta \dot{\bar{b}} = n_2$$

onde n_1' é um ruído branco de média nula e covariância

$$E[n_1'(t) \cdot n_1'^T(t - \tau)] = Q_1' \cdot \delta(t - \tau) .$$

Assim, a Equação 3.17 fica:

$$\delta \dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, t)\delta x + G \cdot n' , \quad (5.1)$$

onde as diferenças básicas entre as duas modelagens (Equações 3.17 e 5.1) resumem-se na matriz $G = I$ e no vetor de ruído

$$n' = \left[\begin{array}{c} n_1'(1 \times 4) \\ \vdots \\ n_2(1 \times 3) \end{array} \right]_{(1 \times 7)}^T .$$

Vários testes realizados com este formalismo mostraram que, para as mesmas condições utilizadas, os resultados são praticamente idênticos, como mostrado nas Figura 5.10 e 5.11, com um pequeno aumento de sensibilidade à dosagem de ruído adaptativo.

Uma sugestão é realizar um esquema de filtragem indireta (Maybeck, 1979) utilizando os resultados apresentados no trabalho de Lefferts et alii (1982) e o formalismo citado, visando uma diminuição de carga computacional e melhor desempenho do procedimento.

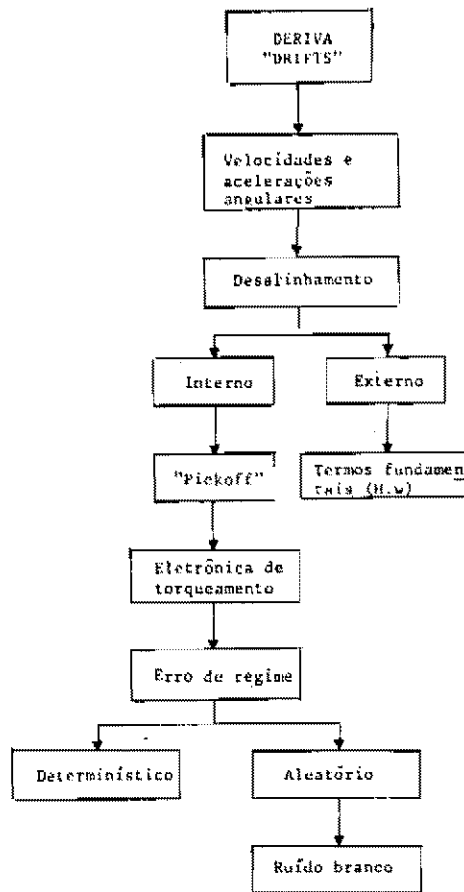


Fig. 5.9 - Erros predominantes na simulação.

5.5 - CONCLUSÕES E UMA ALTERNATIVA SOBRE O MODELO DE PROPAGAÇÃO E FILTRAGEM UTILIZADO

Como visto anteriormente, na Equação 3.13 nota-se a existência de erros de aproximação devidos à linearização. Partindo do princípio de que estes erros possam atingir valores significativos comparados com a parcela de ruído proveniente das medidas dos girômetros $(Z(\hat{q}) \cdot n_1)$, implementou-se um procedimento onde os erros de linearização foram modelados com ruído branco e ainda considerou-se a hipótese de que o ruído nas medidas do girômetro fosse desprezível comparado com os erros de linearização; assim as Equações 3.15 e 3.16 tomam a forma:

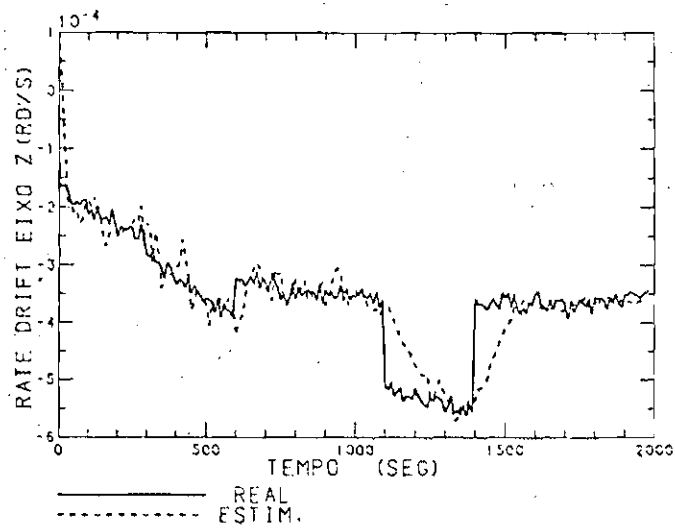
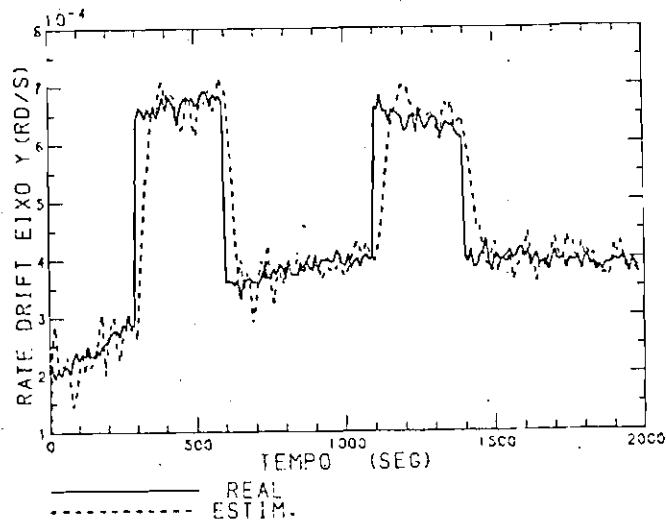
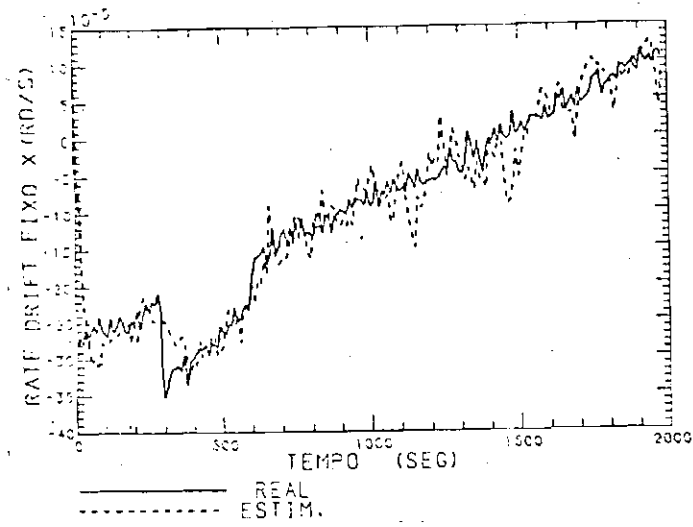


Fig. 5.10 - Conclusão

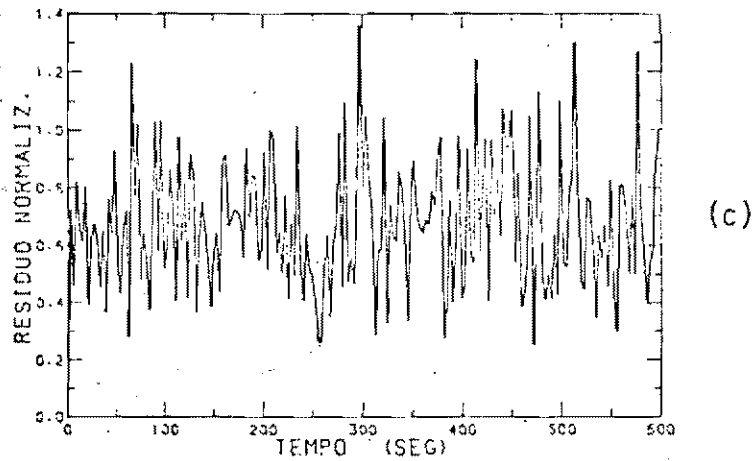
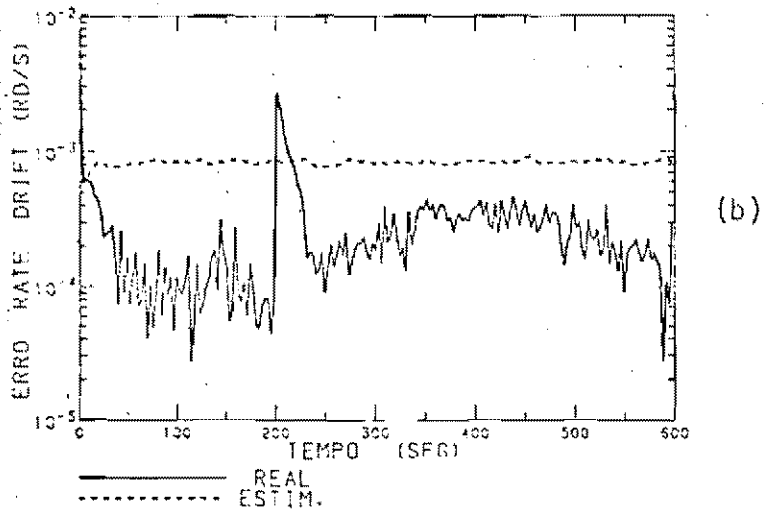
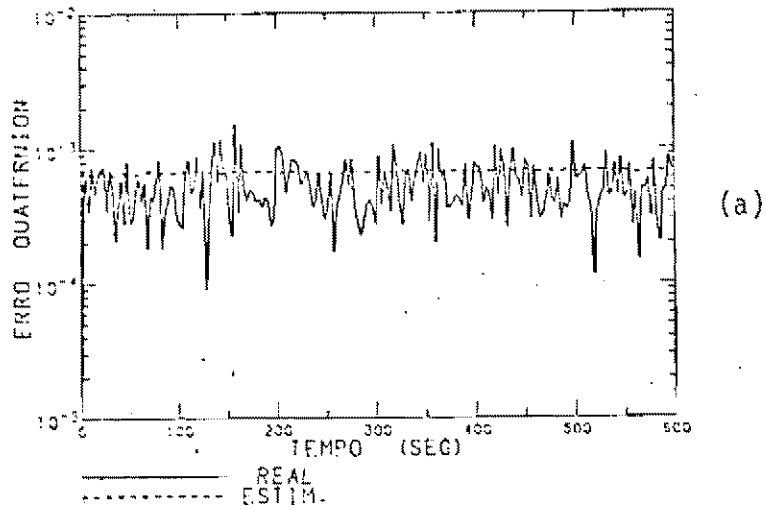


Fig. 5.11 - Dinâmica média: a) erro em quatérnio; b) erro em deriva; c) resíduo normalizado; d) deriva no eixo x; e) deriva no eixo y; f) deriva no eixo z.
(continua)

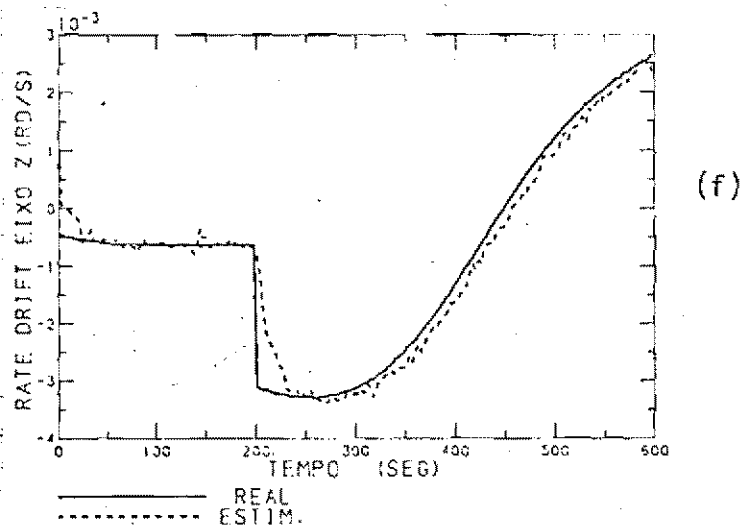
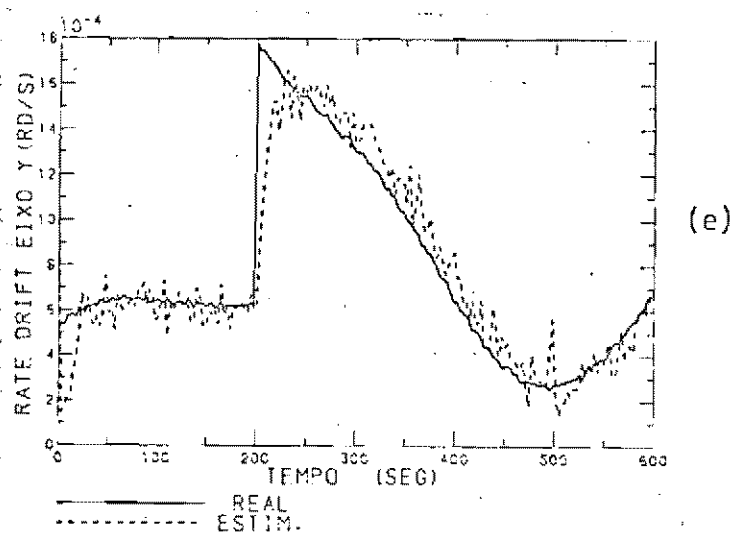
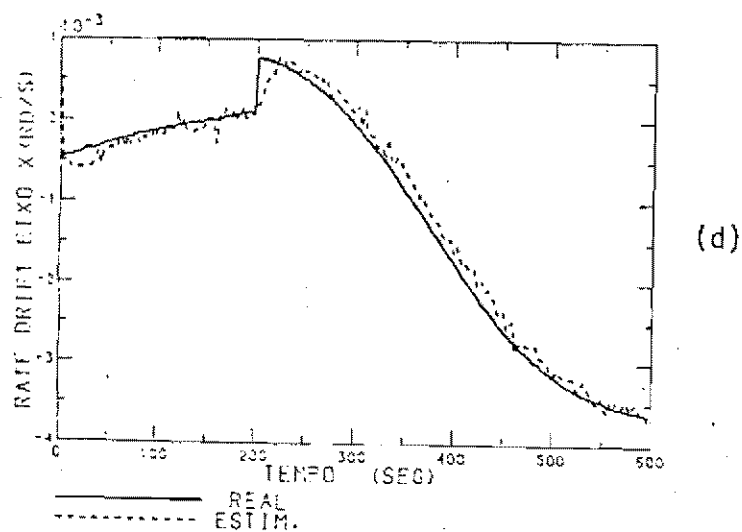


Fig. 5.11 - Conclusão

5.6 - SUGESTÕES

A seguir serão relacionadas, de forma sucinta, sugestões para continuidade deste trabalho em relação ao modelo de propagação e ao modelo de observações:

- a) Utilização de modelos detalhados de sensores, tais como sensores de horizonte terrestre, sensores solares e sensores de estelas.
- b) Estudo qualitativo, quantitativo, teórico e experimental sobre as não-linearidades envolvidas na dinâmica e na equação das observações, a fim de minimizar seus efeitos e, consequentemente, aumentar o período de propagação.
- c) Revisão do esquema de propagação do quatérnion, visando avaliar o erro de integração numérica (Wertz, 1978).
- d) Modelagem detalhada da eletrônica de torqueamento, definindo parâmetros e ruídos envolvidos.
- e) Estudo de método que envolvem compensação clássica de erros (Savage, 1978; Maybeck, 1979) e estimação ótima, reunindo assim os aspectos positivos das duas técnicas.
- f) Acréscimo, nos parâmetros do girômetro, de pequenos desvios aleatórios em relação ao seu valor nominal, alterando assim a repetibilidade dos sensores.
- g) Estudo de sensibilidade dos parâmetros envolvidos no modelo de avaliação a fim de obter uma previsão teórica dos erros predominantes.
- h) Implementação de procedimentos de identificação de parâmetros de erros de sensores inerciais em laboratório.

- i) Implementação de procedimentos de alinhamento do bloco girométrico a bordo de veículos.

Assim, como o objetivo é a navegação inercial sem auxílio por períodos cada vez maiores, pretende-se que a partir deste trabalho, e de definições de objetivos operacionais de um sistema, seja possível concluir um modelo de trabalho coerente para cada aplicação, seja detalhando alguns aspectos como simplificando outros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAR-ITZHACK, I.Y.; SERFATY, D.; YEHOSHUA, D. Doppler aided low-accuracy strapdown inertial navigation system. *AIAA Journal of Guidance and Control*, 5(3):236-242, May/June 1982.
- BOSE, S.C. Radar updated strapdown inertial midcourse guidance performance analysis for missiles. In: GUIDANCE AND CONTROL CONFERENCE, Boulder, CO, 1979. *Collection of Technical Papers*, New York, AIAA, 1979, p. 218-229.
- BOSGRA, J.A.; REUMMERS, J.J.M. Gyro noise measurement and analysis. *ESA Journal*, 5(1):43-55, 1981.
- BRITTING, K.R. *Inertial navigation systems analysis*. New York, John Wiley, 1971.
- BROUWER, D. Solution of the problem of artificial satellite; theory without drad. *The Astronomical Journal*, 64(1274):378-397, 1959.
- BROXMEYER, C. *Inertial navigation systems*. New York, McGraw-Hill, 1964.
- CARDENUTO, N.C. *Estudo de sensores inerciais tipo "strapdown"*. Trabalho de Graduação em Engenharia Eletrônica. São José dos Campos, ITA, 1979.
- CARPENTIER, J.; RADIX, J.C.; BOUNET, J.; BONNEVALLE, G. *Navigation par inertie*. Paris, Dunod, 1962.
- CATFORD, J.R. Application of strapdown inertial systems with particular reference to underwater vehicles. In: NORTH ATLANTIC TREATY ORGANIZATION (NATO). *Strap-down Inertial Systems*. Neuille sur Seine, France, 1978, p. 5.1 - 5.17. (AGARD-LS-95).
- CATTAN, G.; MICHELIN, J. Systeme de guidance inertiel strap-down pour engin tactique. In: NORTH ATLANTIC TREATY ORGANIZATION (NATO). *Strap-down Inertial Systems*. Neuille sur Seine, France, 1978. p. 8.27 - 8.52. (AGARD-LS-95).

- CHRISTENSEN, T.W. Advanced development of ESG strapdown navigation systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-2(2):143-157, Mar. 1966.
- CRAIG, R.J.G. Theory of operation of an elastically supported tuned gyroscope. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-8(3):280-288, May 1972a.
- Theory of errors of a multigimbal elastically supported tuned gyroscope. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-8(3):289-297, May 1972b.
- EDWARDS Jr., A. The state of strapdown inertial guidance and navigation. *Journal of the Institute of Navigation*, 18(4):386-401, 1971.
- ERZBERGER, H. *Application of Kalman filtering to error correction of inertial navigators*. Washington, DC, NASA, 1967. (NASA TND-3874).
- GELB, A. *Applied optimal estimation*. Cambridge. The MIT Press, 1974.
- JAZWINSKI, A.H. *Stochastic process and filtering theory*. New York, Academic, 1970.
- JOOS, D.K. Comparison of typical gyro errors for strapdown applications. In: SYMPOSIUM ON GYROSCOPE TECHNOLOGY, Stuttgart, West Germany, 1977. *Proceedings*. Dusseldorf, Deutsche Gesellschaft fur Ortung und Navigation, 1978, p. 2.1 - 2.3.
- JUDE, R.J. System study of an inertial attitude measurement system for Earth - pointing satellites. In: EUROPEAN SPACE AGENCY (ESA). *Attitude and Orbit Control Systems*; Proceedings of a Conference held in Noordwijk, 1977. Paris, 1977, p. 131-144. (ESA SP 128).
- KANESBERG, E. A nuclear magnetic resonance (NMR) gyro with optical magnetometer detection. In: SOCIETY OF PHOTO-OPTICAL INSTRUMENTATION ENGINEERS. *Laser inertial sensors*; Proceedings of the seminar, S. Diego, California, Bellingham, Washington, 1978, p. 73-80.

- KILLPATRICK, J. The laser gyro. *IEEE Spectrum*, 4(10):44-55, Oct. 1967.
- KONING, M.G. High volume single - degree - of - freedom gyros for strapped - down use. In: SYMPOSIUM ON GYROSCOPE TECHNOLOGY, Stuttgart, West Germany, 1977. *Proceedings*. Dusseldorf, Deutsche Gesellschaft fur Ortung und Navigation, 1978, p. 4.17-4.22.
- KRUCZYNSKI, L.R. *Global positioning systems navigation algorithms*. Austin, TX, Applied Mechanics Research Laboratory, University of Texas at Austin, May 1977. (Report AMRL 1979).
- KUBBAT, W.J. Application of strapdown inertial navigation to high performance fighter aircraft. In: NORTH ATLANTIC TREATY ORGANIZATION (NATO). *Strap-down Inertial Systems*. Neuille sur Seine, France, 1978. p. 7.1 - 7.16. (AGARD-LS-95).
- LEFFERTS, E.J.; MARKLEY, F.F.; SHUSTER, M.D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. *AIAA Journal of Guidance and Control*, 5(5):417-429, Sept./Oct. 1982.
- LEVINSON, E. Laser-gyro strapdown inertial system applications. In: NORTH ATLANTIC TREATY ORGANIZATION (NATO). *Strap-down Inertial Systems*. Neuilly sur Seine, France, 1978. p. 6.1 - 6.48. (AGARD-LS-95).
- LOPES, R.V.F. *Determinação de atitude de satélites artificiais através de estimadores de estado*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1982. (INPE-2608-TDL/105).
- LORELL, K.R. Use of calibration manoeuvres for improved performance of strapdown attitude reference systems, *Journal of Spacecraft*, 13(1):31-36, Jan. 1976.
- MAGNUS, K. Gyros powerful tools in aerospace technology. *Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society*, London, p. 342-354, Aug. 1978.
- MAYBECK, P.S. *Stochastic models, estimation and control*. New York, Academic, 1979, v. 1.

- MEDEIROS, V.M. *Análise de missões. Definição de geometria orbital de satélites artificiais.* Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1983. (INPE-2843-TDL/141).
- MILLER, R.B. A new strapdown attitude algorithm. *Journal of Guidance, Control & Dynamics*, 6(4):287-291, July/Aug. 1983.
- MORO, J. *Simulação do movimento e de observações de atitude para satélites artificiais terrestres.* São José dos Campos, INPE, fev. 1983. (INPE-2649-RPI/076).
- NASH, J.M.; WELLS, G.R. Platform alignment using a strapdown stellar sensor. *AIAA Journal*, 13(5):659-664, May 1975.
- NISBET, D.B.; SCOTT, N.G. Recent development. In: *Gyroscope Technology Journal of Navigation*, 32(1):109-121, Jan. 1978.
- PLOTNIKOV, P.K.; CHELNOKOV, N.I. Comparative analysis of the accuracy of algorithms for determining the orientations of an object in Rodrigues - Hamilton parameter and directing cosines. *Kosmicheskie Issledovaniia*, v. 17, p. 371-377, May/June 1979.
- POTTER, J.E.; VANDER VELDE, W.E. Optimum mixing of gyroscope and star tracker data. *Journal of Spacecraft*, 55(5):536-540, Dec. 1967.
- RADIX, J.C. *Gyroscopes et gyrometres.* France, Cepadues, 1978.
- *Techniques inertielles.* France, Cepadues, 1972.
- RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. *Estimação adaptativa do ruído no estado para estimadores sequenciais.* São José dos Campos, INPE, abr. 1982. (INPE-2385-RPI/069).
- RIOS NETO, A.; LOPES, R.V.F.; NEGREIROS DE PAIVA, R. Estimação adaptativa de atitude de satélites artificiais via filtro de Kalman com compensação do modelo dinâmico. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 4., Campinas, 1982. *Anais.* Campinas, Sociedade Brasileira de Automática, 1982, p. 164-168.
- ROBINSON, A.C. *On the use of quaternion in simulation of rigid body motion.* Ohio, WADC, 1958. (WADC Technical Report 58-17).

- SAVAGE, P.G. Strapdown sensor, In: NORTH ATLANTIC TREATY ORGANIZATION (NATO). *Strap-down Inertial Systems*, Neuilly sur Seine, France, 1978. p. 2.1 - 2.46, (AGARD-LS-95).
- SCHMIDT, G.T. Strapdown inertial systems - theory and applications introduction and overview. In: NORTH ATLANTIC TREATY ORGANIZATION (NATO). *Strap-down Inertial Systems*. Neuilly sur Seine, France, 1978. p. 1.1 - 1.10. (AGARD-LS-95).
- SILVA, W.C.C. *Determinação de expressões analíticas simplificadas para cálculo e propagação de órbitas mediante o uso de teoria de estimação de parâmetros*. Tese de Doutorado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1982. (INPE-2320-TDL/080).
- SMITH, S.G. Strapped-down systems and gyroscope technology. In: *Journal of Navigation*, 32(1):91-101, Jan. 1979.
- SORENSEN, H.W. Kalman filtering techniques. In: ADVANCES IN CONTROL SYSTEMS; *Theory and Applications*. New York, Academic, 1966, v. 3, p. 219-292.
- TAPLEY, B.D.; RIOS NETO, A.; SCHULTZ, B.E. Orbit determination in the presence of atmospheric drag errors, In: GIACAGLIA, G.E.O., ed. *Satellite Dynamics*; Symposium held at São Paulo, 1974. Berlin, Springer-Verlag, 1975, p. 154-196.
- TODMAN, D.; HUTCHESON, J.; EARDLEY, D.; CALLARD, L. *Study of strapdown inertial optical attitude measurement system; final report*. Filton, Bristol, British Aircraft Corporation, 1977. v. 1. (Document Reference nº ESS/SS 738).
- VERGEZ, P.L.; McCLENDON, J.R. Optimal control and estimation for strapdown seeker guidance of tactical missiles, *AIAA Journal of Guidance and Control*, 5(3):225-228, May/June, 1982.
- WERTZ, J.R. *Spacecraft attitude determination and control*. London, D. Reidel, 1978.

APENDICE A

DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES $\phi(t, t_0)$ E $\Gamma(t, t_0)$

Definições:

ϕ - matriz de transição $\phi(t, t_0)$,

$\bar{0}$ - matriz nula,

$\phi(0)$ - valor inicial de ϕ , ou seja, $\phi(t_0, t_0)$.

A matriz de transição \bar{e} solução da equação:

$$\dot{\bar{\phi}} = F(\bar{x}, t)\bar{\phi} ,$$

ou

$$\left[\begin{array}{c|c} \dot{\phi}_{11} & \dot{\phi}_{12} \\ \hline \dot{\phi}_{21} & \dot{\phi}_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 1/2 \cdot \Omega(\bar{w}) & -1/2 \cdot Z(\bar{q}) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \hline \phi_{21} & \phi_{22} \end{array} \right]$$

daí se tem:

$$\phi_{21} = \bar{0} \text{ que com } \phi_{21}(0) = \bar{0} \text{ fica } \phi_{21}(t, t_0) = \bar{0} ,$$

$$\phi_{22} = \bar{0} \text{ que com } \phi_{22}(0) = I \text{ fica } \phi_{22}(t, t_0) = I ,$$

$$\phi_{11} = \frac{1}{2} \cdot \Omega(\bar{w})\phi_{11} - \frac{1}{2} \cdot Z(\bar{q})\phi_{21} , \text{ com } \phi_{11}(0) = I , \text{ e}$$

$$\phi_{21}(t, t_0) = 0 ,$$

portanto:

$$\dot{\phi}_{11} = \frac{1}{2} \cdot \Omega(\bar{w})\phi_{11} ,$$

cuja solução é (Wertz, 1978):

$$\phi_{11}(t, t_0) = I \cdot \cos\left[|\bar{w}| \cdot \frac{\Delta t}{2}\right] + \frac{\Omega(\bar{w})}{(\bar{w})} \cdot \text{sen}\left[|\bar{w}| \cdot \frac{\Delta t}{2}\right],$$

onde:

$$\Delta t = t - t_0,$$

$$|\bar{w}| = (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)^{1/2} \text{ e}$$

I - é a matriz identidade.

Continuando: Dada a equação diferencial

$$\dot{\phi}_{12} = \frac{1}{2} \cdot \Omega(\bar{w})\phi_{12} - \frac{1}{2} \cdot Z(\bar{q})\phi_{22},$$

com condição inicial $\phi_{12}(0) = \bar{0}$, a solução fica:

$$\phi_{12} = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \phi_{11}(t, s) \cdot Z(\bar{q}(s)) ds,$$

onde, usando as igualdades:

$$\phi_{11}(t, t_0) = \theta(t, t_0) \text{ e}$$

$$\phi_{12}(t, t_0) = \psi(t, t_0),$$

a matriz de transição do estado fica:

$$\phi(t, t_0) = \left[\begin{array}{c|c} \theta(t, t_0) & \psi(t, t_0) \\ \hline \bar{0} & I \end{array} \right]_{(7 \times 7)}$$

Desde que $n(t)$ é considerado constante ("step-process") a cada intervalo, a solução forçada para:

$$\delta \dot{x} = F(\bar{x}, t) \delta x + G(\bar{x}, t) \cdot n(t) ,$$

fica:

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t_0) &= \int_{t_0}^t \phi(t, s) \cdot G(\bar{x}(s), s) ds = \int_{t_0}^t \left[\begin{array}{c|c} \theta(t, s) & \psi(t, s) \\ \hline 0 & I \end{array} \right] ds \\ &= \int_{t_0}^t \left[\begin{array}{c|c} -\frac{1}{2} \cdot Z(\bar{q}(s)) & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] ds = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \theta(t, s) \cdot Z(\bar{q}(s)) ds & \int_{t_0}^t \psi(t, s) ds \\ \hline \bar{0} & \int_{t_0}^t I \cdot ds \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \psi(t, t_0) & \Sigma(t, t_0) \\ \hline \bar{0} & I \cdot \Delta t \end{array} \right]_{(7 \times 6)} , \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde:

$$\Sigma(t, t_0) = \int_{t_0}^t \int_s^t \theta(t, t') \cdot Z(\bar{q}(t')) dt' \cdot ds .$$

Na propagação da matriz de covariância, a matriz Q (Equação A.2) será obtida por técnicas de ruído adaptativo, daí, é razoável afirmar que não há necessidade de determinação precisa de $\Gamma(t, t_0)$, pois

o erro relativo a esta aproximação será compensado em Q. Com base nesta consideração será aplicada a *regra do trapézio*:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & \bar{0} \\ \bar{0} & Q_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde:

$$Q_1 \cdot \delta(t - \tau) = E[n_1(t) \cdot n_1^T(\tau)] \quad e$$

$$Q_2 \cdot \delta(t - \tau) = E[n_2(t) \cdot n_2^T(\tau)].$$

Agora, aplicando a regra do trapézio na Equação A.1:

$$\psi(t, t_0) = -\frac{1}{4} \cdot \Delta t [\theta(t, t) \cdot Z(\bar{q}(t)) + \theta(t, t_0) \cdot Z(\bar{q}(t_0))],$$

como $\theta(t, t_0) = I$, tem-se:

$$\psi(t, t_0) = -\frac{1}{4} \cdot \Delta t [Z(\bar{q}(t)) + \theta(t, t_0) \cdot Z(\bar{q}(t_0))], \quad (\text{A.3})$$

$$\Sigma(t, t_0) = \int_{t_0}^t \psi(t, s) ds = \frac{1}{2} \cdot \Delta t [\psi(t, t) + \psi(t, t_0)],$$

mas como $\psi(t, t) = \bar{0}$, tem-se:

$$\Sigma(t, t_0) = \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot \psi(t, t_0), \quad \text{ou}$$

$$\Sigma(t, t_0) = -\frac{1}{8} (\Delta t)^2 \cdot [Z(\bar{q}(t)) + \theta(t, t_0) \cdot Z(\bar{q}(t_0))], \quad (\text{A.4})$$

em resumo tem-se:

$$Z'(\bar{q}(t)) = Z(\bar{q}(t)) + \theta(t, t_0) \cdot Z(\bar{q}(t_0)) , \quad (\text{A.5})$$

$$\psi(t, t_0) = - \frac{1}{4} \cdot \Delta t \cdot Z'(\bar{q}(t)) , \quad (\text{A.6})$$

$$\Sigma(t, t_0) = - \frac{1}{8} (\Delta t)^2 \cdot Z'(\bar{q}(t)) . \quad (\text{A.7})$$

APÊNDICE B

FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN E PROCESSAMENTO SEQUENCIAL

B.1 - FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

A nomenclatura de Filtro Estendido de Kalman é normalmente utilizada quando a técnica de filtragem é aplicada a sistemas não-lineares; assim, de acordo com Gelb (1974) tem-se o algoritmo para o sistema discretizado:

Seja a dinâmica não-linear:

$$\dot{x} = f(x,t) + g(t)n(t) , \quad (\text{B.1})$$

e as observações:

$$Y(t) = h(x,t) + v(t) , \quad (\text{B.2})$$

onde:

- x é o vetor de estado de dimensão $n \times 1$,
- Y é o vetor de observações $m \times 1$,
- $n(t)$ é um ruído branco gaussiano com média nula e covariância

$$E[n(t) \cdot n^T(\tau)] = Q(t) \cdot \delta(t - \tau) ,$$

- $v(t)$ é um ruído branco gaussiano com média nula e covariância

$$E[v(t) \cdot v^T(\tau)] = R(t) \cdot \delta(t - \tau) ,$$

$$\text{e ainda } E[n(t) \cdot v^T(\tau)] = \bar{0} ,$$

- f, g, h são funções conhecidas.

Linearizando as Equações B.1 e B.2 em torno de uma solução de referência \bar{x} , tem-se:

$$\delta \dot{x} = F(\bar{x}, t) \delta x + g(t) \cdot n(t) ,$$

$$\delta Y = H(\bar{x}, t) \delta x + v(t) ,$$

onde:

$$F(\bar{x}, t) = \frac{\partial f(x, t)}{\partial \bar{x}} ,$$

$$H(\bar{x}, t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial \bar{x}} .$$

Assim, com o sistema linearizado o algoritmo fica:

PROPAGACÃO -

$$\bar{x}(t) = \int_{t_0}^t f(\bar{x}, t) dt ,$$

$$\bar{P} = \phi_{k-1}^k \cdot p_{k-1} \cdot \phi_{k-1}^{kT} + \Gamma_{k-1}^k \cdot Q_{k-1} \cdot \Gamma_{k-1}^{kT} ,$$

onde:

- ϕ_{k-1}^k é a matriz de transição do estado $\phi(t, t_0)$ discretizada, ou seja, $\phi(t_k, t_{k-1})$, e

- Γ_{k-1}^k é a matriz $\Gamma(t, t_0)$ (Apêndice A) discretizada, ou seja, $\Gamma(t_k, t_{k-1})$.

ATUALIZAÇÃO -

$$H_k = \bar{P} \cdot H_k(\bar{x}_k) [H_k(\bar{x}_k) \cdot \bar{P}_k \cdot H_k(\bar{x}_k) + R_k] ,$$

$$x_k = \bar{x}_k + K_k [Y_k - h_k(\bar{x}_k)] ,$$

$$P_k = \bar{P}_k - K_k \cdot H_k(\bar{x}_k) \cdot \bar{P}_k .$$

B.2 - PROCESSAMENTO SEQUENCIAL

Quando o ruído nas observações \bar{e} não-correlacionado, a matriz $R(t)$ é diagonal. Existe um procedimento (Sorenson, 1966) que evita a inversão de matriz no cálculo do ganho; este método, conhecido como *processamento sequencial* é descrito a seguir (Lopes, 1982):

$$K_k^i = P_k^{i-1} \cdot (H_k^i(\bar{x}_k))^T [(H_k^i(\bar{x}_k)) \cdot P_k^{i-1} \cdot (H_k^i(\bar{x}_k))^T + R_k^i]^{-1} ,$$

$$\bar{x}_k^i = \bar{x}_k^{i-1} + K_k^i [Y_k^i - h_k^i(\bar{x}_k) + H_k^i(\bar{x}_k) \cdot (\bar{x}_k - \bar{x}_k^{i-1})] ,$$

$$P_k^i = P_k^{i-1} - K_k^i \cdot H_k^i(\bar{x}_k) \cdot P_k^{i-1} ,$$

onde:

- Y_k^i é a i -ésima componente do vetor de observações,
- h_k^i é a i -ésima componente da função $h(\bar{x}_k)$,
- H_k^i é a i -ésima linha da matriz $H_k(\bar{x}_k)$, e ainda
- $\bar{x}_k^0 = \bar{x}_k$,
- $P_k^0 = \bar{P}_k$,

$$- \bar{x}_k^m = \bar{x}_k \text{ ,}$$

$$- p_k^m = p_k \text{ .}$$

APÊNDICE C

TÉCNICA DE RUÍDO ADAPTATIVO

Será descrito o procedimento de estimação do nível de ruído dinâmico (Rios Neto e Kuga, 1982) de forma resumida.

A idéia básica do procedimento, de acordo com o trabalho desenvolvido por Rios Neto e Kuga (1982), é estimar os termos da diagonal da matriz de ruído na dinâmica Q_k a ser incorporada na covariância do estado. A hipótese básica sugerida (Rios Neto e Kuga, 1982), para manter a consistência entre o resíduo e suas propriedades estatísticas (Jazwinski, 1970), foi a de máxima verossimilhança do resíduo verdadeiro r_v (Rios Neto e Kuga, 1982), onde:

$$r_v = h(x) - h(\bar{x}) . \quad (C.1a)$$

Admitindo que r_v possua distribuição gaussiana:

$$r_v^2 = E[r_v^2] , \quad (C.1b)$$

e desenvolvendo as Equações C.1a e C.1b, obtêm-se um procedimento de filtragem ótima, onde as *pseudo-observações* (Rios Neto e Kuga, 1982) são calculadas a partir do resíduo observado; o estado estimado neste procedimento é representado pelos elementos da diagonal da matriz de covariância do ruído dinâmico Q_k .

Assim, considerando-se que a evolução da covariância do ruído seja:

$$q_{k+1} = q_k + \epsilon_k$$

onde ϵ_k possui média nula e covariância

$$E[\epsilon(t) \cdot \epsilon^T(\tau)] = W_k \cdot \delta(t - \tau) ,$$

sendo W_k relativo a precisão da máquina por exemplo.

As equações da dinâmica e observações ficam:

$$q_{k+1} = q_k + \varepsilon_k , \quad (C.2a)$$

$$z_{k+1} = M_{k+1} \cdot q_{k+1} + n_{k+1} , \quad (C.2b)$$

onde a Equação C.2b é denominada equação das *pseudo-observações*, obtidas a partir da hipótese básica. Lembrando que o *resíduo verdadeiro* é a parcela do resíduo observado sem ruído (Equação C.1a), ou:

$$r(k+1) = r_v(k+1) + v , \quad (C.3)$$

e que:

$$r(k+1) = Y_{k+1} - h_{k+1}(\bar{x}_{k+1}) , \quad (C.4)$$

e ainda com as hipóteses básicas, adotadas no trabalho de Rios Neto e Kuga (1982) quanto à aproximação e modelagem de parcelas de ruído presentes no desenvolvimento, tem-se:

$$z_{k+1} = M_{k+1} \cdot q_{k+1} + n_{k+1} ,$$

onde:

$$M_{i,l} = \left[\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \Gamma_{j,l} \right]^2 , \quad i = 1,2,3,\dots,r , \quad (C.5)$$

é o elemento da matriz M_{k+1} de dimensão $r \times r$,

- $H_{i,j}$ é o elemento da matriz sensibilidade H_{k+1} de dimensão $r \times n$
e

- $\Gamma_{j,l}$ é o elemento da matriz Γ_{k+1} de dimensão $n \times r$.

A pseudo-medida z_{k+1} é dada por:

$$z_i = r_i^2 + R_{ii} - H_i \cdot \phi \cdot P \cdot \phi^T \cdot H_i^T, \quad (C.6)$$

onde:

- z_i é a componente do vetor z_{k+1} de dimensão $r \times 1$,
- r_i^2 é a componente do vetor $r_{k+1} = Y_{k+1} - \bar{Y}_{k+1}$ de dimensão $r \times 1$,
- R_{ii} é o elemento da diagonal da matriz R_{k+1} ,
- H_i é a i -ésima linha da matriz H_{k+1} ,
- ϕ é a matriz de transição de estado $\phi(t_{k+1}, t_k)$,

e ainda:

$$E[r_{k+1}^2] = 4r_i^2 \cdot R_{ii} + 2R_{ii}^2. \quad (C.7)$$

Para sistemas não-lineares deve-se utilizar valores de $r_i(k+1)$ limitados (Rios Neto e Kuga, 1982):

$$r_i = \min(r_i, (3\sigma_i)^2),$$

onde $\sigma_i^2 = R_{ii}$.

Assim, o esquema de estimação do ruído fica:

PSEUDO-OBSERVAÇÃO -

$$r_i^2 = \min(r_i^2, 9R_{ii})$$

$$M_{i,\ell} = \left(\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \Gamma_{j,\ell} \right)^2$$

$$z_i = r_i^2 + R_{ii} - H_i \cdot \phi \cdot P \cdot \phi^T \cdot H_i^T .$$

PROPAGAÇÃO -

$$\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_k$$

$$\bar{P}_{k+1} = P_k + W_k ,$$

onde $W_k = 10^{-2p} \cdot I$, sendo p o número de dígitos da mantissa do computador e I a matriz identidade.

ATUALIZAÇÃO -

$$K_{k+1} = \bar{P}_{k+1} \cdot M_{k+1}^T [M_{k+1} \cdot P_{k+1} \cdot M_{k+1}^T + E(z_{k+1}^2)] ,$$

$$P_{k+1} = \bar{P}_{k+1} - K_{k+1} \cdot M_{k+1} \cdot \bar{P}_{k+1} ,$$

$$\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_{k+1} + K_{k+1} [z_{k+1} - M_{k+1} \cdot \bar{q}_{k+1}] .$$

MATRIZ DE RUÍDO ESTIMADO -

$$(\bar{q}_{k+1})_i = \begin{cases} \bar{q}_i(k+1) & \text{se positivo,} \\ 0 & \text{se negativo,} \end{cases}$$

e:

$$Q_{k+1} = \text{diag}\{\bar{q}_{k+1}\} .$$

APÊNDICE D

MODELO DE AVALIAÇÃO (GIRÔMETRO INTEGRADOR)
E DESENVOLVIMENTO DE EQUAÇÕES

A seguir serão desenvolvidas as equações do momento angular nas coordenadas "float" e torque no eixo de saída M_0 .

D.1 - CÁLCULO DE PRODUTOS MATRICIAIS UTILIZADOS

a) Cálculo de H_f^f

$$H_f^f = I_g^f \cdot W_{if}^f + [C_r^f \cdot I_r^r \cdot C_f^r] W_{if}^f + C_r^f \cdot I_r^r \cdot W_{fr}^r, \quad (D.1)$$

$$\begin{aligned} C_r^f \cdot I_r^r \cdot C_f^r &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_0 \\ 0 & 1 & -\beta_i \\ -\beta_0 & \beta_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{iir} & 0 & 0 \\ 0 & I_{oor} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ssr} \end{bmatrix} \cdot C_f^r = \\ &= \begin{bmatrix} I_{iir} & 0 & \beta_0 \cdot I_{ssr} \\ 0 & I_{oor} & -\beta_i \cdot I_{ssr} \\ -\beta_0 \cdot I_{iir} & \beta_i \cdot I_{oor} & I_{ssr} \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_0 \\ 0 & 1 & \beta_i \\ \beta_0 & -\beta_i & 1 \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} I_{iir} & 0 & \beta_0 (I_{ssr} - I_{iir}) \\ 0 & I_{oor} & \beta_i (I_{oor} - I_{ssr}) \\ \beta_0 (I_{ssr} - I_{iir}) & \beta_i (I_{oor} - I_{ssr}) & I_{ssr} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde as aproximações do tipo $\beta^2 \approx 0$ foram consideradas.

b) Cálculo de W_{if}^f

$$W_{if}^f = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_s & -\alpha_0 \\ -\alpha_s & 1 & \alpha_i \\ \alpha_0 & -\alpha_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i \\ W_0 \\ W_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha}_0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} W_i + W_0 \alpha_s - W_s \alpha_0 \\ W_0 + W_s \alpha_i - W_i \alpha_s + \dot{\alpha}_0 \\ W_s + W_i \alpha_0 - W_0 \alpha_i \end{bmatrix}$$

c) Cálculo do Produto $C_r^f \cdot I_r^r \cdot W_{fr}^r$

$$C_r^f \cdot I_r^r \cdot W_{fr}^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_0 \\ 0 & 1 & -\beta_i \\ -\beta_0 & \beta_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{iir} & 0 & 0 \\ 0 & I_{oor} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ssr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_0 \cdot \omega \cdot I_{ssr} \\ -\beta_i \cdot \omega \cdot I_{ssr} \\ \omega \cdot I_{ssr} \end{bmatrix}$$

d) Cálculo do Produto $I_g^f \cdot W_{if}^f$

$$I_g^f \cdot W_{if}^f = \begin{bmatrix} I_{iig} & I_{iog} & I_{isg} \\ I_{oig} & I_{oog} & I_{osg} \\ I_{sig} & I_{sog} & I_{ssg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{iig} \cdot W_1 + I_{iog} \cdot W_2 + I_{isg} \cdot W_3 \\ I_{oig} \cdot W_1 + I_{oog} \cdot W_2 + I_{osg} \cdot W_3 \\ I_{sig} \cdot W_1 + I_{sog} \cdot W_2 + I_{ssg} \cdot W_3 \end{bmatrix}$$

Agora, as três componentes do momento angular H_f^f são:

$$\begin{aligned} (H_f^f)_i &= I_{iig} \cdot W_1 + I_{iog} \cdot W_2 + I_{isg} \cdot W_3 + I_{iir} \cdot W_1 + \\ &+ \beta_0 \cdot W_3 (I_{ssr} - I_{iir}) + \beta_0 \cdot \omega \cdot I_{ssr} , \end{aligned} \quad (D.2a)$$

$$\begin{aligned} (H_f^f)_o &= I_{oig} \cdot W_1 + I_{oog} \cdot W_2 + I_{osg} \cdot W_3 + I_{oor} \cdot W_2 + \\ &+ \beta_i \cdot W_3 (I_{oor} - I_{ssr}) - \beta_i \cdot \omega \cdot I_{ssr} , \end{aligned} \quad (D.2b)$$

$$\begin{aligned} (H_f^f)_s &= I_{sig} \cdot W_1 + I_{sog} \cdot W_2 + I_{ssg} \cdot W_3 + I_{ssr} \cdot W_3 + \\ &+ \beta_0 \cdot W_1 (I_{ssr} - I_{iir}) + \beta_i \cdot W_2 (I_{oor} - I_{ssr}) + \omega \cdot I_{ssr} . \end{aligned} \quad (D.2c)$$

D.2 - CÁLCULO DA COMPONENTE DO TORQUE NO EIXO DE SAÍDA M_o

$$M_o = (\dot{H}_f^f + W_{if}^f \times H_f^f)_o ,$$

calculando as parcelas:

$$\begin{aligned} (W_{if}^f \times H_f^f)_o &= (I_{ii} - I_{ss}) W_1 W_3 + I_{isg} \cdot W_3^2 - I_{sig} \cdot W_1^2 + I_{iog} \cdot W_2 W_3 - \\ &- I_{sog} \cdot W_1 W_2 + \beta_0 (I_{ssr} - I_{iir}) (W_3^2 - W_1^2) + \\ &+ \beta_0 \cdot W_3 \cdot \omega \cdot I_{ssr} - \beta_i (I_{oor} - I_{ssr}) W_1 W_2 - \\ &- W_1 \cdot \omega \cdot I_{ssr} , \end{aligned} \quad (D.3)$$

$$\begin{aligned} (\dot{H}_f^f)_o &= I_{oig} \cdot \dot{W}_1 + I_{oog} \cdot \dot{W}_2 + I_{osg} \cdot \dot{W}_3 + I_{oor} \cdot \dot{W}_2 + \\ &+ \beta_i (I_{oor} - I_{ssr}) W_3 - \beta_i \cdot I_{ssr} . \end{aligned} \quad (D.4)$$

Utilizando as Equações 4.2 e 4.3, as Equações D.3 e D.4 (desprezando os termos de segunda ordem) ficam:

$$\begin{aligned}
 (\dot{W}_{if}^f \cdot \dot{H}_f^f)_0 &= (I_{ii} - I_{ss})(W_i \dot{W}_s + W_i^2 \dot{\alpha}_0 - W_i \dot{W}_0 \alpha_i + W_s \dot{W}_0 \alpha_s - W_s^2 \dot{\alpha}_0) + \\
 &+ I_{isg}(W_s^2 + 2W_i W_s \alpha_0 - 2W_0 W_s \alpha_i) - I_{sig}(W_i + 2W_i W_0 \alpha_s - \\
 &- 2W_i W_s \alpha_0) + I_{iog}(W_0 + \dot{\alpha}_0)(W_s + W_i \alpha_0 - W_0 \alpha_i) + W_s^2 \dot{\alpha}_i - \\
 &- W_i W_s \dot{\alpha}_s - I_{sog}(W_0 + \dot{\alpha}_0)(W_i + W_0 \alpha_s - W_s \alpha_0) + W_i W_s \dot{\alpha}_i - \\
 &- W_i^2 \dot{\alpha}_s + \beta_0 (I_{ssr} - I_{iir})(W_s^2 - W_i^2 - 2W_0 W_s \alpha_i - 2W_i W_0 \alpha_s + \\
 &+ 4W_i W_s \alpha_0) + \beta_0 \cdot W_s \cdot I_{ssr} - \beta_i (I_{oor} - I_{ssr})(W_0 + \\
 &+ \dot{\alpha}_0) W_i - \omega \cdot I_{ssr} (W_i + W_0 \alpha_s - W_s \alpha_0), \quad (D.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\dot{H}_f^f)_0 &= I_{oig}(\dot{W}_i + \dot{W}_0 \alpha_s - \dot{W}_s \alpha_0 - W_s \dot{\alpha}_0) + I_{osg}(\dot{W}_s + \dot{W}_i \alpha_0 + \\
 &+ W_i \dot{\alpha}_0 - \dot{W}_0 \alpha_i) + I_{oo}(\dot{W}_0 + \ddot{\alpha}_0 + \dot{W}_s \alpha_i - W_i \alpha_s) + \beta_i (I_{oor} - \\
 &- I_{ssr})(\dot{W}_s + W_i \dot{\alpha}_0) - \beta_i \cdot I_{ssr} \cdot \dot{\omega}.
 \end{aligned}$$

Assim, a expressão do torque M_0 fica:

$$\begin{aligned}
 M_0 = & -H_r \cdot W_i + I_{oo} \cdot \ddot{\alpha}_0 + I_{oo} \cdot \dot{W}_0 + (I_{ii} - I_{ss})W_i W_s + I_{osg}(\dot{W}_s - \\
 & - W_i \dot{W}_0) + I_{oig}(\dot{W}_i + W_0 \dot{W}_s) + I_{sig}(W_s^2 - W_i^2) + \alpha_0[(I_{ss} - I_{ii}) \cdot \\
 & \cdot (W_s^2 - W_i^2) + H_r \cdot W_s + 4W_i W_s \cdot I_{sig} + I_{oig}(W_0 \dot{W}_i + W_i \dot{\alpha}_0 - \dot{W}_s) + \\
 & + I_{osg}(\dot{W}_i - W_0 \dot{W}_s - W_s \dot{\alpha}_0)] + \alpha_s[(I_{ii} - I_{ss})W_0 W_s - H_r \cdot W_0 - \\
 & - I_{oo} \cdot \dot{W}_i - 2W_i W_0 \cdot I_{sig} + I_{oig}(\dot{W}_0 - W_i \dot{W}_s) + I_{osg}(W_i^2 - W_0^2 - \\
 & - W_0 \dot{\alpha}_0)] + \alpha_i[(I_{ss} - I_{ii})W_0 W_i + I_{oo} \dot{W}_s - 2W_0 W_s \cdot I_{sig} - \\
 & - I_{osg}(\dot{W}_0 + W_i \dot{W}_s) + I_{oig}(W_s^2 - W_0^2 - W_0 \dot{\alpha}_0)] + \beta_0[(I_{ssr} - I_{iir}) \cdot \\
 & \cdot (W_s^2 - W_i^2) + H_r \cdot W_s)] + \beta_i[(I_{ssr} - I_{oor})(W_0 W_i - W_s) - \\
 & - I_{ssr} \cdot \dot{W}_0] + m(d_s \cdot A_i - d_i \cdot A_s) - m^2[(C_{ss} - C_{ii})A_i A_s + \\
 & + C_{si} \cdot A_i^2 - C_{is} \cdot A_s^2 + C_{so} \cdot A_0 A_i - C_{io} \cdot A_0 A_s] , \quad (D.7)
 \end{aligned}$$

Lembrando que:

$$I_{ii} = I_{iig} + I_{iir} ,$$

$$I_{oo} = I_{oog} + I_{oor} ,$$

$$I_{ss} = I_{ssr} + I_{ssg} ,$$

$$I_{sig} = I_{isg} ,$$

$$I_{iog} = I_{oig} ,$$

$$H_r = I_{ssr} \cdot \omega \quad e$$

$\alpha_i, \alpha_s, \beta_i, \beta_0$ são constantes.

Desprezando as multiplicações de ângulos pequenos por produtos de inércia, aplicando a rotação expressa nas Equações 4.10, e incluindo a malha de torqueamento, obtém-se a Equação 4.11.

APÊNDICE E

EQUAÇÃO DAS OBSERVAÇÕES

As observações constam de duas direções fixas em relação a um referencial inercial. Estas direções não variam no tempo, como no caso das observações reais do Sol e horizonte terrestre; porém em relação à dinâmica do satélite, estas variações são lentas. Assim, baseada no trabalho de Moro (1983), será derivada a equação das observações utilizada neste trabalho.

- Matriz de rotação (em quatêrnions):

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} .$$

Seja:

$$(C_1, C_2, C_3)^T \triangleq \bar{B} \cdot (T_x, T_y, T_z)^T \quad \text{e} \quad (\text{E.1a})$$

$$(C_4, C_5, C_6)^T \triangleq \bar{B} \cdot (S_x, S_y, S_z)^T, \quad (\text{E.1b})$$

onde $(T_x, T_y, T_z)^T$ e $(S_x, S_y, S_z)^T$ são os versores (fictícios) relativos as direções da Terra e do Sol respectivamente. Assim, as observações $h(x)$ ficam:

$$h(x) = \begin{bmatrix} (C_1, C_2, C_3)^T \\ \hline (C_4, C_5, C_6)^T \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} \quad (\text{E.2})$$

A matriz sensibilidade $H(x)$ é obtida da forma:

$$H(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x}, \quad (E.3)$$

onde:

$$x = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a Equação E.3, tem-se:

$$(F_1, F_2, F_3, F_4)^T \triangleq C \cdot (T_x, T_y, T_z)^T,$$

$$(F_5, F_6, F_7, F_8)^T \triangleq C \cdot (S_x, S_y, S_z)^T,$$

onde:

$$C \triangleq \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_2 & q_1 & -q_4 \\ -q_3 & q_4 & q_1 \\ q_4 & q_3 & -q_2 \end{bmatrix},$$

e definindo as matrizes:

$$H_{11}(x) = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ -F_2 & F_1 & -F_4 & F_3 \\ -F_3 & F_4 & F_1 & -F_2 \end{bmatrix} (3 \times 4)$$

$$H_{21}(x) = \begin{bmatrix} F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \\ -F_6 & F_5 & -F_8 & F_7 \\ -F_7 & F_8 & F_5 & -F_6 \end{bmatrix} (3 \times 4)$$

tem-se a matriz $H(x)$:

$$H(x) = \left[\begin{array}{c|c} H_{11}(x) & \bar{0} \\ \hline H_{21}(x) & \bar{0} \end{array} \right] (6 \times 7)$$