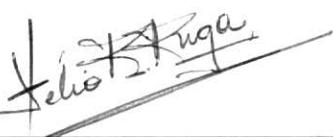
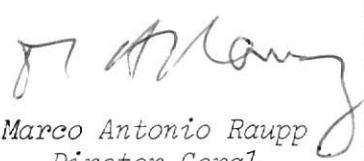


1. Publicação nº INPE-3813-NTE/252	2. Versão	3. Data Fev., 1986	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem DMC/DDO	Programa ANACO		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)  HARMÔNICOS ZONais DERIVADAS PARCIAIS DA ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL GEOPOTENCIAL ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL			
7. C.D.U.: 521.3:629.7.076.6			
8. Título	INPE-3813 NTE/252  EQUAÇÕES RECURSIVAS EXPLÍCITAS PARA O POTENCIAL, A ACELERAÇÃO E AS DERIVADAS PARCIAIS CONSIDERANDO OS HARMÔNICOS ZONais GRAVITACIONAIS		
9. Autoria Hélio Koiti Kuga	10. Páginas: 14  11. Última página: 09  12. Revisada por  Luiz Danilo D. Ferreira		
Assinatura responsável 	13. Autorizada por  Marco Antonio Raupp Diretor Geral 		
14. Resumo/Notas  Formulações simples baseadas na recursividade dos polinômios de Legendre são apresentadas para o cálculo do geopotencial, da aceleração do geopotencial e da matriz de derivadas parciais da aceleração. Para tais cálculos, equações explícitas são derivadas ao considerar os termos dos harmônicos zonais até a ordem desejada.			
15. Observações			

## ABSTRACT

*Simple formulations based upon the recursivity of the Legendre polynomials are presented for the calculation of the geopotential, the geopotential acceleration, and the matrix of partial derivatives of the acceleration. For such calculations, explicit equations considering the zonal harmonic terms up to the desired order are derived.*

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1. <u>INTRODUÇÃO</u> .....	1
2. <u>CÁLCULO RECURSIVO DOS POLINÔMIOS DE LEGENDRE</u> .....	1
3. <u>CÁLCULO RECURSIVO DO POTENCIAL GRAVITACIONAL TERRESTRE</u> .....	2
4. <u>CÁLCULO RECURSIVO DAS ACELERAÇÕES DO GEOPOTENCIAL</u> .....	3
5. <u>CÁLCULO RECURSIVO DAS DERIVADAS PARCIAIS DAS ACELERAÇÕES</u> .....	4
6. <u>COMENTÁRIOS FINAIS</u> .....	8
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	9

## 1 - INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é o de estabelecer formulações simples para o cálculo do geopotencial, das acelerações de vida ao geopotencial e do jacobiano (matriz de derivadas parciais) das acelerações do geopotencial. As formulações são particularmente adequadas à programação em computador, pois utiliza propriedades de recursividade dos polinômios de Legendre. Somente os termos correspondentes aos coeficientes dos harmônicos zonais foram considerados. Para o cálculo do geopotencial e das acelerações que incluem os coeficientes dos harmônicos tesserais/setoriais, as equações podem ser encontradas em Kuga et alii (1983). Para o cálculo do jacobiano, não é normalmente de interesse a inclusão das influências dos harmônicos tesserais/setoriais para efeito de obtenção da matriz de transição do movimento gravitacional. Os coeficientes zonais truncados até uma baixa ordem (p.ex.  $J_6$ ) são suficientes para a integração da matriz de transição em problemas de determinação de órbita (May, 1979). A formulação é bastante adequada para o cálculo da matriz de transição pela integração numérica das equações variacionais ou pelo método de Peano-Baker (Ditto, 1969), onde as parcelas perturbadoras devidas ao potencial terrestre são facilmente separáveis.

## 2 - CÁLCULO RECURSIVO DOS POLINÔMIOS DE LEGENDRE

Formalmente os polinômios de Legendre são a solução da Equação de Legendre:

$$(1 - x^2) P''_n - 2xP'_n + n(n + 1) P_n = 0 \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (2.1)$$

onde  $x$  é o argumento e  $P_n$  são os polinômios de Legendre de grau  $n$ , função do argumento  $x$ . Também são válidas as seguintes relações:

$$P'_n = \frac{dP_n}{dx}; \quad P''_n = \frac{d^2P_n}{dx^2}. \quad (2.2)$$

As recursões para os polinômios estão tabeladas em vários livros e são recapituladas a seguir. Os polinômios de Legendre de grau  $n$ ,  $P_n$ , podem ser calculados recursivamente por:

$$nP_n = (2n - 1) P_{n-1} - (n - 1) P_{n-2} \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

com condições iniciais  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = x$ .

A derivada do polinômio de Legendre de grau  $n$ ,  $P'_n$ , pode ser obtida via:

$$P'_n = x P'_{n-1} + n P_{n-1} \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

com condição inicial  $P'_1 = 1$ .

A derivada segunda,  $P''_n$ , vem da Fórmula de Recursão 2.4. Derivando a Equação 2.4 em relação a  $x$  tem-se:

$$P''_n = x P''_{n-1} + (n + 1) P'_{n-1} \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

com condição inicial  $P''_1 = 0$ .

### 3 - CÁLCULO RECURSIVO DO POTENCIAL GRAVITACIONAL TERRESTRE

Seja o potencial terrestre descrito por:

$$U = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(s\theta), \quad (3.1)$$

onde  $\mu$  é a constante gegravitacional,

$r$  é a distância do ponto material ao centro da Terra,

$J_n$  são os coeficientes dos harmônicos zonais,

$R$  é o raio equatorial da Terra,  
 $P_n$  são os polinômios de Legendre de grau  $n$  e  
 $s\theta$  é o seno da latitude geocêntrica.

Em coordenadas cartesianas  $s\theta$  pode ser calculado por:

$$s\theta = z/r, \quad (3.2)$$

onde  $z$  é o valor da distância do ponto material projetado no eixo Z apontado para o Norte, a partir do centro da Terra.

Seja  $U_0 = \mu/r$  e  $U_n$  o potencial devido ao coeficiente zonal  $n \geq 2$ . Então  $U_n$  pode ser calculado recursivamente por:

$$U_n = -\frac{\mu}{r} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(s\theta), \quad (3.3)$$

de forma que:

$$U = U_0 + \sum_{n=2}^{\infty} U_n. \quad (3.4)$$

#### 4 - CÁLCULO RECURSIVO DAS ACELERAÇÕES DO GEOPOTENCIAL

Dado o potencial  $U$ , Equação 3.1, as acelerações podem ser calculadas pelo gradiente do potencial, ou seja:

$$\ddot{\vec{r}} = \nabla U \text{ ou } \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

onde  $x_i$  são as componentes cartesianas do vetor  $\vec{r}$ .

A aceleração devido ao corpo central, Terra, é dada por:

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \frac{\partial U_0}{\partial x_i} = - \frac{\mu}{r^3} x_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

Já a contribuição para a aceleração total devida a cada coeficiente zonal  $J_n$  pode ser avaliada por:

$$\ddot{\vec{r}}_n = \frac{\partial U_n}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

Lembrando a Equação 3.3, após alguma álgebra chega-se à:

$$\frac{\partial U_n}{\partial x_i} = - \frac{\mu}{r^3} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n \left[ -(n+1)x_i P_n + (\delta_{3i} r - \frac{zx_i}{r}) P'_n \right], \quad (4.4)$$

onde  $P_n$ ,  $P'_n$  são os polinômios e as derivadas dos polinômios de Legendre para o argumento  $s\theta$  e  $\delta_{3i}$  é o delta de Kronecker e vale:

$$\delta_{3i} = 1 \text{ para } i = 3, \quad (4.5)$$

$$\delta_{3i} = 0 \text{ para } i \neq 3.$$

Portanto, a aceleração total pode ser calculada por:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \ddot{\vec{r}}_n, \quad (4.6)$$

levando em conta as recursões dos polinômios pelas Equações 2.3 e 2.4.

## 5 - CÁLCULO RECURSIVO DAS DERIVADAS PARCIAIS DAS ACELERAÇÕES

Dado um potencial na forma da Equação 3.1, a derivada parcial segunda em relação às coordenadas cartesianas  $x_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  vale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial \ddot{r}}{\partial x_j} . \quad (5.1)$$

Para o termo  $U_0$  (vide Equação 4.2) a relação é imediata:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\frac{\mu}{r^3} x_i \right) = -\frac{\mu}{r^5} (\delta_{ij} r^2 - 3x_i x_j), \quad (5.2)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e vale:

$$\delta_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j , \quad (5.3)$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ para } i = j .$$

Para o cálculo da derivada parcial em relação ao termo genérico  $U_n$ , deve-se avaliar a seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial U_n}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -\frac{\mu}{r^3} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \left[ -(n+1)x_i P_n + (\delta_{3i} r - \frac{zx_i}{r}) P'_n \right] \right\}. \quad (5.4)$$

As seguintes derivadas auxiliares foram utilizadas:

$$\frac{\partial r^{-n-3}}{\partial x_j} = -\frac{(n+3)}{r^{n+5}} x_j ,$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} ,$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial x_j} = \frac{\partial P_n}{\partial s\theta} \frac{\partial s\theta}{\partial x_j} = \frac{P'_n}{r^2} (\delta_{3j} r - zx_j/r) , \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = x_j/r ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{zx_i}{r} \right) = \frac{1}{r^2} [(\delta_{3j}x_i + \delta_{ij}z)r - zx_i x_j/r] ,$$

$$\frac{\partial P'_n}{\partial x_j} = \frac{\partial P'_n}{\partial s\theta} \frac{\partial s\theta}{\partial x_j} = \frac{P''_n}{r^2} (\delta_{3j}r - z x_j/r).$$

Com auxílio das derivadas auxiliares, Equação 5.5, e após alguma álgebra, o elemento  $i, j$  do jacobiano referente a  $U_n$ , isto é, da matriz de derivadas parciais é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_n}{\partial x_j \partial x_i} &= -\frac{\mu}{r^5} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n \left\{ \begin{aligned} &[(n+1)(n+3)x_i x_j \\ &- (n+1)r^2 \delta_{ij}] P_n \\ &+ [(n+3)x_j(zx_i/r - \delta_{3i}r) \\ &+ (n+1)x_i(zx_j/r - \delta_{3j}r) \\ &+ \delta_{3i}x_j r + zx_i x_j/r \\ &- (\delta_{3j}x_i + \delta_{ij}z)r] P'_n \\ &+ (\delta_{3i}r - zx_i/r)(\delta_{3j}r - zx_j/r) P''_n \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ao calcular a equação de Laplace (laplaciano):

$$L = \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2} , \quad (5.7)$$

chega-se à:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\mu}{r^3} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n [n(n+1)P_n \\ &\quad - 2s\theta P'_n \\ &\quad + (1 - s^2\theta) P''_n] . \end{aligned} \quad (5.8)$$

O termo entre colchetes é a Equação de Legendre (Equação 2.1) e é identicamente nulo, satisfazendo o laplaciano, isto é:

$$L = \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2} = 0 , \quad (5.9)$$

que serve como um bom "check" para a exatidão da Equação Final 5.6. Pode-se verificar também que o jacobiano conserva também o caráter de simetria (matriz simétrica). Para fins de programação em computador, estão listadas a seguir as equações explícitas para os elementos da matriz do jacobiano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} &= -\frac{\mu}{r^5} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \{ [(n+1)(n+3)x^2 - (n+1)r^2] P'_n \\ &\quad + [(2n+5)x^2z/r - zr] P''_n \} , \\ \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} &= -\frac{\mu}{r^5} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \{ [(n+1)(n+3)y^2 - (n+1)r^2] P'_n \\ &\quad + [(2n+5)y^2z/r - zr] P''_n \} , \\ \frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2} &= -\frac{\mu}{r^5} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \{ [(n+1)(n+3)z^2 - (n+1)r^2] P'_n \\ &\quad + [(2n+5)z^2z/r - (2n+5)zr] P''_n \} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_n}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 U_n}{\partial y \partial x} = -\frac{\mu}{r^5} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \{ (n+1)(n+3)xy P'_n \\ &\quad + (2n+5)xy z/r P''_n \} , \\ \frac{\partial^2 U_n}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 U_n}{\partial z \partial x} = -\frac{\mu}{r^5} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \{ (n+1)(n+3)xz P'_n \\ &\quad + (2n+5)xz z/r P''_n \} , \\ \frac{\partial^2 U_n}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 U_n}{\partial z \partial y} = -\frac{\mu}{r^5} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \{ (n+1)(n+3)yz P'_n \\ &\quad + (2n+5)yz z/r P''_n \} , \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 U_n}{\partial z \partial x} = - \frac{\mu}{r^5} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \{ (n+1)(n+3)xz P_n + [(2n+5)xz^2/r - (n+2)xr] P'_n - zx(r^2 - z^2)/r^2 P''_n \},$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U_n}{\partial z \partial y} = - \frac{\mu}{r^5} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n \{ (n+1)(n+3)yz P_n + [(2n+5)yz^2/r - (n+2)yr] P'_n - zy(r^2 - z^2)/r^2 P''_n \}.$$

## 6 - COMENTÁRIOS FINAIS

Foram apresentadas neste trabalho as equações explícitas para o cálculo do potencial terrestre, do gradiente do potencial terrestre (aceleração) e da matriz de derivadas parciais da aceleração, que foram modeladas pelos coeficientes dos harmônicos zonais. As equações são genéricas e podem ser calculadas (truncadas) até a ordem do coeficiente zonal desejado. Um programa simples e breve foi implementado em linguagem FORTRAN padrão. A listagem do programa não é apresentada neste relatório porque, usando as equações apresentadas, ele é facilmente implementável e adaptável para as condições desejadas pelo usuário.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DITTO, F.H. Partial derivatives used in trajectory estimation.  
*Celestial Mechanics* 1 : 130-140, 1969.
- KUGA, H.K.; MEDEIROS, V.M.; CARRARA, V. *Cálculo recursivo de aceleração do geopotencial*. São José dos Campos, INPE, Maio 1983. (INPE-2735-RPE/433).
- MAY, J.A. A study of the effects of state transition matrix approximations. *Flight Mechanics/Estimation theory Symposium*. Proceedings of the Symposium held at Goddard Space Flight Center in Greenbelt, Maryland, Oct. 17-18, 1979. (NASA Conference Publication 2123).