
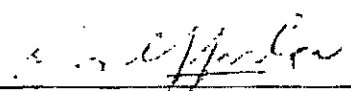


1. Classificação <i>INPE-COM. 1/TDL</i> <i>C.D.U. 536.2</i>	2. Período	4. Distribuição interna <input type="checkbox"/> externa <input checked="" type="checkbox"/>
3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor) <i>ENERGIA SOLAR</i> <i>SOLUÇÃO ANALÍTICA</i> <i>DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS</i> <i>TUBO CILINDRICO</i>		
5. Relatório nº <i>INPE-1680-TDL/020</i>	6. Data <i>Fevereiro, 1980</i>	7. Revisado por <i>L. A. V. Dias</i> <i>Luiz Alberto Vieira Dias</i>
8. Título e Sub-Título <i>AQUECIMENTO DE UM FLUIDO EM ESCOAMENTO COMPLETAMENTE ESTABELECIDO NO INTERIOR DE UM TUBO CILÍNDRICO HORIZONTAL USANDO ENERGIA SOLAR</i>		9. Autorizado por <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Parada</i> <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor</i>
10. Setor <i>DEE</i>	Código	11. Nº de cópias <i>13</i>
12. Autoria <i>Sebastião Cardoso</i>		14. Nº de páginas <i>96</i>
13. Assinatura Responsável 		15. Preço
16. Sumário/Notas <p><i>Neste trabalho estuda-se a transferência de calor para um fluido em escoamento laminar, incompressível, permanente, no interior de um tubo cilíndrico horizontal, deixado sob a incidência das relações solares. Supõe-se o perfil das velocidades completamente desenvolvido e o tubo em repouso. A análise matemática limita-se à apresentação de uma solução analítica exata, da equação da energia, simplificada para o sistema. São apresentadas as distribuições angular, radial e axial de temperatura, e as variações do número de Nusselt como função da coordenada axial e do número de Péclet.</i></p>		
17. Observações <i>Tese de Mestrado em Ciência Espacial, aprovada em 29 de dezembro de 1978.</i>		

*À minha mãe Leontina
e à minha esposa Marta*

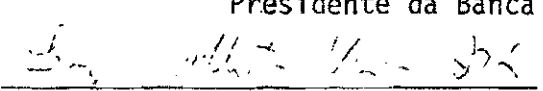
Aprovado pela Banca Examinadora
em cumprimento dos requisitos exigidos
para a obtenção do Título de Mestre em
Ciência Espacial

Dr. Ralf Gielow



Presidente da Banca

Dr. Luiz Alberto Vieira Dias



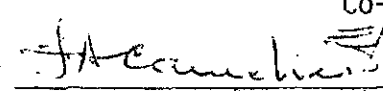
Orientador

Sr. C.M. Dixit, MSc.



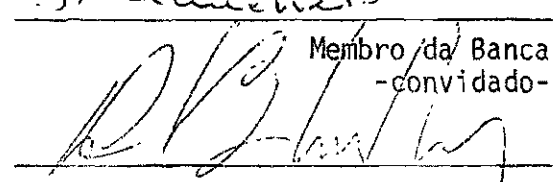
Co-Orientador

Ten. Cel. Av. Dr. Ivan de Azevedo Camelier



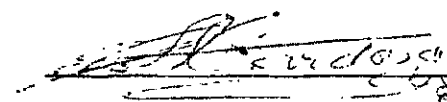
Membro da Banca
-convidado-

Dr. Demétrio Bastos Netto



Membro da Banca

Sebastião Cardoso



Candidato

São José dos Campos, 29 de dezembro de 1978

ÍNDICE

	Pag.
ABSTRACT	v
LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	vii
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</u>	1
1.1 - Estudo da Transferência de Calor para um Fluido em Escoamento no Interior de um Tubo Cilíndrico	4
<u>CAPÍTULO II - CÁLCULO DO PERFIL DAS TEMPERATURAS</u>	7
2.1 - Análise Matemática	8
2.2 - Método de Solução	10
2.3 - Determinação do Número de Nusselt para Regiões Vizinhas à Entrada Térmica	22
<u>CAPÍTULO III - ESTUDO DO PERFIL DAS TEMPERATURAS PARA O CASO EM QUE A CONDUÇÃO AXIAL É DESPREZÍVEL</u>	25
3.1 - Determinação do Número de Nusselt (Nu_z) nas Regiões Vizinhas à Entrada Térmica	32
<u>CAPÍTULO IV - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS</u>	33
4.1 - Distribuição Radial e Angular das Temperaturas	33
4.2 - Distribuição Radial e Axial das Temperaturas	39
4.3 - Distribuição Angular das Temperaturas na Parede do Tubo ..	42
4.4 - Distribuição Axial das Temperaturas Médias	44
4.5 - Número de Nusselt	46
<u>CAPÍTULO V - CONSIDERAÇÕES FINAIS</u>	51
AGRADECIMENTOS	53
BIBLIOGRAFIA	55

APÊNDICE A - Relações Geométricas

APÊNDICE B - Simplificação da Equação da Energia

ABSTRACT

In this work is discussed the transfer of heat in a steady laminar flow inside an horizontal cylindrical tube under solar radiation heating. It is supposed that the tube at rest and that the flow is fully developed to its profile. The mathematical analysis is limited to an analytical solution of the energy equation adjusted for the system. The angular, radial and axial distributions of temperature are presented along with variations of the Nusselt and Péclet numbers as a function of the axial co-ordinate.

LISTA DE FIGURAS

II.1	- Modelo físico do problema e coordenadas do sistema.....	7
IV.1	- Perfil das temperaturas na secção $z = 0,01$ ($Pe=5$).....	34
IV.2	- Perfil das temperaturas na secção $z = 0,05$ ($Pe=5$).....	35
IV.3	- Perfil das temperaturas na secção $z = 0,1$ ($Pe=5$).....	36
IV.4	- Perfil das temperaturas na secção $z = 0,5$ ($Pe=5$).....	37
IV.5	- Perfil das temperaturas na secção $z = 1,0$ ($Pe=5$).....	38
IV.6	- Perfil das temperaturas em um plano vertical que contém o eixo do tubo ($Pe=5$).....	40
IV.7	- Perfil das temperaturas em um plano vertical que contém o eixo do tubo ($Pe=5$).....	40
IV.8	- Distribuição radial e angular das temperaturas ($Pe=5$)...	41
IV.9	- Distribuição angular das temperaturas na parede do tubo ($Pe=5$).....	43
IV.10	- Distribuição axial das temperaturas médias ($Pe=5$).....	45
IV.11	- Variação do número de Nusselt com z	47
IV.12	- Variação do número de Nusselt com z (Fonte: Sikka e Iqbal, pag. 980, 1969).....	48
IV.13	- Variação do número de Nusselt local ao longo do tubo, para fluxo de calor uniforme em toda a parede (Fonte: Siegel, Sparrow e Hallman, pag. 390, 1958).....	48
IV.14	- Variação do número de Nusselt local (Fonte: Hsu, pag.373, 1966).....	49

LISTA DE SÍMBOLOS

- a - Raio do tubo (L)
- b - Ângulo horário do Sol.
- C_p - Calor específico a pressão constante ($L^2T^{-1}t^{-2}$)
- C_v - Calor específico a volume constante ($L^2T^{-1}t^{-2}$)
- D - Distância instantânea Terra-Sol (L)
- \bar{D} - Distância média Terra-Sol (L)
- d - Ângulo azimutal do Sol
- E - Ângulo de elevação do Sol (Altitude)
- G - Fluxo de radiação incidente na superfície da Terra (Mt^{-3})
- h - Coeficiente de transporte de calor por convecção ($M.T^{-1}t^{-3}$)
- $J_{n/2}$ - Função de Bessel de ordem $n/2$
- K - Coeficiente de condutividade térmica ($M.LT^{-1}t^{-3}$)
- L - Comprimento do tubo (L)
- ℓ - Latitude
- Nu_z - Número de Nusselt (definido pela equação III.58)
- P - Pressão do fluido ($M.L^{-1}t^{-2}$)
- Pe - Número de Péclet ($Pr.Re$)
- Pr - Número de Prandtl, $\frac{\mu C_p}{K}$
- Q_h - Fluxo de radiação solar incidente em um plano horizontal no topo da atmosfera (Mt^{-3})
- Q_n - Fluxo de radiação solar incidente em um plano normal aos raios solares no topo da atmosfera (Mt^{-3})
- q - Fluxo de calor na parede do tubo onde $\phi = 0$ (Mt^{-3})
- q_w - Fluxo de calor na parede do tubo (Mt^{-3})
- R - Função da variável x, separada

- Re - Número de Reynolds $\frac{\rho \cdot V \cdot a}{\mu}$
 R_S - Raio da esfera solar (L)
 r - Coordenada radial (L)
 S - Constante solar (Mt^{-3})
 T - Temperatura em algum ponto do fluido (T)
 T_d - Temperatura do fluido, onde perfil é totalmente desenvolvido (T)
 T_0 - Temperatura do fluido para pontos onde $z \leq 0$
 T_S - Temperatura da superfície solar por unidade de área (T)
 \bar{T} - Temperatura média global do escoamento na seção considerada (T)
 U - Função das variáveis x e z (separadas)
 V - Velocidade média do escoamento na direção axial (Lt^{-1})
 V_r - Velocidade do escoamento na direção radial (Lt^{-1})
 V_z - Velocidade do escoamento na direção axial (Lt^{-1})
 V_ϕ - Velocidade do escoamento na direção angular (Lt^{-1})
 x - Coordenada radial adimensional
 z - Coordenada axial (L)
 z - Coordenada axial adimensional
 α - Ângulo zenital
 $\alpha_m, \alpha_i, \alpha_j$ - Raízes da equação de Bessel, autovalores
 β_n^m - Autovalores determinados pela equação IV.18
 δ - Declinação solar
 θ - Temperatura adimensional $(T-T_0)/(q \cdot a/K)$
 $\bar{\theta}$ - Temperatura média adimensional do fluido para algum z
 $(\bar{T}-T_0)/(q \cdot a/K)$
 θ_d - Temperatura adimensional $(T_d-T_0)/(q \cdot a/K)$
 λ_n^m - Autovalores definidos pela equação III.41

- μ - Coeficiente de viscosidade dinâmica ($ML^{-1}t^{-1}$)
- ρ - Massa específica do fluido (ML^{-3})
- σ - Constante de Stefan-Boltzman ($Mt^{-3}T^{-4}$)
- τ - Função da variável ϕ
- Φ - Temperatura adimensional $(T-T_d)/(q.a/K)$
- ϕ - Coordenada angular
- ψ - Função das variáveis (x,ϕ)

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O avanço tecnológico proporcionou significativas mudanças nos hábitos das civilizações, tornando o homem moderno muito dependente da energia como elemento propulsor do progresso. O desenvolvimento acelerado, aliado ao crescimento populacional, provocou um aumento do consumo, e a conseqüente redução nas reservas energéticas naturais do planeta.

O desequilíbrio no mercado energético gerou uma demanda de forte repercussão sócio-econômica, que provocou pesquisas sobre novas fontes (chamadas não convencionais) de energia, com o intuito de amenizar a atual crise, garantindo a continuidade da evolução social.

O Sol representa a maior fonte natural de energia para a Terra. O aproveitamento direto de sua energia irradiada, ou a rápida conversão dela em outra forma de uso imediato, vem merecendo atenção especial nos últimos anos. Constantemente, a energia solar vem sendo utilizada e transformada por processos naturais, desde sua primeira incidência sobre a superfície da Terra, como, por exemplo, na fotossíntese de plantas.

Napoleão III, imperador da França, em 1860 apoiou o desenvolvimento de um fogão solar para ser utilizado pelas tropas francesas no norte da África (Telkes, 1959).

Na Índia, país carente de petróleo, Mathur e Khamma (1957) fizeram uma análise do emprego da energia solar no bombeamento d'água, e também em outros usos domésticos.

Segundo Gonkale e Datta (1943), é desejo do governo da Índia que os pesquisadores se envolvam com estudos e projetos para tornar viável a utilização da energia solar, em substituição a outras fontes importadas e mais onerosas.

A Universidade da Flórida (Farber, 1959) elaborou um programa muito extenso, visando a refrigeração e o condicionamento de ar, através do aproveitamento da energia solar. Por intermédio do Laboratório de Energia Solar (Farber, 1973), a aludida universidade converte a energia solar para fins práticos tais como: aquecimento de ar, destilação, condicionamento de ar, refrigeração solar, bombeamento d'água, automóvel eletro-solar e aquecimento de piscinas.

Akyurt e Selçuk (1973) desidrataram frutas e, em colaboração com Ersay (1974), apresentaram uma análise teórica de um secador de cereais.

No Japão os estudos sobre energia solar ganharam impulso a partir de 1961 (Noguchi, 1973), quando foi criada a Associação Japonesa de Energia Solar.

Tabor (1973) estudou o aquecimento da água contida em um tanque com fundo preto ("Solar Ponds"), onde a convecção é evitada provocando-se artificialmente um gradiente na concentração de sal na água. Tabor apontou as dificuldades e as vantagens oferecidas por este processo de armazenamento de energia.

Weiberger (1964) fez um estudo detalhado sobre "Solar Ponds", avaliando a absorção de radiação, as propriedades térmicas, o aumento de temperatura, a eficiência e a estabilidade do sistema.

Rabl e Carl (1974), apresentaram um trabalho visando o uso de "Solar Ponds" para aquecedores domésticos.

No Brasil, grupos de pesquisadores se dedicam ao estudo das energias não convencionais. Em 1958 um pequeno grupo do INT - Instituto Nacional de Tecnologia, iniciou estudo sobre energia solar, tendo construído uma pequena caldeira solar. Em 1959, no CTA - Centro Técnico Aeroespacial iniciou-se estudo sobre energia solar, e construiu-se um forno solar para altas temperaturas. Em fins da década de 60, uma equipe

de professores do ITA - Instituto Tecnológico de Aeronáutica - iniciou estudos sobre destiladores, concentradores e desidratadores de cereais. A partir de 1972, outras instituições passaram a participar do Programa de Energia Solar. Entre elas a UFPb - Universidade Federal da Paraíba , a UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas , o IPqM - Instituto de Pesquisas da Marinha , e a ESALQ - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" , O CTA - Centro Técnico Aeroespacial , e o INPE - Instituto de Pesquisas Espaciais. Estas instituições têm programas de trabalho pré-estabelecido, atuando principalmente nas seguintes linhas de pesquisas:

- máquinas térmicas;
- destiladores;
- secadores;
- refrigeração - produção de gelo;
- coletores planos e com concentração;
- solarimetria;
- efeito fotovoltaico;
- armazenamento;
- bioconversão - algas;
- geradores eólicos, etc.

No momento o Ministério das Minas e Energia e o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) estão atuando em conjunto para financiar estudos em Fontes Não Convencionais de Energia, através de um programa nacional (MacDowell, 1976).

O homem valeu-se sempre da energia solar; seus usos e costumes foram moldados em função da incidência das radiações solares sobre o local onde vive.

As variações de intensidade da energia radiante na superfície da Terra, dificultam seu uso direto. A utilização de um sistema que colete energia solar, transformando-a e armazenando-a para posterior utilização, permitiria seu uso por períodos mais longos tornando o sistema economicamente viável.

O presente trabalho visa o estudo do aquecimento de um fluido com energia solar. Para tal, foi idealizado um fluido escoando no interior de um tubo cilíndrico horizontal que é exposto diretamente à radiação solar. A transferência de calor para o fluido é então estudada.

1.1 - ESTUDO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR PARA UM FLUIDO EM ESCOAMENTO NO INTERIOR DE UM TUBO CILÍNDRICO

O estudo da transferência de calor para um fluido, com propriedades constantes, em escoamento laminar no interior de um tubo cilíndrico, tem despertado nos últimos noventa anos muito interesse entre os estudiosos, por se tratar de um problema de grande relevância técnica e comercial. Tal problema tem sido abordado, em detalhes, em vários trabalhos.

Graetz, em 1885, foi o primeiro a apresentar uma solução analítica, obtida desprezando a condução axial de calor e a dissipação viscosa, considerando constante a temperatura na parede, enquanto estiver ocorrendo transferência de energia (Welty et al., 1969). Desde então, tem-se estudado extensivamente esse problema, que passou a ser conhecido como o problema de Graetz (Bird et al., 1960). No entanto, o problema em que se conhece o fluxo de calor na parede do tubo, ficou esquecido por muito tempo, vindo a merecer atenção, somente nas últimas décadas.

A distribuição das velocidades de um fluido que escoar no interior de um tubo cilíndrico é facilmente encontrada, enquanto que o fluxo de calor da parede para o fluido, apresenta maiores dificuldades para ser obtido (Jakob, 1949).

Neste trabalho é suposta a distribuição parabólica das velocidades (Escoamento de Hagen-Poiseuille), objetivando determinar a distribuição das temperaturas no interior do tubo. Essa distribuição das temperaturas foi conseguida usando-se diferentes métodos, em distintas situações.

O problema de Graetz foi revisado por Nusselt em 1910, e Drew em 1931; Groeber, Jakobe e Eck corrigiram e recalcularam as constantes da solução apresentada por Graetz (Jakob, 1949).

Norris et al. (1940) apresentam uma análise matemática do problema, para tubos cilíndricos e retangulares, considerando a temperatura constante na superfície, e comparam seus resultados com aqueles anteriormente publicados. Martinelli (1947) prestou sua colaboração encontrando uma solução para o problema da transferência de calor em metais fundidos, onde considerou constante e uniforme a temperatura da parede.

Rubesin e Johnson (1949) fizeram uma revisão na literatura e apresentaram uma solução para o problema de transferência de calor em um fluido que escoava entre duas placas planas, considerando a temperatura constante nas mesmas. Lauwerier (1950) obteve uma solução assintótica, transformando o problema de Graetz em um problema de autovalores; considerou, para tal, um fluxo de Poiseuille totalmente desenvolvido com temperatura constante na parede.

Schenk e Dumoré (1951) verificaram os resultados obtidos anteriormente para o problema de Graetz, e estenderam o tratamento para o caso de transmissividade finita na parede. Kays e London (1952) apresentaram uma solução para o problema de transferência de calor em tubos cilíndricos e retangulares, com temperatura da parede constante, comparando-a com aquela apresentada por Norris. Abramowitz (1952) encontrou uma solução em termos de funções de Bessel e determinou os cinco primeiros autovalores com os correspondentes coeficientes.

Berry (1953) encontrou uma solução numérica para o problema, incluindo na equação da energia os termos originados da condução axial e geração uniforme de calor. Kays e Stanford (1955) resolveu o problema de Graetz pelo método de diferenças finitas, para número de Prandtl 0,7 (ar). Dennis e Poots (1955), pelo método iterativo, encontraram uma solução para o caso onde o fluido é viscoso, e escoava entre duas placas planas paralelas. Sparrow e Gregg (1956) apresentou uma solução para escoamentos em tubos ci

lindricos verticais.

Sellers et al. (1956) prestaram grande colaboração ao entender o problema de Graetz para o caso em que se conhece o fluxo de calor na parede, e apresentaram uma fórmula para calcular todos os autovalores e autofunções da solução de Graetz.

Schneider (1957) investigou os efeitos da condução axial de calor, para baixos números de Péclet e comparou suas conclusões com os resultados onde se despreza a condução axial, ou seja, números de Péclet maiores que cem. Cess e Shaffer (1958) encontraram os três primeiros autovalores com as correspondentes constantes, bem como a expressão assintótica para solução do problema com o fluxo de calor constante na parede. Siegel et al. (1958) apresentaram uma solução, considerando constante o fluxo de calor na parede, condução axial, dissipação viscosa e geração constante de calor.

Sikka e Iqbal (1969) usaram o método de diferenças finitas e resolveram o problema, considerando o fluxo de calor como conhecido na semi-circunferência superior do tubo cilíndrico. Porém, Sikka desprezou a condução axial de calor, bem como a dissipação viscosa.

No presente trabalho considera-se um escoamento de Hagen-Poiseuille totalmente desenvolvido, em um tubo cilíndrico, e procura-se uma solução analítica-numérica para o problema de Graetz, sujeito às condições de contorno adotadas por Sikka e Iqbal (1969), incluindo a condução axial de calor.

CAPÍTULO II

CÁLCULO DO PERFIL DAS TEMPERATURAS

Neste capítulo faz-se o estudo da temperatura de um fluido incompressível que escoa em regime permanente, no interior de um tubo cilíndrico horizontal, na direção z , com o perfil das velocidades totalmente desenvolvido (escoamento de Hagen-Poiseuille).

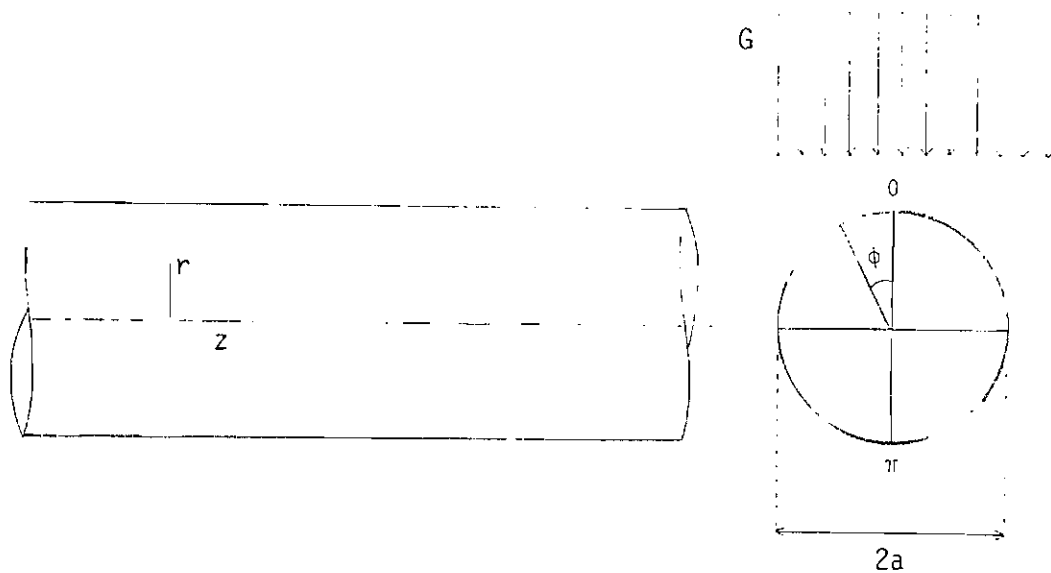


Fig. II.1 - Modelo físico do problema e coordenadas do sistema

Os trabalhos referenciados, em sua maioria, estão voltados para o problema da temperatura uniforme na parede, sem condução axial de calor, sendo conhecidos como o problema clássico de Graetz.

No problema abordado, estuda-se primeiramente o caso do fluxo de calor constante na parede do tubo, levando em conta a condução axial de calor para baixos números de Péclet, na região de entrada térmica (região vizinha ao plano vertical que demarca o início do fluxo de calor incidente). Posteriormente, compara-se este resultado como obti

do desprezando-se a condução axial de calor para regiões vizinhas à entrada térmica. Tem-se também oportunidade de verificar a influência da condução axial como função do número de Péclet, constatando-se que para $Pe = 100$ a condução axial é mínima e que para $Pe > 1000$ a condução axial não influi no processo, exceto para regiões vizinhas da entrada térmica, o que está de acordo com as afirmativas de Singh (1958) e Hsu (1966).

Um dos principais objetivos deste trabalho é encontrar uma solução analítica geral e exata para a temperatura na região de entrada térmica, sem desprezar a condução axial. Tal solução matemática satisfaz outros tipos de problemas com a simples variação das condições de contorno. Em particular, ajusta-se a solução para o problema em estudo, e a seguir avalia-se o número de Nusselt local. A solução para o caso onde se despreza a condução axial também é encontrada. O número de Nusselt é calculado, e os resultados são comparados com os obtidos quando se considera a condução axial, e com os apresentados em outros trabalhos.

2.1 - ANÁLISE MATEMÁTICA

Com a aplicação das três leis físicas fundamentais, e da lei de condução de calor de Fourier, o problema proposto no presente trabalho fica completamente definido e a solução matemática exata $[T(x, \phi, z)]$, é a solução da equação da energia simplificada para o sistema em estudo (Apêndice B):

$$2\rho c_p v \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \frac{\partial T}{\partial z} = K \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + 16 \frac{\mu v^2 \cdot r^2}{a^4} \quad (\text{II.1})$$

O termo $16 \frac{\mu v^2 \cdot r^2}{a^4}$ da equação (II.1) representa a dissipação viscosa, e, especificamente para este caso, será desprezado, tendo-se em conta a ordem de grandeza da viscosidade da água em relação aos demais termos da equação.

Reescrevendo a equação da energia, em forma adimensional, para um fluido cuja dissipação viscosa é desprezível tem-se (Apêndice B):

$$(1 - x^2) \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \quad (\text{II.2})$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\text{C.C.(I) para } z = 0 \quad \Theta(x, \phi, 0) = 0 \quad (\text{II.3a})$$

onde

Pe = número de Péclet

K = coeficiente de condutividade térmica

a = raio do tubo

z = z/a_p coordenada axial adimensional

x = r/a coordenada radial adimensional

$$\text{C.C.(II) } \left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x=1} = \cos \phi \quad \text{para } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{II.3b})$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad \text{para } \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$$

onde

$\Theta = (T - T_0)/(q \cdot a/K)$ variável adimensional relativo à temperatura

q = G fluxo de calor incidente em um plano horizontal na superfície da Terra (II.3b)

q_w = q · cos φ fluxo de calor na semi-circunferência superior, exposta à radiação solar.

Observa-se que as perdas por radiação e convecção, através da superfície do tubo, estão sendo desprezadas, porém, são consideradas, ocasionariam maiores dificuldades matemáticas, mas não impossibilitariam a solução da equação (Sikka e Iqbal, 1969). Além das condições de contorno acima, considera-se o tubo com baixa condutividade térmica e de parede muito fina, sem salto de temperatura através da mesma, o que permitirá a condução de calor somente na direção radial. O fluxo de calor

através da parede, será desprezível em relação ao da direção radial.

Pela simetria existente em torno das linhas $\phi = 0$ e $\phi = \pi$, estabeleceram-se as condições de contorno (II.3b) para a semicircunferência. Pela simetria, pode-se ainda escrever:

$$\text{C.C.IV} \rightarrow \text{para } \phi = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0, 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{II.3f})$$

$$\text{C.C.V} \rightarrow \text{para } \phi = \pi \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0, 0 \leq x \leq 1$$

2.2 - MÉTODO DE SOLUÇÃO

A solução analítica exata da equação II.2, sujeita às condições de contorno (II.3), é encontrada usando-se o seguinte artifício: Resolve-se primeiro a equação II.2 para regiões distantes da entrada térmica, onde o perfil das temperaturas é totalmente desenvolvido. Encontra-se depois a solução para regiões vizinhas da entrada térmica. As soluções particulares assim obtidas, são submetidas às condições de contorno adequadas para cada caso e, quando combinadas, fornecem a solução geral da equação II.2, sujeita às condições de contorno (II.3).

Uma análise mais detalhada da equação II.2 permite verificar que, quando Pe tende a zero, o efeito da condução axial torna-se mais importante que o da convecção

$$\left(\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \gg v \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad (\text{Singh, 1958});$$

e quando $Pe > 100$ (ou regiões distantes da entrada térmica) os efeitos da condução axial são desprezíveis.

$$\left(v \frac{\partial \theta}{\partial z} \gg \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right);$$

então, para z grande, a solução será obtida quando se despreza o termo

$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$, ou seja

$$(1-x^2) \frac{\partial \theta_d}{\partial z} = \frac{\partial^2 \theta_d}{\partial z^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta_d}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \theta_d}{\partial \phi^2} \quad (II.4)$$

onde

$$\theta_d = (T_d - T_0)/(q \cdot a/K) \quad (II.5a)$$

T_d = temperatura em algum ponto do líquido, onde o perfil das temperaturas está totalmente estabelecido.

A solução da equação (II.4) é a solução particular para o problema, em regiões distantes da entrada térmica. Para esta situação as condições de contorno são:

$$\text{C.C. (I')} \quad \text{para } z = 0 \rightarrow \theta_d \rightarrow \text{finito} \quad (II.5b)$$

$$\text{C.C. (II')} \quad \left. \frac{\partial \theta_d}{\partial x} \right|_{x=1} = \cos \phi \quad \text{para } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (II.5c)$$

$$\text{C.C. (III')} \quad \left. \frac{\partial \theta_d}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad \text{para } \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$$

$$\text{C.C. (IV')} \quad \left. \frac{\partial \theta_d}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \quad (II.5d)$$

$$\text{C.C. (V')} \quad \left. \frac{\partial \theta_d}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

Para regiões distantes da entrada térmica, pode-se considerar como boa aproximação, que a temperatura do fluido varia linearmente em z (Bird et al., 1960; Siegel et al., 1958; Cess e Shaffer, 1958). Assim sendo, para regiões onde z é grande, θ pode ser representada por:

$$\theta_d = C_0 z + \psi(x, \phi) \quad (II.6)$$

A constante C_0 é determinada mediante as condições de contorno (II.5), e ψ fornece a variação de temperatura (θ) em função de x e ϕ .

Substituindo o valor de (θ) da expressão II.6 na equação II.4, tem-se:

$$x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = C_0 (x^2 - x^4) \quad (\text{II.7})$$

Admitindo a solução

$$\psi = \psi_h + \psi_p \quad (\text{II.8})$$

onde

ψ_h - é a solução da equação homogênea que, quando resolvida por separação de variáveis (Apêndice B), resulta:

$$\psi_{hn} = x^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) \quad (\text{II.9})$$

ψ_p - é a solução particular dada por:

$$\psi_p = \frac{C_0}{4} x^2 - \frac{C_0}{16} x^4 + C_1 \quad (\text{II.10})$$

Sendo C_1 , A_n , B_n , constantes a determinar. A solução geral da equação II.7 é dada por:

$$\psi = C_1 + \frac{C_0}{4} (x^2 - \frac{x^4}{4}) + \sum_{n=0}^{\infty} x^n [A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi] \quad (\text{II.11})$$

Logo:

$$\theta_d = C_0 z + C_1 + \frac{C_0}{4} (x^2 - \frac{x^4}{4}) + \sum_{n=0}^{\infty} x^n [A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi] \quad (\text{II.12})$$

Onde θ , representada pela equação II.12, é a solução geral da equação II.4, que será ajustada ao sistema mediante as equações II.5.

Pelas condições de contorno:

$$\text{C.C. (IV')} \text{ e C.C. (V')} \rightarrow B_n = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\text{C.C. (II')} \text{ e C.C. (III')} \rightarrow \frac{C_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot A_n \cos n\phi = f(\phi) \quad (\text{II.14})$$

onde

$$f(\phi) = \left\{ \begin{array}{ll} \cos\phi & 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi \end{array} \right\} \quad (\text{II.15})$$

para

$$nA_n = A_{1n}, \quad \frac{C_0}{4} = \frac{A_0}{2} \quad (\text{II.16})$$

$$f(\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\phi \quad (\text{II.17})$$

Os coeficientes A_0 e A_n , da série de Fourier gerada pela equação II.17, são calculados fazendo-se uso da propriedade de ortogonalização das funções trigonométricas, obtendo-se (Apêndice B):

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{\pi} ; A_1 = \frac{1}{2} ; A_n = \frac{2(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi(1-n^2)}, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (\text{II.18})$$

Logo:

$$\frac{C_0}{4} = \frac{1}{\pi} ; A_1 = \frac{1}{2} ; A_n = \frac{2(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi n(1-n^2)}, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (\text{II.19})$$

então:

$$\theta_d = \frac{4z}{\pi} + C_1 + \frac{1}{\pi} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} \cdot (-1)^n \cdot \cos 2n\phi}{n(1-4n^2)} \quad (\text{II.20})$$

A equação II.20, obtida pela simples substituição dos coeficientes da equação II.12 pelos seus respectivos valores (II.19), tem apenas uma constante, C_1 , a ser determinada.

A constante C_1 , é determinada usando-se a condição de contorno adicional, que assegura a conservação de energia do sistema, i.e., todo calor absorvido pela parede do tubo é transmitido ao líquido, causando uma elevação da temperatura do sistema. Aplica-se a condição dentro de um espaço considerado, desde a seção onde $z = 0$ até $z = z$ (Bird, et al, 1960)

$$2\pi \cdot az \overline{q_w} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho C_p (T_d - T_0) V_z r dr d\phi \quad (II.21)$$

Logo

$$2z = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \Theta_d (1 - x^2) x dx d\phi \quad (II.22)$$

portanto: (Apêndice B) $C_1 = \frac{7}{24\pi} \quad (II.23)$

Logo a solução da equação II.4, sujeita às condições II.5, é:

$$\Theta_d = \frac{4z}{\pi} - \frac{7}{24\pi} + \frac{1}{\pi} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) + \frac{1}{2} x \cos\phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} (-1)^n \cos 2n\phi}{n(1 - 4n^2)} \quad (II.24)$$

Para regiões vizinhas à entrada térmica, onde a temperatura do fluido é função da condução de calor na direção axial, o problema é representado pela equação II.2 na forma:

$$(1 - x^2) \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (II.25)$$

onde

$$\phi = (T - T_d)/q \cdot a/K \quad (II.26)$$

Na região de entrada térmica as condições de contorno são:

$$\text{C.C. (I'')} \quad \text{para } z = 0, \quad \phi(x, \phi, 0) = -\theta(x, \phi, 0) \quad (\text{II.27a})$$

$$\text{C.C. (II'')} \quad \text{para } z = \infty, \quad \phi(x, \phi, \infty) = 0$$

$$\text{C.C. (III'')} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{C.C. (IV'')} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right|_{\phi=\pi} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{II.27b})$$

$$\text{C.C. (V'')} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad \text{para } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{II.27c})$$

$$\text{C.C. (VI'')} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad \text{para } \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$$

Admitindo para a equação II.25 a solução:

$$\phi = U(x, z) \cdot \tau(\phi) \quad (\text{II.28})$$

obtêm-se (Apêndice B)

$$\frac{x^2}{U} (1 - x^2) \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{x^2}{U} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{U} \frac{d^2 \tau}{d\phi^2} = -n^2 \quad (\text{II.29})$$

$$\tau_n = A_n \cos \phi + B_n \text{sen} \phi \quad (\text{II.30})$$

Com A_n e B_n constantes a serem determinadas, n^2 é a constante de separação, com n inteiro, pois $\tau(\phi) = \tau(\phi + 2\pi)$.

$$(1 - x^2) \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{n^2}{x^2} U \quad (\text{II.31})$$

Admitindo para a equação II.31 uma solução do tipo

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} Z_n(z) \cdot J_{n/2}(\alpha_j x^2) \quad (\text{II.31a})$$

Verifica-se, mediante as condições de contorno (III.27c), que os α_j ($j = 1, 2, \dots$), contidos na solução III.31b devem ser raízes positivas das equações.

$$J'_{n/2}(\alpha_j) = 0$$

Substituindo-se U da equação II.31 pelo dado pela expressão II.31a, e fazendo-se $x^2 = t$ tem-se (Apêndice B):

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} J_{n/2}(\alpha_j t)(1-t) \frac{dZ_n}{dz} = \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} J_{n/2}(\alpha_j t) \cdot \left(\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} - 4\alpha_j^2 t Z_n \right) \quad (II.32)$$

Multiplicando ambos os lados das equações III.32 por $t \cdot J_{n/2}(\alpha_m t)$, α_m não é necessariamente o mesmo autovalor que α_j , e integrando entre os limites 0 e 1 tem-se (Apêndice B):

$$\begin{aligned} & A_{nm} \left[\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} - \frac{dZ_n}{dz} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^2}{4\alpha_m^2} \right) J_{n/2}^2(\alpha_m) \right] \\ & + A_{nm} \left[\frac{dZ_n}{dz} - 4\alpha_n^2 Z_n \right] \cdot \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{n^2}{4\alpha_m^2} \right) J_{n/2}^2(\alpha_m) \right] \\ & + \frac{n}{8\alpha_m^2} J_{n/2}^2(\alpha_m) + \frac{(n^2 - 1)}{8\alpha_m^2} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{((2n + 4K)J_{n/2}^2 + K^{(\alpha_m)})}{(n^2 + 4nK + (4K^2 - 1))} \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} \left(\frac{dZ_n}{dz} - 4\alpha_j^2 Z_n \right) \int_0^1 t^2 J_{n/2}(\alpha_j t) \cdot J_{n/2}(\alpha_m t) dt = 0^{j \neq m} \end{aligned} \quad (II.33)$$

O sistema de equações II.33 é satisfeito por:

$$Z_n(z) = C_n e^{\lambda n z} \quad (II.34)$$

(Singh, 1958b; Carslaw and Jaeger, 1959).

quando,

$$\begin{aligned}
 & C_n \left[A_{nm} \left(\frac{\lambda_n^2}{Pe^2} - \lambda_n \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^2}{4\alpha_m^2} \right) J_{n/2}^2(\alpha_m) \right) \right. \\
 & + C_n \left[A_{nm} (\lambda_n - 4\alpha_m^2) \right] \cdot \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{n^2}{4\alpha_m^2} \right) J_{n/2}^2(\alpha_m) + \frac{n}{8\alpha_m^2} J_{n/2}^2(\alpha_m) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(n^2 - 1)}{8\alpha_m^2} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(2n + 4K) J_{n/2+K}^2(\alpha_m)}{(n^2 + 4nK + (4K^2 - 1))} \right] \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^{\infty} C_n \left[A_{nj} (\lambda_n - 4\alpha_j^2) \cdot \int_0^1 t^2 J_{n/2}(\alpha_j t) \cdot J_{n/2}(\alpha_m t) dt \right] = 0 \quad (j \neq m)
 \end{aligned}
 \tag{II.35}$$

ou

$$\begin{aligned}
 & C_{nm} \left[\left(\frac{\lambda_n^2}{Pe^2} - \lambda_n \right) + (\lambda_n - 4\alpha_m^2) H_{nm} \right] \\
 & + \frac{1}{H_{2nm}} \sum_{j=1}^{\infty} C_{nj} (\lambda_n - 4\alpha_j^2) \int_0^1 t^2 J_{n/2}(\alpha_j t) J_{n/2}(\alpha_m t) dt = 0 \quad (j \neq m)
 \end{aligned}
 \tag{II.36}$$

em que:

$$H_{2nm} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^2}{4\alpha_m^2} \right) J_{n/2}^2(\alpha_m)
 \tag{II.37}$$

$$\begin{aligned}
 H_{1nm} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{n^2}{4\alpha_m^2} \right) J_{n/2}^2(\alpha_m) + \frac{n}{8\alpha_m^2} J_{n/2}^2(\alpha_m) \\
 &+ \frac{(n^2 - 1)}{8\alpha_m^2} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(2n + 4K) J_{n/2+K}^2(\alpha_m)}{(n^2 + 4nK + (4K^2 - 1))}
 \end{aligned}
 \tag{II.37a}$$

$$H_{nm} = \frac{H_{1nm}}{H_{2nm}} \quad (\text{II.38})$$

$$C_n \cdot A_{nm} = C_{nm}, \quad C_n \cdot A_{nj} = C_{nj} \quad (\text{II.39})$$

Os λ_n são determinados resolvendo-se o sistema de equações II.36 com os coeficientes C_{nj} , são todos nulos.

Uma solução aproximada para o problema é obtida resolvendo-se o sistema de equações II.36, quando se desprezam, na somatória, os termos $j \neq m$ (Singh, 1958a e Singh, 1958b; Jeffreys and Jeffreys, 1946).

Mediante a simplificação sugerida acima obtêm-se:

$$C_{nm} \cdot \left[\left(\frac{\lambda_n^2}{Pe} - \lambda_n \right) + (\lambda_n - 4\alpha_m^2) H_{nm} \right] = 0 \quad (\text{II.40})$$

$$C_{nm} \neq 0 \quad (\text{II.41})$$

Logo

$$\frac{\lambda_n^2}{Pe} - \lambda_n (1 - H_{nm}) - 4\alpha_m^2 H_{nm} = 0 \quad (\text{II.42})$$

e portanto

$$\lambda_n = \frac{Pe^2(1 - H_{nm}) \pm \left[(Pe^2(1 - H_{nm}))^2 + 16Pe^2\alpha_m^2 H_{nm} \right]^{1/2}}{2} \quad (\text{II.43})$$

O sistema de equações II.42 tem um número infinito de raízes positivas e negativas, dadas pela expressão II.43. As raízes positivas são inadmissíveis pela condição de contorno C.C.(II'''). As raízes negativas geram um número infinito de autovalores λ_n^m que são dados por:

$$\lambda_n^m = \frac{1}{2} \left[(P_e^2 (1 - H_{nm}) - |(P_e^2 (1 - H_{nm}))|^2 + 16P_e^2 \alpha_m^2 H_{nm})^{1/2} \right] \quad (\text{II.44})$$

onde H_{nm} são dados pela expressão III.38.

$$H_{0m} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{K J_K^2(\alpha_m)}{(4K^2 - 1)} \right) \quad (\text{II.45})$$

$$H_{1m} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{(4\alpha_m^2 - 1)} \right) \quad (\text{II.46})$$

$$H_{nm} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{n}{(\alpha_m^2 - n^2)} + \frac{1}{2} \frac{(4n^2 - 1)}{(\alpha_m^2 - n^2) J_n^2(\alpha_m)} \right]$$

$$\left. \sum_{K=1}^{\infty} \frac{4(n+K) J_{n+K}^2(\alpha_m)}{4n^2 + 8Kn + (4K^2 - 1)} \right] \quad (\text{II.47})$$

Portanto, a solução para regiões vizinhas à entrada termina é:

$$\phi_n = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} e^{\lambda_n^m z} J_{n/2}(\alpha_m x^2) [A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi] \quad (\text{II.48})$$

Com as condições de contorno

$$(\text{II.27b}) \rightarrow B_n = 0 \quad (\text{II.49})$$

$$(\text{II.27c}) \rightarrow J_{n/2}'(\alpha_m) = 0 \quad (\text{II.50})$$

$$\phi_n = \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} e^{\lambda_n^m z} J_{n/2}(\alpha_m x^2) \cos n\phi \quad (\text{II.51})$$

e portanto,

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} e^{\lambda_n^m z} J_{n/2}(\alpha_m x^2) \cos n\phi \quad (\text{II.52})$$

Com as condições de contorno C.C.(I''), (II.27a) tem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cdot J_{n/2}(\alpha_m x^2) \cdot \cos n\phi = \frac{7}{24\pi} - \frac{1}{\pi} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) - \frac{x}{2} \cos\phi - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} (-1)^n \cdot \cos 2n\phi}{n(1-4n^2)} \quad (\text{II.53})$$

ou ainda

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{0m} J_0(\alpha_m x^2) = \frac{7}{24\pi} - \frac{1}{\pi} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \quad (\text{II.54})$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{1m} J_{1/2}(\alpha_m x^2) = -\frac{x}{2} \quad (\text{II.55})$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} J_{n/2}(\alpha_m x^2) = -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n/2} x^n}{n(1-n^2)} \quad (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (\text{II.56})$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} J_{n/2}(\alpha_m x^2) = 0 \quad (n = 3, 5, 7, 9 \dots) \quad (\text{II.57})$$

$$\text{Logo, } B_{nm} = 0 \quad (n = 3, 5, 7 \dots) \quad (\text{II.58})$$

Os coeficientes B_{0m} , B_{1m} e B_{nm} das equações II.54, II.55 e II.56 respectivamente, são determinadas através da propriedade de ortonormal das séries Fourier-Bessel, como se segue:

- Multiplicando ambos os lados das equações II.54, II.55 e II.56 por $x^3 J_0(\alpha_j x^2)$, $x^3 J_{1/2}(\alpha_j x^2)$ e $(x^3 \cdot J_n(\alpha_j x^2))$, respectivamente, e integrando entre os limites 0 e 1, com os autovalores α_j não necessariamente os mesmos que α_m , tem-se (Apêndice B):

$$B_{0m} = - \frac{1}{\pi \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \left[J_0(\alpha_m) - \frac{4}{\alpha_m} \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m) \right] \quad (II.59)$$

$$B_{1m} = - \frac{4 \alpha_m J_{3/2}(\alpha_m)}{(4 \alpha_m^2 - 1) J_{1/2}^2(\alpha_m)} \quad (II.60)$$

$$B_{nm} = \frac{-2(-1)^n \alpha_m J_{n+1}(\alpha_m)}{\pi \cdot n \cdot (1 - 4n^2) (\alpha_m^2 - n^2) J_n^2(\alpha_m)} \quad (II.61)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1}{\pi \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \left[J_0(\alpha_m) - \frac{4}{\alpha_m} \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m) \right] \cdot e^{\lambda_0^m z} \cdot J_0(\alpha_m x^2) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4 \alpha_m J_{3/2}(\alpha_m) \cdot e^{\lambda_1^m z}}{(4 \alpha_m^2 - 1) J_{1/2}^2(\alpha_m)} \cdot J_{1/2}(\alpha_m x^2) \cdot \cos \phi \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n \alpha_m J_{n+1}(\alpha_m) \cdot e^{\lambda_n^m z} J_n(\alpha_m x^2) \cos 2n\phi}{\pi \cdot n (1 - 4n^2) (\alpha_m^2 - n^2) J_n^2(\alpha_m)} \end{aligned} \quad (II.62)$$

Das equações II.3c, II.5a e II.26, tem-se:

$\theta = \theta_d + \phi$ onde θ é a temperatura em qualquer posição no interior do tubo, θ e ϕ são definidos pelas equações II.24 e II.62 respectivamente.

Logo,

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{4}{\pi} z - \frac{7}{24\pi} + \frac{1}{\pi} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) + \frac{x}{2} \cos \phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} \cos 2n\phi}{n(1 - 4n^2)} \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_0^m z} J_0(\alpha_m x^2)}{\pi \cdot \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \left[J_0(\alpha_m) - \frac{4}{\alpha_m} \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\alpha_m e^{\lambda_1^m z} J_{3/2}(\alpha_m) J_{1/2}(\alpha_m x^2)}{(4\alpha_m^2 - 1) J_{1/2}^2(\alpha_m)} \cos \phi \\
 & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \alpha_m e^{\lambda_n^m z} J_{n+1}(\alpha_m) J_n(\alpha_m x^2) \cos 2n\phi}{\pi \cdot n(1-4n^2)(\alpha_m^2 - n^2) J_n^2(\alpha_m)} \quad (II.63)
 \end{aligned}$$

Para

$$\begin{aligned}
 J_{1/2}(\alpha_m x^2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_m}} \frac{\text{sen } x}{x} \\
 J_{3/2}(\alpha_m x^2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_m}} \cdot \left(\frac{\text{sen } x}{x^2} - \frac{\text{cos } x}{x} \right) \quad (II.64)
 \end{aligned}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{4}{\pi} z - \frac{7}{24\pi} + \frac{1}{\pi} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) + \frac{x}{2} \cos \phi \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_0^m z} J_0(\alpha_m x^2)}{\pi \cdot \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \left[J_0(\alpha_m) - \frac{4}{\alpha_m} \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m) \right] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4e^{\lambda_1^m z} (\text{sen } \alpha_m - \alpha_m \text{cos } \alpha_m) \text{sen}(\alpha_m x^2)}{(4\alpha_m^2 - 1) \cdot x \cdot \text{sen}^2(\alpha_m)} \cos \phi \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \text{cos } 2n\phi}{n(1-4n^2)} \left[x^{2n} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\alpha_m e^{\lambda_n^m z} J_{n+1}(\alpha_m) J_n(\alpha_m x^2)}{(\alpha_m^2 - n^2) J_n^2(\alpha_m)} \right] \quad (II.65)
 \end{aligned}$$

2.3 - DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE NUSSELT PARA REGIÕES VIZINHAS À ENTRADA TÉRMICA

O número de Nusselt local (Nu_z), é dado pela razão entre resistência ao fluxo de calor por condução e resistência ao fluxo de calor por convecção, ou seja:

$$Nu_z = \frac{2a \cdot h}{K} \quad (II.66)$$

Para

$$\bar{q} = h \cdot (\bar{T}_w - \bar{T}_m) \quad (II.67)$$

tem-se:

$$Nu_z = \frac{2a}{K} \cdot \frac{\bar{q}_w}{(\bar{T}_w - \bar{T})} \quad (II.68)$$

em que $q_w = q \cos\phi$ (fluxo de calor incidente na parede).

As barras sobre as grandezas indicam os valores médios das mesmas, para a secção considerada.

Das expressões II.3c e II.68, obtêm-se:

$$\bar{T}_w = \bar{\theta}_w \cdot \frac{qa}{K} + \bar{T}_{ow} \quad (II.69)$$

$$\bar{T} = \bar{\theta} \frac{qa}{K} + \bar{T}_o \quad (II.70)$$

Da equação II.3e, resulta:

$$\bar{q}_w = \frac{q}{\pi} \quad (II.71)$$

portanto:

$$Nu_z = \frac{2}{\pi(\bar{\theta}_w - \bar{\theta})} \quad (II.72)$$

A temperatura média global do escoamento na secção considerada é definida por:

$$\bar{\theta} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} \theta \, 2v(1 - (\frac{r}{a})^2) r dr d\phi}{\int_0^a \int_0^{2\pi} 2v(1 - (\frac{r}{a})^2) r dr d\phi} \quad (II.73)$$

A temperatura média da parede do tubo é definida por:

$$\bar{\theta}_w = \int_0^{2r} \theta|_{x=1} d\phi \quad \int_0^{2r} d\phi \quad (II.74)$$

Substituindo nas equações II.73 e II.74 pela expressão II.65, e integrando entre os limites indicados obtêm-se (Apêndice B):

$$\bar{\theta} = \frac{4z}{\pi} - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_0^m z} (J_0(\alpha_m) - \frac{4}{\alpha m} \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m)) \frac{1}{\alpha m} \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m)}{\pi \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \quad (II.75)$$

$$\bar{\theta}_w = \frac{4z}{\pi} - \frac{11}{24\pi} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_0^m z} (J_0(\alpha_m) - \frac{4}{\alpha m} \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m)) J_0(\alpha_m)}{\pi \cdot \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \quad (II.76)$$

Das expressões II.72, II.75 e II.76 pode-se escrever:

$$Nu_z = \frac{48}{(II-24) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_0^m z} (J_0(\alpha_m) - \frac{4}{\alpha m} \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m))^2}{\alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)}} \quad (II.77)$$

CAPÍTULO III

ESTUDO DO PERFIL DAS TEMPERATURAS PARA O CASO EM QUE A CONDUÇÃO AXIAL É DESPREZÍVEL

Na ausência da condução axial, a equação adimensional obtida da equação da energia é dada pela equação (II.4), com $\theta = \frac{T-T_0}{\frac{q \cdot a}{K}}$

$$(1-x^2) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2} \right] \quad (\text{III.1})$$

sujeita às condições de contorno (II.3), ou seja:

$$\text{C.C. (I)} \quad \text{para } z = 0 \quad \theta = 0 \quad (\text{III.2a})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{C.C. (II)} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=1} = \cos \phi \quad \text{para } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\} \\ \text{C.C. (III)} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad \text{para } \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi \end{array} \right\} \quad (\text{III.2b})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{C.C. (IV)} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \right\} \\ \text{C.C. (V)} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right|_{\phi=\pi} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \quad (\text{III.2c})$$

Procedendo-se de modo análogo ao capítulo anterior, desprezam-se as perdas de calor por radiação e convecção através da parede do tubo e mantêm-se as outras considerações feitas, exceto a existência da condução axial de calor.

Para as regiões distantes da entrada térmica, onde a variação da temperatura do fluido pode ser considerada linear em z, a solução da equação (III.1) é dada pela expressão (II.24), como segue:

$$\theta_d = \frac{4z}{\pi} - \frac{7}{24\pi} + \frac{1}{\pi} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) + \frac{1}{2} x \cos \phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} (-1)^n \cos 2n\phi}{n(1-4n^2)} \quad (\text{III.3})$$

Para regiões vizinhas à entrada térmica a equação da energia é dada por:

$$(1-x^2) \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} \quad (\text{III.4})$$

Com as condições de contorno: (II.27)

$$\left. \begin{array}{l} \text{C.C. (I'')} \quad \text{para } z = 0, \quad \phi(x, \phi, 0) = -\theta(x, \phi, 0) \\ \text{C.C. (II'')} \quad \text{para } z = \infty, \quad \phi(x, \phi, \infty) = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{III.5a})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{C.C. (III'')} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ \text{C.C. (IV'')} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right|_{\phi=\pi} = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \quad (\text{III.5b})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{C.C. (V'')} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad \text{para } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{C.C. (VI'')} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad \text{para } \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi \end{array} \right\} \quad (\text{III.5c})$$

Admitindo-se para a equação (III.4) a solução:

$$\phi = U(x, z) \cdot \tau(\phi) \quad (\text{III.6})$$

obtêm-se (Apêndice B):

$$\frac{x^2}{U} (1-x^2) \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{x^2}{U} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial U}{\partial x} \right] = \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \phi^2} = -n^2 \quad (\text{III.7})$$

onde n é inteiro pois $\tau(\phi) = \tau(\phi+2\pi)$

Logo,

$$\tau_n = A_n \cos n\phi + B_n \operatorname{senn}\phi \quad (\text{III.8})$$

sendo A_n, B_n constantes a determinar, e

$$(1-x^2) \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{n^2 U}{x^2} \quad (\text{III.9})$$

Admitindo-se, para a equação (III.9) uma solução do tipo:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} Z_n(z) \cdot \frac{J_n}{2}(\alpha_j x^2) \quad (\text{III.10})$$

onde α_j ($j = 1, 2, 3, \dots$) é a raiz da equação $\frac{J'_n}{2}(\alpha_j) = 0$, para que as condições de contorno (III.5c) sejam satisfeitas.

Substituindo U , dado pela expressão (III.10), com $x^2 = t$, na equação (III.9) tem-se (Apêndice B):

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} \frac{J_n}{2}(\alpha_j t) (1-t) \frac{dZ_n}{dz} = \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} \frac{J_n}{2}(\alpha_j t) (-4\alpha_j^2 t \cdot Z_n) \quad (\text{III.11})$$

Multiplicando ambos os lados das equações (III.11) por $t \cdot \frac{J_n}{2}(\alpha_m t)$, onde α_m não é necessariamente o mesmo autovalor que α_j , e integrando entre os limites 0 e 1 tem-se (Apêndice B):

$$\begin{aligned}
 & A_{nm} \frac{dZ_n}{dz} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^2}{4\alpha_m^2} \right) \frac{J_n^2}{2} (\alpha_m) \right] - A_{nm} \left[\frac{dZ_n}{dz} - 4\alpha_m^2 Z_n \right] \\
 & \cdot \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{n^2}{4\alpha_m^2} \right) \frac{J_n^2}{2} (\alpha_m) + \frac{n}{8\alpha_m^2} \frac{J_n^2}{2} (\alpha_m) + \frac{(n^2-1)}{8\alpha_m^2} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(2n+4K) J_{n/2+K}^2 (\alpha_m)}{n^2+4nK+(4K^2-1)} \right] \\
 & + \sum_{J=1}^{\infty} A_{nj} 4\alpha_j^2 \cdot Z_n \int_0^1 t^2 \cdot \frac{J_n}{2} (\alpha_j t) \cdot \frac{J_n}{2} (\alpha_m t) dt = 0
 \end{aligned} \tag{III.12}$$

$J \neq m$

O sistema de equações (III.12) é satisfeito por:

$$Z_n = C_n e^{\beta_n z} \tag{III.13}$$

quando:

$$\begin{aligned}
 & B_{nm} \left[\beta_n - (\beta_n - 4\alpha_m^2) H_{nm} \right] \\
 & + \frac{1}{H_{2nm}} \sum_{j=1}^{\infty} B_{nj} J(\beta_n - 4\alpha_j^2) \int_0^1 t^2 \frac{J_n}{2} (\alpha_j t) \cdot \frac{J_n}{2} (\alpha_m t) dt = 0
 \end{aligned} \tag{III.14}$$

$J \neq m$

para $B_{nj} = C_n \cdot A_{nj}$ (IV.15)

onde β_n será determinado pela solução do sistema de equações (III.14) com os coeficientes B_{nj} não todos nulos.

Uma solução aproximada para o problema é obtida resolvendo-se o sistema de equações (III.14), quando se desprezam, na somatória, os termos $j \neq m$ (Singh, 1958a; Singh, 1958b; Jeffreys and Jeffreys, 1946).

Mediante a simplificação sugerida acima tem-se:

$$B_{nm} \left[\beta_n (1 - H_{nm}) + 4\alpha_m^2 H_{nm} \right] = 0 \tag{III.16}$$

$$B_{nm} \neq 0 \quad (III.17)$$

Logo,

$$\beta_n = \frac{4\alpha_m^2 \cdot H_{nm}}{(H_{nm} - 1)} \quad (III.18)$$

O sistema de equações (III.16) tem um número infinito de raízes, dadas pela expressão (III.18), que definem os autovalores β_n^m . Assim,

$$\beta_n^m = \frac{4\alpha_m^2 \cdot H_{nm}}{(H_{nm} - 1)} \quad (III.19)$$

onde H_{nm} são dados pela expressão (II.38).

$$H_{0m} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{\alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{K J_K^2(\alpha_m)}{(4K^2 - 1)} \right) \quad (III.20)$$

$$H_{1m} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{4\alpha_m^2 - 1} \right) \quad (III.21)$$

$$H_{nm} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n}{(\alpha_m^2 - n^2)} + \frac{1}{2} \frac{(4n^2 - 1)}{(\alpha_m^2 - n^2) J_n^2(\alpha_m)} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{4(n+K) J_{n+K}^2(\alpha_m)}{4n^2 + 8Kn + (4K^2 - 1)} \right) \quad (III.22)$$

Portanto, a solução para regiões vizinhas à entrada térmica é:

$$\phi_n = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \cdot e^{\beta_n^m z} \frac{J_n}{2}(\alpha_m x^2) (A_n \cos n\phi + B_n \text{senn}\phi) \quad (III.23)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$(III.5b) \quad B_n = 0 \quad (III.24)$$

$$(III.5c) \quad \frac{J'_n}{2}(\alpha_m) = 0 \quad (III.25)$$

e portanto:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cdot e^{\beta_{nm}^2} \frac{J_n}{2} (\alpha_m x^2) \cdot \cos n\phi \quad (\text{III.26})$$

onde:

$$B_{nm} = A_n \cdot C_{nm}$$

Com a condição de contorno C.C.(I''),(III.5a) tem-se;

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \cdot \frac{J_n}{2} (\alpha_m x^2) \cdot \cos \phi &= \frac{7}{24\pi} - \frac{1}{\pi} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) - \frac{x}{2} \cos \phi \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} (-1)^n \cos 2n\phi}{n(1-4n^2)} & \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

ou ainda:

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{0m} J_0(\alpha_m x^2) = \frac{7}{24\pi} - \frac{1}{\pi} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \quad (\text{III.28})$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{1m} J_{1/2}(\alpha_m x^2) = - \frac{x}{2} \quad (\text{III.29})$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \frac{J_n}{2}(\alpha_m x^2) = - \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n/2} x^n}{n(1-n^2)} \quad (n = 2, 4, 6 \dots) \quad (\text{III.30})$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \frac{J_n}{2}(\alpha_m x^2) = 0 \quad (n = 3, 5, 7 \dots) \quad B_{nm} = 0 \quad (\text{III.31})$$

Os coeficientes da série Fourier-Bessel, B_{0m} , B_{1m} e B_{nm} , são dados pelas equações (II.59), (II.60) e (II.61) respectivamente. Logo,

$$\begin{aligned}
 \phi = & \sum_{m=1}^{\infty} - \frac{1}{\pi \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \left[J_0(\alpha_m) - \frac{4}{\alpha_m} \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\alpha_m) \right] e^{\beta_0^m z} J_0(\alpha_m x^2) \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} - \frac{4 \alpha_m e^{\beta_1^m z} J_{3/2}(\alpha_m) \cdot J_{1/2}(\alpha_m x^2) \cos \phi}{(4 \alpha_m^2 - 1) J_{1/2}^2(\alpha_m)} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} - \frac{2(-1)^n \alpha_m J_{n+1}(\alpha_m) e^{\beta_n^m z} J_n(\alpha_m x^2) \cos 2n\phi}{\pi \cdot n (1-4n^2) (\alpha_m^2 - n^2) J_n^2(\alpha_m)} \quad (III.32)
 \end{aligned}$$

A temperatura $|\theta(x, \phi, z)|$ do fluido em qualquer posição é dada pela soma das equações (III.3) e (III.32), ou seja:

$$\begin{aligned}
 \theta = & \frac{4}{\pi} z - \frac{7}{24\pi} + \frac{1}{\pi} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) + \frac{x}{2} \cos \phi \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\beta_0^m z} J_0(\alpha_m x^2)}{\pi \cdot \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \left[J_0(\alpha_m) - \frac{4}{\alpha_m} \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\alpha_m) \right] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 e^{\beta_1^m z} (\sin \alpha_m - \alpha_m \cos \alpha_m) \sin(\alpha_m x^2)}{(4 \alpha_m^2 - 1) x \cdot \sin^2(\alpha_m)} \cos \phi \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2n\phi}{n(1-4n^2)} \left[x^{2n} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \alpha_m e^{\beta_n^m z} J_{n+1}(\alpha_m) J_n(\alpha_m x^2)}{(\alpha_m^2 - n^2) J_n^2(\alpha_m)} \right] \quad (III.33)
 \end{aligned}$$

3.1 - DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE NUSSELT (Nu_z) NAS REGIÕES VISINHAS À ENTRADA TÉRMICA

Da equação (II.72) tem-se:

$$Nu_z = \frac{2}{\pi(\bar{\theta}_w - \bar{\theta})} \quad (III.34)$$

onde: $\bar{\theta}$ e $\bar{\theta}_w$ são dados pelas equações (II.75) e (II.76) respectivamente, com β_0^m em lugar de λ_0^m . Portanto, para o problema onde não há condução axial de calor, o número de Nusselt é dado pela expressão:

$$Nu_z = \frac{48}{11-24 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\beta_0^m z} [(J_0(\alpha_m) - 4/\alpha_m \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\alpha_m))]^2}{\alpha_m^2 \cdot J_0^2(\alpha_m)}} \quad (III.35)$$

CAPÍTULO IV

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A análise das soluções dadas pelas expressões (II.27) e (II.65) é feita através de gráficos que mostram a distribuição das temperaturas em função da posição e do número de Péclet.

4.1 - DISTRIBUIÇÃO RADIAL E ANGULAR DAS TEMPERATURAS

As curvas das Figuras IV.1, IV.2, IV.3 e IV.4 representam a variação da temperatura em função do ângulo e do raio, para $Pe = 5$.

Uma análise da Figura IV.1, mostra que nas vizinhanças da entrada térmica, as menores temperaturas (θ) encontram-se no centro do tubo, um pouco deslocadas no sentido do fluxo de calor. Nas Figuras IV.2 a IV.4 verifica-se que as regiões de menores temperaturas (θ) afastam-se do centro do tubo com o aumento da distância da entrada térmica. A Figura IV.5, traçada para a secção de coordenada $z=1$, mostra que a região de menores temperaturas (θ) encontra-se junto à parede do tubo, do lado oposto ao fluxo de calor incidente. A partir da secção onde $z=1$, não se observa variação dos perfis das temperaturas.

Pela observação das expressões (II.44) e (II.65) verifica-se que quando, Pe cresce, o perfil das temperaturas, se estabelece mais rapidamente e, para $Pe > 100$, a expressão (II.44) reduz-se para (III.18), onde a condução axial de calor não é considerada. Quando se despreza a condução axial de calor, a solução é dada pelas expressões ... (III.18) e (III.33), e o perfil das temperaturas fica estabelecido nas vizinhanças da entrada térmica.

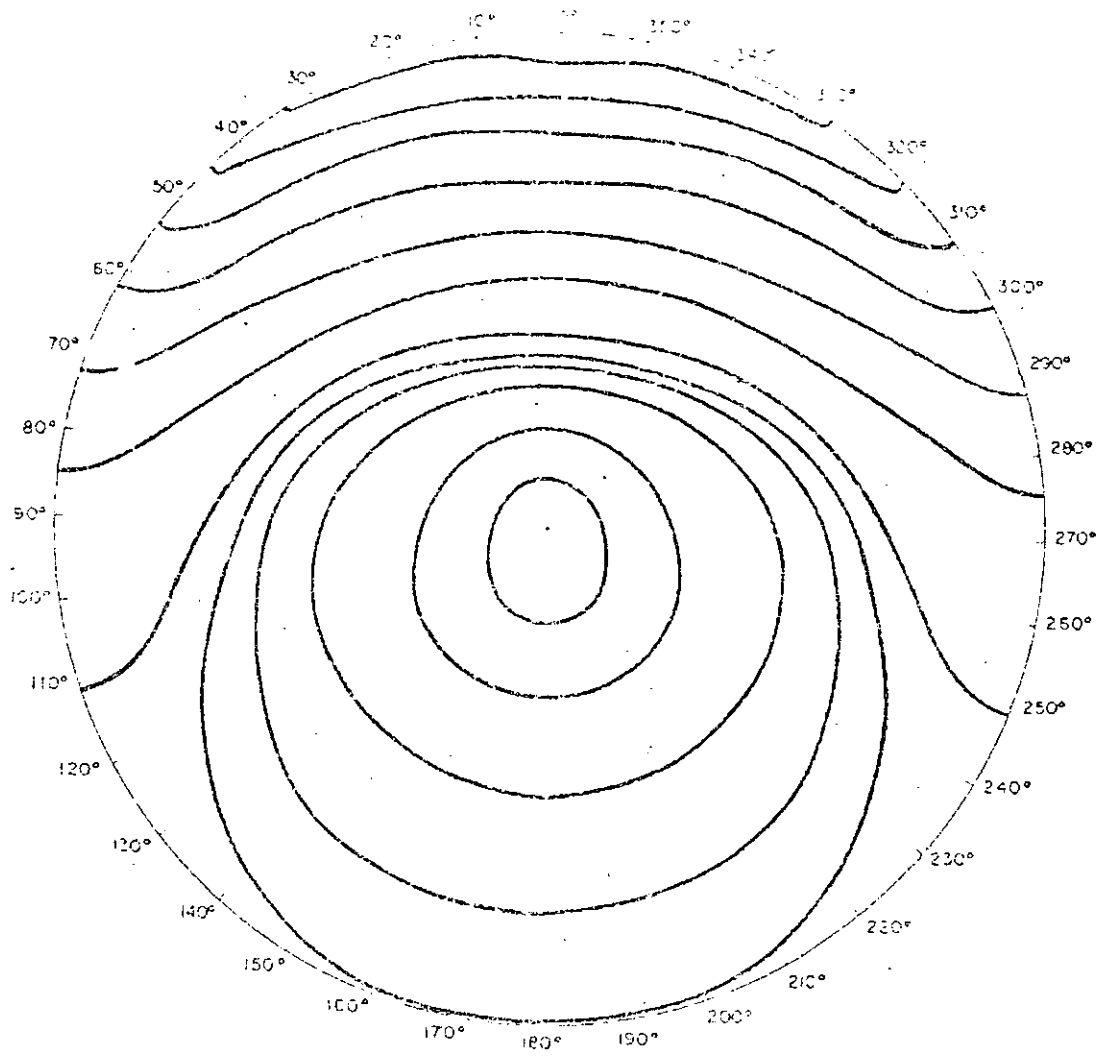


Fig. IV.1 - Perfil das temperaturas na secção $z = 0,01$ ($Pe=5$).

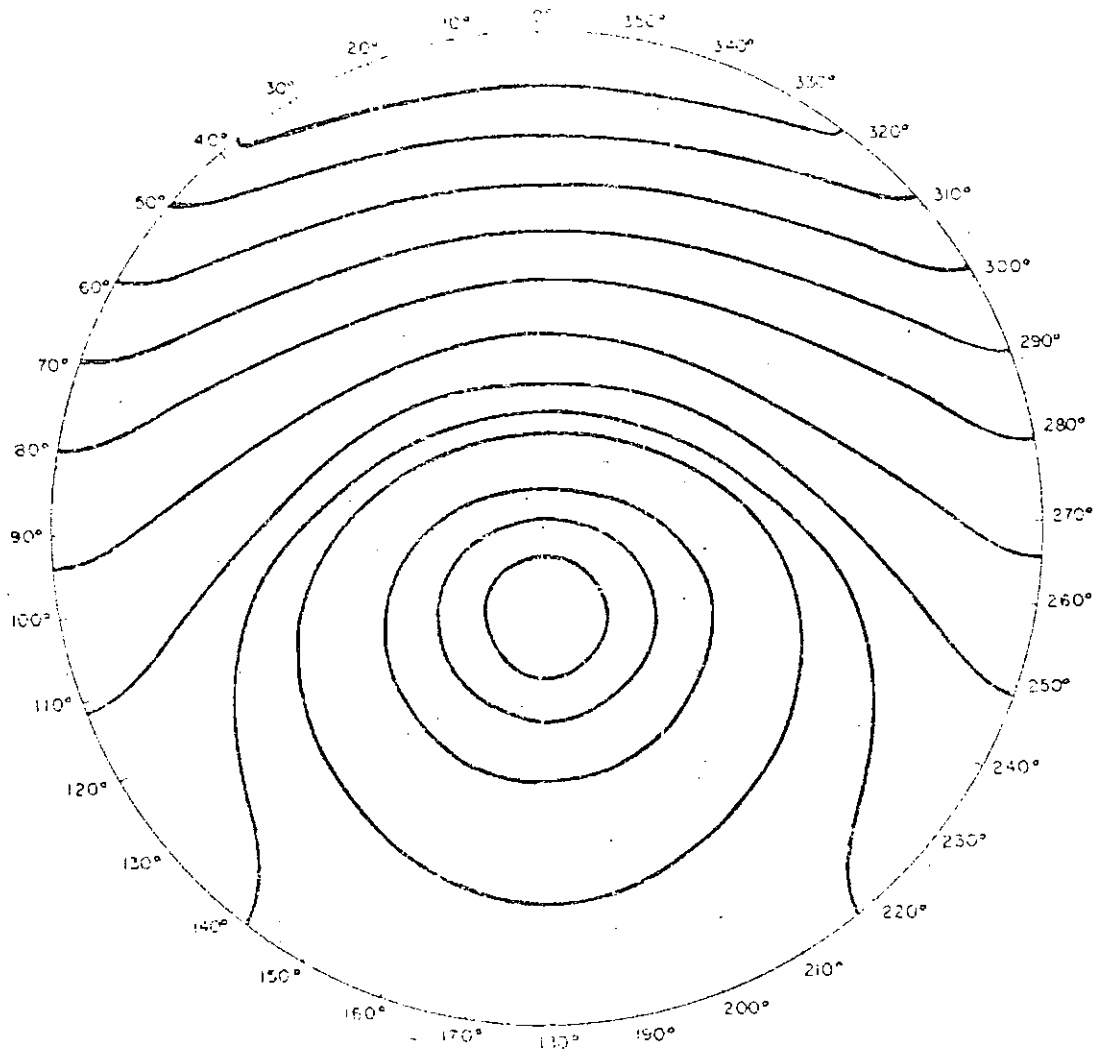


Fig. IV.2 - Perfil das temperaturas na secção $z = 0,05$ ($Pe=5$).

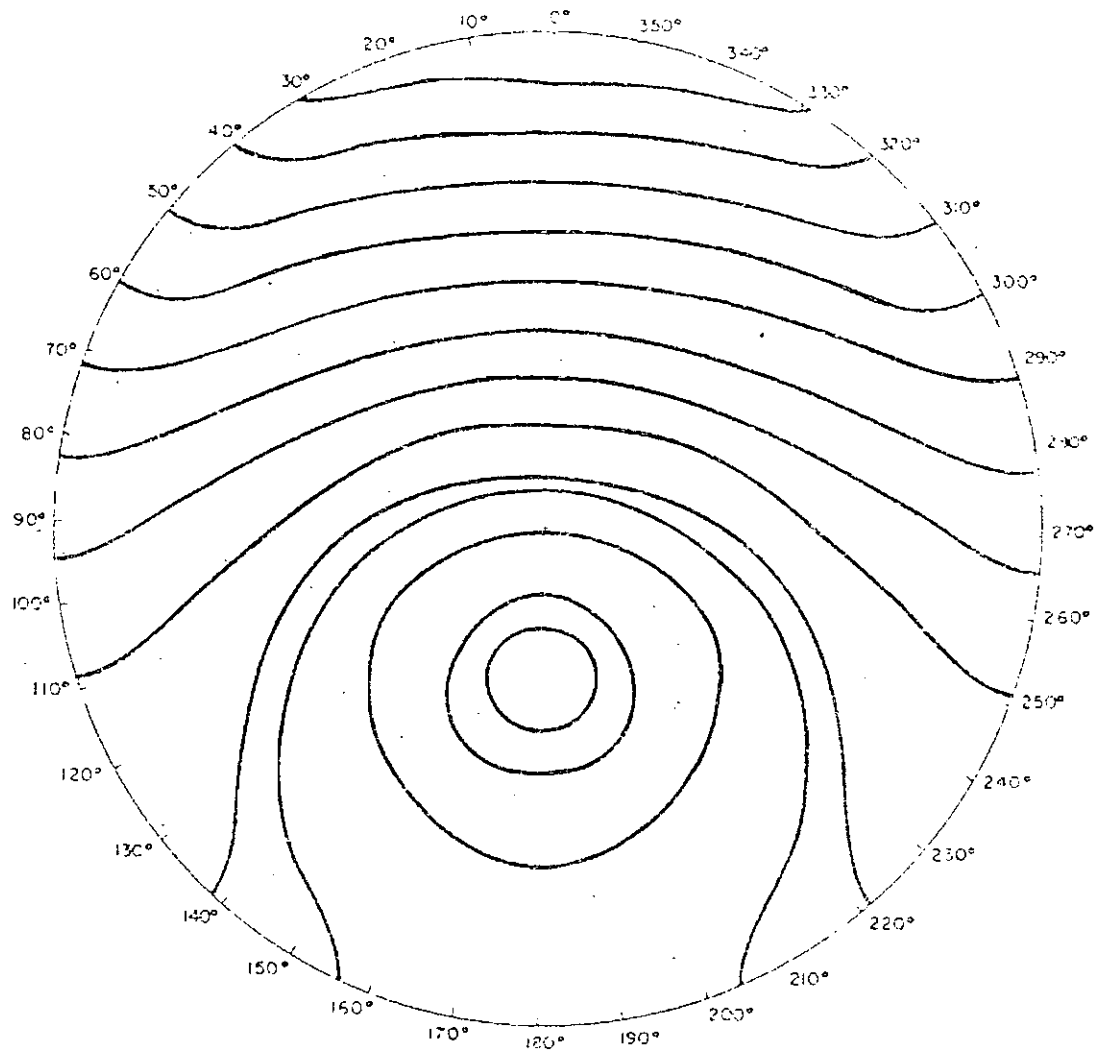


Fig. IV.3 - Perfil das temperaturas na secção $z = 0,1$ ($Pe=5$)

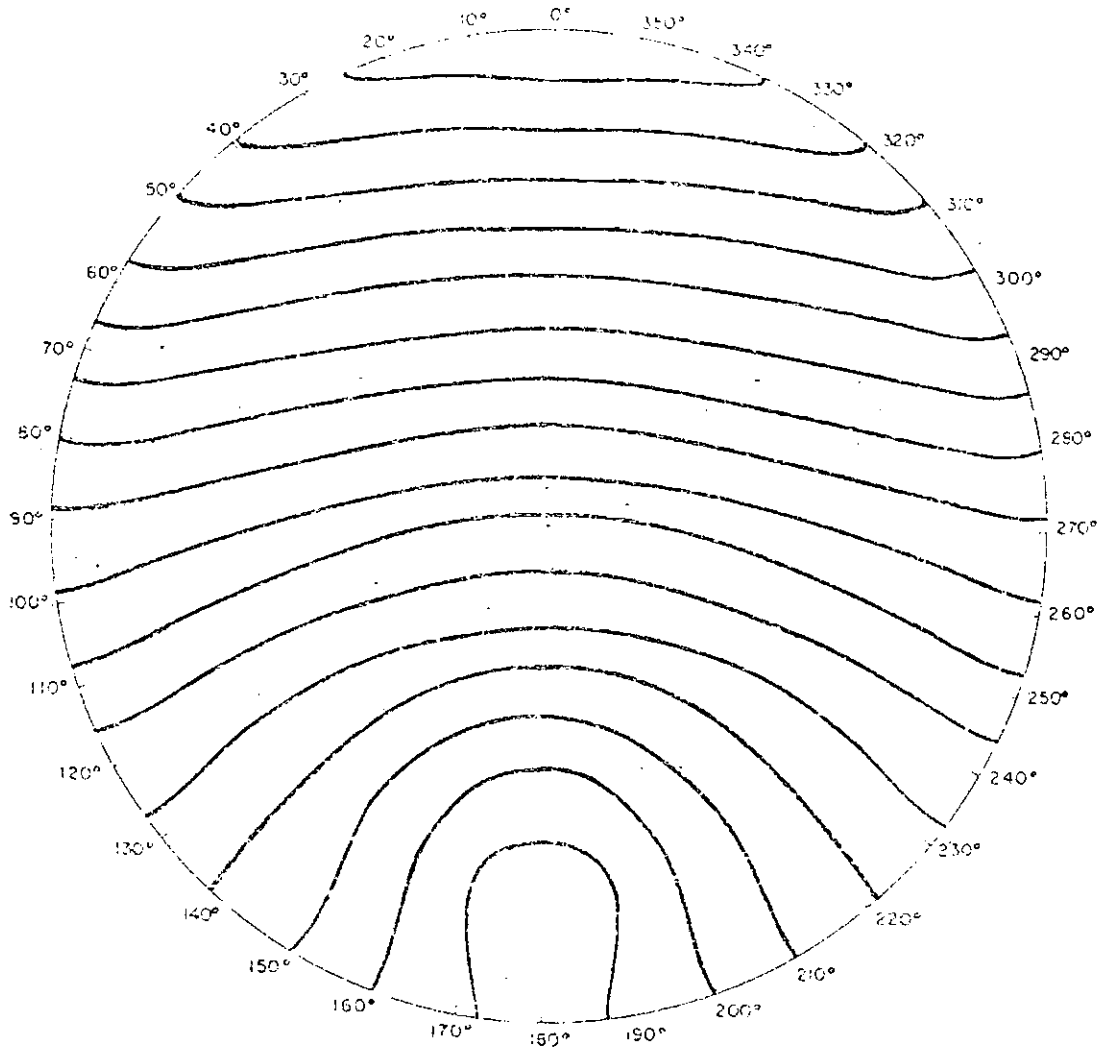


Fig. IV.4 - Perfil das temperaturas na secção $z = 0,5$ ($Pe=5$).

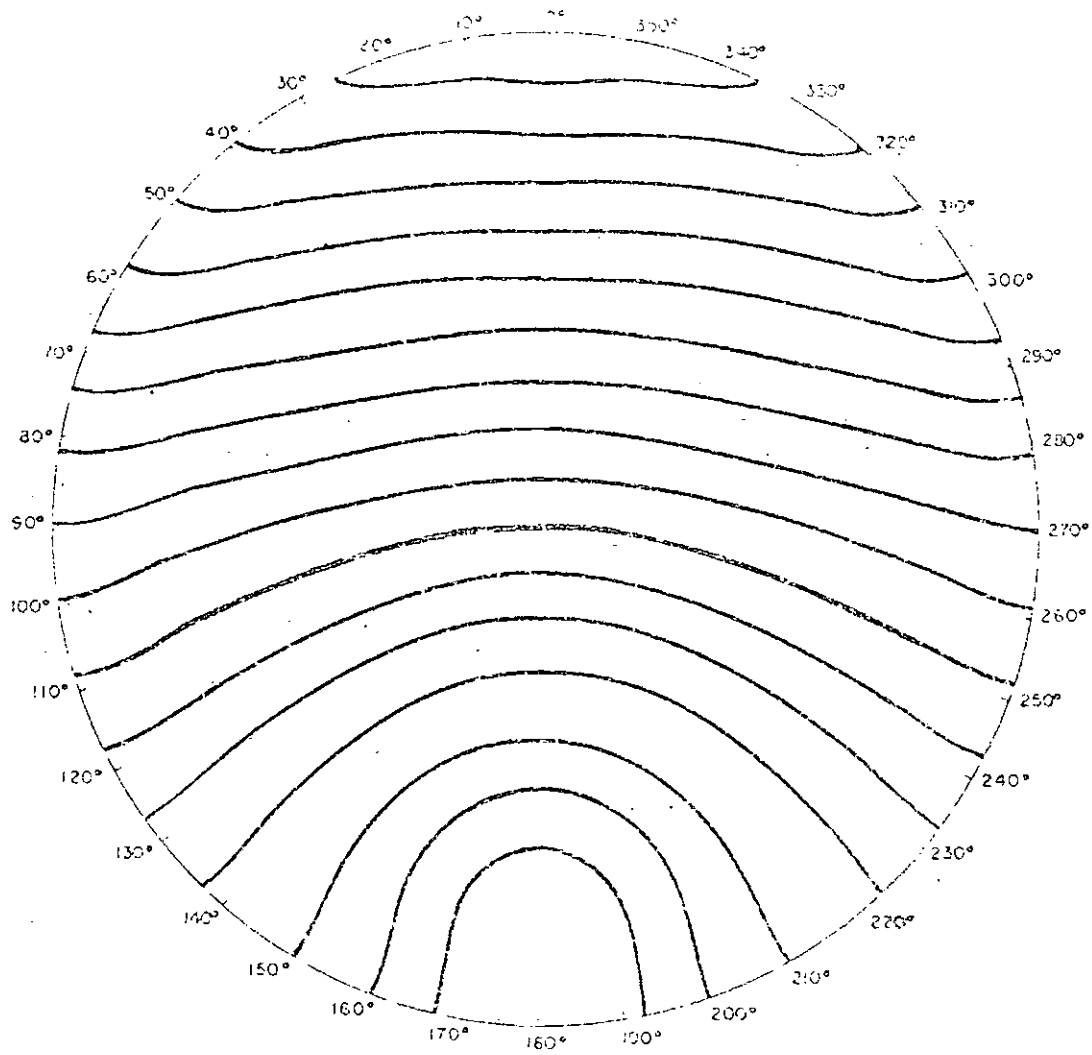


Fig. IV.5 - Perfil das temperaturas na secção $z = 1,0$ ($Pe=5$).

4.2 - DISTRIBUIÇÃO RADIAL E AXIAL DAS TEMPERATURAS

As curvas das Figuras IV.6 e IV.7 são isotérmicas traçadas para $Pe = 5$, e mostram a variação da temperatura (θ) em um plano vertical que contém o eixo do tubo. Observando as Figuras IV.6 e IV.7 nota-se que o gradiente das temperaturas é maior para os pontos situados no semi-plano superior. Uma análise das mesmas, permite verificar a evolução do perfil das temperaturas até o ponto de coordenada $z=1$, onde os perfis estão totalmente estabelecidos.

As curvas da Figura IV.8, mostram a variação da temperatura (θ) sobre uma reta vertical que corta o eixo do tubo para secções de coordenadas $z = 0,1$ e $z = 1,0$ respectivamente.

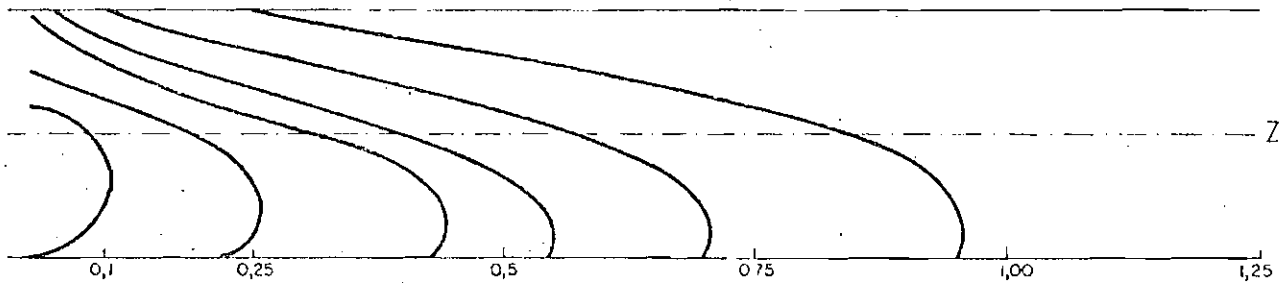


Fig. IV.6 - Perfil das temperaturas em um plano vertical que contém o eixo do tubo ($Pe=5$).

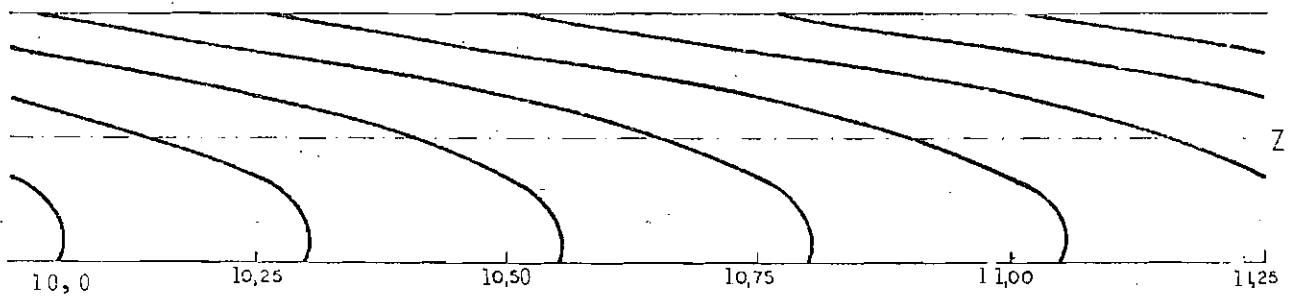


Fig. IV.7 - Perfil das temperaturas em um plano vertical que contém o eixo do tubo ($Pe=5$).

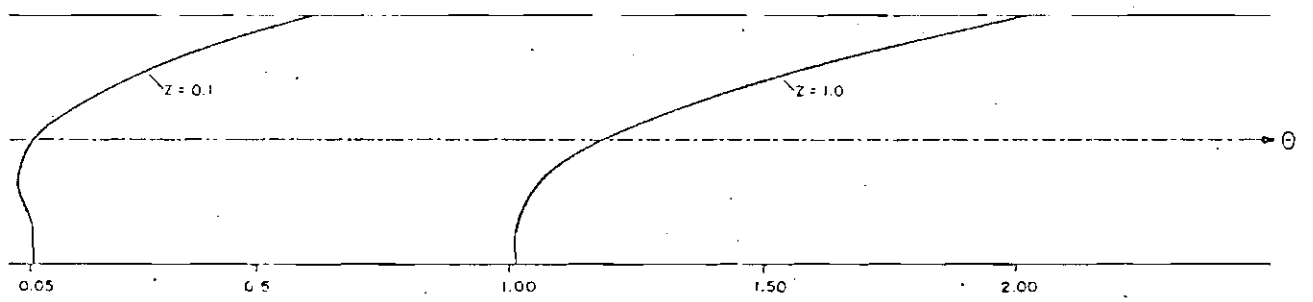


Fig. IV.8 - Distribuição radial e angular das temperaturas ($Pe=5$).

4.3 - DISTRIBUIÇÃO ANGULAR DAS TEMPERATURAS NA PAREDE DO TUBO

As curvas da Figura IV.9 mostram a distribuição das temperaturas na parede do tubo. Da análise da Figura conclui-se que: para determinada secção, as maiores temperaturas (θ_w) se encontram nas vizinhanças do ponto $\phi = 0$ e as menores em $\phi = \pi$. A variação da temperatura (θ_w) é mais acentuada entre os pontos $\phi = 0$ e $\phi = \pi/2$, para uma mesma secção. Ao longo do tubo observa-se que a diferença entre θ_w , no ponto $\phi = 0$, e θ_w , no ponto $\phi = \pi$, decresce até a secção onde o perfil das temperaturas está totalmente desenvolvido. A partir desta secção tal diferença é constante ao longo de z .

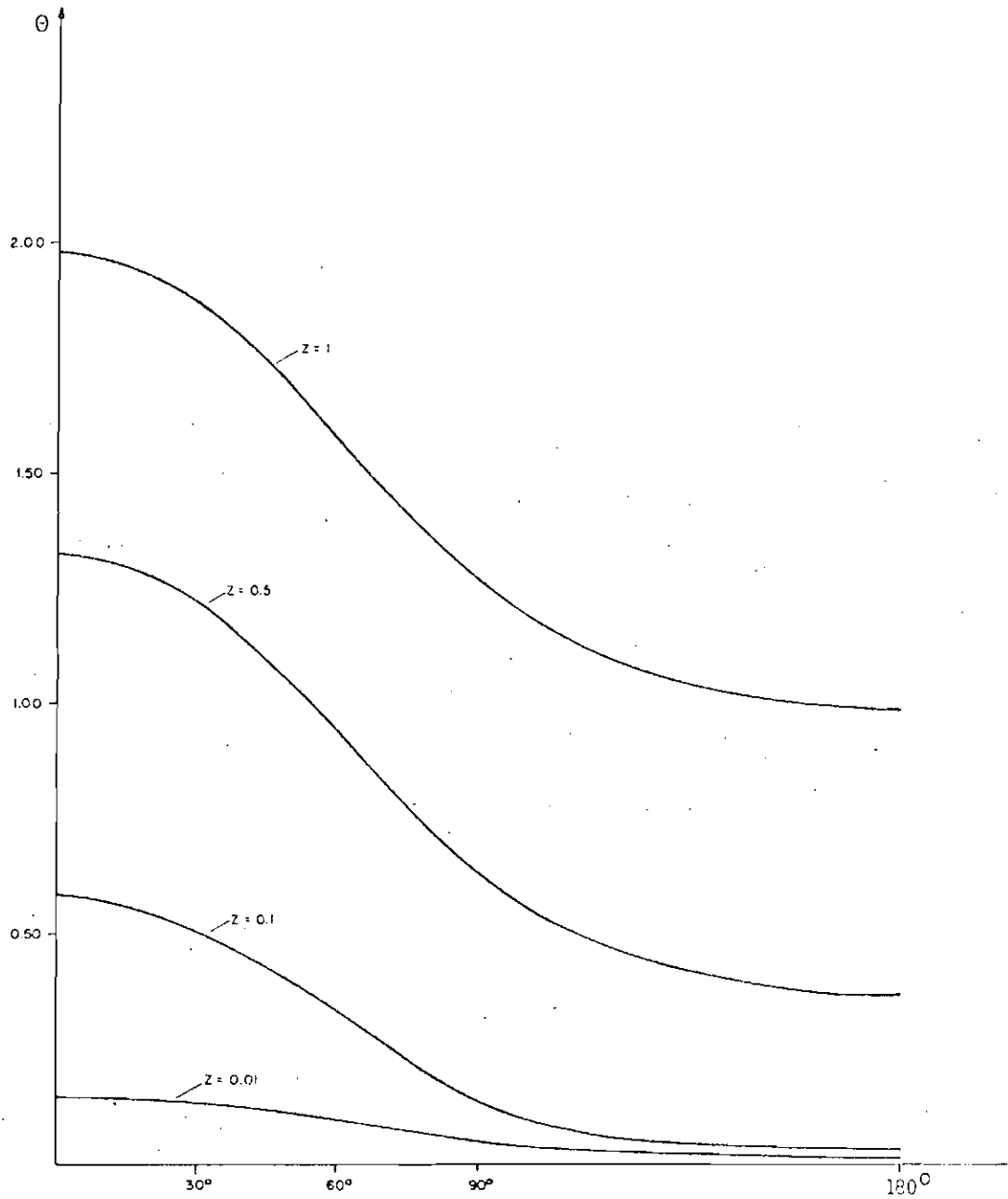


Fig. IV.9 - Distribuição angular das temperaturas na parede do tubo ($Pe=5$).

4.4 - DISTRIBUIÇÃO AXIAL DAS TEMPERATURAS MÉDIAS

A variação axial das temperaturas médias do fluido ($\bar{\theta}$) é dada pela Figura IV.10 onde se observa que nas vizinhanças da entrada térmica, $\bar{\theta}$ é aproximadamente constante e, partir da secção onde $z = 0,1$, $\bar{\theta}$ varia linearmente com z .

A variação axial da temperatura média da parede do tubo ($\bar{\theta}_w$) é dada pela Figura IV.10, onde se observa uma variação exponencial de $\bar{\theta}_w$ para pequenos z e, a partir do ponto $z = 0,1$, a variação passa a ser linear.

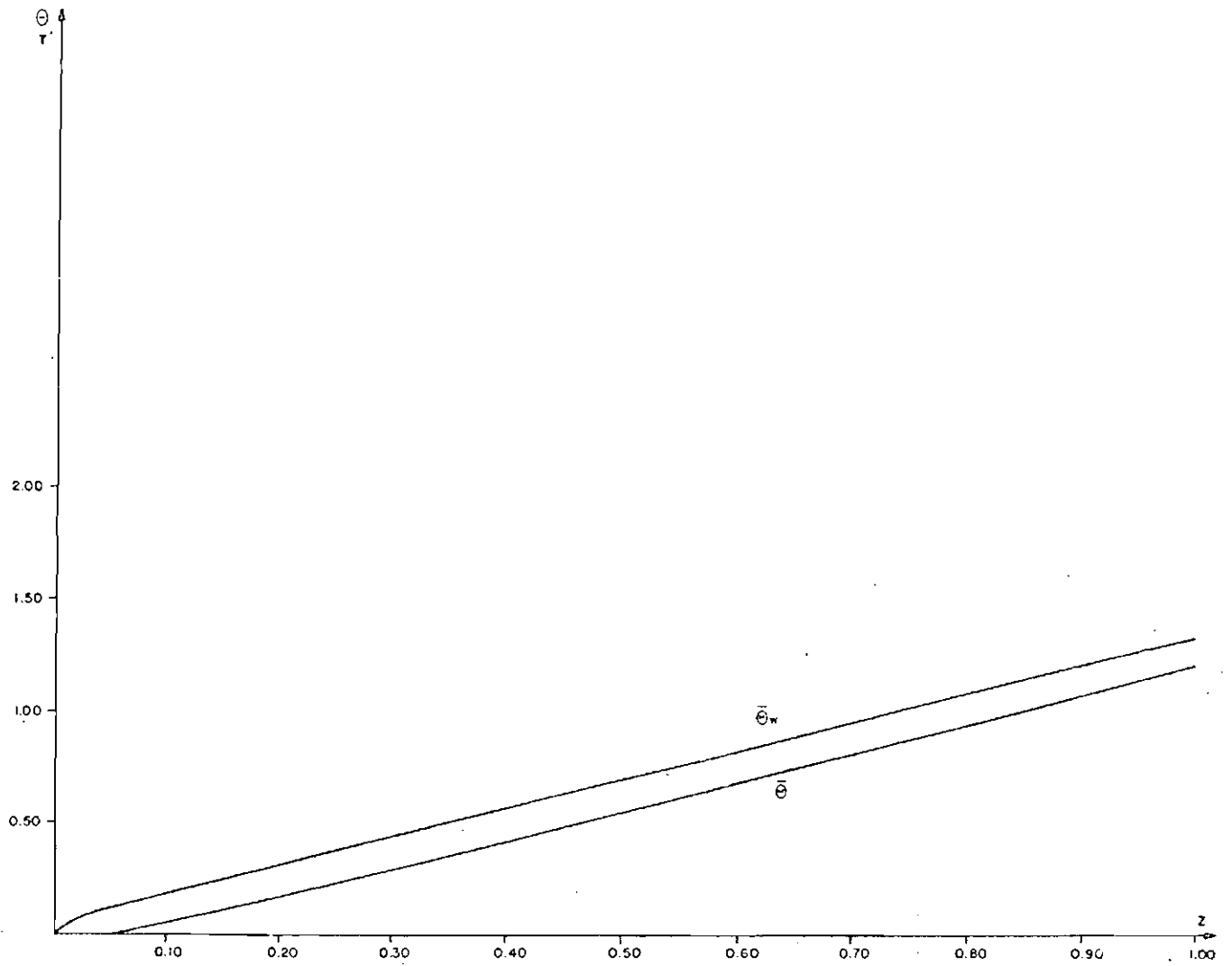


Fig. IV.10 - Distribuição axial das temperaturas médias (Pe=5).

4.5 - NÚMERO DE NUSSELT

A Figura IV.11 mostra a variação do número de Nusselt com z , para diferentes números de Péclet.

As curvas correspondentes aos números de Nusselt são exponenciais, tendendo todas a um valor limite $Nu = 4,3636$, que corresponde a pontos onde o perfil das temperaturas está totalmente desenvolvido. Quanto maior o número de Péclet, mais rapidamente as curvas tenderão ao valor limite; para $Pe > 100$, as curvas coincidem com aquelas traçadas para o caso da condução axial desprezível. A Figura IV.11 mostra ainda as porções onde os perfis de temperatura ficam completamente estabelecidos em função do número de Péclet.

A variação do número de Nusselt na entrada térmica encontrada em outros trabalhos é apresentada nas Figuras IV.12, IV.13 e IV.14. Pela observação das mesmas, nota-se que no presente trabalho os resultados são semelhantes.

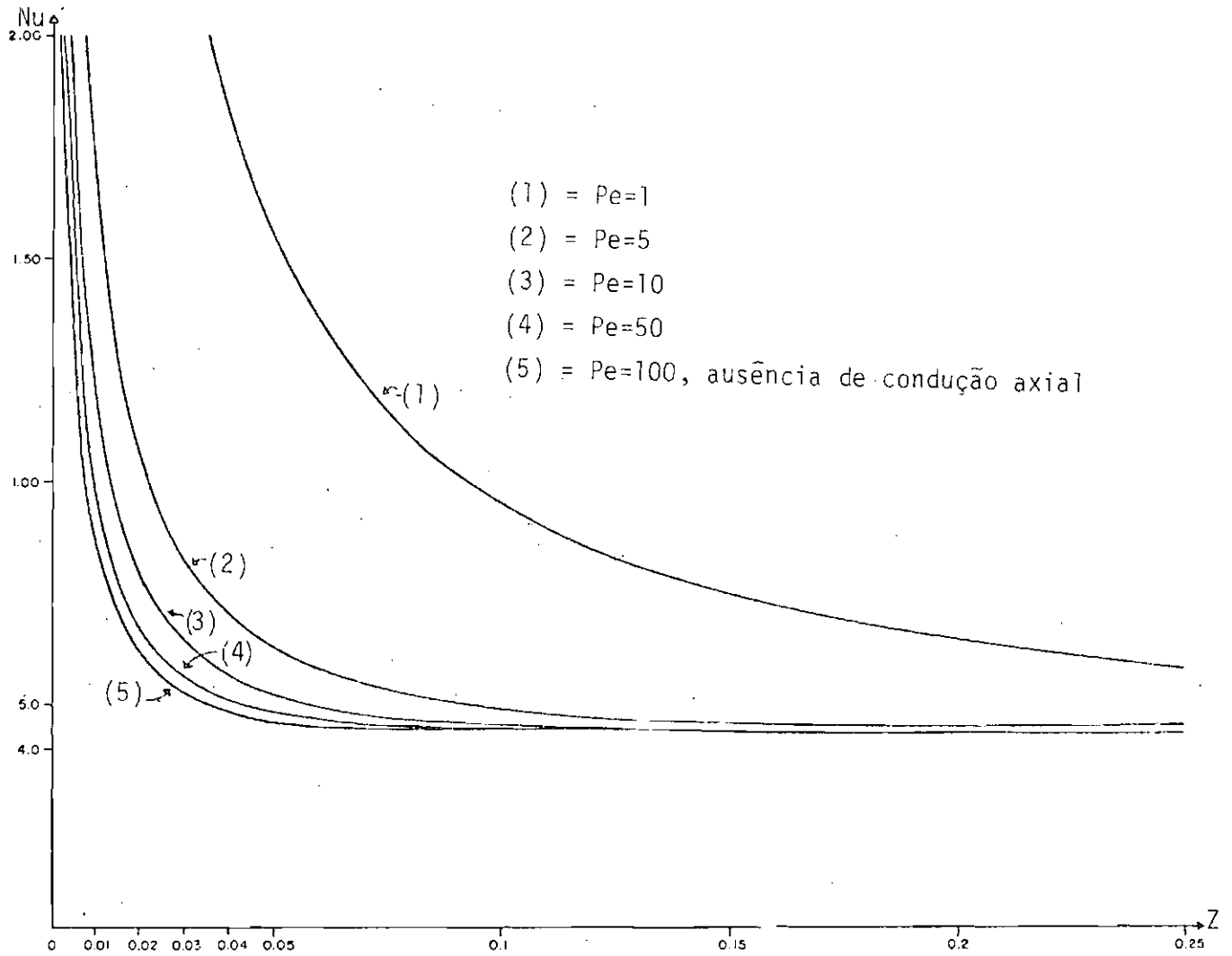


Fig. IV.11 - Variação do número de Nusselt com z.

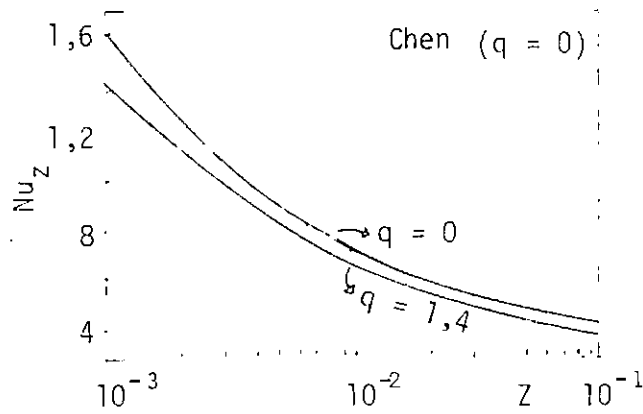


Fig. IV.12 - Variação do número de Nusselt com z .
Fonte: Sikka and Iqbal (1969).

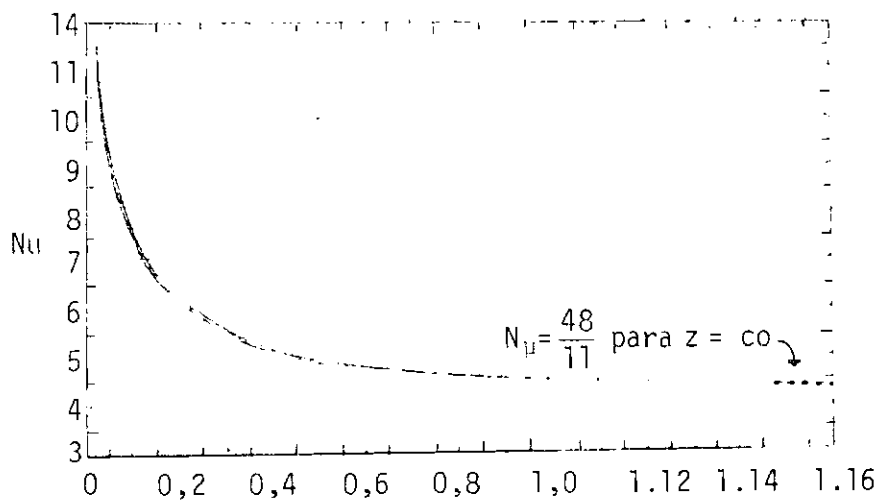


Fig. IV.13 - Variação do número de Nusselt local ao longo do tubo, para fluxo de calor uniforme em toda a parede.
Fonte: Siegel, et al. (1958).

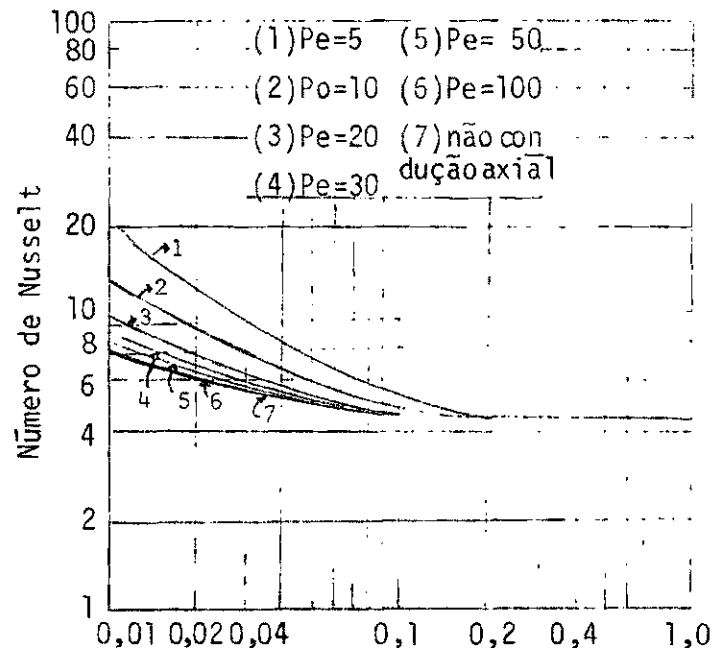


Fig. IV.14 - Variação do número de Nusselt local.
Fonte: Hsu (1966)

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho analisa-se a transmissão de calor por condução, em um escoamento laminar de fluido, no interior de um tubo cilíndrico horizontal. Em busca de uma solução analítica para a temperatura do fluido, procedeu-se a simplificações e aproximações na resolução da equação da energia, obtendo-se como soluções as expressões (II.65), para o caso em que a condução axial é considerada, e (III.33), para o caso em que não há condução axial. Estas soluções oferecem resultados idênticos para todas as regiões do tubo exceto para a entrada térmica, onde a condução axial exerce grande influência.

É importante observar que as soluções aqui apresentadas foram encontradas para fluxo de calor constante na parede do tubo. A fonte de calor utilizada é o Sol, e portanto o fluxo de calor varia no tempo, de acordo com a expressão (A.17). Um estudo mais detalhado sobre a insolação, bem como a dedução das equações (A.7) e (A.17) é feito por Penrod (1964) e Humphenys (1964).

A viabilidade da instalação de um aquecedor solar, depende principalmente da insolação local, a qual pode ser avaliada através de estudos de solarimetria.

No nordeste brasileiro, região privilegiada pela grande incidência de radiação solar, a utilização da energia solar vem sendo intensificada nos últimos anos. Estudo nesse sentido foi feito por Sá (1976) que apresentou dados da insolação em tabelas para diferentes localidades.

A eficiência do aquecedor, depende, também, da área do coletor; assim sendo, pode-se estudar outras formas geométricas para a instalação dos mesmos.

Neste trabalho, o objetivo principal foi calcular a distribuição das temperaturas no fluido, principalmente na região de entrada térmica, embora o cálculo da temperatura média possa ser efetuado por métodos simples, porém menos precisos.

AGRADECIMENTOS

O autor externa seus mais sinceros agradecimentos ao Dr. Luiz Alberto Vieira Dias e ao MSc. Chandrakanta Moreshwara Dixit, pela eficiente orientação.

Agradece ainda ao Dr. Ralf Gielow, ao MSc. Wilson Antunes de Almeida e ao Eng. Jorge Luiz Gomes Ferreira e ao MSc. José Antonio Gonçalves Pereira, pelas valiosas sugestões e contribuições prestadas.

Os mesmos agradecimentos são dirigidos ao Eng. Jorge de Mesquita, a Srta. Aparecida dos Santos e a Sra. Sueli Aparecida de Goidi Guratti e a todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

- ABRAMOWITZ, M. On the Solution of the Differential Equation Occuring in the Problem of Heat Convection in Laminar Flow through a Tube. *J. Math. Phys.*, 32: 184-192, 1952.
- AKYURT, M. and SELÇUK, M.K. A Solar Drier Supplemented with Auxiliary Heating Systems for Continuous Operations. *Solar Energy*, 14(3): 313-320, 1973.
- AKYURT, M.; SELÇUK, M.K. and EARSAY, O. Development, Theoretical Analysis and Performance Evaluation of Shelf Type Driers. *Solar Energy*, 16(2): 81-88, 1974.
- BERRY, JR., V.J. Non-Uniform Heat Transfer to Fluids Flowing in Conduits. *Appl. Sci. Res. A*, 4: 61-65, 1953.
- BIRD, R.B.; WARREN, E. and EDWIN, N.K. *Transport Phenomena*. New York, John Wiley & Sons Inc., 1960.
- CARSLAW, H.S. and JAEGER, J.C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, Oxford University Press, 1959.
- CESS, R.D. and SHAFFER, E.C. Heat Transfer to Laminar Flow Between Parallel Plates with a Prescribed Wall Heat Flux. *Appl. Sci. Res. A*, 8: 339-345, 1958.
- COBBLE, M.H. Heat Exchanges for Solar Concentrators. *Solar Energy*, 7(1): 18-21, 1963.
- COBBLE, M.H. Circular Flat Plate Heat Exchanger for Solar Concentrator. *Solar Energy*, 6(4): 164-167, 1962.
- COOPER, P.I. The Absorption in Solar Stills. *Solar Energy*, 12(3): 333-346, 1969.
- DENNIS, S.C.R. and POOTS, G. A Solution of Heat Transfer Equation for Laminar Flow Between Parallel Plates. *Appl. Sci. Res. A*, 4: 1955.

- FARBER, E.A. Solar Water Heating and Space Heating in Florida.
Solar Energy, 3(3): 21-25, 1959.
- FARBER, E.A. Solar Energy, its Conversion and Utilization.
Solar Energy, 3(14): 243-252, 1973.
- GONKALE, S.D. and DATTA, R.L. Solar Energy Applications in India.
Solar Energy, 14(4): 321-326, 1973.
- HSU, C.J. An Exact Mathematical Solution for Entrance Region Laminar Heat Transfer with Axial Conduction. *Appl. Sci. Res. A*, 17: 359-376, 1966.
- HUMPHREYS, W.J. *Physics of the Air*. New York, Dover, 20-48, 1964.
- JAKOB, M. *Heat Transfer*. New York, John Wiley & Sons Inc., 1949.
Vol. I.
- JEFFREYS, H. and JEFFREYS, B.S. *Methods of Mathematical Physics*.
Cambridge, 1946.
- KAYS, W.M.; LONDON, A.L. Convective Heat Transfer and Flow-Friction Behavior of Small Cylindrical Tubes - Circular and Rectangular Cross Sections. *Trans. of the ASME*, 74: 1179-1189, 1952.
- KAYS, W.M.; STANFORD, C. Numerical Solutions for Laminar-Flow Heat Transfer in Circular Tubes. *Trans. of the ASME*, 77: 1265-1274, 1955.
- LAUWERIER, H.A. The Use of Confluent Hypergeometric Functions in Mathematical Physics and the Solution of an Eigen-value Problem. *Appl. Sci. Res. A*, 2: 184-204, 1950.
- LIST, R.J. *Smithsonian Meteorological Tables*. Washington, Smithsonian Institution, 1968.
- LUKE, L.Y. *Integrals of Bessel Functions*. Midwest Research Institute, Kansas City, Missouri. MacGraw-Hill Book Co. Inc., 1962. 254-270.
- MACDOWELL, A.M.A. Programas do Governo em Energia Solar. In: *Seminário Alternativas de Desenvolvimento: Energia Solar*, São Paulo, 1976. p.71-78. (Série Documentos, 6).
- MATINELLI, R.C. Heat Transfer to Molten Metals. *Trans. of the ASME*, 947-659, 1947.

- MATHUR, K.N. and KHAMMA, M.L. Applications of Solar Energy to Small Scale Industries. *Solar Energy*, 1(1): 34-36, 1957.
- NEUBERGER, H. *Introduction to Physical Meteorology*. State College, The Pennsylvania State University Press, 1966.
- NOGUCHI, T. Recent Developments in Solar Energy Research and Applications in Japan. *Solar Energy*, 15(2): 179-187, 1973.
- NORRIS, R.H.; SCHENECTADY, N.Y.; STREID, D.D.; WEST, L. Laminar Flow Heat Transfer Coefficients for Ducts. *Trans. of ASME*, 62: 525-533, 1940.
- PENROD, E.B. Solar Land Analysis by Use of Orthographic Projections and Spherical Trigonometry. *Solar Physics*, 8(4): 127-133, 1964.
- RABL, A. and CARL, E.N. Solar Ponds for Space Heating. *Solar Energy*, 17(1): 1-12, 1974.
- ROBINSON, N. *Solar Radiation*. Amsterdam, Elsevier, 1966.
- RUBESIN, M.W. and JOHNSON, H.A. A Critical Review of Skin-Friction and Heat Transfer Solutions of the Laminar Boundary Layer of a Flat Plate. *Trans. of the ASME*, 71: 383-388, 1949.
- SÃ, D.F. *Radiação Solar e sua Importância no Aproveitamento de Encostas no Nordeste do Brasil*. Instituto de Pesquisas Espaciais, 1976. (INPE-1005-TPT/049).
- SCHENK, J. and DUMORÉ, J.M. Heat Transfer in Laminar Flow through Cylindrical Tubes. *Appl. Sci. Res. A*, 4: 39-56, 1951.
- SCHNEIDER, P.J. Effect of Axial Fluid Conduction on Heat Transfer in the Entrance Regions of Parallel Plates and Tubes. *Trans. of the ASME*, 79: 765-773, 1957.
- SELLARS, R.; TRIBUS, M. and KLEIN, J.S. Heat Transfer to Laminar Flow in a Round Tube or Flat Conduit - The Graetz Problem Extended. *Trans. of the ASME*, 78C: 441-448, 1956.
- SIEGEL, R.; SPARROW, E.M. and HALLMAN, T.M. Steady Laminar Heat Transfer in a Circular Tube with Prescribed Wall Heat Flux. *Appl. Sci. Res. A*, 7(3): 386-392, 1958.

- SIKKA, S. and IQBAL, M. Laminar Heat Transfer in a Circular Tube Under Solar Radiation in Space. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 13(7): 975-983, 1969.
- SINGH, S.N. The Determination of Eigen-functions of a Certain Sturm-Liouville Equation and its Application to Problems of Heat Transfer. *Appl. Sci. Res. A*, 7: 237-250, 1958a.
- SINGH, S.N. Heat Transfer by Laminar Flow in a Cylindrical Tube. *Appl. Sci. Res. A*, 7: 325-340, 1958b.
- SPARROW, E.M.; GREGG, J.L. Laminar Free Convection Heat Transfer from the Outer Surface of a Vertical Circular Cylinder. *Trans. of the ASME*, 78: 1823-1829, 1956.
- TABOR, H. Large Area Solar Collectors (Solar Ponds) for Power Production. *Solar Energy*, 7(4): 189-194, 1973.
- TELKES, M. Solar Cooking Ovens. *Solar Energy*, 3(1): 1-11, 1959.
- THEKAEKARA, M.P. Solar Energy Outside the Earth's Atmosphere. *Solar Energy*, 14(2): 109-127, 1973.
- WANG, J.Y. *Agricultural Meteorology*. San Jose, Agriculture Weather Information Service, 1967.
- WEINBERGER, I. The Physics of Solar Pond. *Solar Energy*, 8(2): 45-56, 1964.

APÊNDICE A

RELAÇÕES GEOMÉTRICAS

A análise teórica da intensidade de energia radiante incidente em uma superfície plana horizontal, é feita através de projeções trigonométricas esféricas.

Para obter o valor numérico da insolação em determinado local, considera-se uma esfera imaginária de raio infinito, em cujo centro encontra-se a Terra, suposta imóvel. Os corpos celestes são projetados para a superfície na esfera, e o equador da esfera celeste será a ampliação do equador da Terra. A esfera celeste apresenta um movimento de rotação em relação à Terra, do Este para o Oeste, em torno de um eixo imaginário, prolongamento do eixo da Terra. Os polos da esfera imaginária são projeções dos polos terrestres.

Com os vértices no polo celeste, no astro e no zênite, considera-se, na esfera celeste, um triângulo imaginário formado por arcos de círculos máximos. Este triângulo é conhecido por triângulo astronômico.

A altura do astro (E) é a distância angular desde o horizonte até o astro medida sobre um círculo vertical (círculos verticais são círculos máximos passando pelo zênite do observador perpendicularmente ao plano do seu horizonte). O complemento da altura ($\alpha = 90^\circ - E$) é chamado distância zenital e em geral é calculada conforme mostra o parênteses.

Na Figura A.1, OZ é a vertical do ponto de observação (P). Se o Sol estiver na direção OS (ou PS , que lhe é paralela) o plano delimitado por OZ e OS interceptará a superfície da terra em um círculo máximo e o ângulo ZOS , medido pelo arco PV desde círculo é igual à distância zenital (α) do Sol. Porém, no triângulo esférico NPV , é óbvio que o arco NV (V estando diretamente sob o Sol) é dado por $(90 - \delta)$ sendo δ

a declinação solar, que é a distância angular Norte ou Sul, contada sobre o círculo horário, que vai do equador celeste ao centro do disco solar. A declinação varia de 0° a 90° , e é medida positivamente para o Norte e negativamente para o Sul do equador. Sendo λ a latitude do ponto de observação (λ varia de 0° a $+90^{\circ}$ para o Hemisfério Norte e de 0° a -90° para o Hemisfério Sul), o arco NP vale $(90^{\circ} - \lambda)$ e é a colatitude de P. O arco CD sobre o Equador, formado pelos planos do meridiano local e do círculo horário do astro, fornece o ângulo horário (b), e é medido do meridiano para o Oeste, de 0 a 360° (ou de 0 a 24 horas).

O ângulo formado pela radiação incidente e um plano horizontal na superfície da terra é encontrado com o auxílio da trigonometria esférica, aplicada à Figura A.1.

De acordo com as Figuras A.2 e A.3, as seguintes relações podem ser escritas:

$$\begin{array}{ll} \cos c_1 = \cos a_1 \cos b_1 & \cos A = \cos a_1 \sin B \\ \sin a_1 = \sin c_1 \sin A & \cos B = \operatorname{tga}_1 \operatorname{costg} c_1 \\ \cos A = \operatorname{tgb}_1 \operatorname{costg} c_1 & \cos B = \cos b_1 \sin A \quad (A.1) \\ \sin b_1 = \operatorname{tga}_1 \operatorname{costg} A & \sin a_1 = \operatorname{tgb}_1 \operatorname{costg} B \\ \sin b_1 = \sin c_1 \sin B & \cos c_1 = \operatorname{costg} A \cos B \end{array}$$

As relações (A.1) são suficientes para a resolução de triângulos esféricos. Na derivação destas equações, todos os ângulos, exceto os retos são considerados menores que noventa graus. Esta restrição deverá sempre ser observada (Penrod, 1964).

Das Figuras A.4 e A.5 pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \cos a_1 &= \cos p \cos m = \cos p \cos(c_1-n) \quad \text{ou seja:} \\ \cos a_1 &= \cos p \cos c_1 \cos n + \cos p \operatorname{senc}_1 \operatorname{senn} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \cos b_1 &= \cos p \cos n = \cos p \cos(c_1-n) \\ \cos b_1 \operatorname{senn} &= \cos p \cos n \operatorname{senn}, \quad \text{logo,} \\ \cos p \operatorname{senn} &= \operatorname{tgn} \cos b_1 \text{ e } \operatorname{tgn} = \operatorname{tgb}_1 \cos a \\ \cos p \operatorname{senn} &= \cos b_1 \operatorname{tgb}_1 \cos A = \operatorname{senb}_1 \cos A \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Conclui-se:

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 + \operatorname{senb}_1 \operatorname{senc}_1 \cos A \quad (\text{A.4})$$

Similarmente:

$$\begin{aligned} \cos b_1 &= \cos a_1 \cos c_1 + \operatorname{sena}_1 \operatorname{senc}_1 \cos B \\ \cos c_1 &= \cos a_1 \cos b + \operatorname{sena}_1 \operatorname{senb}_1 \cos c_1 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

O cosseno de algum lado de um triângulo esférico é igual ao produto do cosseno dos outros dois lados mais o produto dos senos des ses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles.

Da trigonometria esférica podemos escrever para o triângulo esférico NPV (Penrod, 1964):

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ - \ell) \cos(90^\circ - \delta) + \operatorname{sen}(90^\circ - \ell) \operatorname{sen}(90^\circ - \delta) \cos b \quad (\text{A.6})$$

ou

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} \ell \operatorname{sen} \delta + \cos \ell \cos \delta \cos b \quad (\text{A.7})$$

com

$$\cos \delta = \operatorname{sen} E \quad (\text{A.8})$$

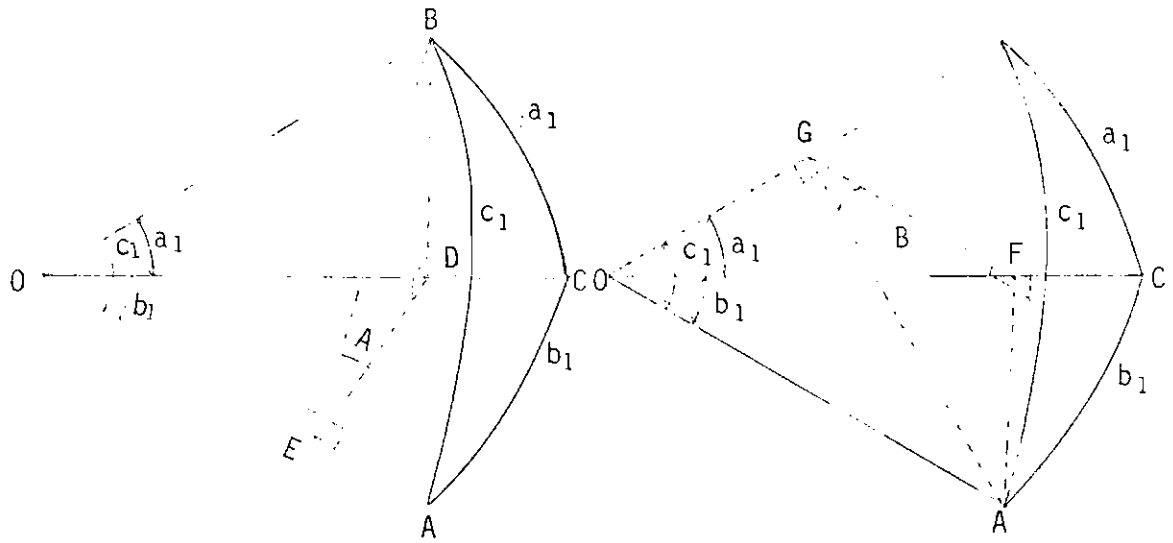


Fig. A.2

Fig. A.3

Triângulos esféricos auxiliares para determinação das relações trigonométricas esféricas (Penrod, 1964).

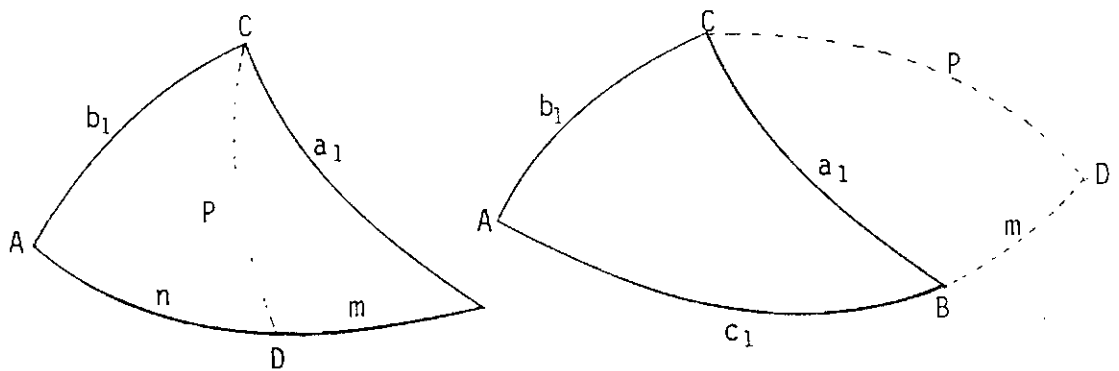


Fig. A.4

Fig. A.5

Triângulos esféricos auxiliares.

Onde a distância zenital solar (α) depende da latitude (ℓ) do ângulo horário (b) e da declinação (δ). A declinação é função do dia e da hora sendo encontrada em tabelas, ou calculada segundo Cooper (1969) pela relação:

$$= 23,45 \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{284 + n}{365}\right) \quad (\text{A.9})$$

onde n é o dia do ano. A declinação (δ) varia aproximadamente de $23^{\circ}27'$ (22 de junho) a $-23^{\circ}27'$ (22 de dezembro).

As equações apresentadas neste apêndice são válidas somente para radiações diretas do Sol, que são tomadas com um único ângulo de incidências. Uma vez determinado o local da construção (instalação dos tubos), ficam prescritas as condições para determinar os ângulos, necessários ao cálculo da intensidade de radiação solar incidente no local.

A.1 - RADIAÇÃO SOLAR INCIDENTE NA SUPERFÍCIE DA TERRA

A quantidade de radiação solar incidente no topo da atmosfera pode ser calculada através da constante solar.

A constante solar, S , é definida como sendo a quantidade de radiação solar recebida em um centímetro quadrado de superfície normal aos raios solares, no topo da atmosfera, na unidade de tempo. A constante solar, S , pode ser calculada, considerando-se o Sol como um corpo negro a alta temperatura, irradiando em todas as direções do espaço. Segundo a lei de Stefan-Boltzman, para um corpo negro, pode-se escrever:

$$I(T) = \sigma e T_s^4 \quad (\text{A.10})$$

onde

- $I(T)$ → Energia total irradiada por unidade de área, a temperatura T ;
- σ → Constante de Stefan-Boltzman ($\sigma = 0,827 \times 10^{-10} \text{ caly/min}^0\text{K}$);
- e → Emissividade da superfície (para o corpo negro $e = 1$);
- T → Temperatura do corpo negro em graus Kelvin

Considerando o Sol como uma esfera de raio R e temperatura média T_S , (por unidade de área) a emissão total do Sol será:

$$I(T) = \sigma T_S^4 (4\pi R_S^2) \quad (\text{A.11})$$

Chamando \bar{D} a distância média Terra-Sol, as radiações solares cobrirão uma esfera imaginária de superfície $4\pi\bar{D}^2$ antes de atingir a superfície da Terra, e a constante solar será dada por: (List, 1969)

$$S = \frac{I(T)}{4\pi\bar{D}^2} = \sigma T_S^4 \cdot \frac{(4\pi R_S^2)}{4\pi\bar{D}^2} = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{\bar{D}}\right)^2 = 1,94 \text{ caly/min}$$

$$S = 1,94 \text{ caly/min} \quad (\text{A.12})$$

O valor da constante solar tem sido medido e calculado em muitos trabalhos desde 1902 (Wang, 1967), porém, seu conceito foi introduzido em 1937 por Pauillet (Robinson, 1966). No presente trabalho atribuir-se-á a constante solar o valor $S = 1,94 \text{ cal}/(\text{cm}^2.\text{min})$ que é o valor frequentemente adotado, e fora calculado pelo "Astrophysical Observatory, Smithsonian Institution" (Thekaeka, 1973).

A quantidade de energia solar instantânea, recebida por um centímetro quadrado de superfície normal aos raios solares no topo da atmosfera, Q_n , será dada por:

$$Q_n = S (\bar{D}/D)^2 \quad (\text{A.13})$$

onde D é a distância instantânea Terra-Sol.

A quantidade de energia solar instantânea Q_h incidente em um centímetro quadrado de superfície horizontal no topo da atmosfera, pode ser obtida usando a equação (A.7).

$$Q_h = Q_n \cos \alpha \quad (A.14)$$

$$Q_h = S (\bar{D}/D)^2 (\sin \lambda \sin \delta + \cos \lambda \cos \delta \cos b) \quad (A.15)$$

Conhecendo-se Q_h , é possível, a grosso modo, avaliar a quantidade de energia que incide em 1 (um) centímetro quadrado de superfície horizontal da Terra. Segundo Humphreys (1964), em um dia de céu claro, aproximadamente 70% da energia total que atingir o topo da atmosfera chega à superfície da Terra. Podendo-se concluir que a quantidade de energia incidente por unidade de área da superfície horizontal da Terra será dado por:

$$G = 0,70Q_h \quad \text{e para } (\bar{D}/D)^2 \approx 1 \quad (A.16)$$

$$G = 1,35 \cos \alpha \text{ cal}/(\text{cm}^2 \cdot \text{min}) \quad (A.17)$$

No presente trabalho, G é a quantidade de calor fornecido ao sistema por unidade de área por unidade de tempo. A expressão (A.17) dá a variação de G em função da posição do Sol. Este particular não será levado em consideração no desenvolvimento das equações que se seguem, usando-se simplesmente G como fluxo de radiação incidente em cada instante.

APÊNDICE B

SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA

Considerando um escoamento laminar, incompressível, em regime permanente, no interior de um tubo cilíndrico horizontal, com velocidade constante na direção axial e nula nas outras direções, as equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas tem a forma:

componente r:

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r \quad (B.1)$$

componente θ :

$$0 = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta \quad (B.2)$$

componente z:

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} v_z \right) \right] + \rho g(z) \quad (B.3)$$

As equações (B.1) e (B.2) quando integradas e em seguida derivadas em relação a z, mostram que $\frac{\partial p}{\partial z}$ só pode ser constante, permitindo a resolução da equação (B.3) por simples integração, e mediante as condições de contorno, resultando para v_z a expressão: (Escoamento de Hagen-Poiseuille).

$$v_z = - \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{a^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (B.4)$$

A velocidade média ($\langle v_z \rangle = \bar{v}$) do escoamento é dada por:

$$\bar{v} = - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{a^2}{8\mu} \quad (B.5)$$

e portanto:

$$v_z = 2\bar{v} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (B.6)$$

A expressão (B.6) dá o perfil parabólico das velocidades de um escoamento permanente, completamente estabelecido, em tubos cilíndricos.

Nas condições impostas acima, a equação da energia para fluidos viscosos incompressíveis, em termos da temperatura, considerando μ e K constantes, e $C_p = C_v$, tem-se:

$$\rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = K \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \right]^2 \quad (B.7)$$

Substituindo-se a expressão (B.6) em (B.7) tem-se:

$$2\rho C_p \bar{v} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial z} = K \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + 16\mu \bar{v} \frac{r^2}{a^4} \quad (B.8)$$

Introduzindo variáveis adimensionais definidas por:

$$\left. \begin{aligned} x = \frac{r}{a} \quad ; \quad z = \frac{z}{ap_e} \quad ; \quad \theta = \frac{(T-T_0)}{\left(q \frac{a}{K} \right)} \\ R_e = \frac{2ap\bar{v}}{\mu} \quad ; \quad Pr = \frac{\mu \cdot C_p}{K} \quad ; \quad Pe = Re Pr = \frac{2ap\bar{v}C_p}{K} \end{aligned} \right\} \quad (B.9)$$

tem-se:

$$(1-x^2) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2} + \frac{1}{pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] + \frac{16uvx^2}{K} \quad (\text{B.12})$$

1. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (II.7)

$$x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = C_0 (x^2 - x^4) \quad (\text{B.13})$$

Resolvendo a equação homogênea:

$$x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{B.14})$$

por separação de variáveis, com

$$\psi(x, \phi) = X(x) \cdot \tau(\phi) \quad (\text{B.15})$$

vem:

$$\frac{x^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{x}{X} \frac{dX}{dx} = -\frac{1}{\tau} \frac{d^2 \tau}{d\phi^2} = n^2 \quad (\text{B.16})$$

onde n é inteiro, por $\psi(x, \phi) = \psi(x, \phi + 2\pi)$;

$$\tau(\phi) = A \cdot \cos(n\phi) + B \cdot \sin(n\phi) \quad (\text{B.17})$$

$$X(x) = C x^n + D x^{-n} \quad (\text{B.18})$$

onde $D = 0$ pois $\psi(0, \phi)$ é definido (B.19)

Logo a solução da parte homogênea é:

$$\psi_{hn} = x^n \cdot (A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)) \quad (\text{B.20})$$

A solução particular \bar{e} :

$$\psi_p = \frac{C_0}{4} x^2 - \frac{C_0}{16} x^4 + C_1 \quad (\text{B.21})$$

E a solução da equação (III.7) \bar{e} :

$$\psi = C_1 + \frac{C_0}{4} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi) \right]$$

2. CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE FOURIER

$$f(\phi) = \left\{ \begin{array}{ll} \cos \phi & 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi \end{array} \right\} \quad (\text{B.22})$$

$$f(\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\phi \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\phi) d\phi \quad (\text{B.24})$$

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi \quad (\text{B.25})$$

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \quad (\text{B.26})$$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(\phi) \cos \frac{n\pi\phi}{L} d\phi \quad (\text{B.27})$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi \cdot \cos n\phi d\phi \quad (\text{B.28})$$

$$\cos a \cos na = \frac{1}{2} [\cos(1-n)a + \cos(1+n)a]$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\text{sen}(1-n)\phi}{1-n} + \frac{\text{sen}(1+n)\phi}{1+n} \right] \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad (\text{B.29})$$

$$\text{sen}(1\pm n)a = \text{sena} \cos na \pm \text{cosa} \text{senna}$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \left[2 \frac{\text{sen}\phi \cos n\phi}{1-n^2} \right] \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad n \neq 1 \quad (\text{B.30})$$

$$A_n = 0 \quad n = 1, 3, 5 \dots \quad (\text{B.31})$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n/2}}{(1-n^2)} \quad n = 2, 4, 6 \dots \quad (\text{B.32})$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \phi \, d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\phi) \, d\phi \quad (\text{B.33})$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\phi + \frac{\text{sen} 2\phi}{2} \right] \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad (\text{B.34})$$

$$A = \frac{1}{2} \quad (\text{B.35})$$

3. DETERMINAÇÃO DA CONSTANTE C₁

$$2\pi a z \overline{q_w} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \widehat{C}_p (T_d - T_0) v_z r dr d\phi \quad (\text{B.36})$$

$$2\pi a^2 \cdot \text{Pe}_z \cdot \overline{q_w} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \text{Pe} \cdot q \cdot \theta \cdot a^2 (1-x^2) x dx d\phi \quad (\text{B.37})$$

$$\overline{qw} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q \cos\phi d\phi = \frac{q}{\pi} \quad (\text{B.38})$$

$$2z = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \theta (1-x^2) x dx d\phi \quad (\text{B.39})$$

$$2z = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (x-x^3) \left[C_1 + \frac{4z}{\pi} + \frac{1}{\pi} (x^2 - \frac{x^4}{4}) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} (-1)^n \cos 2n\phi}{n(1-4n^2)} \right] dx d\phi \quad (\text{B.40})$$

$$2z = 2\pi \int_0^1 (x-x^3) \left(\frac{4z}{\pi} + C_1 + \frac{1}{\pi} (x^2 - \frac{x^4}{4}) \right) dx \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{z}{\pi} = \frac{z}{\pi} + \frac{C_1}{4} + \frac{7}{96\pi} \quad C_1 = -\frac{7}{24\pi} \quad (\text{B.42})$$

4. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (II.25)

$$(1-x^2) \frac{\partial \phi}{\partial z} = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{pe^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] \quad (\text{B.43})$$

Por separação de variáveis tem-se:

$$\Phi = U(x,z) \cdot \tau(\phi) \quad (\text{B.44})$$

$$x^2 \frac{(1-x^2)}{U} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{x^2}{U} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{pe^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] = \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \phi^2} = -n^2 \quad (\text{B.45})$$

$$\tau_n(\phi) = A_n \text{ senn}\phi + B_n \text{ cosn}\phi \quad (\text{B.46})$$

$$x^2(1-x^2) \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{x^2}{Pe^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - x^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial U}{\partial x} \right] + n^2 U = 0 \quad (B.47)$$

Admitindo a solução:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} Z_n(z) \cdot J_{n/2}(\alpha_j x^2) \quad (B.48)$$

da condição de contorno (III.21c) tem-se:

$$\left. \frac{\partial U_n}{\partial x} \right|_{x=1} = \left. \frac{\partial U_n}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad J'_{n/2}(\alpha_j) = 0 \quad (B.49)$$

substituindo-se U na equação (B.47) tem-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ A_{nj} \left[(1-t) J_{n/2}(\alpha_j t) \frac{\partial Z_n}{\partial z} - \frac{1}{Pe^2} J_{n/2}(\alpha_j t) \frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2} - \left(\frac{n^2}{t} - 4\alpha_j t \right) \cdot J_{n/2}(\alpha_j t) \cdot Z_n + \frac{n^2}{t} \cdot J_{n/2}(\alpha_j t) \cdot Z_n \right] \right\} = 0 \quad (B.50)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ A_{nj} \left[(1-t) J_{n/2}(\alpha_j t) \frac{\partial Z_n}{\partial z} - \frac{1}{Pe^2} J_{n/2}(\alpha_j t) \frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2} + 4\alpha_j^2 t J_{n/2}(\alpha_j t) Z_n \right] \right\} = 0 \quad (B.51)$$

multiplicando a equação (B.49) por $[t \cdot J_{n/2}(\alpha_m t)]$ onde α_m não é necessariamente igual a α_j , porém α_m deverá ser raiz da equação $J'_{n/2}(\alpha_m) = 0$.

$$A_{nm} \cdot \left[\frac{\partial Z_n}{\partial z} \int_0^1 t(1-t) J_{n/2}^2(\alpha_m t) dt - \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2} \int_0^1 t J_{n/2}^2(\alpha_m t) dt \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + 4\alpha_m^2 Z_n \left[\int_0^1 t^2 \cdot J_{n/2}^2(\alpha_m t) dt \right] \\
 & + \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} \left[-\frac{\partial Z_n}{\partial z} \int_0^1 t(1-t) J_{n/2}(\alpha_m t) \cdot J_{n/2}(\alpha_m t) dt \right. \\
 & - \frac{1}{pe^2} \frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2} \int_0^1 t J_{n/2}(\alpha_j t) J_{n/2}(\alpha_m t) dt \\
 & \left. + 4\alpha_j^2 Z_n \int_0^1 t^2 J_{n/2}(\alpha_j t) J_{n/2}(\alpha_m t) dt \right] = 0 \quad (B.52)
 \end{aligned}$$

Resolvendo uma a uma as integrais da equação (B.52) tem-se:

$$\int_0^1 t J_{n/2}^2(\alpha_m t) dt = \frac{1}{2} \left[J_{n/2}'^2(\alpha_m) + \left(1 - \frac{n^2}{4\alpha_m^2}\right) J_{n/2}^2(\alpha_m) \right] \quad (B.53)$$

$$\int_0^1 t^2 J_{n/2}^2(\alpha_m t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} \right) \int_0^{\alpha_m} J_{n/2}^2(t) dt$$

$$+ \frac{\alpha_m}{4} \left\{ \left[\int_0^{\alpha_m} J_{n/2}'(\alpha_m) + \frac{1}{2} J_{n/2}(\alpha_m) \right]^2 + \left(\alpha_m^2 + \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4} \right) J_{n/2}^2(\alpha_m) \right\}$$

(Luke, 1962) (B.54)

$$\int_0^{\alpha_m} J_{n/2}^2(t) dt = \alpha_m \left[\frac{1}{n+1} J_{n/2}^2(\alpha_m) + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(2n+4K) J_{n/2+K}^2(\alpha_m)}{n^2 + 4Kn + (4K^2 - 1)} \right] \quad (B.55)$$

substituindo os valores das integrais (B.53), (B.54) e (B.55) na (B.52) com $J_{n/2}'(\alpha_m) = 0$ tem-se:

$$A_{nm} \cdot \left[\frac{1}{pe^2} \frac{\partial^2 Z_n}{\partial z^2} - \frac{\partial Z_n}{\partial z} \right] \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^2}{4\alpha_m^2} \right) J_{n/2}^2(\alpha_m) \right] +$$

$$C_{0p} = - \frac{1}{\pi \cdot \alpha_p^2 \cdot J_0^2(\alpha_p)} \cdot [J_0(\alpha_p) - \frac{4}{\alpha_p} \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\alpha_p)] \quad (B.63)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_{1m} \cdot J_{1/2}(\alpha_m x^2) = - \frac{x}{2} \quad (B.64)$$

$$C_{1p} \cdot \frac{1}{4} [J_{1/2}'^2(\alpha_p) + (1 - \frac{1}{4\alpha_p^2}) J_{1/2}^2(\alpha_p)] = - \frac{1}{2} \int_0^1 x^4 J_{1/2}(\alpha_p x^2) dx \quad (B.65)$$

$$\int_0^1 x^4 J_{1/2}(\alpha_p x^2) dx = \frac{1}{2\alpha_p} J_{3/2}(\alpha_p) \quad (B.66)$$

$$C_{1p} = - \frac{4\alpha_p \cdot [J_{3/2}(\alpha_p)]}{(4\alpha_p^2 - 1) J_{1/2}^2(\alpha_p)} \quad (B.67)$$

$$\sum_{n=2,4,6,8}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} J_{n/2}(\alpha_m x^2) = \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{2(-1)^{n/2} x^n}{\pi n(1-n^2)} \quad (B.68)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_{2nm} \cdot J_n(\alpha_m x^2) = - \frac{(-1)^n x^{2n}}{\pi n(1-4n^2)} \quad n=1,2,3,4,\dots \quad (B.69)$$

$$C_{2np} \cdot \frac{1}{4} [J_n'^2(\alpha_p) + (1 - \frac{n^2}{\alpha_p^2}) J_n^2(\alpha_p)] = - \frac{(-1)^n}{\pi n(1-4n^2)} \int_0^1 x^{2n+3} J_n(\alpha_p x^2) dx \quad (B.70)$$

$$\int_0^1 x^{2n+3} J_n(\alpha_p x^2) dx = \frac{1}{2\alpha_p} J_{n+1}(\alpha_p) \quad (B.70a)$$

$$C_{2np} = - \frac{2(-1)^n \cdot \alpha_p J_{n+1}(\alpha_p)}{\pi \cdot n(1-4n^2) \cdot (\alpha_p^2 - n^2) \cdot J_n^2(\alpha_p)} \quad (B.71)$$

6. CÁLCULO DO NÚMERO DE NUSSELT

$$Nu_z = \frac{2}{\pi(\bar{\theta}_w - \bar{\theta})} \quad (B.72)$$

$$\bar{\theta}_w = \frac{\int_0^{2\pi} \theta|_{x=1} d\phi}{\int_0^{2\pi} d\phi} \quad (B.73)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_w = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} & \left[\frac{4z}{\pi} - \frac{7}{24\pi} + \frac{3}{4\pi} + \right. \\ & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_0^m z} [J_0(\alpha_m) - 4/\alpha_m \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\alpha_m)] J_0(\alpha_m)}{\pi \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \right] d\phi \end{aligned} \quad (B.74)$$

$$\bar{\theta}_w = \frac{4z}{\pi} + \frac{11}{24\pi} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_0^m z} [J_0(\alpha_m) - 4/\alpha_m \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\alpha_m)] J_0(\alpha_m)}{\pi \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \quad (B.75)$$

$$\bar{\theta} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} \theta 2v [1 - (r/a)^2] r dr d\phi}{\int_0^a \int_0^{2\pi} 2v [1 - (r/a)^2] r dr d\phi} \quad (B.76)$$

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} 2v [1 - (r/a)^2] r dr d\phi = \pi \cdot a^2 \cdot v \quad (B.77)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 & (x-x^3) \left\{ \frac{4z}{\pi} - \frac{7}{24\pi} + \frac{1}{\pi} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \right. \\ & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_0^m z} [J_0(\alpha_m) - 4/\alpha_m \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\alpha_m)] J_0(\alpha_m)}{\pi \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \right\} dx \end{aligned} \quad (B.78)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta} = & \frac{2}{\pi} \left\{ 2\pi \left(\frac{4z}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) - \frac{7}{24\pi} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{32} \right) \right. \right. \\ & - \sum_m \frac{e^{\lambda_0^m z} \left[J_0(\alpha_m) - 4/\alpha_m \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m) \right]}{\pi \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \left[\int_0^1 x J_0(\alpha_m x^2) dx \right. \\ & \left. \left. - \int_0^1 x^3 J_0(\alpha_m x^2) dx \right] \right\} \end{aligned} \quad (B.79)$$

$$\int_0^1 x J_0(\alpha_m x^2) dx = \frac{1}{\alpha_m} \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m) \quad (B.80)$$

$$\int_0^1 x^3 J_0(\alpha_m x^2) dx = \frac{1}{2\alpha_m} J_1(\alpha_m) \quad (B.81)$$

$$\bar{\theta} = \frac{4z}{\pi} - 4 \sum_m \frac{e^{\lambda_0^m z} \left[J_0(\alpha_m) - 4/\alpha_m \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m) \right]}{\pi \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \left[\frac{1}{\alpha_m} \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m) \right] \quad (B.82)$$

$$\bar{\theta}_w - \bar{\theta} = \frac{11}{24\pi} - \sum_m \frac{e^{\lambda_0^m z} \left[J_0(\alpha_m) - 4/\alpha_m \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m) \right]^2}{\pi \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)}$$

$$Nu_z = \frac{2}{\pi \left[\frac{11}{24\pi} - \sum_m \frac{\left[J_0(\alpha_m) - 4/\alpha_m \sum_{K=1}^{\infty} J_{2K+1}(\alpha_m) \right]^2}{\pi \alpha_m^2 J_0^2(\alpha_m)} \right]} \quad (B.83)$$