1. Publicação nº *INPE-2258-PRE/040*	2. Versão	3. Data *Nov., 1981*	5. Distribuição ☐ Interna ☒ Externa ☐ Restrita
4. Origem *DGA/DII*	Programa *IONO*		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) *QUANTIDADES CLASSIFICADAS, VETORES ABSTRATOS, ESPAÇOS VETORIAIS ABSTRATOS.*			
7. C.D.U.: *519.6*			
8. Título *INPE-2258-PRE/040* *QUANTIDADES CLASSIFICADAS E SUAS APLICAÇÕES*			10. Páginas: *17* 11. Última página: *19* 12. Revisada por *Luiz Alberto Vieira Dias*
9. Autoria *Carlos José Zamlutti* Assinatura responsável			13. Autorizada por *Nelson de Jesus Parada* *Diretor*

14. Resumo/Notas

Apresenta-se uma forma alternativa para a caracterização de vetores, num sentido abstrato. A conceituação fundamenta-se no processo de Cantor para a extensão de conjuntos numéricos. Incluem-se, para exemplificação, aplicações simples para a utilização em Computação e Análise Numérica.

15. Observações *Este trabalho seré submetida aos Anais do IV Congresso Brasileiro de Matemática Aplicada e Computacional e publicado na Revista Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.*

QUATIDADES CLASSIFICADAS E SUAS APLICAÇÕES

C.J. ZAMLUTTI

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

12200 São José dos Campos, S.P., Brasil

SUMÁRIO

Apresenta-se uma forma alternativa para a caracterização de vetores, num sentido abstrato. A conceituação fundamenta-se no processo de Cantor para a extensão de conjuntos numéricos. Incluem-se, para exemplificação, aplicações simples para a utilização em Computação e Análise Numérica.

1 - INTRODUÇÃO

Na eleboração de conceitos matemáticos, podem-se distinguir duas correntes: a primeira recorre à intuição e a segunda a um formalismo mais rigoroso. A forma intuitiva fundamenta-se no processo usado por Cantor (MacDuffe, 1940), para a criação de conjuntos numéricos, mais completos, a partir de conjuntos numéricos já estabelecidos.O exempro clássico deste método encontra-se na conceituação de número real,baseando-se na impossibilidade de existir um número racional para representar $\sqrt{2}$. Assim originariamente (Dedekind, 1963) os números reais foram definidos como limites de sequências de números racionais. A segunda forma, de origem grega, foi empregada por Peano (Landau, 1951) e estabelece as entidades matemáticas a partir de um conjunto de axiomas.No exemplo mencionado da conceituação de número real, o método axiomático utiliza-se de um conjunto de "regras" que constituem os cortes de Dedekind (Rudin, 1964).

Do ponto de vista de aplicação pode-se considerar a forma intuitiva como a maneira direta de definição. O método axiomático constitui, pela sua própria natureza, um processo indireto de definição.

Neste trabalho, utilizar-se-á uma recorrência semelhante a de Cantor. para a conceituação de vetores, de matrizes e de tensores, dentro de um contexto abstrato. A definição aqui estabelecida apresenta a vantagem de permitir, ao pesquisador em Análise Numérica, a utilização dos espaços vetoriais abstratos como extensão dos conhecimentos de vetores da Física e da Geometria. O tratamento alternativo, pela forma axiomática, exige a introdução de espaços como os de Hilbert, Banach e Sobolev para o desenvolvimento dos métodos numéricos na resolução de problemas, aumentando assim a complexidade dos processos dedutivos.

Alguns exemplos de aplicações foram inseridos no final do trabalho com o intuito de dar ao leitor maior familiaridade com a aproximação aqui sugerida.

2 - QUANTIDADES CLASSIFICADAS

Historicamente, as limitações dos conjuntos numéricos (inteiros, racionais, reais e complexos) apareceram quando se tentava exprimir certas grandezas da Física como a força, a velocidade etc. Estes tipos de grandeza requeriam, para sua total especificação, além de uma parte "quantitativa" (módulo) outra, de certa forma, "qualitativa" (direção e sentido). Apareceram, assim, as primeiras quantidades classificadas, cujos processos de tratamento, formalizados pela Matemática, receberam o nome de Análise Vetorial.

Baseando-se nessa limitação, adotar-se-ão as seguintes definições como cojuntos numéricos "mais completos".

Definição 1 - Entende-se por vetor toda entidade constituída por por duas partes, um "quantitativa", pertencente a qualquer conjunto numérico, e outra "qualitativa", que será chamada propriedade, qualidade ou classificação. Adotar-se-á a representação simbólica:

$\underline{v} = q\,\hat{e}$

para expressar que $\underline{v}$ é um vetor constituído por um valor numérico, q, e uma propriedade identificadora, ê.

Definição 2 - Denomina-se versor o vetor cuja quantidade é unitária para determinada propriedade. Ultilizar-se-á a representação simbólica:

$\underline{e} = 1\ \hat{e}$

Definição 3 - Denomina-se vetor nulo o vetor cuja quantidade q é nula para determinada propriedade. Representa-se esse vetor simbolicamente por:

$\underline{0} = 0\ \hat{e}$

O conceito de vetor, assim estabelecido, é bastante amplo, englobando também quantidades classificadas, como por exemplo:

$\underline{v}$ = 10 lápis,

identificado pela quantidade 10 e pelo "qualificativo" lápis. Se a "qualidade" fosse dezena de lápis escrever-se-ia:

$\underline{v}$ = 1 dezena de lápis,

sendo, neste caso, versor da qualidade dezena de lápis.

No caso em que a propriedade especifica uma orientação(direção e sentido) o vetor, assim definido, pode representar um grandeza física.

Em termos de teoria de conjuntos, a definição aqui adotada pode ser interpretada como a grandeza que representa numericamente o "conteúdo" de elementos do conjunto especificado pela propriedade ê.

A extensão do conceito estabelecido de vetor é imediata, resultando, assim, mais duas definições.

Definição 4 - Denomina-se matriz toda entidade constituída por uma quantidade e duas propriedades. Uma matriz escreve-se como:

$\underline{A} = q\ \hat{e}_a\ \hat{e}_b$

Definição 5 - Entende-se por tensor toda entidade constituída por uma quantidade e três ou mais propriedades. Pode-se usar a notação:

$t_{abcd} = q\ \hat{e}_a\ \hat{e}_b\ \hat{e}_c\ \hat{e}_d$

A distinção aqui adotada é puramente formal, pois é possível considerarem-se vetores e matrizes como casos particulares de tensores. Neste tipo de abordagem, o tensor é considerado como qualquer entidade uniclassificada ou multiclassificada.

A definição, aqui proposta, apresenta uma íntima semelhança com a geração de matrizes e de tensores por meio de diádicas e poliádicas (Friedman, 1966; Mathews and Walker, 1970).

3 - OPERAÇÃO COM VETORES - ADIÇÃO E PRODUTO POR ESCALAR

No estabelecimento das operações que envolvem vetores, deve-se novamente invocar a relação entre eles e a teoria de conjuntos. Assim, dados dois vetores

$\underline{v}_1 = v_1\ \hat{e}_1$ e $\underline{v}_2 = v_2\ \hat{e}_2$

com propriedades distintas, a união resultante será dada pela composição:

$\underline{v} = v_1\ \hat{e}_1 \cup v_2\ \hat{e}_2$.

Quando dois vetores são de mesma espécie (a propriedade dos dois é a mesma), a união deles transforma-se numa adição. Note-se que composição é diferente de adição. Sejam

$\underline{v}_1 = v_1\ \hat{e}_1$ e $\underline{w}_1 = w_1\ \hat{e}_1$

esses vetores. A soma, $\underline{v}$, deles será expressa por:

$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{w}_1 = (v_1 + w_1)\ \hat{e}_1$

Este último resultado permite definir o produto por escalar através da relação:

$\underline{v} = a\,\underline{v}_1 = (a\ v_1)\ \hat{e}_1$

Dentro do contexto apresentado, a regra do paralelogramo constitui uma regra para composição de vetores, considerado o caráter geométrico, não sendo uma forma de adição de vetores. Outro exemplo da composição de vetores é:

$\underline{v}$ = 10 bananas U2 laranjas = 12 frutas

que mostra a flexibilidade do conceito estabelecido.

As regras de composição só têm sentido quando os vetores são, de mesma natureza, embora de diferentes espécies. Diz-se que esses vetores são homogêneos. Todos os exemplos acima envolvem composição de vetores homogêneos. Quando os vetores são de natureza diferente (heterogêneos), por exemplo, um vetor geométrico e o vetor 10 bananas, o vetor composto funciona como dois vetores isolados. Nestes casos, não se estabelecem regras de composição, embora exista o vetor composto.

Quando o produto por escalar é definido podem-se usar indistintamente as notações $\underline{v} = v\,\hat{e}$ ou $\underline{v} = v\ \underline{e}$. Esta última notação é a mais popular em Análise Vetorial.

Essas operações estendem-se também analogamente para matrizes e tensores.

4 - COMPONENTE DE UM VETOR SEGUNDO UMA PROPRIEDADE

Seja V_1 um conjunto de elementos com a propriedade $\hat{e}_1$, cujo conteúdo é medido pelo vetor $\underline{v}_1 = v_1\ \hat{e}_1$, e seja $\hat{e}_2$ uma propriedade considerada. Denomine-se $V_1^{\prime}$ a intersecção do conjunto V_1 com o universo E_2, da propriedade $\hat{e}_2$. A medida do conteúdo dessa intersecção, $\underline{v}_1^{\prime} = v_1^{\prime}\ \hat{e}_2$, será chamada componente de $\underline{v}_1$ segundo $\hat{e}_2$.

Como exemplo considere-se o vetor $\underline{v}_1$ = 2 bicicletas e seja $\hat{e}_2$ = roda. A intersecção do vetor dado com o universo do conjunto de rodas contém 4 elementos. Assim, $\underline{v}_1^{\prime}$ = 4 rodas.

Um exemplo geométrico permitirá estabelecer a ligação entre a conceituação aqui proposta e a já estabelecida na Geometria. Seja $\underline{v}_1$ um vetor definido por um segmento de reta AB, orientado de A para B. Seja $\hat{e}_2$ uma direção e um sentido dados. O conjunto de pontos $V_1^{\prime}$ será dado pelas intersecção de todas retas paralelas a $\hat{e}_2$, que cortam o segmento AB. A Figura 4.1 ilustra essa configuração geométrica. Do triângulo ABC dessa figura resulta imediatamente $v_1^{\prime} = v_1 \cos\theta$. A componente de $\underline{v}_1$ segundo $\hat{e}_2$ é $\underline{v}_1^{\prime} = v_1 \cos\theta\ \hat{e}_2$, resultado este que coincide com o da Geometria. Na determinação do comprimento AC pode-se considerar que a reta r_b deslocou-se para baixo e nela foram marcados todos os pontos de intersecção com o segmento AB até ser atingida a posição da reta r_a.

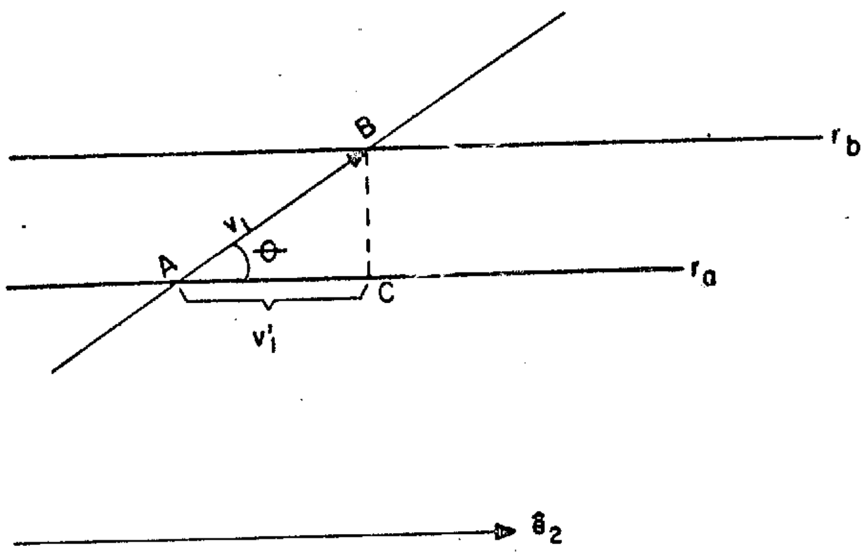

Fig. 4.1 - Representação geométrica do processo para a determinação da projeção de um vetor sobre outro.

Em analogia com esse útimo exemplo, a relação v_1' / v_1 é por vezes denominada coseno diretor e é basicamente uma medida da influência quantitativa da propriedade. Dessa forma, do ponto de vista operacional, tanto a parte "quantitativa", como a "qualitativa" participam ativamente.

Quando $v_1' = 0$ diz-se que os vetores $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ são ortogonais, mantendo-se ainda, como no último parágrafo, a nomenclatura usada na Geometria.

5 - PRODUTO ESCALAR OU CONTRAÇÃO

Sejam $\underline{v}_1 = v_1 \hat{e}_1$ e $\underline{v}_2 = v_2 \hat{e}_2$ dois vetores cuja única propriedade comum[1] entre eles é ê. Considerem-se $\underline{v}_1' = v_1'\hat{e}$ e $\underline{v}_2' = v_2'\hat{e}$ como as respectivas componentes dos vetores segundo ê. Define-se como produto escalar de $\underline{v}_1$ por $\underline{v}_2$, $v_1' \; v_2'$, cuja notação é

$$< \underline{v}_1, \underline{v}_2 > = v_1' \, v_2'$$

Dessa definição a propriedade da comutatividade decorre imediatamente.

No caso particular em que $\hat{e} = \hat{e}_2$ tem-se:

$$< \underline{v}_1, \underline{v}_2 > = v_1' \, v_2$$

A extensão do produto escalar para vetores compostos é uma consequência imediata da definição. Assim, se $\underline{v} = \underset{i}{U} \; v_i \; \hat{e}_i$ e $\underline{u} = u\hat{e}$, onde ê é a propriedade comum dos vetores, o produto escalar será dado

---

[1] A existência de propriedades comuns a dois vetores não requer a multiclassificação. Assim 10 frutas é um vetor que pode possuir a propriedade de "laranjas" e comum com outro vetor 8 "frutas cítricas".

por:

$< \underline{v}, \underline{u} > = u \sum v_i'$

sendo $\underline{v}_i' = v_i'\hat{e}$ as componentes de $v_i\, \hat{e}_i$ segundo $\hat{e}$.

A adoção desse conceito para entidades multiqualificadas (matrizes e tensores) requer certo cuidado, uma vez que só quantidades de mesma espécie são envolvidas no produto. Para exemplificar considerem-se as duas matrizes compostas:

$$\underline{\underline{V}} = \bigcup_j \bigcup_i v_{ji}\, \hat{e}_i\, \hat{b}_j = \bigcup_j \underline{v}_j\, \hat{b}_j$$

$$\underline{\underline{Q}} = \bigcup_k \bigcup_i q_{ki}\, \hat{e}_i\, \hat{d}_k = \bigcup_k \underline{q}_k\, \hat{d}_k$$

o produto matricial (ou contração) das propriedades $\hat{e}_i$ ecreve-se como:

$$\underline{\underline{P}} = \bigcup_j \bigcup_k < \underline{v}_j, \underline{q}_k > \hat{b}_j\, \hat{d}_k.$$

Pode-se notar que, especificadas as propriedades correspondentes a cada quantidade, o produto matricial reduz-se a um produto escalar. Essa notação evita os cuidados especiais que devem ser tomados com respeito à ordem de execução do produto $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{V}}\ \underline{\underline{Q}}$ como soma de produtos de linhas por colunas (Gantmacher, 1959). Este ponto será retomado oportunamente.

A redução do produto matricial a um produto escalar já é conhecida do tratamento de matrizes representadas por diádicas. A inclusão das propriedades pode então ser considerada como passo seguinte no sentido de generalização do conceito.

6 - VETORES QUE CONTÊM INFINITAS COMPONENTES

Na Seção 3 mostrou-se como dois vetores são combinados para produzir um vetor composto. A combinação de infinitos vetores permite que funções contínuas, ou com descontinuidade de primeira espécie, definidas num intervalo (a,b), possam ser tratadas com os recursos da Análise Vetorial. Seja f(x) uma função que satisfaz essas condições. Considerando-se cada posição x do intervalo (a,b) como uma propriedade distinta, $\hat{x}$, e cada versor $\underline{x}$ ortogonal a todos os demais do mesmo intervalo, pode-se construir o vetor composto:

$$\underline{v} = \bigcup_{x} f(x)\ \underline{x} \qquad x \in (a,b)$$

O vetor, assim definido, só tem significado no sentido de distribuições (Lighthill, 1964) e o versor $\underline{x}$ é representado por:

$$\underline{x} = \left[\int_a^b \delta\ (t - x)\ dt\right] \hat{x}$$

onde δ (t-x) é a função delta de Dirac.

O produto escalar para os vetores assim constituídos é calculado por (Friedman, 1966; Mathews, and Walker, 1970):

$$< \underline{v}_1, \underline{v}_2 > = \int_a^b f_1\ (x)\ f_2\ (x)\ dx$$

Este resultado está relacionado com a forma de composição (Seção 3) associada a este tipo de vetores.

7 - FORMA ESTRUTURAL PARA VETORES E MATRIZES

Para simplificar a notação de vetores, pode-se eliminar a explicitação da propriedade, estando subentendido que o índice da quantidade está em correspondência biunívoca com a propriedade e ele correspondente, que consta de uma lista ordenada. Esta forma apresenta o inconveniente de requerer regras rígidas para sua implementação.

Originalmente, os vetores e matrizes eram escritos em formas estruturais como: linhas e colunas para vetores e formas retangulares para matrizes. Nestas estruturas, a ordem convencionada era orientada da esquerda para a direita e de cima para baixo. Isto implicava uma grande dependência posicional, requerendo operações adicionais, como a "transposição", para coêrencia da convenção adotada. Assim, o produto escalar que deveria ser executado seguindo essa oriêntação tornava-se não comutativo. O esquema abaixo ilustra este fato.

$$(\longrightarrow)\begin{pmatrix}\downarrow\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}\rightarrow\\ \vdots\\ \rightarrow\end{pmatrix}(\downarrow\cdots\downarrow)$$

Para consistência da comutatividade do produto escalar das parcelas com a posição invertida fazia-se então necessária uma prévia transposição. Assim, para coerência, definia-se o produto escalar pela multiplicação de um vetor na forma de linha por um vetor na forma de coluna.

Outra forma possível para a omissão das propriedades é convencionar, como na Análise Tensorial, que a contração é executada sobre o índice comum. Utilizando-se o mesmo exemplo da Seção 5, escrever-se-ia com esta conveção:

$$p_{jk} = < \underline{v}_j, \underline{q}_k > = \sum_i v_{ji} q_{ki}$$

onde p_{ji} é o elemento genérico da matriz $\underline{P}$

Deve-se enfatizar que se os índices carregam a informação sobre a propriedade, i.e., $k = k_1, \ldots, k_n$ ao invés de $k=1, \ldots, n$, interessam apenas as naturezas i e k por exemplo, sendo indiferente a ordem i k ou k i. Infelizmente, não se pode manter esta flexibilidade na implementação em computadores. Neste caso, deve ser respeitada a ordem i k ou k i dependendo da forma como foram armazenados os valores q_{ki}.

8 - ESPAÇOS VETORIAIS ABSTRATOS

Qualquer coleção de propriedades distintas $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$ pode ser considerada como um conjunto. Associando-se a essas propriedades quantidades pertencentes a um conjunto numérico obtêm-se vetores com a forma genérica:

$$\underline{v} = \bigcup_i q_i \hat{e}_i .$$

Fazendo-se agora os q_i assumirem todas os valores possíveis do conjunto numérico resultará uma coleção (finita ou infinita) de vetores, cujo conjunto é chamado espaço vetorial abstrato.

O número n de propriedades é chamado dimensão do espaço. Quando $n \longrightarrow \infty$, diz-se que o espaço é infinito.

Denomina-se base do espaço vetorial qualquer conjunto de vetores que satisfaçam, as condições:

a) Qualquer vetor do conjunto possui pelo menos uma propriedade distinta das propriedades de todos os outros vetores do conjunto.

b) O conjunto de vetores possui todas as propriedades distintas, as quais caracterizam o espaço vetorial.

Algumas consequências importantes resultam dessa conceituação:

a) As características do espaço vetorial dependem essencialmente das características do conjunto numérico a ele associado.

b) Somente são definidas operações que resultem num vetor pertencente ao espaço vetorial.

9 - DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DE ESPAÇO VETORIAL

A definição axiomática (Bowen and Wang, 1976) de espaços vetoriais requer a existência de 3 elementos para a sua constituição. Esses elementos são:

a) um grupo abeliano aditivo V;

b) um campo F;

c) uma função f: F X V –> V, chamada multiplicação por escalar.

A multiplicação por escalar deve satisfazer às relações:

$$f(a, f(b, \underline{v})) = f(ab, v)$$

$$f(a+b, \underline{u}) = f(a, \underline{u}) + f(b, \underline{u})$$

$$f(a, \underline{u}+\underline{v}) = f(a, \underline{u}) + f(a, \underline{v})$$

$f(1,\underline{v}) = \underline{v}$

para todo $a,b \in F$ e todo $\underline{u},\underline{v} \in V$. O vetor é então definido como um elemento do espaço vetorial.

Via de regra o grupo aditivo abeliano é constiuido pelo campo F associado à operação adição. Com esta ressalva a definição axiomática implica necessàriamente que as propriedades do espaço vetorial sejam ditadas pelas características do campo F.

Comparando-se as duas definições vê-se que a adotada neste trabalho é mais flexível, pois não exige que o conjunto numérico associado forme necessariamente um campo.

Restringindo-se à generalidade da definição de espaço vetorial, proposta neste trabalho, pela exigência de que a quantidade pertença a um campo F e que as operações adição e produto por escalar sejam sempre possíveis, recuperam-se as características da definição axiomática.

A definição tradicional também não permite a utilização de vetores heterogêneos por não constituirem um grupo abeliano aditivo. Considerando-se apenas vetores homogêneos, a formulação axiomática engloba a composição e a adição de vetores numa única forma que constitui a "regra de adição" (denominada mais apropriadamente "regra de composição", neste trabalho).

10 - APLICAÇÕES

A mais simples das aplicações em computação está certamente no controle de estoque para firmas comerciais. Tomando-se cada mercadoria como a quantidade obtêm-se vetores $\underline{v}_i$, associados a cada espécie diferente do estoque. Denominando-se $\underline{w}_i$ o vetor correspondente a venda é $\underline{u}_i$ o vetor correspondente a compra da i-ésima mercadoria, a atualização do estoque será feita para cada item pela relação:

$$(\underline{v}_i) \text{ atualizado } = \underline{v}_i + \underline{u}_i - \underline{w}_i$$

Outras aplicações semelhantes podem ser encontradas na utilização da linguagem PL/I, como por exemplo em Pollack and Sterling, (1969). É importante observar que para utilização como controle de estoque, censo demográfico etc., o conjunto numérico associado pode ser o dos numeros inteiros que obviamente não constituem um campo. Em geral, também só a operação adição é utilizada nessas aplicações e os vetores compostos são heterogêneos.

Em Análise Numérica, a aplicação principal, do material aqui exposto, encontra-se na teoria das aproximações. Assim, é possível provar que funções, como polinômios, podem ser integradas, diferenciadas etc., "exatamente" por métodos numéricos (Zamlutti, 1981).

Outra aplicação, mais simples, consiste no estabelecimento do critério para avaliação da qualidade de uma aproximação, g(x), para a função, f(x), dentro de um intervalo (a,b), considerado o efeito do conjunto de erros. Chamando-se r(x) a diferença individualizada:

$r(x) = g(x) - f(x), \quad x \varepsilon (a,b)$

e considerando-se $w(x)$ como medida da importância relativa dessa diferença, uma avaliação do conjunto de erros será dada por:

$$E\left[g(x)\right] = < \underset{x}{U} r\ (x)\ \hat{x},\ \underset{x}{U} w(x)\ \hat{x} >$$

O critério de utilizar a função $g(x)$ que minimiza $E\left[g(x)\right]$ é conhecido como "critério dos resíduos ponderados" (Connor and Brebbia, 1978). Quando $w(x)=r(x)$, esse critério é conhecido como critério dos mínimos quadrados, utilizado no ajuste de curvas.

AGRADECIMENTOS

O apoio dos colegas Drs. L.A. Vieira Dias e A.E. Costa Pereira foi uma valiosa contribuição para o desenvolvimento deste trabalho. O autor gostaria também de agradecer à Direção do INPE, que possibilitou sua publicação.

REFERÊNCIAS

Bowen, R.M. and Wang, C.C. "Introduction to Vectors and Tensors Linear and Multilinear Algebra", New York, Plenum Press, 1976.

Connor, J.J. and Brebbia, C.A. "Finite Element Techniques for Fluid Flow". London, Newnes Butterworth, 1978

Dedekind, R. "Essays on the Theory of Numbers". New York, Dover, 1963.

Friedman, B. "Principles and Techniques of Applied Mathematics". New York, Wiley, 1966.

Gantmacher, F,R. "The Theory of Matrices, Vol. 1, Chelsea. New York, 1959.

Landau, E. "Foundation on Analysis". F. Steinhsardt, Translator. New York helsea, 1951.

Lighthill, F.R.S.-, M.J. "Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions". New York, Cambridge, 1964.

MacDuffee, C.C. "Introduction to Abstract Algebra" John Wiley and Sons New York, 1940 Chapter VI.

Mathews, J. and Walker, R.L. "Mathematical Methods of Physics". New York, W.A. Benjamin, 1970.

Pollack, S.V. and Sterling, T.D. "A Guide to PL/I". New York, Holt Rinehort and Winston, Inc., 1969.

Rudin, W. Principles of Mathematical Analysis". New York, Mac-Graw-Hill, 1964.

Zamlutti, C.J. "Fundamentos de Análise Numérica para Computadores Digitais, vol. II. INPE - (no prelo), 1981.