

1. Classificação <i>INPE-COM.4/RPE</i> <i>C.D.U.: 621.395.49</i>		2. Período	4. Distribuição
3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor) <i>CAPACIDADE DE CANAL INTERFERÊNCIA COMUNICAÇÃO</i>			interna <input type="checkbox"/> externa <input checked="" type="checkbox"/>
5. Relatório nº <i>INPE-2162-RPE/380</i>	6. Data <i>Julho de 1981.</i>	7. Revisado por <i>Plínio Tissi</i> <i>Plínio Tissi</i>	
8. Título e Sub-Título <i>UM NOVO LIMITANTE EXTERNO À CAPACIDADE DO CANAL COM INTERFERÊNCIA</i>		9. Autorizado por <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor</i>	
10. Setor <i>DEE</i>	Código	11. Nº de cópias <i>11</i>	
12. Autoria <i>Aydano Barreto Carleial</i>		14. Nº de páginas <i>19</i>	
13. Assinatura Responsável <i>Aydano Carleial</i>		15. Preço	
16. Sumário/Notas <i>Um canal com interferência é uma rede de comunicações em que dois emissores se comunicam com dois receptores através de um meio compartilhado, de forma que o fluxo de informação no primeiro enlace (do primeiro emissor ao primeiro receptor) pode prejudicar o fluxo no segundo enlace, e vice-versa. Sendo R_1 e R_2 as taxas de transmissão de informação no primeiro e no segundo enlace, respectivamente, a região de capacidade do canal é o conjunto de pares (R_1, R_2) conjuntamente atingíveis em comunicações confiáveis. O problema da determinação da região de capacidade foi resolvido apenas em alguns casos especiais, em particular em casos de "interferência forte". Apresenta-se neste trabalho um novo limitante externo para a região de capacidade do canal gaussiano com interferência, através de uma técnica de degradação de um canal modificado por adição de ruído. Em casos de interferência de intensidade média, que, na prática, são mais comuns que os de intensidade forte, o novo limitante é significativamente mais justo que os limitantes externos anteriormente conhecidos.</i>			
17. Observações <i>Submetido para apresentação na 33ª Reunião Anual da SBPC, de 8 a 15 de julho de 1981, em Salvador, Bahia.</i>			

ABSTRACT

An interference channel is a communication network where two senders communicate with two receivers through a shared medium, in such a way that the flow of information over the first link (from the first sender to the first receiver) can impair the flow over the second link, and vice versa. If R_1 and R_2 are the rates of information transmission over the first and second link, respectively, the channel's capacity region is the set of pairs (R_1, R_2) which are jointly achievable in reliable communications. The problem of determining the capacity region has been solved only in some special cases, in particular in "strong interference" cases. In this paper, a new outer bound on the capacity region of the Gaussian interference channel is demonstrated by means of a technique involving degradation of a modified channel by added noise. In those cases where the interference is of medium intensity, which, in practice, are more common than strong interference cases, the new bound is significantly tighter than previously known outer bounds.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
ABSTRACT	<i>iv</i>
LISTA DE FIGURAS	<i>v</i>
1. INTRODUÇÃO	1
2. O LIMITANTE EXTERNO	3
3. DISCUSSÃO GERAL E COMPARAÇÃO COM OUTROS LIMITANTES	9
4. CONCLUSÃO	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	15

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1 - Representação esquemática de um canal com interferência	1
2 - Transformação do canal I' no canal I^*	5
3 - Equivalência de I^* e I	6
4 - Limitantes para a região de capacidade de um canal gaussiano com interferência	12
5 - Comparação entre os limitantes externos (a), (b) e (c) e o limitante interno (d) para canais gaussianos com interferência simétricos com $P_1 = P_2 = 6$ e com $a_{12} = a_{21} = a$ (variável)	13

1 - INTRODUÇÃO

Um *canal com interferência* (Figura 1) é uma rede de comunicações em que dois emissores se comunicam com dois receptores através de um meio compartilhado, de forma que o fluxo de informação no primeiro enlace (do primeiro emissor ao primeiro receptor) pode prejudicar o fluxo no segundo enlace, e vice-versa. O canal é caracterizado matematicamente pelo fato de que cada um dos sinais que chega aos receptores, Y_1 e Y_2 , além de ser afetado por ruído, depende estatisticamente de ambos os sinais emitidos, X_1 e X_2 , embora apenas um destes interesse a cada receptor. As influências cruzadas de X_1 sobre Y_2 e de X_2 sobre Y_1 constituem as interferências. Sendo R_1 e R_2 as taxas de transmissão de informação no primeiro e no segundo enlaces, respectivamente, a *região de capacidade* é o conjunto dos pares (R_1, R_2) conjuntamente atingíveis em comunicações confiáveis, ou seja, com probabilidades de erro arbitrariamente pequenas, através do canal com interferência. A região de capacidade é sempre um conjunto convexo do primeiro quadrante do plano.

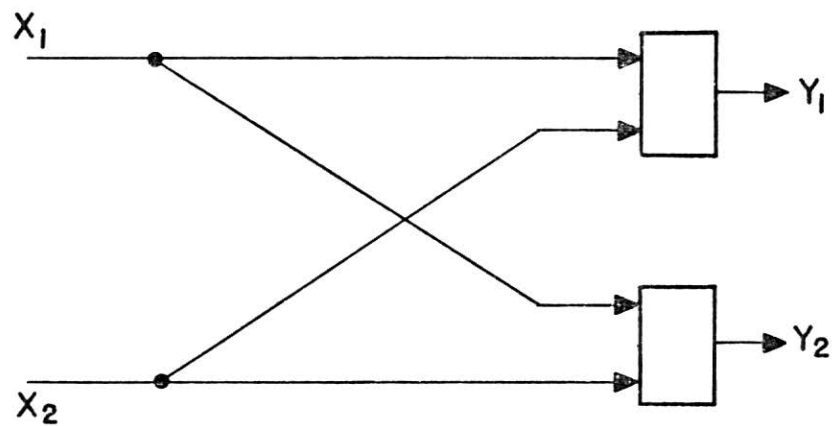


Fig. 1 - Representação esquemática de um canal com interferência.

O problema da determinação da região de capacidade para o canal com interferência, originalmente proposto por Carleial (1975), só foi resolvido em certos casos especiais, particularmente nos casos de "interferência forte" (Carleial, 1975 e 1978a; Sato e Tanabe, 1978; Benzel, 1979; Han e Kobayashi, 1981). No presente trabalho, demonstra-se um novo *limitante externo* para a região de capacidade do canal *gaussiano* com interferência, definido a seguir. Em casos de interferência média, que, na prática, são mais comuns que os de interferência forte, o novo limitante é significativamente mais justo que os limitantes externos anteriormente conhecidos.

O canal gaussiano com interferência utilizado neste trabalho é um canal sem memória, em tempo discreto. Os sinais X_1 , X_2 , Y_1 e Y_2 são reais e, em qualquer instante, são relacionados por

$$Y_1 = c_{11} X_1 + c_{21} X_2 + V_1 \quad (1)$$

$$Y_2 = c_{12} X_1 + c_{22} X_2 + V_2 \quad (2)$$

onde os c_{ij} são constantes reais (coeficientes que definem os níveis dos sinais recebidos), e V_1 e V_2 são variáveis aleatórias gaussianas (ruídos) com média zero. Definem-se ainda os coeficientes de transmissão de *potências*, $a_{ij} = c_{ij}^2$. Quanto aos sinais de entrada, as sequências de X_1 e X_2 emitidas podem ser codificadas à vontade, mas estão limitadas em potência média: os valores médios de X_1^2 e X_2^2 não podem exceder P_1 e P_2 , respectivamente.

O canal assim definido tem a *forma normalizada* se os coeficientes c_{11} e c_{22} , bem como as potências de ruído (variâncias de V_1 e V_2), são unitários. Uma discussão mais pormenorizada é apresentada em Carleial (1978a), onde se mostra que qualquer canal gaussiano com interferência pode ser posto na forma normalizada através de transformação de escala, sem alterar sua região de capacidade. Um canal gaussiano com interferência, I , fica bem caracterizado, portanto, pelos limites de potência e pelos coeficientes de transmissão de potências in

terferentes que a ele correspondem na forma normalizada. Adota-se neste trabalho a representação $I = (P_1, P_2, a_{12}, a_{21})$, onde se supõe, implicitamente, a forma normalizada. A rigor, restaria especificar a distribuição conjunta de V_1 e V_2 e os sinais algébricos de c_{12} e c_{21} , mas pode-se mostrar que a região de capacidade não depende destas características.

2 - O LIMITANTE EXTERNO

Um limitante externo a uma região de capacidade é um conjunto do primeiro quadrante do plano que contém essa região de capacidade; um limitante interno é um conjunto contido na região de capacidade.

De maneira geral, pode-se definir uma ordenação parcial entre os canais gaussianos com interferência, aplicando-se a ordenação parcial da inclusão de conjuntos às respectivas regiões de capacidade. Assim, escreve-se $I \leq I'$ (significando que o canal I' não é inferior ao canal I) se a região de capacidade de I é um subconjunto da região de I' . O limitante externo apresentado neste trabalho é obtido através da comparação entre um canal modificado e o canal original, mostrando que este último pode ser reduzido ao primeiro através de um processo de degradação. Conclui-se então que a região de capacidade do canal original está inteiramente contida na região de capacidade do canal modificado.

Lema: Seja $I = (P_1, P_2, a_{12}, a_{21})$ um canal gaussiano com interferência e seja $\lambda \geq 1$ uma constante. Tem-se:

$$I \leq (P_1, \lambda P_2, \lambda a_{12}, \lambda^{-1} a_{21}) \stackrel{\Delta}{=} I' \quad (3)$$

$$I \leq (\lambda P_1, P_2, \lambda^{-1} a_{12}, \lambda a_{21}) \stackrel{\Delta}{=} I'' \quad (4)$$

Prova: Considere-se o canal I^* , obtido de I' pelo acréscimo de uma parcela de ruído V_2^* ao sinal Y_2^1 que chega ao segundo receptor de I' , con

forme indicado na Figura 2. O ruído adicional V_2^* é gaussiano, tem média zero e variância $\lambda-1$, e é independente de V_2' , de sorte que a potência total de ruído no segundo receptor de I^* é $1 + (\lambda - 1) = \lambda$.

Evidentemente $I^* \leq I'$, pois se for possível fazer comunicações conjuntamente confiáveis a taxas de transmissão (R_1, R_2) através de I^* , também será possível fazê-las por meio de I' , usando-se aliás os mesmo códigos e as mesmas técnicas de decodificação. Para tanto, basta gerar artificialmente o ruído V_2^* e somá-lo ao sinal disponível no segundo receptor de I' , de forma a transformar I' em I^* .

A demonstração da Relação 3 é completada pela verificação de que I^* é equivalente a I . De fato, a forma normalizada do canal I^* é justamente $I = (P_1, P_2, a_{12}, a_{21})$. A transformação de escala pode ser feita nos dois passos seguintes (representados esquematicamente pelos diagramas de potências da Figura 3).

- 1) Reduzir a potência do segundo emissor de λP_2 para P_2 , compensando o efeito desta redução pelo aumento dos coeficientes de transmissão de potência ligados ao segundo emissor pelo mesmo fator λ .
- 2) Reduzir a potência de ruído do segundo receptor de λ para 1, compensando o efeito desta redução pela redução dos coeficientes de transmissão ligados ao segundo receptor pelo mesmo fator λ .

A demonstração da Relação 4 é análoga, invertendo-se os papéis dos dois enlaces no raciocínio acima apresentado.

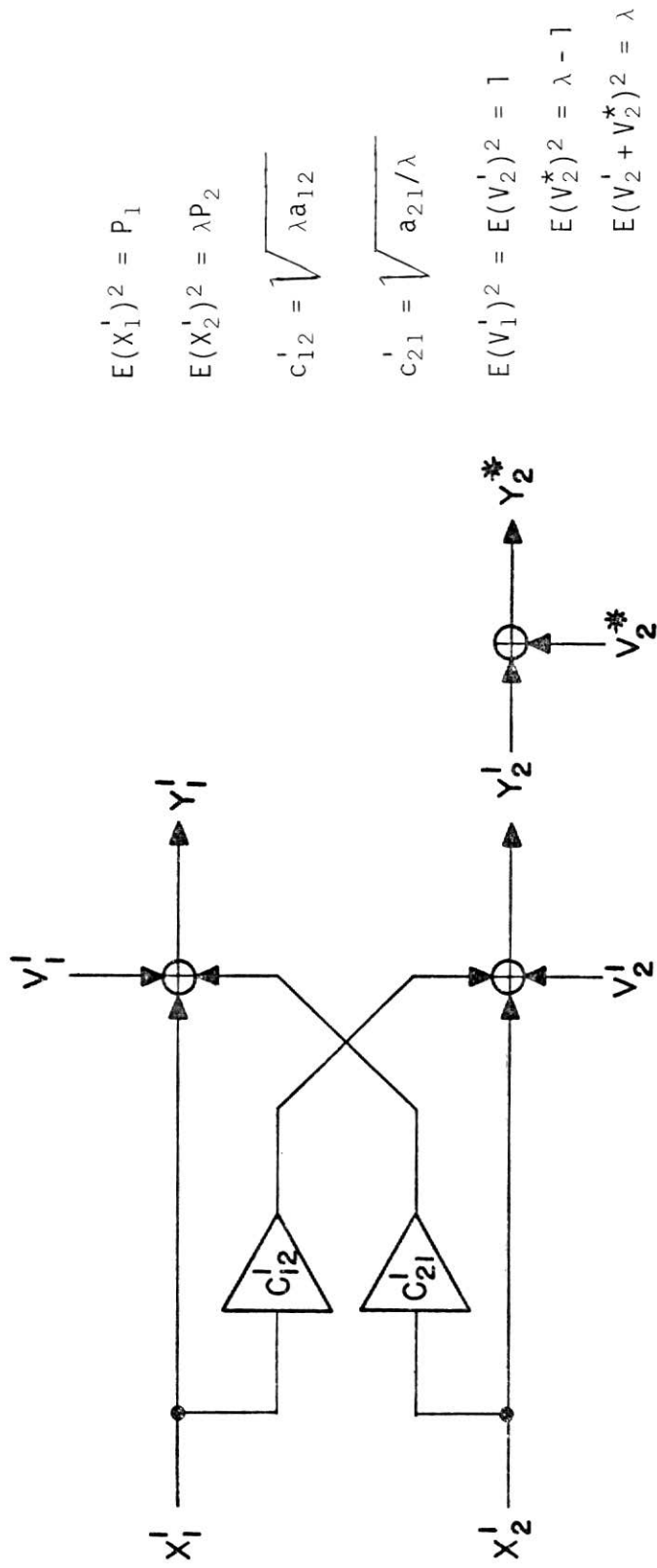


Fig. 2 - Transformação do canal I' no canal I^* .

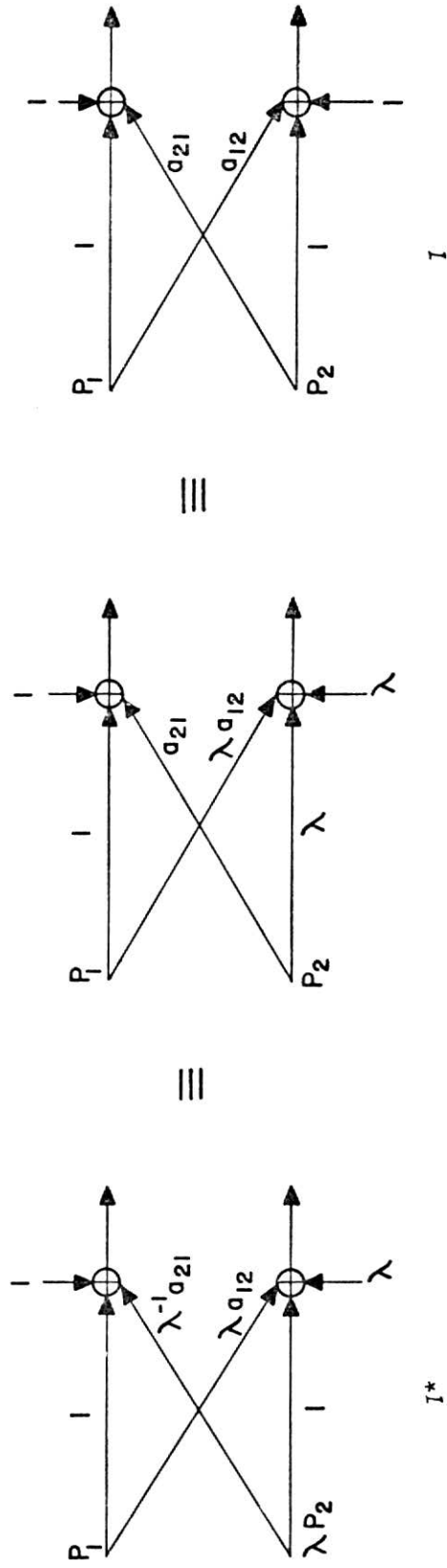


Fig. 3 - Equivalência de I^* e I .

Teorema: Seja $I = (P_1, P_2, a_{12}, a_{21})$ um canal gaussiano com interferência. Se o par de taxas de transmissão (R_1, R_2) é atingível em comunicações conjuntamente confiáveis por este canal, então R_1 e R_2 necessariamente satisfazem as restrições:

$$R_1 \leq \frac{1}{2} \log(1 + P_1) \quad (5)$$

$$R_2 \leq \frac{1}{2} \log(1 + P_2) \quad (6)$$

Além destas, se $a_{12} \leq 1$, a soma das taxas satisfaz ainda

$$R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \log(1 + P_1 + a_{12}^{-1} P_2). \quad (7)$$

Da mesma forma, se $a_{21} \leq 1$, tem-se a restrição:

$$R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \log(1 + a_{21}^{-1} P_1 + P_2). \quad (8)$$

Observações: As Restrições 5 e 6 são triviais e já conhecidas (Carleial, 1975). A combinação dessas duas restrições com a Restrição 7 ou 8, conforme as condições citadas sobre a_{12} e a_{21} , fornece, nos casos em que o Teorema é útil, um limitante externo de forma pentagonal (ver exemplo na Figura 4). Quando as Restrições 7 e 8 são simultaneamente válidas, interessa considerar a desigualdade mais restritiva. A base dos logaritmos usada em expressões como 5-8 define a unidade de medida da informação: por exemplo, para obter taxas em bits deve-se calcular os logaritmos na base 2.

Prova: Demonstra-se aqui a impossibilidade de exceder o limite expresso na Restrição 7 quando $a_{12} \leq 1$. A demonstração da Restrição 8 para $a_{21} \leq 1$ é análoga, invertendo-se os papéis dos dois enlaces.

Seja (R_1, R_2) um par de taxas conjuntamente atingíveis em I pela transmissão de certas sequências codificadas de X_1 e X_2 . Pelo Lema, estas taxas são também atingíveis em $I' = (P_1, a_{12}^{-1}P_2, 1, a_{12}a_{21})$, onde se adotou para λ o valor $a_{12}^{-1} \geq 1$. Como se depreende da demonstração do Lema, isto pode ser conseguido transmitindo-se por I' os sinais $X'_1 = X_1$ e $X'_2 = c_{12}^{-1}X_2$.

A decodificação correta de X'_2 pelo segundo receptor em I' é garantida, por hipótese, com probabilidade de erro arbitrariamente pequena. Isto implica a possibilidade de construir a seguinte combinação linear de X'_2 e $Y'_2 = X'_1 + X'_2 + V'_2$ no segundo receptor:

$$Z' = Y'_2 + (c_{12}c_{21} - 1)X'_2 = X'_1 + c_{12}c_{21}X'_2 + V'_2 \quad (9)$$

Mas o sinal Z' , para fins de decodificação de X'_1 ou X'_2 , é estatisticamente equivalente ao sinal recebido pelo primeiro receptor em I' ,

$$Y'_1 = X'_1 + c_{12}c_{21}X'_2 + V'_1 \quad (10)$$

uma vez que V'_1 e V'_2 são ambos ruídos gaussianos de média nula e potência unitária. Como, por hipótese, o primeiro receptor é capaz de decodificar X'_1 (a partir de Y'_1), conclui-se que o segundo receptor também o é (a partir de Z').

A combinação dos dois emissores com o segundo receptor (ignorando-se, portanto, o primeiro receptor) constitui um *canal de múltiplo acesso*. É fato conhecido (ver, por exemplo, Wyner (1974)) que, em um canal de múltiplo acesso gaussiano com potências disponíveis P_1 e $a_{12}^{-1}P_2$ nos emissores e com potência de ruído unitária no receptor, a soma das taxas de transmissão dos emissores ao receptor não pode exceder, em comunicações confiáveis, o valor indicado na Restrição 7. Ora, pelo que ficou exposto no último parágrafo acima, este resultado implica a validade da Restrição 7 também para o canal gaussiano com interferência, quando $a_{12} \leq 1$.

3 - DISCUSSÃO GERAL E COMPARAÇÃO COM OUTROS LIMITANTES

A região de capacidade do canal gaussiano com interferência \bar{e} conhecida no caso em que a interferência sobre ambos os receptores \bar{e} *forte*, o que \bar{e} conceituado quantitativamente, na forma normalizada, pelas condições:

$$a_{12} \geq 1 \qquad a_{21} \geq 1. \qquad (11)$$

Neste caso, a região \bar{e} delimitada pelas Desigualdades 5 e 6 e mais a seguinte (Han e Kobayashi, 1981):

$$R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \log(1 + \min\{P_1 + a_{12}P_2, a_{21}P_1 + P_2\}). \qquad (12)$$

A região tem forma pentagonal, a não ser no subcaso de interferência *muito forte* sobre ambos os receptores (Carleial, 1975), definido por

$$a_{12} \geq 1 + P_2 \qquad a_{21} \geq 1 + P_1 ; \qquad (13)$$

neste subcaso, a Desigualdade 12 \bar{e} supérflua, e a região de capacidade tem forma retangular.

A região de capacidade \bar{e} conhecida também nos seguintes casos especiais, que envolvem interferência nula em pelo menos um dos receptores:

$$a_{12} = 0 \qquad a_{21} = 0 \qquad (14)$$

$$a_{12} \geq 1 \qquad a_{21} = 0 \qquad (15)$$

$$a_{12} = 0 \qquad a_{21} \geq 1. \qquad (16)$$

No mais trivial deles (Caso 14), a região de capacidade \bar{e} dada pelas Restrições 5 e 6; no Caso 15, \bar{e} dada pelas mesmas desigualdades e mais

$$R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \log(1 + P_1 + a_{12}P_2) ; \qquad (17)$$

no Caso 16, novamente pelas Restrições 5 e 6, agora associadas a

$$R_1 + R_2 \leq \frac{1}{2} \log(1 + a_{21}P_1 + P_2). \quad (18)$$

Pode-se convencionar dizer que a interferência que afeta o segundo receptor do canal é de intensidade *média* quando se tem, na forma normalizada,

$$(1 + P_1)^{-1} < a_{12} \leq 1. \quad (19)$$

De maneira análoga, tem-se interferência *média* sobre o primeiro receptor quando

$$(1 + P_2)^{-1} < a_{21} \leq 1. \quad (20)$$

Os casos $a_{12} = 1$ e $a_{21} = 1$, respectivamente, podem ser considerados como de transição para interferência forte. Considerando-se que as Restrições 5 e 6 constituem sempre um limitante externo válido para a região de capacidade, é fácil verificar que o Teorema da Seção 2 fornece um limitante externo melhorado, justamente nos casos aqui caracterizados como de interferência *média*, sobre um dos receptores ou sobre ambos. Com efeito, em situações de interferência mais fraca,

$$0 \leq a_{12} \leq (1 + P_1)^{-1} \quad \text{e} \quad (21)$$

$$0 \leq a_{21} \leq (1 + P_2)^{-1}, \quad (22)$$

as Desigualdades 7 e 8, respectivamente, tornam-se supérfluas diante das Restrições 5 e 6.

A Figura 4 mostra, em linha cheia (c), o novo limitante externo para o canal gaussiano com interferência, caracterizado pelos parâmetros $P_1 = P_2 = 6$ e $a_{12} = a_{21} = 0.64$. Aparecem ainda na Figura 4, em linhas interrompidas,

- a) o limitante externo trivial;

b) um limitante externo proposto por Sato (1977) e calculado em forma fechada para canais gaussianos simétricos por Carleial (1978b), o qual, no presente exemplo, é menos justo que o novo limitante apresentado neste trabalho; e

d) um limitante interno, resultante da combinação convexa de limitantes internos já bem conhecidos (Carleial, 1978a).

Os valores máximos da soma $R_1 + R_2$ para os quatro limitantes citados acima (a)-(d) são comparados em gráfico, na Figura 5, para a família de canais simétricos com $P_1 = P_2 = 6$ (constante) e com $a_{12} = a_{21} = a$ (variável entre 0 e 1). Para esta família de canais, o novo limitante (c) é mais justo que o limitante de Sato (b) no intervalo $0.21 < a < 1$. Nota-se, entretanto, que permanece uma grande separação entre o melhor limitante externo e o interno na maior parte da faixa de interferências fracas e médias.

Com respeito à Figura 5, deve-se observar que a curva referente ao novo limitante (c) é válida não apenas para os canais simétricos com $a_{12} = a_{21} = a$, mas também para os canais assimétricos com $P_1 = P_2 = 6$ e

$$a_{12} = a \qquad 0 \leq a_{21} < a \qquad (23)$$

ou ainda,

$$0 \leq a_{12} < a \qquad a_{21} = a. \qquad (24)$$

O mesmo não é válido para as curvas referentes ao limitante de Sato (b) e ao limitante interno (d).

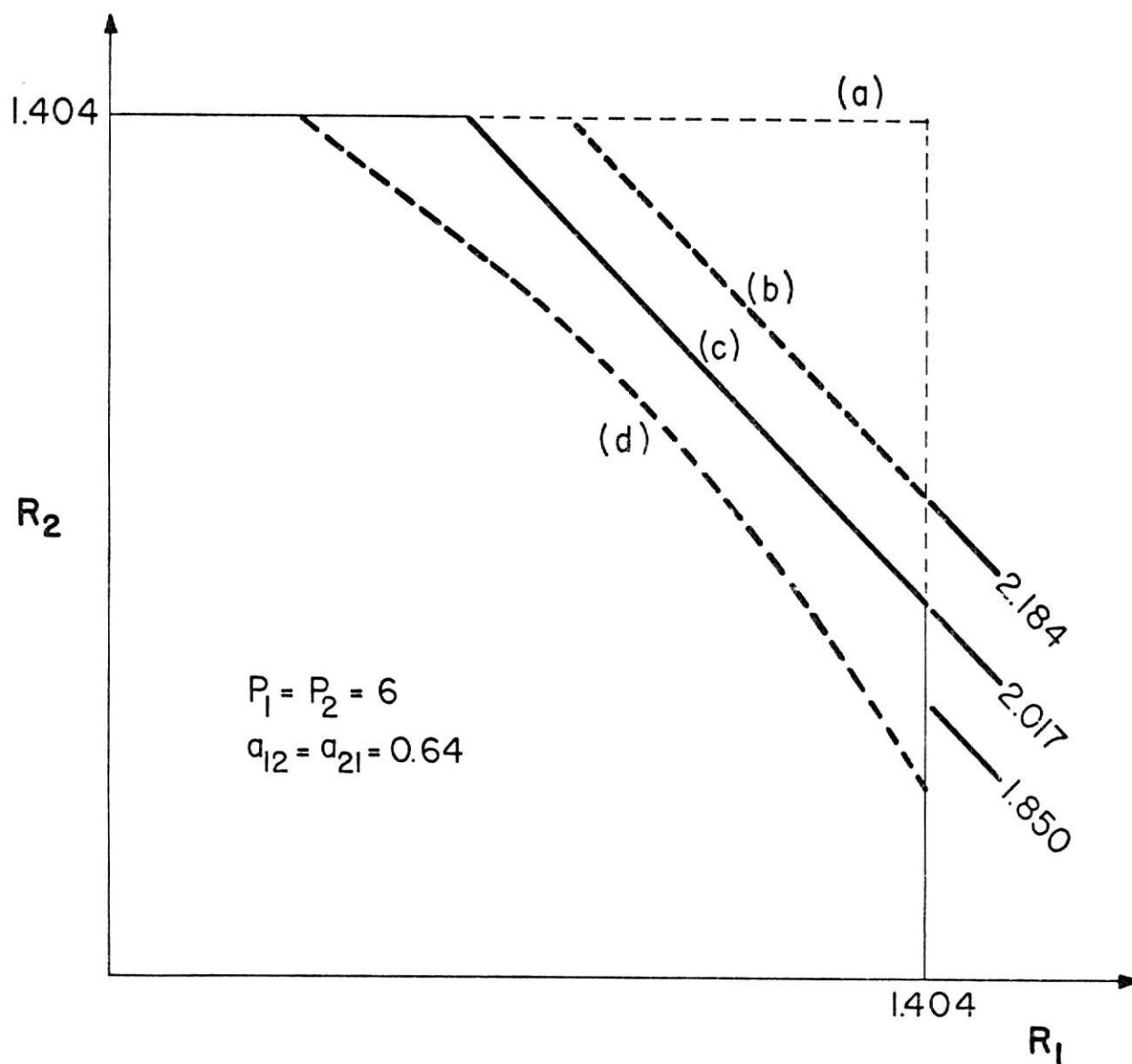


Fig. 4 - Limitantes para a região de capacidade de um canal gaussiano com interferência.

- a) limitante externo trivial
- b) limitante externo de Sato
- c) novo limitante externo
- d) limitante interno

R_1 e R_2 estão expressos em bits.

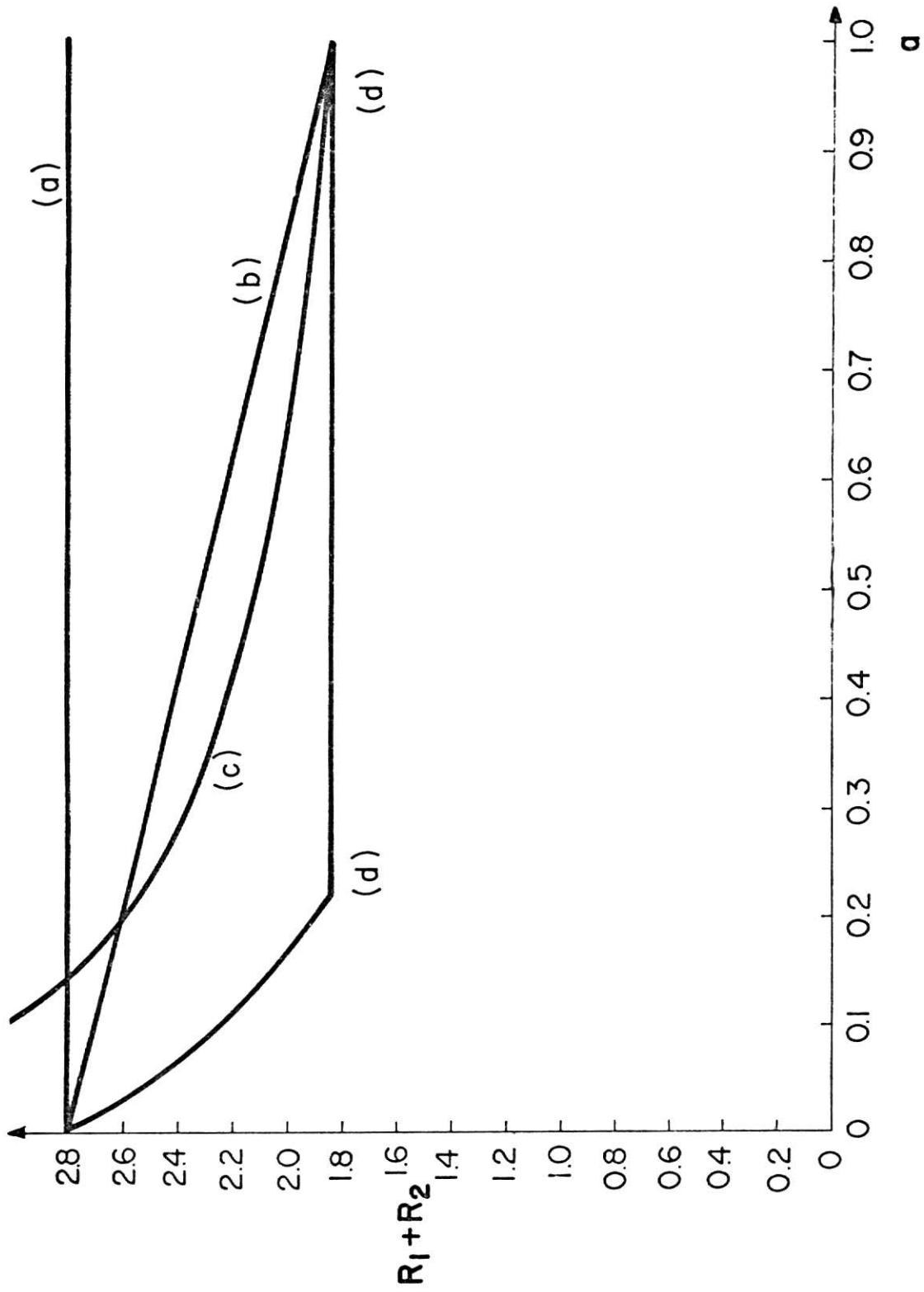


Fig. 5 - Comparação entre os limitantes externos (a), (b) e (c) e o limitante interno (d) para canais gaussianos com interferência simétricos com $P_1 = P_2 = 6$ e com $a_{12} = a_{21} = a$ (variável)

4 - CONCLUSÃO

Demonstrou-se um novo limitante externo para a região de capacidade do canal gaussiano com interferência. O novo limitante é útil nos casos em que a interferência incidente sobre pelo menos um dos dois receptores do canal é de intensidade média, conforme critério definido no texto, embora persista uma separação entre o limitante externo e os melhores limitantes internos conhecidos. Nos casos em que a interferência sobre ambos os receptores é de intensidade caracterizada como fraca, o novo limitante externo é fraco e não apresenta contribuição ao conhecimento da região de capacidade. Nos casos em que a interferência sobre ambos os receptores é forte, a região de capacidade já foi determinada por estudos que precederam este trabalho.

Usando-se raciocínio análogo, é possível demonstrar um limitante externo à região de capacidade de certa classe de canais com interferência de alfabetos discretos e sem memória, embora nem sempre o resultado formal, expresso em termos de informações mútuas, possa ser computado explicitamente. A extensão do resultado a essa classe de canais de alfabetos discretos, entretanto, não foi apresentada neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BENZEL, R. The capacity region of a class of discrete additive degraded interference channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-25(2):228-231, Mar. 1979.
- CARLEIAL, A.B. A case where interference does not reduce capacity. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-21(5):560-570, Sep. 1975.
- CARLEIAL, A.B. Interference channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-24(1):60-70, Jan. 1978.
- CARLEIAL, A.B. Limitações teóricas e práticas sobre as comunicações em redes com múltiplos terminais. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE PROCESSAMENTO DE SINAIS, Rio de Janeiro, 5-7 Jul. 1978. Anais. P.249-258. Suplemento.
- HAN, T.S.; KOBAYASHI, R. A new achievable rate region for the interference channel. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-27(1):49-60, Jan. 1981.
- SATO, H. Two-user communication channels. *IEEE Transactions of Information Theory*, IT-23(3):295-304, May 1977.
- SATO, H.; TANABE, M. A discrete two-user channel with strong interference. *The Transactions of the IECE of Japan*, 61(11):880-884, Nov. 1978.
- WYNER, A.D. Recent results in the Shannon theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-20(1):2-10, Jan. 1974.