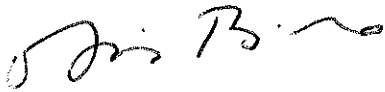
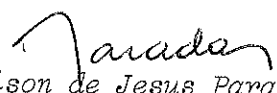
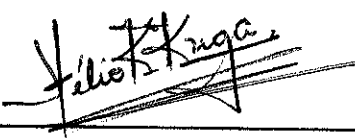
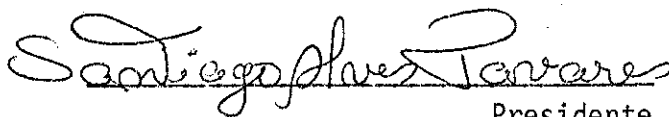


1. Publicação nº <i>INPE-2316-TDL/079</i>	2. Versão	3. Data <i>Fev., 1982</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DRH-DSE</i>	Programa <i>FRH/CEA</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA FILTRO DE KALMAN ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA</i>			
7. C.D.U.: <i>521.3:629.7.076.6</i>			
8. Título <i>ESTIMAÇÃO ADAPTATIVA DE ÓRBITAS APLICADA A SATÉLITES A BAIXA ALTITUDE</i>		10. Páginas: <i>128</i>	
		11. Última página: <i>C.5</i>	
		12. Revisada por  <i>Atair Rios Neto</i>	
9. Autoria <i>Hélio Koiti Kuga</i>		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor	
Assinatura responsável 			
14. Resumo/Notas <p><i>Os procedimentos de estimação são implementados e testados, com o objetivo de verificar a possibilidade de sua utilização na determinação de órbita, em tempo real, de satélites artificiais e baixa altitude. Técnicas adaptativas de Compensação do Modelo Dinâmico e de avaliação do ruído no estado são utilizadas de forma sequencial, possibilitando o processamento em tempo real dos dados de observação do satélite. Para efeito de teste, as órbitas e observações do satélite efetuadas por estações topocêntricas de rastreamento são simuladas em computador digital. O desempenho dos procedimentos de estimação é analisado em termos de precisão, convergência e consistência estatística, comparando-se os resultados estimados com os simulados.</i></p>			
15. Observações <i>Tese de Mestrado em Ciência Espacial, aprovada em 14 de agosto de 1981.</i>			



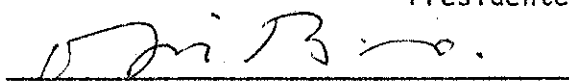
Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Ciência Espacial

Dr. Santiago Alves Tavares



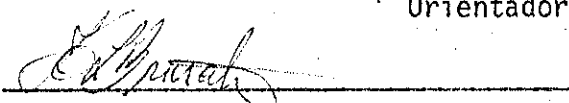
Presidente

Dr. Atair Rios Neto



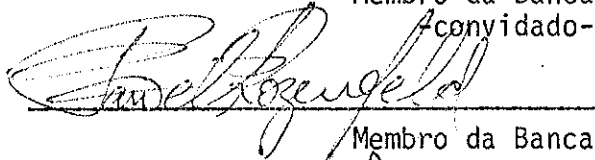
Orientador

Dr. Hernani Luiz Brinati



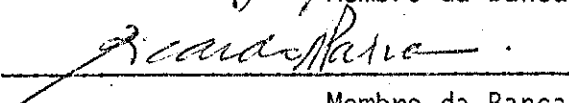
Membro da Banca
convidado-

Dr. Pawel Rozenfeld



Membro da Banca

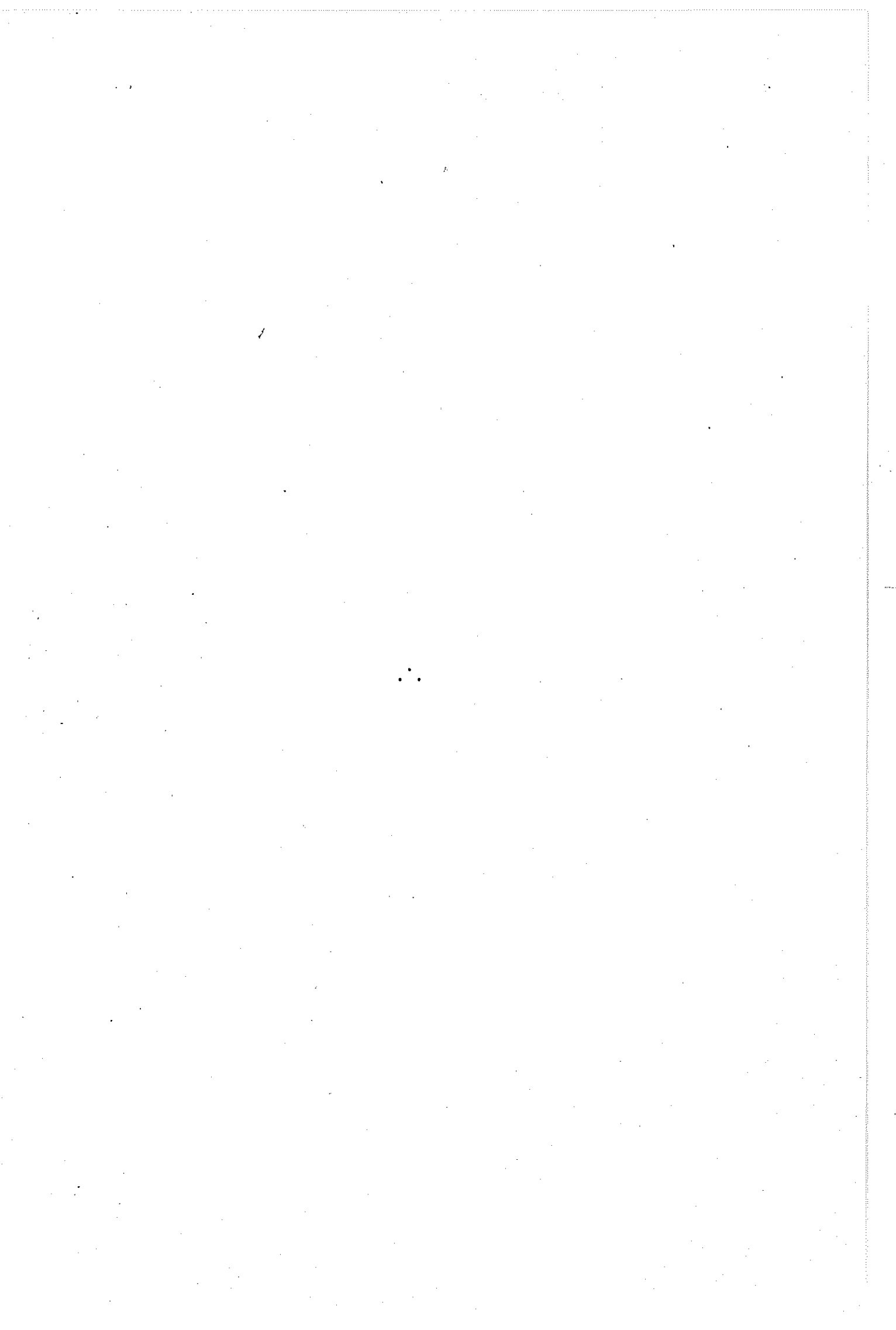
Eng. Ricardo Negreiros de Paiva, MSc.



Membro da Banca

Candidato: Hélio Koiti Kuga

São José dos Campos, 14 de agosto de 1981



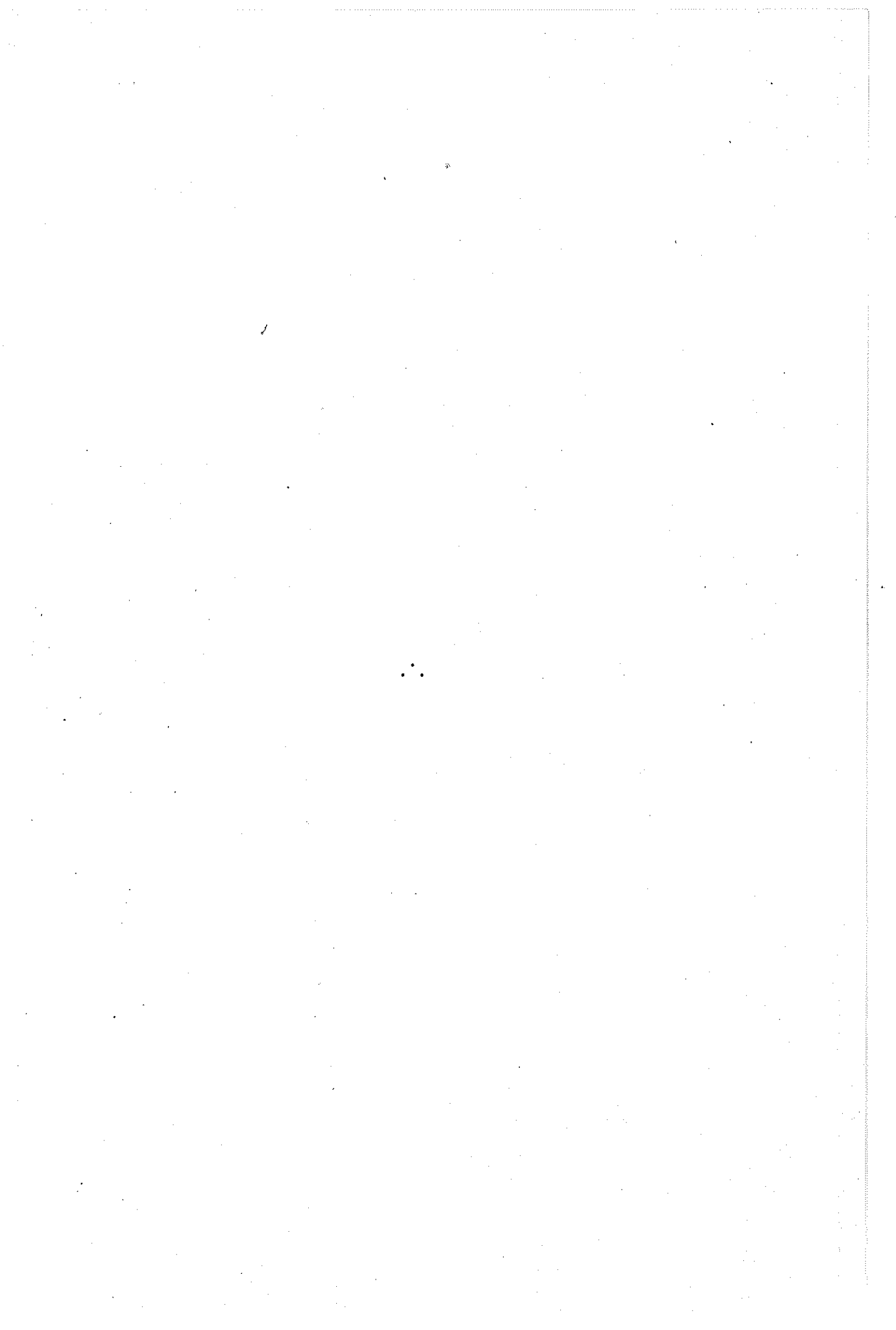
AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais, pelas facilidades con
cedidas à realização deste trabalho, por meio do Projeto ORBAT.

Ao Dr. Atair Rios Neto pela orientação, dedicação e paciência
com que acompanhou este trabalho.

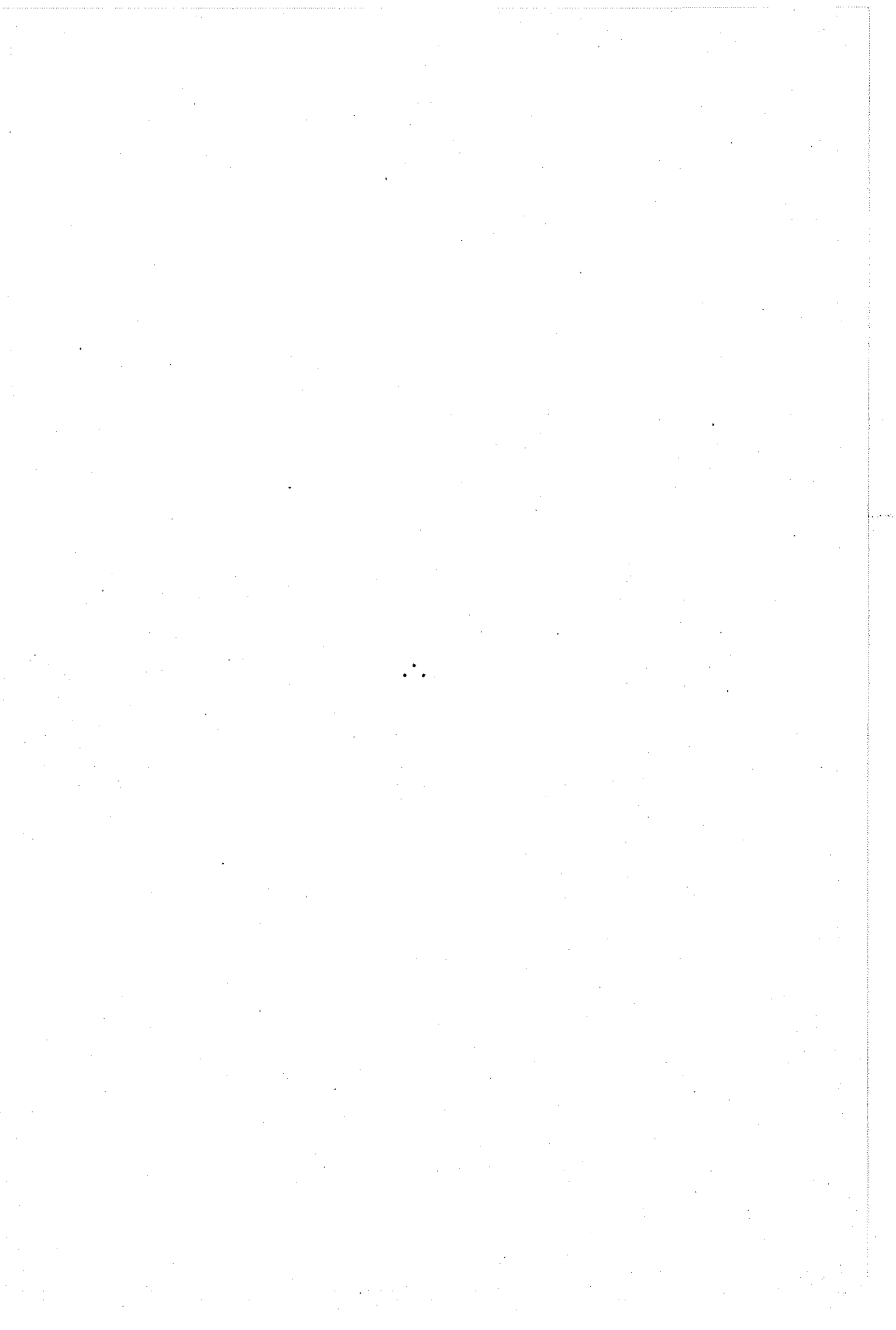
Ao colega Ricardo Negreiros de Paiva pelas sugestões e dis
cussões num nível de envolvimento e colaboração, de modo que, a bem da
justiça, deve ser qualificado como co-orientador desta pesquisa.

Aos professores Agenor de Toledo Fleury e Antônio Felix
Martins Neto pelas discussões quando da apresentação preliminar, e a to
dos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste traba
lho.



ABSTRACT

Estimation procedures are implemented and tested, aiming application to problems of real time orbit determination of low altitude satellites. Adaptive techniques of Dynamic Model Compensation and noise-state evaluation are used in a sequential way, making the real time processing of the satellite observational data feasible. In order to test these procedures, satellite orbits and observations made by topocentric tracking stations are simulated in a digital computer. The performance of the estimation procedures is analysed in terms of accuracy, convergence and statistical consistency, by comparison of estimated and simulated data.



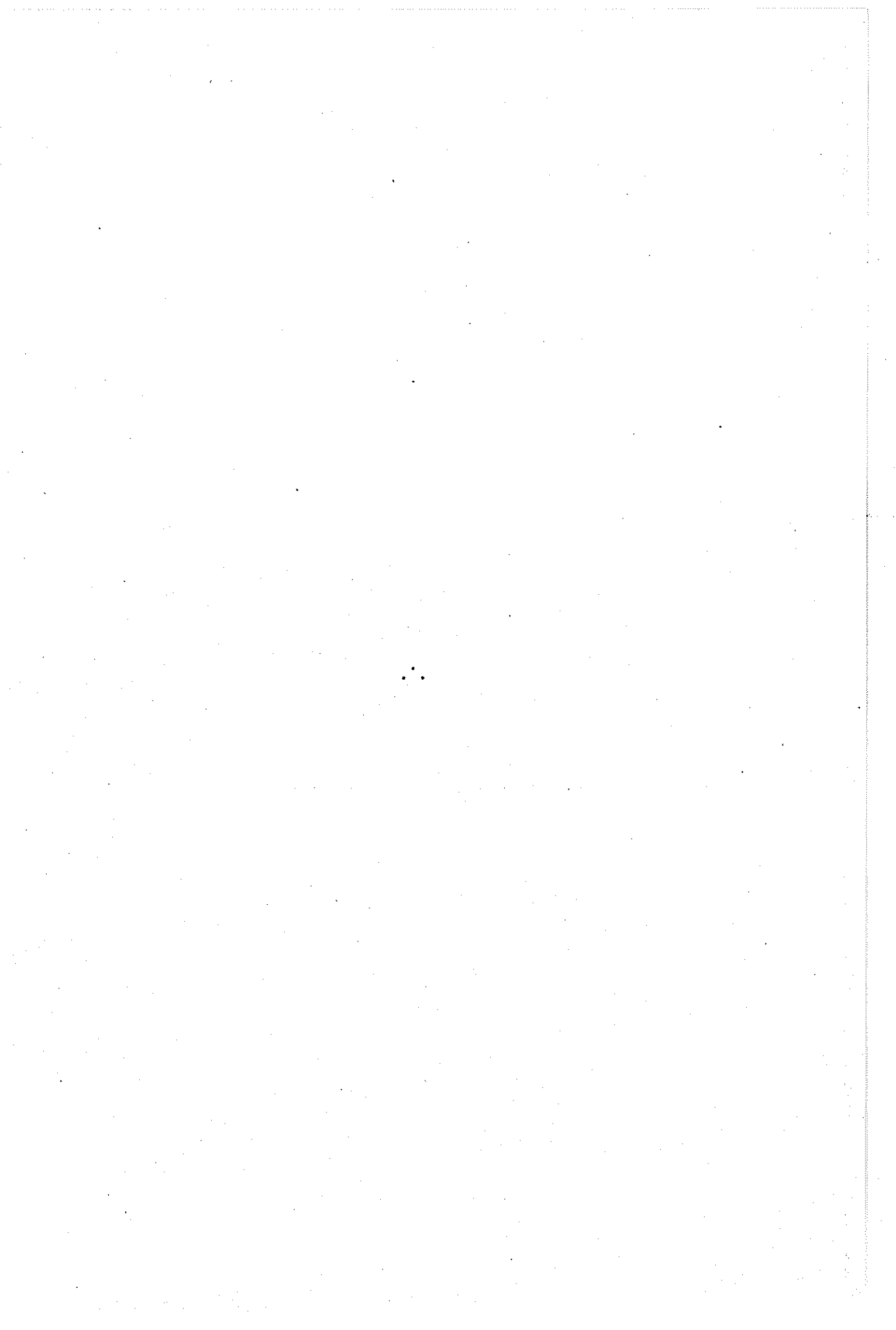
SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	<i>xi</i>
LISTA DE TABELAS	<i>xiii</i>
LISTA DE SÍMBOLOS	<i>xv</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS</u>	5
2.1 - Introdução	5
2.2 - Filtro de Kalman	5
2.3 - Filtro de Kalman aplicado a sistemas não-lineares	9
2.4 - Colocação do problema	16
2.5 - Processamento seqüencial do vetor de observações, caso linear	19
<u>CAPÍTULO 3 - PROCEDIMENTOS ABORDADOS</u>	23
3.1 - Introdução	23
3.2 - A não-linearidade das observações	23
3.3 - Estimacão do ruído dinâmico por processo adaptativo	26
3.3.1 - Introdução	26
3.3.2 - Hipótese básica	28
3.3.3 - A equação de pseudo-observações	30
3.3.4 - Filtro de Kalman aplicado às pseudo-observações	34
3.3.5 - Informação a priori	35
3.3.6 - Sumário do ruído adaptativo	39
3.4 - Compensação do modelo dinâmico	41
3.4.1 - Introdução	41
3.4.2 - Modelo matemático	42
3.4.3 - Cálculo da covariância do ruído dinâmico	44
3.4.4 - Matriz de transição	47
3.4.5 - Aspectos numéricos	50
<u>CAPÍTULO 4 - INFRA-ESTRUTURA COMPUTACIONAL PARA SIMULAÇÃO E ANÁLISE</u>	51
4.1 - Simulação da órbita	51

4.1.1 - Aceleração devida ao geopotencial	51
4.1.2 - Aceleração devida ao Sol e à Lua	53
4.1.3 - Aceleração devida ao arrasto atmosférico	54
4.1.4 - Integração da órbita	55
4.2 - Simulação das estações de rastreamento	56
4.3 - Geração de observações corrompidas por um ruído aleatório .	59
4.4 - Generalidades	60
<u>CAPÍTULO 5 - TESTES E ANÁLISES</u>	61
5.1 - Introdução	61
5.2 - Órbita básica	62
5.3 - Estações de rastreamento	64
5.4 - Condições iniciais do estimador	65
5.5 - Parâmetros para análise de resultados	67
5.6 - Testes	69
5.6.1 - Caracterização da divergência: caso básico 1	70
5.6.2 - Inclusão da técnica de ruído adaptativo: casos básicos 2 e 3	73
5.6.3 - Utilização da compensação do modelo dinâmico: casos básicos 4 e 5	79
5.6.4 - Caso especial 1	86
5.6.5 - Caso especial 2	88
5.7 - Conclusões sobre os casos testados	89
<u>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES</u>	
6.1 - Introdução	93
6.2 - Comentários e conclusões	93
6.3 - Desenvolvimentos futuros	94
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97
APÊNDICE A - MODELAGEM DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O ESTIMADOR	
APÊNDICE B - MODELAGEM DAS OBSERVAÇÕES	
APÊNDICE C - DERIVADAS PARCIAIS	

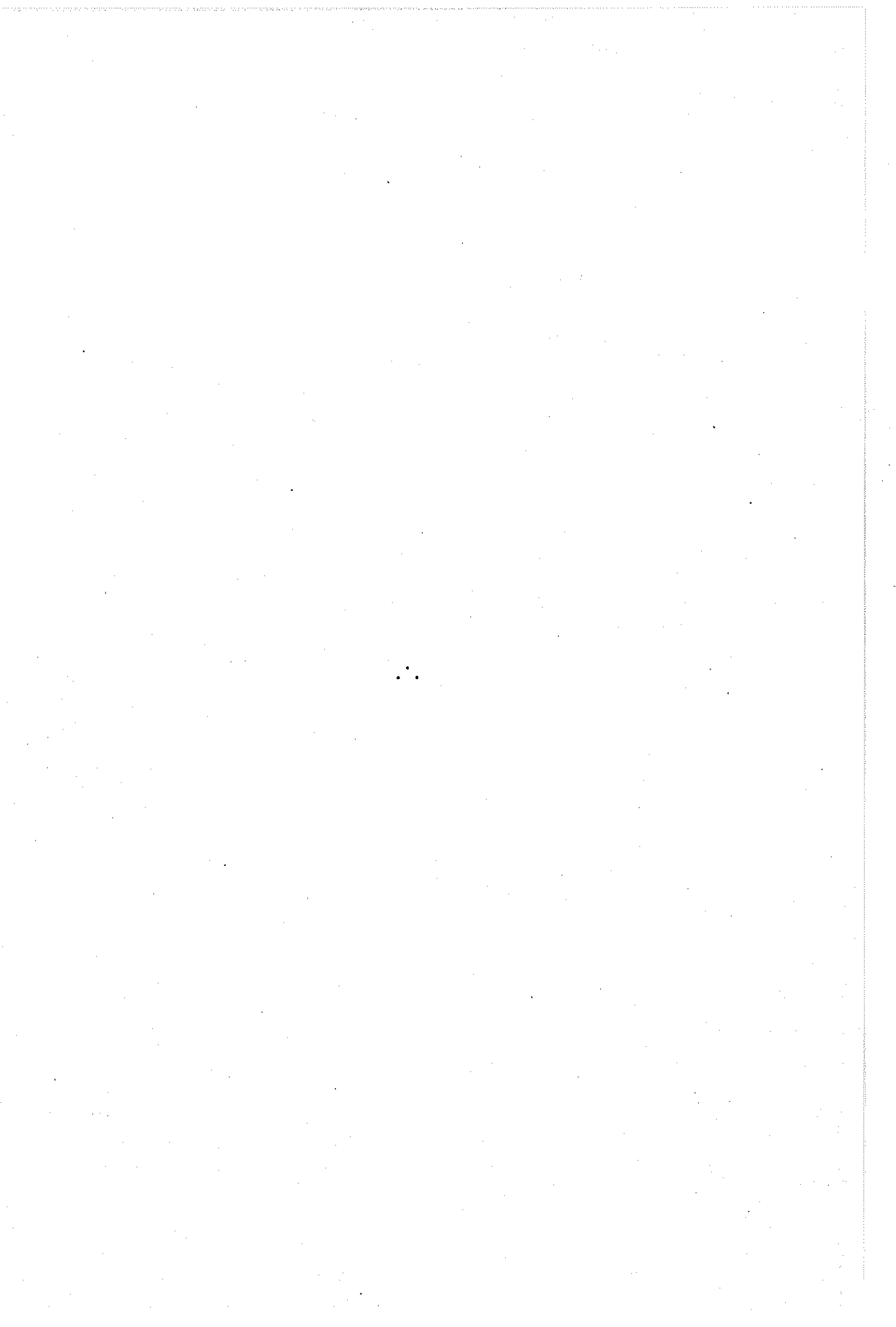
LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Diagrama de fluxo do filtro estendido de Kalman	17
2.2 - Diagrama de blocos do programa de estimação de órbita	20
4.1 - Estações fictícias de rastreamento	56
4.2 - Teste de visibilidade	58
5.1 - Satélite nacional	62
5.2 - Traço da órbita básica, estações de rastreamento e círculos de visibilidade	64
5.3 - Listagem das condições iniciais	66
5.4 - Resíduo normalizado de "range", caso básico 1	71
5.5 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso básico 1	72
5.6 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso básico 1	72
5.7 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso básico 2	74
5.8 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso básico 2	75
5.9 - Resíduo normalizado de "range", caso básico 2	75
5.10 - Resíduo normalizado de "range-rate", caso básico 2	76
5.11 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso básico 3	77
5.12 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso básico 3	78
5.13 - Resíduo normalizado de "range", caso básico 3	78
5.14 - Resíduo normalizado de "range-rate", caso básico 3	79
5.15 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso básico 4	81
5.16 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso básico 4	82
5.17 - Resíduo normalizado de "range", caso básico 4	82
5.18 - Resíduo normalizado de "range-rate", caso básico 4	83
5.19 - Acelerações não-modeladas, caso básico 4	83
5.20 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso básico 5	84
5.21 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso básico 5	85
5.22 - Resíduo normalizado de "range", caso básico 5	85
5.23 - Resíduo normalizado de "range-rate", caso básico 5	86
5.24 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso especial 1	87
5.25 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso especial 1	87
5.26 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso especial 2	88
5.27 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso especial 2	89



LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 - Estações de rastreamento NET-A	57
5.1 - Perturbações em um satélite em relação à órbita Kepleriana.	63
5.2 - Quadro sinóptico dos testes	91

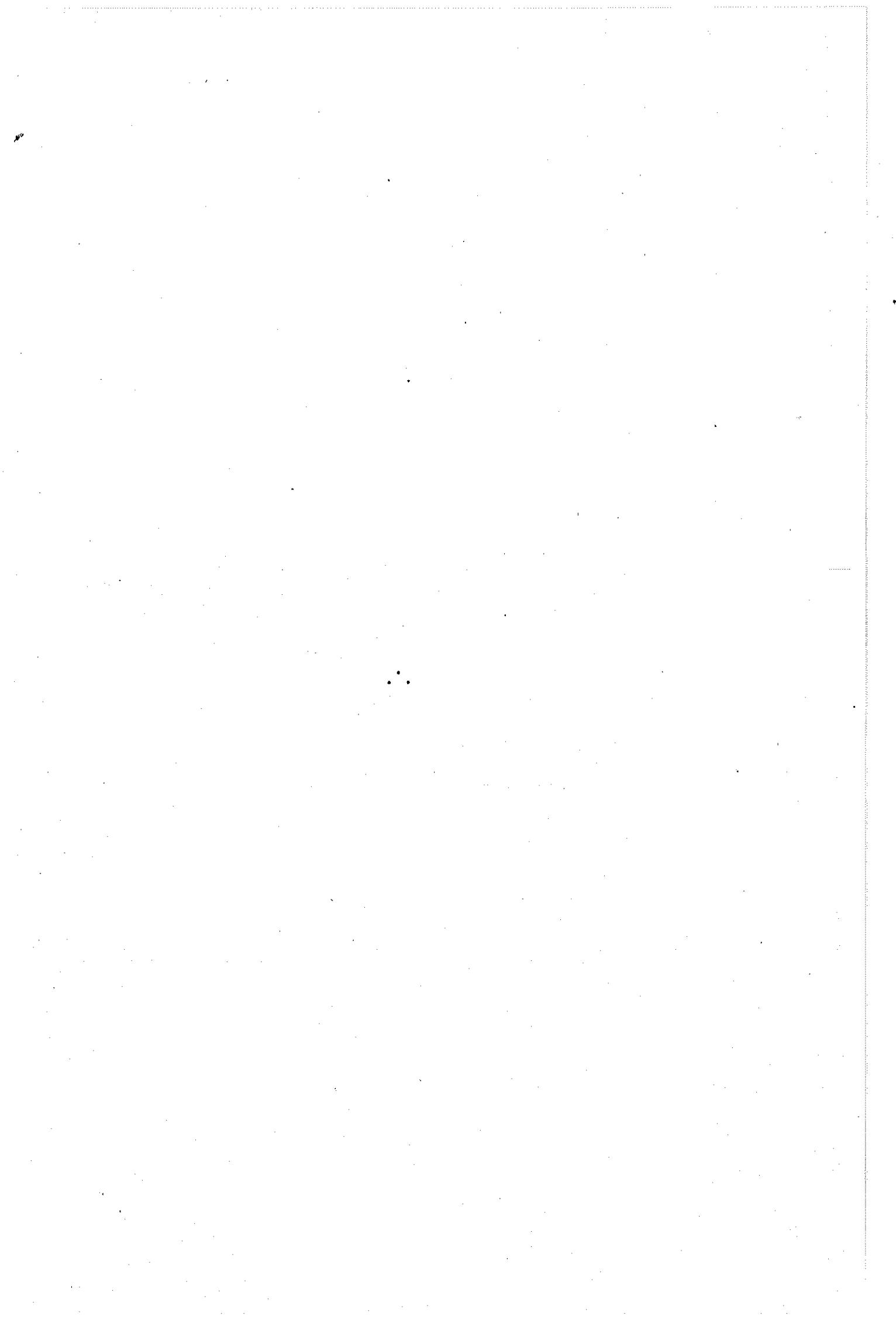


LISTA DE SÍMBOLOS

- A - Área do satélite.
- a_G - Aceleração devida ao geopotencial.
- a_{SL} - Aceleração devida ao Sol e à Lua.
- a_D - Aceleração devida ao arrasto atmosférico.
- a_m - Aceleração modelada.
- a_{nm} - Aceleração não-modelada.
- B - Matriz diagonal do processo de Gauss-Markov.
- b - Escalar positivo do processo de Gauss-Markov.
- C_D - Coeficiente de arrasto atmosférico.
- C_{km} - Coeficiente harmônico esférico.
- $E [\cdot]$ - Operador esperança.
- e - Processo de Gauss-Markov.
- F - Matriz de derivadas parciais relativas ao estado.
- f - Função vetorial do estado.
- f_m - Função vetorial das equações modeladas.
- f_{nm} - Função vetorial das equações não-modeladas.
- G - Matriz contínua e constante no estado.
- H_k - Vetor de derivadas parciais da observação.
- h_k - Função das observações.
- I - Matriz identidade.
- K - Constante de Boltzman.
- K_k - Ganho de Kalman.
- k - Indica avaliação no instante k.
- M - Peso molecular do ar.
- M_k - Vetor da equação de pseudo-observações.

- m - Massa do satélite.
- N_A - Número de Advogado.
- P - Matriz de covariância do erro no estado.
- p^q - Matriz de covariância do erro em q .
- Q_k - Matriz de covariância do ruído no estado.
- q_k - Vetor das componentes da diagonal de Q_k .
- R_k - Matriz de covariância do ruído nas observações.
- r - Vetor posição do satélite, resíduo calculado.
- r_v - Resíduo verdadeiro das observações.
- S_{km} - Coeficiente harmônico esférico.
- s - Relação de velocidades.
- T - Temperatura absoluta do ar.
- t - Tempo.
- v - Vetor velocidade do satélite.
- v_k - Ruído branco gaussiano das observações.
- x - Vetor de estado.
- y_k - Observação.
- z_k - Pseudo-observação.
- α - Ângulo de elevação da antena.
- γ - Porcentagem das acelerações não-modeladas.
- δ - Desvio da variável.
- $\delta(.)$ - Delta de Dirac.
- δ_{kj} - Delta de Kronecker.
- ϕ - Latitude.
- $\phi_{k+1,k}$ - Matriz de transição do estado.
- Γ_k - Matriz contínua do estado estendido.

- λ - Longitude.
- μ - Média estatística.
- η_k - Ruído das pseudo-observações.
- Ω - Rotação da Terra.
- ρ - "Range", ou densidade atmosférica.
- $\dot{\rho}$ - "Range-rate".
- σ - Desvio-padrão.
- ω - Ruído branco gaussiano no estado.
- \sim - Indica valor estimado.
- \cdot - Indica derivação em relação a t.
- $\bar{\cdot}$ - Indica valor de referência.



CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste trabalho são desenvolvidos procedimentos de estimação para aplicação a sistemas não-lineares, sendo empregados especificamente em problemas de determinação de órbita, em tempo real, de satélites a baixa altitude. Ênfase é dada ao aspecto modular do correspondente pacote computacional, a fim de manter o caráter genérico para o uso dos procedimentos expostos.

A estimação de órbita em tempo real caracteriza-se pelo processamento dos dados, à medida que estes estão disponíveis. Conseqüentemente, requer-se que o procedimento computacional processe todos os dados de medidas efetuadas num determinado instante e produza estimativas da órbita e informações sobre a incerteza destas estimativas, antes que novo conjunto de dados esteja disponível. Assim, adota-se o filtro estendido de Kalman, por ser um estimador não-tendencioso, de mínima variância, com características recursivas que opera sobre os dados seqüencialmente, não requerendo armazenamento e possibilitando a aplicação em tempo real (Jazwinski, 1970). Da mesma forma, adota-se um modelo dinâmico simplificado para o estimador, com o objetivo de economizar tempo de processamento e permitir processamento em tempo real.

Para testar o desempenho dos procedimentos, simulam-se uma órbita "real" e observações feitas por estações de rastreamento. A construção proposital do modelo dinâmico simplificado, em relação à órbita "real" simulada, maximiza o efeito da fração não-modelada. Desta forma, quando técnicas de compensação não são usadas, ocorre o fenômeno da divergência, que caracteriza um mau funcionamento do processo de estimação. Estes erros de modelagem propositalis se identificam com o problema de determinação de órbita, no qual agem forças não muito bem conhecidas e de difícil modelagem.

A equação diferencial que rege o movimento (dinâmica) do sistema é formulada no estimador do seguinte modo:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + G(t) \omega(t) , \quad (1.1)$$

onde $f(x, t)$ é uma função vetorial não-linear no estado x , que representa a modelagem imprecisa da dinâmica em relação à real, $G(t)$ é uma matriz contínua e dependente do tempo, e $\omega(t)$ representa o ruído dinâmico no estado.

Para compensar tais erros de modelagem propositais, implementa-se uma técnica adaptativa que consiste em adicionar à dinâmica do sistema um ruído ω , conforme a Equação 1.1, e que é inserido no procedimento de estimação através de suas propriedades estatísticas, mais especificamente, através da covariância do ruído dinâmico Q . Tal covariância Q é determinada com base no resíduo das observações, que é a diferença entre o valor observado e o estimado (Jazwinski, 1969). Daí o fato da técnica ser adaptativa, pois o ruído dinâmico será dosado, passo a passo, em função de quão boas estão sendo as estimativas do estado. Esta técnica não impede o processamento em tempo real, pois a estatística do ruído dinâmico (covariância Q) é calculada no momento em que são feitas as observações.

Progressivamente, aperfeiçoa-se o processo de estimação, incluindo um método de compensação do modelo dinâmico impreciso, que estima a porção não-modelada, mesmo sem prévio conhecimento do seu comportamento dinâmico (Ingram, 1971; Rios Neto, 1973). Este método, aliado à técnica adaptativa de estimação das estatísticas do ruído dinâmico no estado, compõe o estimador final.

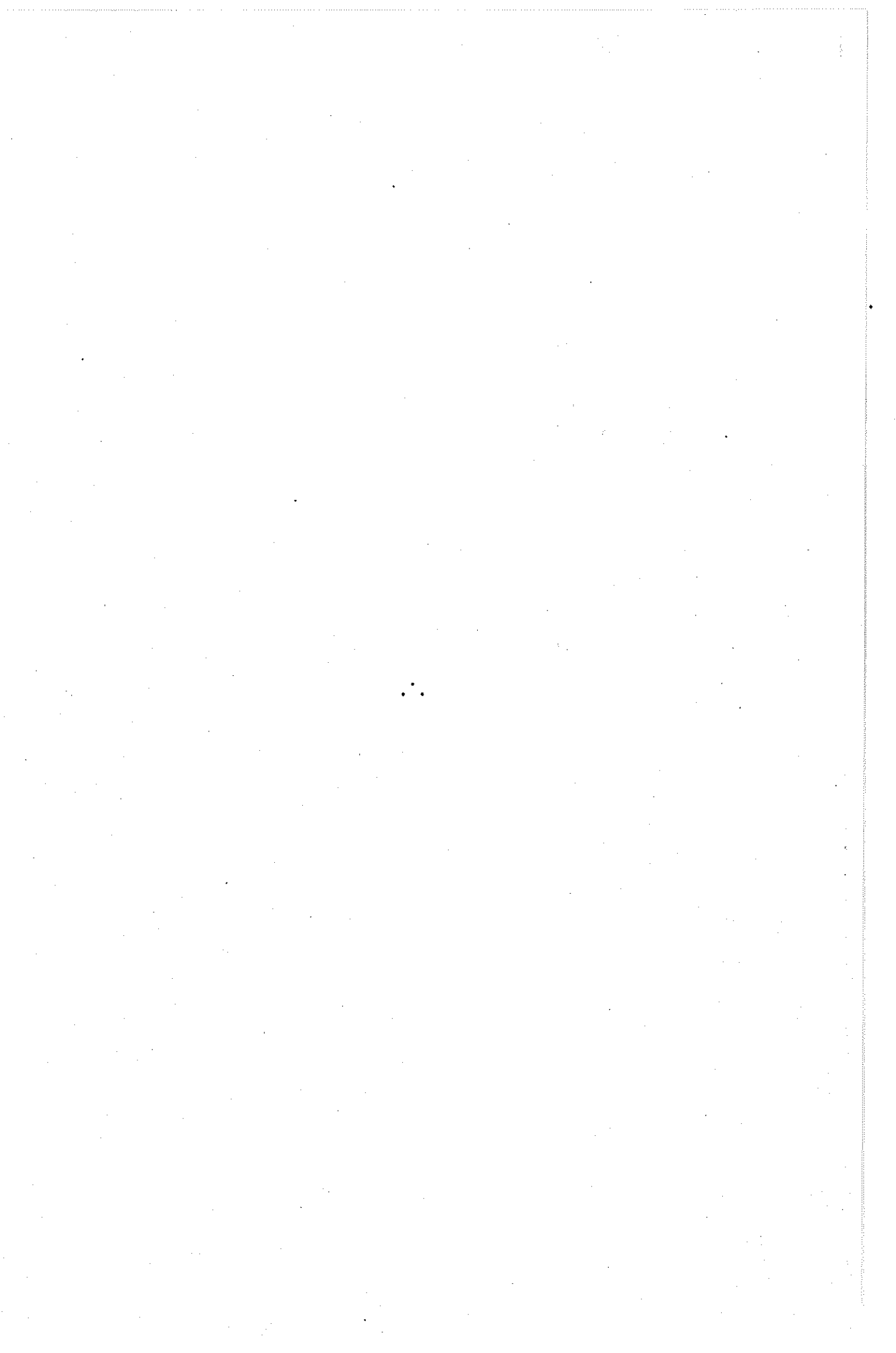
Para uma missão espacial, o estudo da trajetória nominal para fins de rastreamento, as simulações de órbita e atitude, as previsões de passagens, etc, são etapas básicas e necessárias. Nesse contexto, a determinação de órbita adquire primordial destaque, pois fornece condições para cumprimento destes requisitos. Um bom rastreamento exige

a órbita estimada dentro de uma faixa de precisão, para satisfazer a capacidade do equipamento de rastreamento. Esta é a aplicação mais tradicional do estimador, que fornece tal órbita juntamente com o nível de incerteza associado. As previsões de passagens podem ser geradas por poderosos e sofisticados propagadores de órbita, e a partida é dada com as condições iniciais (órbita) alimentadas pelos resultados do estimador. Além disso, o conhecimento preciso da órbita fornece valiosas informações acerca do desvio da trajetória de referência (nominal), permitindo prever problemas dinâmicos como os de atitude do satélite, cujo controle e determinação dependem, em primeiro grau, da determinação de órbita. Assim, conseguem-se parâmetros tais como a posição do satélite em relação ao Sol, e em relação às estrelas, o grau de iluminação e de visibilidade satélite-estações de rastreamento, que permitem o controle de atitude. Criam-se, com isso, condições para uma correção satisfatória que assegure a continuidade da missão.

Por meio de simulações, como as executadas no presente trabalho, obtêm-se dados para um análise de erros, suas fontes, a melhor forma de evitá-los ou, no mínimo, fixá-los num nível aceitável (Leibold and Rajasingh, 1977). Uma aplicação posterior ao evento de determinação de órbita de um satélite é a possibilidade de aumentar o conhecimento do sistema e melhorar o modelo dinâmico, pois o estimador fornece uma estimativa dos erros de modelagem por meio do método de compensação do modelo dinâmico (Tapley and Ingram, 1973).

Como escopo deste trabalho, deseja-se que os procedimentos desenvolvidos permitam concluir sobre a viabilidade da aplicação prática ao problema de determinação de órbita em tempo real, a fim de prover suporte operacional às missões espaciais. Como metas agregadas, espera-se a comprovação do procedimento de estimação, e sua possível aplicação aos problemas semelhantes.

No final, idéias para o desenvolvimento de alternativas, para futuros estudos a serem executados, surgem naturalmente da sequência de pesquisa e são discutidas no capítulo conclusivo.



CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo descreve as equações básicas da teoria de estimação, voltadas para o estimador de mínima variância não-tendencioso, e apresenta uma descrição dos problemas e critérios freqüentemente utilizados pelos teóricos da área. O problema tratado, determinação de órbita, é formulado de maneira a possibilitar a utilização das equações obtidas.

O texto é apenas explanativo e não objetiva esgotar o assunto, pois em livros como os de Jazwinski (1970), Gelb (1974) e Liebelt (1967) podem ser encontrados deduções e maiores detalhes sobre as equações comuns à teoria.

Um estimador ótimo é um algoritmo computacional que processa as medidas para deduzir a estimativa do estado de um sistema, com o mínimo erro, utilizando conhecimentos da dinâmica do sistema e das medidas, estatísticas dos erros de medida e ruídos dinâmicos, e informação das condições iniciais. É nesse contexto que se situa a técnica de filtragem ótima, desenvolvida por Kalman, descrita a seguir.

2.2 - FILTRO DE KALMAN

Em princípio descreve-se o filtro de Kalman e, em seguida, utiliza-se o filtro estendido de Kalman aplicado ao problema. Para as aplicações pretendidas é suficiente a descrição do filtro com sistema dinâmico linear contínuo e medidas lineares discretas. A equação que rege a dinâmica do sistema é dada por:

$$\dot{x}(t) = F(t) x(t) + G(t) \omega(t) , \quad (2.1)$$

onde $x(t)$ é o vetor de dimensão n que representa o estado; $F(t)$ é a matriz $n \times n$ contínua e dependente do tempo; $G(t)$ é a matriz $n \times r$ contínua e dependente do tempo; $\omega(t)$ é um vetor de dimensão r que expressa o ruído dinâmico (ruído no estado), processo gaussiano branco, com $\omega(t) \sim N(0, Q(t))$, independente de $x(\tau)$ para $\tau \leq t$ e do ruído nas observações (medidas); $\dot{}$ representa a derivada em relação ao tempo da variável envolvida.

As medidas discretas são descritas por:

$$y_k = H_k x_k + v_k, \quad (2.2)$$

com $k = 1, 2, \dots$; para $t_0 < t_k < t_{k+1}$, onde y_k é o vetor de dimensão m que representa as observações efetuadas no instante t_k ; H_k é uma matriz $m \times n$ limitada não-aleatória; v_k é um vetor de dimensão m , seqüência gaussiana branca, independente de x_k , definida por:

$$E [v_k] = 0,$$

$$E [v_k v_k^T] = R_k > 0,$$

sendo $E [\cdot]$ a expectância da variável envolvida e R_k a matriz de covariância associada ao vetor v_k . O vetor v_k representa os erros aleatórios cometidos ao se fazer a observação, dependendo da precisão do equipamento utilizado. x_k representa o estado no instante t_k ; ou seja, $x(t_k)$.

As condições iniciais são também gaussianas e não-tendenciosas:

$$E [x(t_0) - \hat{x}(t_0)] = 0,$$

(2.3)

$$E [(x(t_0) - \hat{x}(t_0)) (x(t_0) - \hat{x}(t_0))^T] = P(t_0),$$

onde t é o instante inicial, P é a matriz de covariância do erro no estado, e \hat{x} representa a melhor estimativa do estado no instante considerado.

O algoritmo recursivo exposto a seguir, o filtro de Kalman, é uma sucessão de propagações (ou predições) e atualizações (ou correções) no intervalo de tempo considerado.

● Propagação

- do estado

$$\dot{\hat{x}}(t/t_{k-1}) = F(t) \hat{x}(t/t_{k-1}) \quad (2.4)$$

- da matriz de covariância do erro no estado

$$\dot{P}(t/t_{k-1}) = F(t) P(t/t_{k-1}) + P(t/t_{k-1}) F^T(t) + G(t) Q(t) G^T(t), \quad (2.5)$$

com $t_{k-1} \leq t \leq t_k$.

O estado \hat{x} resultante da propagação é usualmente chamado nominal. Nota-se que, na propagação, a dinâmica dada pela Equação 2.1 é integrada sem a parcela estocástica (ruído ω), definindo o estado nominal; porém, sua estatística, a matriz de covariância Q , é levada em conta na equação de propagação da matriz de covariância do erro no estado P , Equação 2.5.

● Ganho

$$K_k = P(k/k-1) H_k^T [H_k P(k/k-1) H_k^T + R_k]^{-1} \quad (2.6)$$

● Atualização

- do estado

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}(k/k-1) + K_k [y_k - H_k \hat{x}(k/k-1)] \quad (2.7)$$

- da matriz de covariância do erro no estado

$$P(k/k) = [\mathbf{I} - K_k H_k] P(k/k-1) , \quad (2.8)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade $n \times n$.

O caractere $k/k-1$ substitui t_k/t_{k-1} e expressa o instante imediatamente antes do processamento das observações, e k/k ou t_k/t_k é o instante imediatamente após o processamento. Deste modo, $\hat{x}(k/k-1)$ é obtido integrando-se a Equação 2.4 de t_{k-1} a t_k , com a condição inicial $\hat{x}(k-1/k-1)$; $P(k/k-1)$ é obtido integrando-se a Equação 2.5 de t_{k-1} a t_k , com condição inicial $P(k-1/k-1)$; e K_k é o ganho dado pela Equação 2.6, que permite a atualização do estado e da matriz de covariância do erro no estado P .

Quando há dados (observações) a serem processados, utilizam-se as Equações 2.6, 2.7 e 2.8, que fazem a filtragem propriamente dita dos dados no instante considerado. Entre observações, aplica-se as Equações 2.4 e 2.5 para propagar a estimativa do estado e da matriz P .

Uma forma alternativa para resolver a equação de Riccati, Equação 2.5, é o cálculo da matriz de transição ϕ por:

$$\dot{\phi}(t, t_{k-1}) = F(t) \phi(t, t_{k-1}) \quad (2.9)$$

no intervalo $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, com condição inicial $\phi(t_{k-1}, t_{k-1}) = \mathbf{I}$; onde \mathbf{I} é a matriz identidade $n \times n$. A integração da Equação 2.9 de t_{k-1} a t_k fornece $\phi(t_k, t_{k-1})$ que, para conveniência de notação, será expressa por $\phi_{k, k-1}$. A matriz de transição contém todas as informações para produzir a evolução das estimativas em tempos discretos, permitindo a discretização do Sistema 2.1.

A dinâmica do estado na forma discretizada torna-se:

$$x(k/k-1) = \phi_{k, k-1} x(k-1/k-1) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_{k,s} G(s) \omega(s) ds, \quad (2.10)$$

assim, a propagação do estado \bar{x} é feita por:

$$\bar{x}(k/k-1) = \phi_{k, k-1} \bar{x}(k-1/k-1). \quad (2.11)$$

Da mesma forma, a solução da Equação 2.5 é:

$$P(k/k-1) = \phi_{k, k-1} P(k-1/k-1) \phi_{k, k-1}^T + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_{k,s} G(s) Q(s) G^T(s) \phi_{k,s}^T ds, \quad (2.12)$$

que produz uma alternativa de resolução equivalente. Portanto, o filtro de Kalman fica completo com as Equações 2.11, 2.12, 2.6, 2.7 e 2.8.

2.3 - FILTRO DE KALMAN APLICADO A SISTEMAS NÃO-LINEARES

Para utilizar a teoria de filtragem no problema em vista, é necessário o estudo de aplicações a sistemas não-lineares, que se identificam com a formulação dada às equações de determinação de órbita. A aproximação mais comum adotada é a linearização em torno da estimativa mais recente, numa tentativa de mantê-la próxima ao estado real, caracterizando o filtro estendido de Kalman.

A não-linearidade no estado é caracterizado pela equação diferencial:

$$\dot{x}(t) = f [x(t), t] + G(t) \omega(t), \quad (2.13)$$

onde x é o vetor de dimensão n do estado; f é um vetor de dimensão n , função não-linear do estado; G é um matriz $n \times r$ contínua e dependente do tempo; e ω é um vetor de dimensão r que expressa o ruído dinâmico, tendo as seguintes propriedades estatísticas:

$$E [\omega(t)] = 0 \quad (2.14)$$

$$E [\omega(t) \omega^T(\tau)] = Q(t) \delta(t - \tau) ,$$

onde $\delta(t - \tau)$ é a função delta de Dirac e Q , a matriz de covariância associada ao ω .

Gera-se uma trajetória determinística de referência, em torno da qual se faz a linearização; assim, dado $\bar{x}(t_0)$ que satisfaz:

$$\dot{\bar{x}}(t) = f [\bar{x}(t), t] , \quad (2.15)$$

para $t \geq t_0$, define-se $\delta x(t) \triangleq x(t) - \bar{x}(t)$ como o desvio da referência, de modo que:

$$\frac{d \delta x(t)}{dt} = f [x(t), t] - f [\bar{x}(t), t] + G(t) \omega(t) , \quad (2.16)$$

sendo $\delta x(t_0) \sim N(x(t_0) - \bar{x}(t_0), P(t_0))$.

Supondo-se o desvio pequeno, uma expansão em série de Taylor até primeira ordem produz

$$f [x(t), t] - f [\bar{x}(t), t] \cong F [t; \bar{x}(t_0)] \delta x(t) , \quad (2.17)$$

$$F [t; \bar{x}(t_0)] = \left[\frac{\partial f [\bar{x}(t), t]}{\partial x} \right] , \quad (2.18)$$

onde F é uma matriz de derivadas parciais, avaliada ao longo da trajetória nominal (de referência). A equação linearizada torna-se:

$$\frac{d \delta x(t)}{dt} = F [t; \bar{x}(t_0)] \delta x(t) + G(t) \omega(t) . \quad (2.19)$$

A inclusão de $\bar{x}(t_0)$ no argumento de F somente enfatiza a dependência de $\delta x(t)$ em relação à nominal, uma vez que F é função unicamente do tempo, avaliado nos valores de $\bar{x}(t)$.

Da mesma forma que no caso linear, discretiza-se a Equação 2.19 para evitar a integração da equação de Riccati:

$$\delta x(t_{k+1}) = \phi [t_{k+1}, t_k; \bar{x}(t_k)] \delta x(t_k) + \Gamma(t_k) \omega(t_k), \quad (2.20)$$

onde ϕ é a matriz de transição $n \times n$ resultante de:

$$\dot{\phi} [t, t_k; \bar{x}(t_k)] = F [t; \bar{x}(t_k)] \phi [t, t_k; \bar{x}(t_k)], \quad (2.21)$$

para $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ e com a condição inicial $\phi [t_k, t_k; \bar{x}(t_k)] = I$.

A parcela $\Gamma(t_k) \omega(t_k)$ é representada por:

$$\Gamma(t_k) \omega(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi [t_{k+1}, \tau] G(\tau) \omega(\tau) d\tau.$$

Para efeito de cálculo da matriz de covariância do erro no estado propagada, o ruído ω é aproximado por um "step-process"; i.é., o intervalo de tempo considerado é bastante pequeno, de modo que ω , nesse intervalo, pode ser considerado constante. Assim, as estatísticas de ω são dadas por:

$$E [\omega(t_k)] = 0,$$

$$E [\omega(t_k) \omega^T(t_j)] = Q(t_k) \delta_{kj},$$

onde δ_{kj} é o delta de Kronecker. Portanto, a forma final discretizada pode ser expressa pelas seguintes relações:

$$\delta x(t_{k+1}) = \phi [t_{k+1}, t_k; \bar{x}(t_k)] \delta x(t_k) + \Gamma(t_k) \omega(t_k), \quad (2.22)$$

$$\Gamma(t_k) \triangleq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi [t_{k+1}, \tau, \bar{x}(t_k)] G(\tau) d\tau.$$

As medidas (observações) são modeladas conforme

$$y_k = h(x(t_k), t_k) + v_k, \quad (2.23)$$

onde y é o vetor de dimensão m das observações; h é um vetor de dimensão m , função não-linear do estado; e v é um vetor de dimensão m , que representa o ruído nas medidas, e apresenta as seguintes estatísticas:

$$E[v_k] = 0, \quad (2.24)$$

$$E[v_k v_k^T] = R_k,$$

onde R_k é a matriz de covariância associada ao ruído nas medidas v . Outras hipóteses implícitas são:

- a não-correlação do ruído nas medidas com o ruído no estado:

$$E[\omega_k v_j^T] = 0;$$

- a não-correlação do ruído nas medidas com o estado:

$$E[v_k x^T(t_j)] = 0.$$

Da mesma forma que o estado, a equação de medidas é não-linear e deve-se adotar uma formulação análoga. Inicialmente, define-se uma nominal (de referência):

$$\bar{y}_k \triangleq h[\bar{x}(t_k), t_k], \quad (2.25)$$

e do mesmo modo

$$\delta y_k \triangleq y_k - \bar{y}_k \quad (2.26)$$

será o desvio, agora referente às observações. A linearização fornece:

$$\delta y_k \cong H [t_k, \bar{x}(t_k)] \delta x(t_k) + v_k , \quad (2.27)$$

com

$$H [t_k, \bar{x}(t_k)] \triangleq \frac{\partial h [\bar{x}(t_k), t_k]}{\partial x} , \quad (2.28)$$

onde H é a matriz de derivadas parciais das observações em relação ao estado.

Sintetizando, parte-se de

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f [x(t), t] + G(t) \omega(t) ; t \geq t_0 ; x(t_0) \sim N(0, P(t_0)) ; \\ y_k &= h [x(t_k), t_k] + v_k , \end{aligned} \quad (2.29)$$

e, linearizando sobre $\bar{x}(t)$, obtêm-se:

$$\delta x(t_{k+1}) = \phi [t_{k+1}, t_k ; \bar{x}(t_k)] \delta x(t_k) + \Gamma(t_k) \omega(t_k)$$

com $\delta x(t_0) \sim N(x(t_0) - \bar{x}(t_0), P(t_0))$, e

$$\delta y_k = H [t_k, \bar{x}(t_k)] \delta x(t_k) + v_k .$$

A escolha da trajetória de referência \bar{x} (nominal) torna-se uma questão lógica, desde que se quer uma nominal próxima à real. Assim, a escolha cai na mais recente estimativa corrente do estado, expressa em:

$$\bar{x}(t_k) = \hat{x}(t_k/t_k) . \quad (2.31)$$

A partida é dada, fazendo-se:

$$\bar{x}(t_0) = \hat{x}(t_0/t_0) \quad (2.32)$$

com $\delta x(t_0) \sim N(0, P(t_0))$. Com a estrutura recursiva e seqüencial do filtro de Kalman, a cada passo, relinaria-se sobre cada estimativa, quan

do estas são avaliáveis, para aplicar a Relação 2.31. Partindo-se desta imposição, a melhor estimativa entre observações é propagada por:

$$\frac{d \hat{x}(t/t_k)}{dt} = f [\hat{x}(t/t_k), t] , \quad (2.33)$$

para $t_k \leq t \leq t_{k+1}$. Aplicando-se a equação para correção (atualização) da estimativa ao Sistema linearizado 2.20, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \delta \hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \delta \hat{x}(t_{k+1}/t_k) + K [t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] \cdot \\ &\cdot \left\{ \delta y_{k+1} - H(t_{k+1}) \delta \hat{x}(t_{k+1}/t_k) \right\} . \end{aligned} \quad (2.34)$$

O desenvolvimento da Equação 2.34 leva a:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \hat{x}(t_{k+1}/t_k) + K [t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] \cdot \\ &\cdot \left\{ y_{k+1} - h [\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}] \right\} . \end{aligned} \quad (2.35)$$

O filtro resultante, filtro estendido de Kalman, tem estrutura semelhante ao linear e é resumido a seguir.

• Predição (propagação)

Integrando-se a Equação 2.33 em t , de t_k a t_{k+1} obtêm-se o estado propagado:

$$\hat{x}(t_{k+1}/t_k) = \hat{x}(t_k/t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f [\hat{x}(t/t_k)] dt . \quad (2.36)$$

Para a matriz de covariância do erro no estado propagada, obtêm-se:

$$\begin{aligned} P(t_{k+1}/t_k) &= \phi [t_{k+1}, t_k; \hat{x}(t_k/t_k)] P(t_k/t_k) \\ &\cdot \phi^T [t_{k+1}, t_k; \hat{x}(t_k/t_k)] + r(t_k) Q(t_k) r^T(t_k) . \end{aligned} \quad (2.37)$$

• Ganho

$$\begin{aligned}
 K [t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] &= P(t_{k+1}/t_k) H^T [t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] \cdot \\
 &\cdot \left\{ H [t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] P(t_{k+1}/t_k) \cdot \right. \\
 &\cdot \left. H^T [t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] + R_{k+1} \right\}^{-1} .
 \end{aligned}
 \tag{2.38}$$

• Atualização (correção)

Para a estimativa do estado, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \hat{x}(t_{k+1}/t_k) + K [t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] \cdot \\
 &\cdot \left\{ y_{k+1} - h [\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}] \right\} .
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

Para matriz de covariância do erro no estado, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 P(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \left\{ I - K [t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] H [t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] \right\} \cdot \\
 &\cdot P(t_{k+1}/t_k) .
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

Para a conveniência e leveza de índices, as Expressões de 2.36 a 2.40, identificados respectivamente nas equações que se seguem, são expressas por:

$$\hat{x}(k+1/k) = \hat{x}(k/k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f [\hat{x}(t/k)] dt , \tag{2.41}$$

$$P(k+1/k) = \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T , \tag{2.42}$$

$$K_{k+1} = P(k+1/k) H_{k+1}^T [H_{k+1} P(k+1/k) H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} , \tag{2.43}$$

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k+1/k) + K_{k+1} \left\{ y_{k+1} - h_{k+1} [\hat{x}(k+1/k)] \right\}, \quad (2.44)$$

$$P(k+1/k+1) = [I - K_{k+1} H_{k+1}] P(k+1/k); \quad (2.45)$$

que representam o algoritmo recursivo a ser empregado. A Figura 2.1 descreve o algoritmo na forma de diagrama de fluxos.

2.4 - COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

As equações básicas foram descritas, e o modo como elas são utilizadas e identificadas com o problema de determinação de órbita são apresentadas a seguir.

De acordo com a Equação 2.13, a dinâmica do estado é regida por:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + G(t) \omega(t),$$

onde $f(x, t)$ é a função vetorial, que representa as equações de movimento do sistema, modelado no estimador. A função f será decomposta na forma:

$$f(x, t) = f_m(x, t) + f_{nm}(x, t), \quad (2.46)$$

onde $f_m(x, t)$ é a dinâmica modelada no estimador, sendo um modelo pobre, que considera o problema dos dois corpos mais a influência do achatamento terrestre, cujas equações são dadas no Apêndice A; e $f_{nm}(x, t)$ é uma modelagem, considerada somente quando se inclui um procedimento adaptativo de compensação, conforme será posteriormente (Capítulo 3), e representa a parcela não-modelada da dinâmica. O emprego da Equação 2.46 será dividida em duas etapas. Inicialmente $f_{nm}(x, t) \equiv 0$, a fim de testar um procedimento para compensar o desconhecimento parcial do sistema dinâmico por meio do ruído dinâmico ω , cuja covariância Q é estimada adaptativamente (Seção 3.3) com base no resíduo das observações. Posteriormente, uma técnica de compensação do modelo dinâmico será usada para estimar os efeitos não-modelados, aproximando $f_{nm}(x, t)$ por um processo de primeira ordem de Gauss-Markov, quando, então, $f_{nm}(x, t)$ é considerado não-nulo (Seção 3.4).

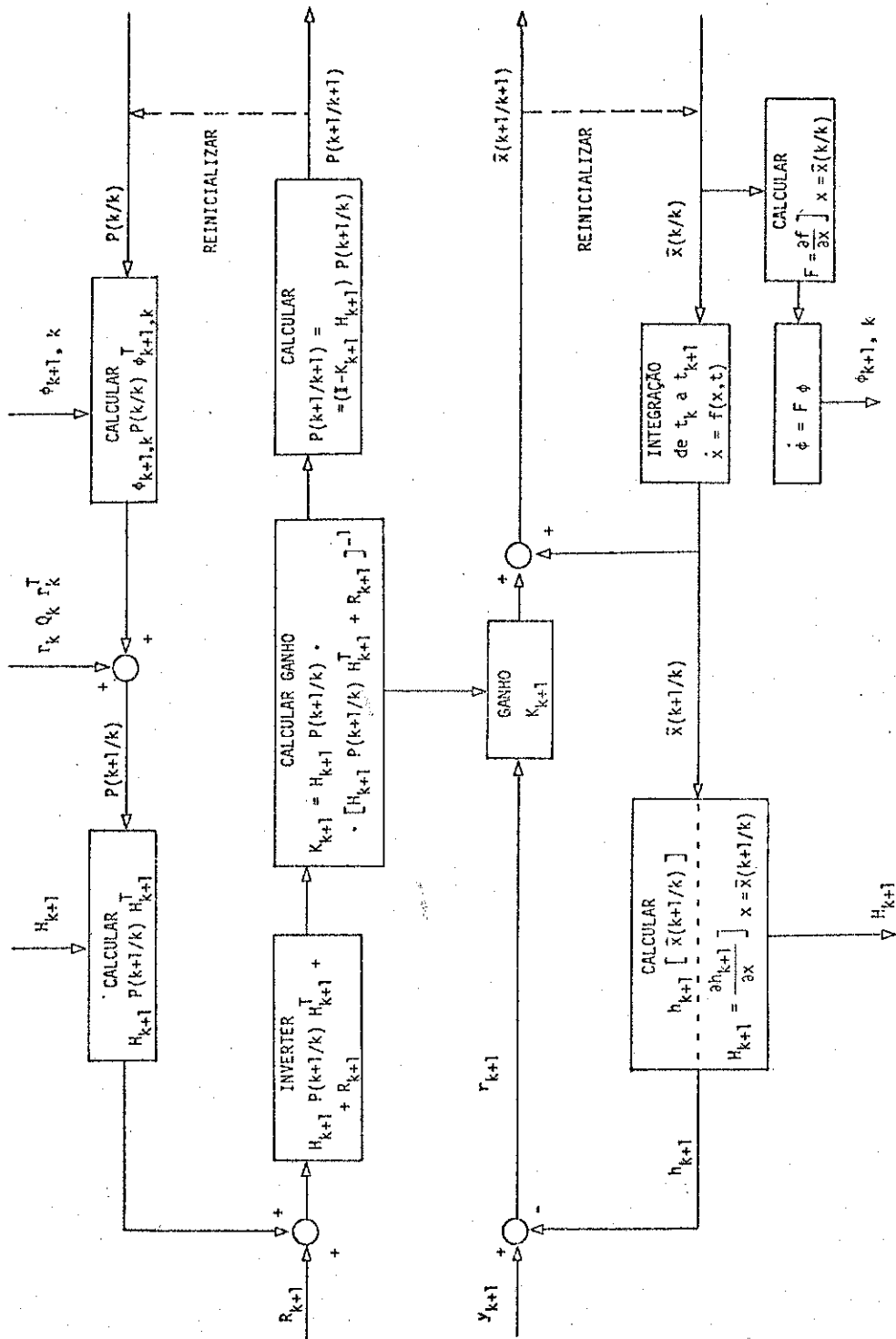


Fig. 2.1 - Diagrama de fluxo do filtro estendido de Kalman.

Para efeito de propagação da matriz de covariância do erro no estado, é necessário o cálculo da matriz de transição ϕ , devido à discretização efetuada. Recapitulando,

$$P(k+1/k) \triangleq E \left[[x(k+1) - \bar{x}(k+1/k)] [x(k+1) - \bar{x}(k+1/k)]^T \right] = \\ = \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T .$$

A matriz ϕ é obtida integrando-se:

$$\dot{\phi}_{t,k} = F [\bar{x}(k/k)] \phi_{t,k} ,$$

para $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, com a condição inicial $\phi_{k,k} = I$, onde I é a matriz identidade; F é a matriz de derivadas parciais, dada por:

$$F [\bar{x}(k/k)] = \left. \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right]_{x = \bar{x}(k/k)} ,$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial f_m(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial f_{nm}(x,t)}{\partial x} .$$

A matriz $\partial f_{nm}(x,t)/\partial x$ é calculada no Apêndice C; a matriz $\partial f_m(x,t)/\partial x$ será preparada quando houver a inclusão da técnica de compensação do modelo dinâmico (Seção 3.4).

A equação não-linear, que representa o modelo escalar de observações, é dado por:

$$y_k = h_k(x_k) + v_k . \quad (2.47)$$

Dois tipos de observações serão simuladas:

- . observação de "range",
- . observação de "range-rate".

Cada uma delas é caracterizada pela função h_k , exposta detalhadamente no Apêndice B.

Identifica-se a Equação dinâmica 2.13 do filtro estendido de Kalman com a Equação 2.46. Da mesma forma, identifica-se a Equação de medidas 2.23 com a Equação 2.47. Assim, completa-se a associação do problema de determinação de órbita com as equações do filtro estendido de Kalman, restando somente a aplicação do algoritmo seqüencial. A Figura 2.2 apresenta o diagrama de blocos, utilizado num intervalo de tempo genérico, para o programa de estimação de órbita.

2.5 - PROCESSAMENTO SEQÜENCIAL DO VETOR DE OBSERVAÇÕES, CASO LINEAR

Suponha-se que num instante qualquer t_k , m fontes produzem dados de medida estatisticamente independentes. O vetor de medidas pode ser representado por:

$$y_k \triangleq \begin{bmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \\ \vdots \\ y_k^m \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} H_k^1 \\ H_k^2 \\ \vdots \\ H_k^m \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \\ \vdots \\ v_k^m \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

A hipótese de independência estatística das medidas implica que

$$E [v_k^i (v_k^j)^T] = R_k^i \delta_{ij} \quad (2.49)$$

onde R_k é a matriz diagonal de covariância do ruído nas medidas, R_k^i é o elemento i da diagonal de R_k , e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Hã duas maneiras de processar as medidas:

- Processamento simultâneo.
- Processamento seqüencial.

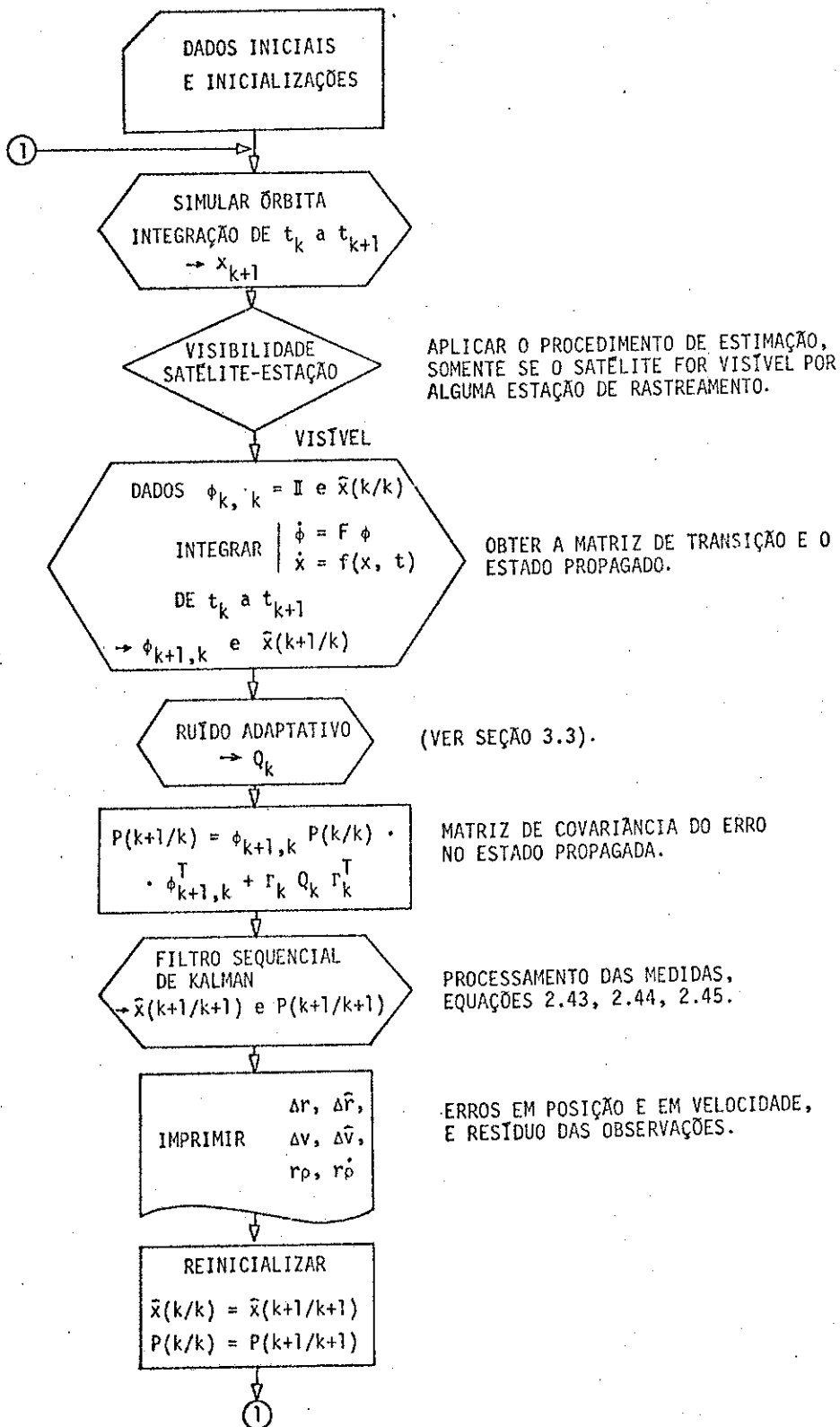


Fig. 2.2 - Diagrama de blocos do programa de estimação de órbita.

No processamento simultâneo, o vetor de medidas \bar{e} é processado de uma só vez, em "batch", conforme descrito pelas Equações 2.43, 2.44 e 2.45. Já o processamento seqüencial é uma alternativa equivalente (Sorenson, 1966) que processa uma medida de cada vez, desde que elas sejam não-correlacionadas; i.é., R_k seja diagonal. Sua maior vantagem reside no fato de evitar a inversão da Equação matricial 2.43, de dimensão $m \times m$. Neste trabalho adota-se este procedimento, pois, além da vantagem descrita, permite um tratamento do efeito da não-linearidade das medidas e facilita a implementação do procedimento de estimação adaptativa do ruído dinâmico (Seção 3.3).

No processamento seqüencial, cada dado é tratado separadamente; assim, o dado y_k^1 é usado para obter uma estimativa $\hat{x}(k/k)$ e a matriz de covariância $P(k/k)$, impondo $y_k \equiv y_k^1$. Quando estes cálculos são efetuados, y_k^2 é processado para obter novos valores de $\hat{x}(k/k)$ e $P(k/k)$. Assim, cada dado é processado até que o último y_k^m tenha sido incluído. A estimativa e a matriz de covariância P resultantes são seus valores finais no instante t_k . Então, o tempo é atualizado para t_{k+1} e o ciclo é repetido. Em suma, seja $y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^m$ m dados de observações estatisticamente independentes, então:

- Passo 1: Forma-se $\hat{x}^1(k/k)$, $P^1(k/k)$ e K_k^1 , usando-se as Equações 2.6, 2.7 e 2.8, e o primeiro dado, y_k^1 , é tratado como $y_k \equiv y_k^1$.

- Passo 2: Baseado em $P^1(k/k)$ e $\hat{x}^1(k/k)$, processa-se y_k^2 usando-se:

$$K_k^2 = P^1(k/k) (H_k^2)^T [H_k^2 P^1(k/k) (H_k^2)^T + R_k^2]^{-1}, \quad (2.50)$$

$$\hat{x}^2(k/k) = \hat{x}^1(k/k) + K_k^2 [y_k^2 - H_k^2 \hat{x}^1(k/k)], \quad (2.51)$$

$$P^2(k/k) = P^1(k/k) - K_k^2 H_k^2 P^1(k/k). \quad (2.52)$$

- Passo 3: Repete-se o passo 2 com o próximo dado e todos os índices superiores adicionados de uma unidade. Continua-se esta seqüência até todos os m dados terem sido processados. Então, a estimativa do estado e a matriz de covariância do erro no estado são:

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}^m(k/k) , \quad (2.53)$$

$$P(k/k) = P^m(k/k) . \quad (2.54)$$

Assim, deve-se notar que a inversão requerida na Expressão 2.50 é simplesmente a de um escalar. A não-linearidade das medidas pode ser tratada numa forma linearizada análoga, conforme se verá na Seção 3.2.

CAPÍTULO 3

PROCEDIMENTOS ABORDADOS

3.1 - INTRODUÇÃO

O Capítulo 3 descreve os procedimentos utilizados para melhorar o desempenho do processo de estimação. Inicialmente, trata-se a não-linearidade das observações, quando utilizado o processamento sequencial do vetor de observações. Em seguida, desenvolve-se um procedimento automatizado de estimação da dosagem do ruído dinâmico, necessário para estabilizar o filtro de Kalman (Jazwinski, 1969; Brinati, 1976). Finalmente, aborda-se a questão da má modelagem da dinâmica do estado, incluindo-se uma técnica de compensação do modelo dinâmico, que estima a porção não-modelada da dinâmica (Ingram, 1971; Rios Neto, 1973). Cada um destes procedimentos é estudado e desenvolvido independentemente nas seções que se seguem. Desta forma, qualquer um deles pode ser aplicado a problemas semelhantes, sem necessidade de reformulação ou ajuste do procedimento para um caso específico. Todas as equações são desenvolvidas, usando-se o filtro estendido de Kalman, com processamento sequencial do vetor de observações.

3.2 - A NÃO-LINEARIDADE DAS OBSERVAÇÕES

No filtro de Kalman, a hipótese inicial é de que tanto o sistema como as medidas são descritas por equações lineares. Torna-se, então, necessário usar a linearização para o tratamento de problemas não-lineares. O filtro estendido de Kalman é uma extensão do linear, que supõe a modelagem do sistema correta e relineariza as equações sobre a estimativa corrente. Sem questionar a modelagem do sistema dinâmico, i.é., supondo-a correta, a não-linearidade das medidas se acentua, principalmente quando estas são comparáveis ao erro devido à linearização da equação de observações. Os termos de ordem superior, desprezados nessa linearização, não são desprezíveis e degradam a estimativa.

No processamento seqüencial do vetor de observações, usa-se a equação de medidas na forma linearizada. A hipótese de independência estatística entre as medidas, como no caso linear, é também formulada, de modo que a matriz de covariância do ruído nas medidas, R_k , possa ser considerada diagonal. Assim, dadas as observações por:

$$y_k = h_k(x_k) + v_k ,$$

lineariza-se esta expressão em torno de uma referência \bar{x}_k , obtendo-se:

$$y_k - \bar{y}_k = H_k(\bar{x}_k) (x_k - \bar{x}_k) + v_k ,$$

conforme descrito no Capítulo 2. Para manter o problema na forma linear, define-se:

$$\tilde{y}_k \triangleq y_k - \bar{y}_k + H_k(\bar{x}_k) \bar{x}_k . \quad (3.1)$$

Portanto,

$$\tilde{y}_k = H_k(\bar{x}_k) x_k + v_k . \quad (3.2)$$

Comparando-se \tilde{y}_k com o vetor de observações correspondente à Equação 2.48, segue-se que:

$$\tilde{y}_k = \begin{bmatrix} \tilde{y}_k^1 \\ \tilde{y}_k^2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_k^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_k^1(\bar{x}_k) \\ H_k^2(\bar{x}_k) \\ \vdots \\ H_k^m(\bar{x}_k) \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \\ \vdots \\ v_k^m \end{bmatrix} . \quad (3.3)$$

A trajetória de referência \bar{x}_k é definida por:

$$\bar{x}_k \triangleq \bar{x}(k/k-1) , \quad (3.4)$$

onde $\bar{x}(k/k-1)$ é a estimativa propagada do estado a partir do instante $k-1$. Portanto, basta seguir os passos já descritos no processamento se qüencial do vetor de observações, caso linear:

- Passo 1: Achar $\hat{x}(k/k-1)$, $P(k/k-1)$ e usar $y_k \equiv \tilde{y}_k^1$ e $\bar{x}_k = \bar{x}(k/k-1)$ para formar:

$$K_k^1 = P(k/k-1) [H_k^1(\bar{x}_k)]^T \left\{ H_k^1(\bar{x}_k) P(k/k-1) [H_k^1(\bar{x}_k)]^T + R_k^1 \right\}^{-1}, \quad (3.5)$$

$$\hat{x}^1(k/k) = \bar{x}_k + K_k^1 (\tilde{y}_k^1 - H_k^1(\bar{x}_k) \bar{x}_k), \quad (3.6)$$

$$P^1(k/k) = P(k/k-1) - K_k^1 H_k^1(\bar{x}_k) P(k/k-1). \quad (3.7)$$

- Passo 2: Com $y_k \equiv \tilde{y}_k^2$ formar

$$K_k^2 = P^1(k/k) [H_k^2(\bar{x}_k)]^T \left\{ H_k^2(\bar{x}_k) P^1(k/k) [H_k^2(\bar{x}_k)]^T + R_k^2 \right\}^{-1} \quad (3.8)$$

$$\hat{x}^2(k/k) = \hat{x}^1(k/k) + K_k^2 [\tilde{y}_k^2 - H_k^2(\bar{x}_k) \hat{x}^1(k/k)], \quad (3.9)$$

$$P^2(k/k) = P^1(k/k) - K_k^2 H_k^2(\bar{x}_k) P^1(k/k). \quad (3.10)$$

- Passo 3: Repetir o passo 2 com o próximo dado e incrementar os índices superiores de uma unidade. Após o processamento de todos os dados, toma-se:

$$\hat{x}(k/k) = \hat{x}^m(k/k), \quad (3.11)$$

$$P(k/k) = P^m(k/k).$$

3.3 - ESTIMAÇÃO DO RUÍDO DINÂMICO POR PROCESSO ADAPTATIVO

3.3.1 - INTRODUÇÃO

O procedimento a ser desenvolvido, visa, essencialmente, prevenir a divergência que pode afetar seriamente a utilidade do filtro de Kalman. Pode ocorrer que os erros reais de estimação excedam os valores preditos pela variância do erro; obtidos após a aplicação do filtro. De fato, o erro real pode tornar-se ilimitado, embora a variância do erro seja muito pequena. Este fenômeno é chamado divergência. A divergência é caracterizada pelo crescimento dos resíduos, diferenças entre os valores observados e os valores estimados, que produzem estimativas equivocadas do estado real, envolvendo, conseqüentemente, as estatísticas referentes ao processo. Vários fatores contribuem para que ocorra tal fenômeno. Basicamente, as fontes de erros são três:

- erros devidos às não-linearidades e conseqüentes linearizações,
- erros devidos ao procedimento computacional aplicado,
- erros devidos à má modelagem do sistema físico.

Aqui, justifica-se a modelagem imprecisa, propositadamente adotada no trabalho. Em um satélite em órbita, muitas são as forças agentes, que podem ser de caráter aleatório, devido às variações ambientais, ou mesmo não-identificáveis. Mesmo as forças conhecidas são difíceis de serem modeladas matematicamente, e quando o são, sobrecarregam demasiadamente o cálculo computacional, podendo até impossibilitar a estimação de órbita em tempo real. Assim, na prática, procura-se um modelo simples que aproxime a situação real, sem sobrecarregar os cálculos. É exatamente o que se faz neste trabalho.

Deste modo, quando técnicas de compensação não são usadas, devido à modelagem dinâmica imprecisa, o estimador "aprende bem o problema errado"; i.é., a matriz de covariância do erro no estado se torna irrealisticamente pequeno e, portanto, otimista. Como conseqüência, o ga

nho se torna pequeno, de forma que o estimador extrai pouca ou nenhuma informação dos dados de medidas posteriores. Em outras palavras, a mã modelagem dinâmica, que é usada para propagar o estado, fornece uma estimativa a priori do estado, imprecisa, que não pode ser melhorada pela filtragem dos dados, pelo fato do ganho ter valor demasiadamente pequeno. Explicitamente, nota-se a influência do ganho na atualização da estimativa, por meio da Equação 2.44:

$$\hat{x}(k+1/k+1) = \hat{x}(k+1/k) + K_{k+1} \left\{ y_{k+1} - h_{k+1} [\hat{x}(k+1/k)] \right\} ,$$

onde $\hat{x}(k+1/k)$ é o valor da estimativa, propagada através do modelo dinâmico impreciso; K_{k+1} é o ganho; e o resíduo $y_{k+1} - h_{k+1} [\hat{x}(k+1/k)]$ representa a informação fornecida pelos dados de observação. Pela Equação 2.43 do ganho:

$$K_{k+1} = P(k+1/k) H_{k+1}^T [H_{k+1} P(k+1/k) H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} ,$$

nota-se que quando $P(k+1/k)$, a matriz de covariância do erro no estado, diminui, o ganho K_{k+1} também diminui. Desde que a estimativa a priori é precária, os resíduos das observações aumentam em magnitude. Porém, esta informação não é captada pelo filtro, pois o ganho é pequeno; segue-se então a divergência, com o estado estimado se afastando definitivamente do estado real.

A divergência será resolvida através da quantidade física avaliável no processo de filtragem, ou seja, o resíduo das observações. Simultânea e adaptativamente, estima-se a variância do ruído dinâmico a ser incrementada à matriz de covariância do erro no estado, por meio da parcela $\Gamma_k Q_k \Gamma_k^T$, constante da Equação 2.42:

$$P(k+1/k) = \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T .$$

Assim, impede-se que ela se torne demasiadamente pequena e, consequentemente, forneça uma avaliação otimista, não-correspondente à realidade. Por conseguinte, o ganho se "abre" e permite que as novas medidas for

neçam informações para o filtro, é a estimativa do erro \bar{e} melhorada. Assim, o ruído dinâmico estimado adaptativamente tem por objetivo cobrir erros de modelagem e não-linearidades envolvidas na linearização.

O requisito básico do procedimento é a imposição de consistência entre os resíduos e suas estatísticas. Com isso, consegue-se desenvolver equações para estimar a variância do ruído dinâmico. No equacionamento a ser descrito, o requisito básico é o mesmo do trabalho de Jazwinski (1970), porém, há inclusão de hipóteses adicionais que levam a um procedimento modificado (Rios Neto e Kuga, 1981).

Outra hipótese, implícita, formulada é sobre a natureza independente dos ruídos ω , de forma que a matriz de covariância, Q , associada ao ω , pode ser considerada diagonal:

$$E [\omega_k \omega_j^T] = Q_k \delta_{kj} ,$$

onde Q_k é uma matriz $r \times r$ diagonal, de elementos q_i , $i = 1, \dots, r$, que representam as variâncias do ruído dinâmico.

3.3.2 - HIPÓTESE BÁSICA

Dado o sistema dinâmico

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + G(t) \omega(t) ,$$

com as variáveis descritas conforme a Equação 2.13, e

$$E [\omega(t) \omega^T(\tau)] = Q(t) \delta(t - \tau) ,$$

deve-se lembrar que ω é supostamente um "step-process"; ou seja:

$$E [\omega_k \omega_j^T] = Q_k \delta_{kj} .$$

O sistema linearizado, conforme a Equação 2.20, é dado por:

$$\delta x(k+1) = \phi_{k+1,k} \delta x(k) + \Gamma_k \omega_k .$$

A modelagem das medidas é dada pela Equação 2.23:

$$y_k = h_k(x_k) + v_k ,$$

e é admitida escalar, sem que haja perda de generalidade (Sorenson, 1966). A linearização produz:

$$\delta y_k = H_k \delta x(k) + v_k ,$$

com $H_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial x} \right]_{x = \hat{x}(k/k-1)}$, conforme a Relação 2.28.

Define-se o resíduo "observado" (avaliável) como:

$$r(k+1) = y_{k+1} - \hat{y}_{k+1} , \quad (3.12)$$

onde y é a observação e \hat{y} é a observação estimada. Entende-se \hat{y}_{k+1} como a observação estimada, condicionada a todas as outras observações anteriores; i.é.,

$$\hat{y}_{k+1} = E [y_{k+1} / y_k, y_{k-1}, \dots, y_1] \cong h_{k+1}(\hat{x}(k+1/k)) ,$$

onde $\hat{x}(k+1/k)$ é a estimativa propagada do estado, a partir de $\hat{x}(k/k)$ até o instante $k+1$. Define-se o resíduo "verdadeiro" (Rios Neto e Kuga, 1981) por:

$$r_v(k+1) = y_{k+1}^v - \hat{y}_{k+1} , \quad (3.13)$$

onde y^v é a observação verdadeira, real, que se obteria se não houvesse erros de medida. Portanto, a relação entre o resíduo observado e o verdadeiro é:

$$r(k+1) = r_v(k+1) + v_{k+1} \quad (3.14)$$

A hipótese fundamental de consistência entre o resíduo e sua estatística é dado por Jazwinski (1969). Ela é obtida supondo-se que o resíduo verdadeiro tenha distribuição gaussiana e determinando-se a variância do ruído dinâmico, q , o qual produz o mais provável resíduo verdadeiro. Algebricamente este conceito é expresso por:

$$\max_{q \geq 0} p [r_v] ,$$

onde p é a densidade de probabilidade do resíduo (Jazwinski, 1970). A restrição $q \geq 0$ é coerente com a propriedade de uma variância. A aplicação desta operação, maximização da ocorrência do resíduo verdadeiro, leva a:

$$r_v^2(k+1) = E [r_v^2(k+1)] \quad (3.15)$$

Com o desenvolvimento desta hipótese, obter-se-á um algoritmo para estimar a variância do ruído dinâmico.

3.3.3 - A EQUAÇÃO DE PSEUDO-OBSERVAÇÕES

O desenvolvimento da hipótese básica, Equação 3.15, leva a uma equação semelhante à de medidas, denominada equação de pseudo-observações. Aqui, mostra-se explicitamente tal desenvolvimento.

Dado a Equação 3.15, desenvolve-se separadamente cada membro. Assim, com uma aproximação de primeira ordem, o desdobramento da Equação 3.12 leva a:

$$\begin{aligned} r(k+1) &= y_{k+1} - \hat{y}_{k+1} \\ &= H_{k+1} \delta x(k+1) + v_{k+1} = H_{k+1} [x(k+1) - \hat{x}(k+1/k)] + v_{k+1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$r(k+1) = H_{k+1} \left\{ \phi_{k+1,k} [x(k) - \bar{x}(k/k)] + \Gamma_k \omega_k \right\} + v_{k+1} \quad (3.16)$$

De acordo com a Equação 3.14 tem-se:

$$r_v(k+1) = H_{k+1} \left\{ \phi_{k+1,k} [x(k) - \bar{x}(k/k)] + \Gamma_k \omega_k \right\} \quad (3.17)$$

Quadrando-se e aplicando-se o operador expectância tem-se:

$$E [r_v^2(k+1)] = H_{k+1} \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T H_{k+1}^T + H_{k+1} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T H_{k+1}^T \quad (3.18)$$

Relaciona-se o quadrado do resíduo por meio da Equação 3.14; i.ê.,

$$r(k+1) = r_v(k+1) + v_{k+1} \quad (3.19)$$

$$r_v^2(k+1) = r^2(k+1) - 2 r(k+1) v_{k+1} + v_{k+1}^2$$

Numa forma mais conveniente, a Equação 3.19 pode ser definida como:

$$r_v^2(k+1) = r^2(k+1) + \eta'_{k+1} \quad (3.20)$$

onde se supõe que η' é um ruído. Deduz-se suas estatísticas a partir da relação:

$$\eta'_{k+1} = v_{k+1}^2 - 2 r(k+1) v_{k+1}$$

Assim, as estatísticas são:

• Média

$$E [\eta'_{k+1}] = E [v_{k+1}^2 - 2 r(k+1) v_{k+1}] = R_{k+1} \quad (3.21)$$

• Variância

$$\begin{aligned}
 E \left[(\eta'_{k+1} - E [\eta'_{k+1}])^2 \right] &= E \left[(v_{k+1}^2 - 2r(k+1) v_{k+1} - R_{k+1})^2 \right] = \\
 &= E \left[v_{k+1}^4 - 4r(k+1) v_{k+1}^3 - 2R_{k+1} v_{k+1}^2 + 4r^2(k+1) v_{k+1}^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 4r(k+1) v_{k+1} R_{k+1} + R_{k+1}^2 \right].
 \end{aligned}$$

Desde que $E [r(k+1)] = E [v_{k+1}] = 0$; $E [r^2(k+1)] = r^2(k+1)$; $E [v_{k+1}^2] = R_{k+1}$; $E [v_{k+1}^3] = 0$ e $E [v_{k+1}^4] = 3 R_{k+1}^2$, a expressão torna-se:

$$\begin{aligned}
 E \left[(\eta'_{k+1} - E [\eta'_{k+1}])^2 \right] &= 3R_{k+1}^2 - 2R_{k+1} R_{k+1} + 4r^2(k+1) R_{k+1} + \\
 + R_{k+1}^2 &= 4r^2(k+1) R_{k+1} + 2R_{k+1}^2. \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Com a aplicação da hipótese básica, expressa na Equação 3.15, e com o auxílio das Equações 3.18 e 3.20, tem-se:

$$\begin{aligned}
 r^2(k+1) + \eta'_{k+1} &= H_{k+1} \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T H_{k+1}^T + \\
 + H_{k+1} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T H_{k+1}^T. \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Em seguida, transforma-se η' em um ruído branco gaussiano η , por meio de:

$$\eta_{k+1} \triangleq \eta'_{k+1} - R_{k+1}.$$

Portanto,

$$E [\eta_{k+1}] = E [\eta'_{k+1} - R_{k+1}] = 0,$$

$$E [\eta_{k+1}^2] = E \left[(\eta'_{k+1} - E [\eta'_{k+1}])^2 \right] = 4r^2(k+1) R_{k+1} + 2R_{k+1}^2.$$

O próximo passo consiste em introduzir o ruído η na Equação 3.23:

$$r^2(k+1) + R_{k+1} + \eta_{k+1} = H_{k+1} \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T H_{k+1}^T + \\ + H_{k+1} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T H_{k+1}^T .$$

Desde que η_{k+1} tem média nula e é um ruído estatístico, pode-se trocá-lo de membro sem trocar o sinal:

$$r^2(k+1) + R_{k+1} - H_{k+1} \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T H_{k+1}^T = \\ = H_{k+1} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T H_{k+1}^T + \eta_{k+1} . \quad (3.25)$$

Lembrando-se que os ruídos dinâmicos são considerados independentes entre si, a matriz Q_k é diagonal. Assim, seja Q_k uma matriz diagonal, cujos elementos são q_i , $i = 1, 2, \dots, r$. O desenvolvimento do termo em Q_k da Equação 3.25 gera:

$$H_{k+1} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T H_{k+1}^T = (H_1 \Gamma_{11} + H_2 \Gamma_{21} + \dots + H_n \Gamma_{n1})^2 q_1 + \dots + \\ + (H_1 \Gamma_{1r} + H_2 \Gamma_{2r} + \dots + H_n \Gamma_{nr})^2 q_r = \\ = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^n H_j \Gamma_{ji} \right)^2 q_i , \quad (3.26)$$

onde H_j representa os elementos do vetor H_{k+1} , e Γ_{ji} representa os elementos da matriz Γ_k . Portanto,

$$H_{k+1} \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T H_{k+1}^T = M_{k+1} q(k+1) , \quad (3.27)$$

onde M_{k+1} é um vetor de dimensão r , definido por:

$$M_{k+1} \triangleq \left[\left(\sum_{j=1}^n H_j \Gamma_{j1} \right)^2 : \left(\sum_{j=1}^n H_j \Gamma_{j2} \right)^2 : \dots : \left(\sum_{j=1}^n H_j \Gamma_{jr} \right)^2 \right] , \quad (3.28)$$

e $q(k+1)$ é o vetor dos elementos da diagonal da matriz Q_k , dado por:

$$q(k+1) \triangleq [q_1 : q_2 : \dots : q_r]^T.$$

Define-se a pseudo-observação, lado esquerdo da Equação 3.25, por:

$$z(k+1) \triangleq r^2(k+1) + R_{k+1} - H_{k+1} \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T H_{k+1}^T, \quad (3.29)$$

e a equação de uma pseudo-observação, de acordo com a Equação 3.25, é dada por:

$$z(k+1) = M_{k+1} q(k+1) + \eta_{k+1}. \quad (3.30)$$

Resumindo, z é a pseudo-observação, cujo valor determinístico é dado pela Equação 3.29; M é o vetor definido na Relação 3.28; q é o vetor dos elementos da diagonal da matriz Q , a ser estimado; e η é o ruído na pseudo-observação, cuja estatística é dada na Relação 3.24. A Equação 3.30 caracteriza a equação de pseudo-observações, a partir da qual se extrai informações para a estimativa da matriz Q .

3.3.4 - FILTRO DE KALMAN APLICADO ÀS PSEUDO-OBSERVAÇÕES

O passo seguinte é o processamento das pseudo-observações, Equação 3.30. Neste trabalho, utiliza-se a estrutura seqüencial do filtro de Kalman para efetuar a filtragem das pseudo-observações. Quaisquer outros métodos, como mínimos quadrados, ou máxima verossimilhança, poderiam ser utilizados. A motivação para usar o filtro de Kalman é devida ao fato da mesma rotina matemática, que é utilizada para processar as observações, poder também ser aplicada às pseudo-observações. Segue-se o esquema do filtro dado na Seção 2.2. Assim, o ganho K^q , referente ao estimador q , é dado por:

$$K_{k+1}^q = P^q(k+1/k) M_{k+1}^T [M_{k+1} P^q(k+1/k) M_{k+1}^T + 4 r^2(k+1) R_{k+1} + 2 R_{k+1}^2]^{-1}, \quad (3.31)$$

onde $P^q(k+1/k)$ é a matriz de covariância a priori do erro em q . A atualização da estimativa de q é obtida por:

$$\hat{q}(k+1/k+1) = \hat{q}(k+1/k) + K_{k+1}^q [z(k+1) - M_{k+1} \hat{q}(k+1/k)] , \quad (3.32)$$

onde $\hat{q}(k+1/k)$ é a estimativa a priori de q . A atualização da matriz de covariância do erro em q , é obtida por:

$$P^q(k+1/k+1) = [I - K_{k+1}^q M_{k+1}] P^q(k+1/k) . \quad (3.33)$$

Analogamente às observações, as pseudo-observações são tratadas como tal e são processadas seqüencialmente, como descritas na Seção 2.5. Após o processamento das pseudo-observações, impõe-se o requisito da variância ser positiva; ou seja, se $\hat{q}_i < 0$, então $\hat{q}_i = 0$, com $i = 1, 2, \dots, r$, onde \hat{q}_i é o i -ésimo elemento do vetor $\hat{q}(k+1/k+1)$.

Finalmente, incluem-se na equação de propagação dos erros no estado as variâncias assim obtidas:

$$P(k+1/k) = \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T ,$$

com $Q_k = \text{diag} \{ \hat{q} \}$; i.é., Q_k é a matriz diagonal $r \times r$, cujos elementos são formados pelo vetor \hat{q} , fornecidos pelo procedimento adaptativo descrito.

3.3.5 - INFORMAÇÃO A PRIORI

Na Seção 3.3.4, desenvolveu-se uma estrutura seqüencial para estimar a variância do ruído dinâmico, q , por meio da filtragem das pseudo-observações. Agora, deve-se criar informações a priori coerentes para o estimador de q . As informações a priori devem fornecer os valores preditos (propagados) de q e P^q , $\hat{q}(k+1/k)$ e $P^q(k+1/k)$, respectivamente.

Para este trabalho duas situações se configuram. A primeira situação ocorre quando não há, absolutamente, nenhum meio de avaliar

estes valores a priori. Tal acontece, quando se usa o filtro estendido de Kalman usual, onde apenas o estado (no caso posição e velocidade) é estimado. Neste caso, é proposto um critério a favor da segurança. Assim, a avaliação dos valores a priori de q e P^q é geral, no sentido do usuário poder usar o algoritmo de Kalman, sem a Compensação do Modelo Dinâmico - CMD - (a CMD será tratada na Seção 3.4). A segunda situação ocorre quando há possibilidade de avaliação, pelo menos da ordem de grandeza dos valores a priori de q e P^q . Neste outro caso, a situação é particular no sentido de ser aplicável quando a CMD é utilizada. A primeira situação é desenvolvida a seguir. A segunda será abordada quando a CMD for descrita na Seção 3.4.

Quando não há nenhuma avaliação, ou seja, quando ocorre a primeira situação, cria-se informações a priori, inicializando-as a favor da segurança. Assim, na primeira vez em que houver pseudo-observações disponíveis, utilizar-se-á um critério a favor da segurança, para gerar tais informações. Para tanto, impõe-se algumas hipóteses:

a) O vetor q a priori, $\hat{q}(k+1/k)$, contém elementos iguais; i.é., $\hat{q}(k+1/k) = \frac{1}{2} \bar{\alpha}(k+1) \mathbb{I}_r$, onde $\bar{\alpha}(k+1)$ é um escalar e \mathbb{I}_r é um vetor unitário de dimensão r , $\mathbb{I}_r = [1 : 1 : \dots : 1]^T$.

b) $\bar{\alpha}$ é escolhido pelo seguinte critério:

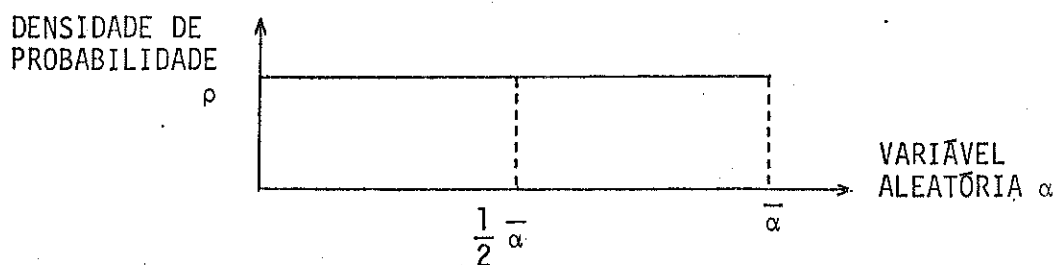
$$\bar{\alpha}(k+1) = \max \{ \alpha_j(k+1) : |(M_{k+1})_j \alpha_j(k+1) \mathbb{I}_r| = |z^j(k+1)| \},$$

com $j = 1, \dots, m_{k+1}$, onde m_{k+1} é o número de observações efetuadas no instante $k+1$; $|\cdot|$ é o valor absoluto da variável; M é o vetor expresso na Relação 3.28, referente à observação j ; e z^j é a j -ésima componente do vetor de pseudo-observações. De modo mais explícito, a relação acima é um método para achar o maior valor α , que resulta da expressão das pseudo-observações; i.é., cada $\alpha_j(k+1)$ é calculada por:

$$\alpha_j(k+1) = \left| \frac{z^j(k+1)}{(M_{k+1})_j \mathbb{I}_r} \right| \quad (3.34)$$

e, em seguida, seleciona-se o maior deles, $\bar{\alpha}$. Logicamente, para efeito de inicialização, $\hat{q}(k+1/k)$ está a favor da segurança.

c) Caracterização do sistema com distribuição uniforme: Para o cálculo da variância de α , admite-se uma distribuição uniforme, cuja média é $\frac{1}{2} \bar{\alpha}$ com $\bar{\alpha}$ escolhido pelo critério constante no item b. Esta é uma hipótese razoável, na falta de maiores informações acerca do comportamento da variável α .



Conforme a propriedade de uma função de distribuição, vale a seguinte relação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho \, d\alpha = 1 ,$$

com ρ , densidade de probabilidade, constante, devido à hipótese da distribuição uniforme ter sido adotada. O valor de ρ é obtido por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho \, d\alpha = \int_0^{\bar{\alpha}} \rho \, d\alpha = \rho \bar{\alpha} = 1 \rightarrow \rho = \frac{1}{\bar{\alpha}} . \quad (3.35)$$

A variância é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^2 &= E [(\alpha - \mu_{\alpha})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha - \mu_{\alpha})^2 \rho \, d\alpha = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha - \mu_{\alpha})^2 \, d\alpha = \\ &= \frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{1}{3} \left[(\alpha - \mu_{\alpha})^3 \right]_0^{\bar{\alpha}} = \frac{1}{3\bar{\alpha}} \frac{\bar{\alpha}^3}{4} = \frac{\bar{\alpha}^2}{12} , \quad (3.36) \end{aligned}$$

onde μ_{α} é a média em relação a α e vale $\frac{1}{2} \bar{\alpha}$. Caracteriza-se, então, a covariância a priori do erro referente a q por:

$$P^q(k+1/k) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{12} \bar{\alpha}^2(k+1) \right\}, \quad (3.37)$$

onde P^q é a matriz $r \times r$ de covariância do erro em q , considerada diagonal.

Essa inicialização de q e P^q a priori ocorre somente na primeira vez em que as pseudo-observações estão disponíveis; os valores posteriores de q e P^q a priori são obtidos, simplesmente realimentando-se as últimas estimativas de q e P^q :

$$\hat{q}(k+2/k+1) \equiv \hat{q}(k+1/k+1), \quad (3.38)$$

$$P^q(k+2/k+1) \equiv P^q(k+1/k+1). \quad (3.39)$$

Tudo se passa como se a matriz de transição para evolução da estimativa \hat{q} fosse a matriz identidade; i.é., a dinâmica de q é dada por $q_{k+1} = \phi_{k+1,k} q_k$, onde $\phi_{k+1,k} \equiv \mathbb{I}$. Portanto, a matriz de covariância propagada, do erro em q , vale:

$$P^q(k+1/k) = \phi_{k+1,k} P^q(k/k) \phi_{k+1,k}^T = P^q(k/k). \quad (3.40)$$

Isto é razoável porque, caso fossem adotadas as hipóteses dos itens a, b, c, todas as vezes em que se processasse as pseudo-observações, obter-se-ia q e P^q a priori sensivelmente a favor da segurança. Procedendo-se desta maneira, não se abandona as informações anteriores, obtidas para q e P^q através da filtragem das pseudo-observações, e há a possibilidade das novas estimativas \hat{q} e P^q auto-ajustarem-se de acordo com as posteriores pseudo-observações.

Recapitulando, utiliza-se os itens a, b, c para criar valores a priori de \hat{q} e P^q , somente na primeira vez em que as pseudo-observações z estão disponíveis. Após o processamento destas pseudo-observações iniciais, os valores de q e P^q são os novos valores a priori para filtragem das próximas pseudo-observações; i.é., as últimas estimativas são os valores a priori da filtragem seguinte, caracterizando a realimentação, pura e simples, de tais valores.

3.3.6 - SUMÁRIO DO RUÍDO ADAPTATIVO

Em resumo, o algoritmo a ser aplicado é o seguinte:

- 1) Predição da variância do ruído dinâmico q (na primeira vez)

$$\hat{q}(k+1/k) = \frac{1}{2} \bar{\alpha}(k+1) \mathbb{I}_r \quad (3.41)$$

com $\bar{\alpha}$ de acordo com o critério do item b, Seção 3.3.5.

- 2) Predição da covariância do erro em q (na primeira vez)

$$P^q(k+1/k) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{12} \bar{\alpha}^2(k+1) \right\} \quad (3.42)$$

- 3) Montagem da pseudo-observação, via

$$z(k+1) = M_{k+1} q(k+1) + \eta_{k+1} \quad (3.43)$$

onde z é a pseudo-observação determinada pela Equação 3.29; M_{k+1} é dado pela Relação 3.28; $q(k+1)$ é o vetor dos elementos da diagonal da matriz Q , a ser estimado; e η_{k+1} é o ruído na pseudo-observação, cuja estatística é expressa na Relação 3.24.

- 4) Filtragem das pseudo-observações

Usa-se o filtro de Kalman, com processamento seqüencial das pseudo-observações, para estimar q e P^q . O algoritmo de Kalman é aplicado como se segue:

• Ganho k^q

$$K_{k+1}^q = P^q(k+1/k) M_{k+1}^T \left[M_{k+1}^T P^q(k+1/k) M_{k+1} + 4 r^2(k+1) R_{k+1} + 2 R_{k+1}^2 \right]^{-1} \quad (3.44)$$

● Atualização de q

$$\hat{q}(k+1/k+1) = \hat{q}(k+1/k) + K_{k+1}^q [z(k+1) - M_{k+1} \hat{q}(k+1/k)] \quad (3.45)$$

● Atualização de P^q

$$P^q(k+1/k+1) = [I - K_{k+1}^q M_{k+1}] P^q(k+1/k) \quad (3.46)$$

5) Requisito da variância

$$\hat{q}_i(k+1/k+1) = \begin{cases} 0 & \text{se } \hat{q}_i(k+1/k+1) < 0 \\ \hat{q}_i(k+1/k+1) & \text{do contrário} \end{cases} \quad (3.47)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$.

6) Montagem da matriz Q e inclusão no procedimento de estimação

$$P(k+1/k) = \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T, \quad (3.48)$$

onde $Q_k = \text{diag} \{ \hat{q}_i(k+1/k+1) \}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

7) Reinicialização no instante seguinte, k+2 (segunda vez em diante)

$$\hat{q}(k+2/k+1) \equiv \hat{q}(k+1/k+1), \quad (3.49)$$

$$P^q(k+2/k+1) \equiv P^q(k+1/k+1). \quad (3.50)$$

Voltar ao item 3 e incrementar os tempos de uma unidade.

3.4 - COMPENSAÇÃO DO MODELO DINÂMICO

3.4.1 - INTRODUÇÃO

A motivação para incluir a técnica de Compensação do Modelo Dinâmico - CMD, para aproximar os efeitos não-modelados da dinâmica, é devida aos bons resultados obtidos pela sua aplicação em determinação de órbita de satélites artificiais terrestres (Ingram, 1971; Rios Neto, 1973; Negreiros de Paiva, 1980b).

Basicamente, este método trata de uma técnica semelhante à de identificação de parâmetros (Filtro de Schmidt-Kalman) com o consequente aumento do estado (Jazwinski, 1970). Com este procedimento (CMD), obtém-se diretamente a estimativa da fração não-modelada da dinâmica. Desta forma, assegura-se um melhor condicionamento do filtro de Kalman, a partir do momento em que a influência da parcela não-modelada é incluída no estimador. Em outras palavras, apesar do aumento de variáveis a serem estimadas, obtém-se uma melhoria na estimativa do estado original. Deve-se ressaltar que, para a técnica ser utilizada, nenhum conhecimento prévio sobre o comportamento das componentes não-modeladas é requerido.

Usualmente, erros de três tipos influenciam a estimativa obtida: erros devidos à linearização, erros devidos ao procedimento computacional e erros devidos ao modelo matemático impreciso para definição do problema. Os erros devidos à linearização são minimizados quando se usa a forma estendida do filtro de Kalman no algoritmo de estimação sequencial. O principal objetivo deste método é minimizar o efeito da não-modelagem, estimando e incluindo seus efeitos no sistema dinâmico.

No equacionamento que se segue, propõe-se um método de estimação sequencial que compensa erros no modelo dinâmico. Referir-se-á a este método como a Compensação do Modelo Dinâmico - CMD. Tapley and Ingram (1973) descrevem duas vantagens da CMD: pode ser usada para melhorar a estimativa do estado em problemas de estimação em tempo real; e,

produz estimativas da parte não-modelada devido ao erro do modelo matemático, podendo ser usado para posterior análise e melhora da modelagem matemática.

No presente trabalho, a CMD irá proporcionar estimativas das acelerações não-modeladas, as quais serão aproximadas por um processo de primeira ordem de Gauss-Markov, que tem uma componente correlacionada ao longo do tempo e outra puramente aleatória (Ingram, 1971; Rios Neto, 1973). A componente correlacionada com o tempo possibilita a propagação da estimativa das acelerações não-modeladas. A componente aleatória representa o nível de desconhecimento nas acelerações não-modeladas e é levada em conta na matriz de covariância do erro no estado.

3.4.2 - MODELO MATEMÁTICO

As equações que descrevem o movimento do sistema são expressas por $\dot{x}(t) = f_m(x,t) + f_{nm}(x,t)$, conforme a Equação 2.46; mais explicitamente

$$\dot{r}(t) = v(t) \tag{3.51}$$

$$\dot{v}(t) = a_m(t) + a_{nm}(t) ,$$

onde r é o vetor posição; v é o vetor velocidade; a_m é o vetor das acelerações modeladas; e a_{nm} é o vetor das acelerações não-modeladas. O vetor a_m é uma modelagem que leva em conta o problema dos dois corpos, sendo a Terra o corpo central, e ainda considera o coeficiente do harmônico zonal J_2 , que expressa a influência do achatamento da Terra. (Apêndice A). O vetor a_{nm} representa todos os efeitos que não foram modelados, seja por dificuldades matemáticas, seja por desconhecimento, seja por flutuações aleatórias devidas às variações ambientais imprevisíveis, ou porque não se deseja levar em conta certo fenômeno explicitamente.

De acordo com o método de Compensação do Modelo Dinâmico - CMD, o vetor a_{nm} é aproximado por um processo de primeira ordem de Gauss-Markov; i.é., $a_{nm}(t) \approx e(t) = [e_1 : e_2 : e_3]^T$, expresso por:

$$\dot{e}(t) = - B e(t) + \omega(t) , \quad (3.52)$$

onde B é uma matriz 3×3 diagonal, de componentes positivas, tomadas com igual valor, que representam os coeficientes de correlação ao longo do tempo, constantes e conhecidas a priori (Rauch, 1965). Assim,

$$B = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} = b \mathbb{I}_3 , \quad (3.53)$$

onde \mathbb{I}_3 é a matriz 3×3 identidade. Na Equação 3.52, ω é o vetor 3×1 ruído branco gaussiano, caracterizado por:

$$E [\omega(t)] = 0, \quad (3.54)$$

$$E [\omega(t) \omega^T(\tau)] = Q(t) \delta(t - \tau) ,$$

onde Q é a matriz de covariância associada a ω , dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} ,$$

onde os valores σ_x , σ_y , σ_z representam os desvios-padrão associados às componentes de ω . Como resultado, obtém-se um estado aumentado para

$$x^T = [r^T : v^T : e^T] , \quad (3.55)$$

e a equação diferencial do estado caracterizada por:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + G(t) \omega(t) , \quad (3.56)$$

com:

$$f^T(\bar{x}, t) = [v^T : (a_m + e^T) : (-B e)^T] , \quad (3.57)$$

$$G(t) = [0_3 : 0_3 : I_3] , \quad (3.58)$$

onde 0_3 é a matriz 3×3 nula e I_3 é a matriz 3×3 identidade. Assim, a dinâmica fica na forma requerida pelo filtro estendido de Kalman, Equação 2.13.

A relação entre a observação e o estado aumentado é dado pela Equação 2.27, $\delta y_k = H_k \delta x_k + v_k$, onde a estatística de v_k é a mesma; e H é uma matriz de derivadas parciais, agora relativas ao estado aumentado; ou seja,

$$H_k = \left[\frac{\partial h_k}{\partial r} : \frac{\partial h_k}{\partial v} : \frac{\partial h_k}{\partial e} \right] , \quad (3.59)$$

que é avaliada na trajetória nominal $\hat{x}(k/k-1)$. É fácil compor H , pois a derivada adicional é nula; i.é., $\partial h_k / \partial e \equiv 0$, posto que não há relação real entre a função das observações, h , e o processo de Gauss-Markov, representado por e .

3.4.3 - CÁLCULO DA COVARIÂNCIA DO RUÍDO DINÂMICO

A influência do ruído dinâmico (ruído no estado) é incorporado no procedimento por meio da sua covariância (ver Seção 3.3). A equação de propagação da matriz de covariância do erro no estado é dada por:

$$P(k+1/k) = \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T ,$$

onde Γ_k é calculado pela Relação 2.22, e Q_k , matriz diagonal 3×3 , é obtida pelo procedimento de ruído adaptativo descrito na Seção 3.3. A cada passo, o ruído dinâmico ω é suposto constante no intervalo considerado, que caracteriza um "step-process"; i.é.,

$$E [\omega_k] = 0 ; \quad E [\omega_k \omega_j^T] = Q_k \delta_{kj} .$$

Na Seção 3.3.5, abordou-se a questão da informação a priori para o estimador adaptativo de ruído. Descreveu-se, então, um critério de avaliação de q e P^q a priori, onde q é o vetor das componentes da diagonal da matriz Q , e P^q é a matriz de covariância do erro em q . Em seguida, processou-se as pseudo-observações (Seção 3.3.4), usando-se os valores a priori fornecidos por este critério, para obter o valor estimado de q . Entretanto, com a aplicação da CMD, há possibilidade de avaliar os valores a priori de q e P^q ($\hat{q}(k+1/k)$ e $P^q(k+1/k)$ respectivamente) de uma forma mais natural. Deve-se lembrar que o vetor q representa a variância do ruído dinâmico ω ; i.é., $E[\omega_k \omega_k^T] = Q_k$ com Q_k diagonal do elemento q_i , $i = 1, 2, 3$, que expressam os desvios-padrão referentes a ω ; ou seja:

$$Q_k = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Portanto, é bastante natural supor que o erro nos efeitos não-modelados, expressos pelo ruído ω , seja uma porcentagem dos próprios efeitos não-modelados (no trabalho, os efeitos não-modelados estão representados pelas acelerações não-modeladas). Assim, o valor a priori de q pode ser tomado como:

$$\hat{q}_i(k+1/k) = (\gamma \cdot |\hat{e}_i(k+1/k)|)^2 ; i = 1, 2, 3 , \quad (3.61)$$

onde γ representa tal porcentagem; $|\cdot|$ representa o valor absoluto da variável \cdot ; e $\hat{e}(k/k)$ é a estimativa da aceleração não-modelada no instante k . A motivação para usar a CMD como meio de gerar valores a priori de q é encontrada nos trabalhos de Rios Neto (1973), Negreiros de Paiva (1980b), e Tapley and Ingram (1973), que utilizam procedimento semelhante com bons resultados. Assim, os valores a priori de q são ajustados adaptativamente e mantidos constantes no intervalo k a $k+1$. Caso estes valores a priori estejam inadequados, o estimador de ruído adaptativo, por meio de filtragem das pseudo-observações, se encarrega de estimar o

valor correto de q . O valor da covariância do erro em q , P^q , a priori segue o esquema da Seção 3.3.6; ou seja, é simplesmente realimentado. O valor inicial da matriz P^q , na primeira vez em que pseudo-observações estão disponíveis, é escolhido a favor da segurança e é da ordem do erro máximo da aceleração não-modelada. Por exemplo, se $|a_{nm}| \approx 10^{-6}$, então $P^q(1/0) = 10^{-12}$ (ver Tabela 5.1 para ter a ordem de grandeza das acelerações não-modeladas). Em outras palavras, admite-se inicialmente 100% de erro na variância do ruído das acelerações não-modeladas.

Em resumo, o cálculo da matriz Q é feita do seguinte modo:

1) Predição da variância q

$$\hat{q}_i(k+1/k) = (\gamma |e_i(k/k)|)^2 ; i = 1, 2, 3$$

2) Predição da covariância do erro em q

$$\text{Se } k \neq 0 \quad P^q(k+1/k) = P^q(k/k),$$

$$\text{Se } k = 0 \text{ (primeira vez)} \quad P^q(k+1/k) = \text{diag} \{(\max |a_{nm}|)^2\}$$

3) Montagem das pseudo-observações

$$z(k+1) = M_{k+1} q(k+1) + \eta_{k+1}$$

4) Filtragem seqüencial das pseudo-observações

• Ganho K^q

$$K_{k+1}^q = P^q(k+1/k) M_{k+1}^T [M_{k+1} P^q(k+1/k) M_{k+1}^T + 4 r^2(k+1) R_{k+1} + 2 R_{k+1}^2]^{-1}$$

• Atualização de q

$$\hat{q}(k+1/k+1) = \hat{q}(k+1/k) + K_{k+1}^q [z(k+1) - M_{k+1} \hat{q}(k+1/k)]$$

• Atualização de P^q

$$P^q(k+1/k+1) = [I - K_{k+1}^q M_{k+1}] P^q(k+1/k)$$

5) Requisito da variância

Se $\tilde{q}_i(k+1/k+1) < 0$, então $\tilde{q}_i(k+1/k+1) = 0$; $i = 1, 2, 3$

6) Montagem da matriz Q e inclusão no procedimento de estimação

$$Q_k = \text{diag} \{ \tilde{q}_i(k+1/k+1) \} ; i = 1, 2, 3,$$

$$P(k+1/k) = \phi_{k+1,k} P(k/k) \phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T$$

7) Voltar ao item 1 e incrementar os tempos de uma unidade.

3.4.4 - MATRIZ DE TRANSIÇÃO

No método de Compensação do Modelo Dinâmico - CMD, a matriz de transição ϕ , cuja dimensão é 9×9 , é calculada do seguinte modo: dada a equação

$$\dot{\phi}(t, t_k) = F(t) \phi(t, t_k) \quad (3.62)$$

para $t \in [t_k, t_{k+1}]$, com a condição inicial $\phi(t_k, t_k) = I$, matriz identidade, obtêm-se a matriz $\phi(t_{k+1}, t_k)$, integrando-se a Equação 3.62 de t_k a t_{k+1} ; onde F é a matriz de derivadas parciais em relação ao estado, agora aumentado, com dimensão 9×9 , dada por:

$$F(t) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \quad (3.63)$$

De modo mais explícito tem-se:

$$F(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial r} : \frac{\partial f}{\partial v} : \frac{\partial f}{\partial e} \right], \quad (3.64)$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial e} \\ \frac{\partial \dot{v}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial e} \\ \frac{\partial \dot{e}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{e}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{e}}{\partial e} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Lembrando-se que o modelo do estimador considera o problema dos dois corpos mais a influência do achatamento terrestre (Apêndice A), obtêm-se:

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \\ \frac{\partial a_m}{\partial r} & 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 & B \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

onde 0_3 é a submatriz 3×3 nula; I_3 é a submatriz 3×3 identidade; B é a submatriz definida na Relação 3.53; e $\frac{\partial a_m}{\partial r}$ é a submatriz 3×3 , calculada no Apêndice C. A submatriz

$$\begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ \frac{\partial a_m}{\partial r} & 0_3 \end{bmatrix}$$

é explicitada no Apêndice C e corresponde à influência da parcela modelada do sistema, $\frac{\partial f_m(x,t)}{\partial x}$, componente da Equação 2.46; i.é.,

$$F(t) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial f_m(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial f_{nm}(x,t)}{\partial x}.$$

Assim, dado:

$$\phi \triangleq \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

onde ϕ_{ij} ; $i, j = 1, 2, 3$ são submatrizes 3×3 componentes da matriz de transição, a Equação 3.62 pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{11} & \dot{\phi}_{12} & \dot{\phi}_{13} \\ \dot{\phi}_{21} & \dot{\phi}_{22} & \dot{\phi}_{23} \\ \dot{\phi}_{31} & \dot{\phi}_{32} & \dot{\phi}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 \\ \frac{\partial a_m}{\partial r} & 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

ou, $\dot{\phi}_{11} = \phi_{21}$; $\dot{\phi}_{12} = \phi_{22}$; $\dot{\phi}_{13} = \phi_{23}$; (3.69)

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{21} &= \frac{\partial a_m}{\partial r} \phi_{11} + \phi_{31} & ; & \quad \dot{\phi}_{22} = \frac{\partial a_m}{\partial r} \phi_{12} + \phi_{32} & ; \\ \dot{\phi}_{23} &= \frac{\partial a_m}{\partial r} \phi_{13} + \phi_{33} & ; & \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\dot{\phi}_{31} = B\phi_{31} \quad ; \quad \dot{\phi}_{32} = B\phi_{32} \quad ; \quad \dot{\phi}_{33} = B\phi_{33} . \quad (3.71)$$

Desde que $\phi_{31}(t_k, t_k) = 0_3$; $\phi_{32}(t_k, t_k) = 0_3$; $\phi_{33}(t_k, t_k) = I_3$, são condições iniciais, então a integração analítica de t_k a t fornece:

$$\phi_{31}(t, t_k) = 0_3 \quad , \quad \phi_{32}(t, t_k) = 0_3 \quad , \quad \phi_{33}(t, t_k) = e^{-b(t-t_k)} . \quad (3.72)$$

Assim, a parte a ser integrada numericamente é:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{11} &= \phi_{21} \quad , \quad \dot{\phi}_{12} = \phi_{22} \quad , \quad \dot{\phi}_{13} = \phi_{23} \quad , \\ \dot{\phi}_{21} &= \frac{\partial a_m}{\partial r} \phi_{11} \quad , \quad \dot{\phi}_{22} = \frac{\partial a_m}{\partial r} \phi_{12} \quad , \quad \dot{\phi}_{23} = \frac{\partial a_m}{\partial r} \phi_{13} + \phi_{33} \quad , \end{aligned} \quad (3.73)$$

onde ϕ_{33} tem solução analítica (ver Relações 3.72), que pode ser incorporada nas equações diferenciais. Tem-se, portanto, 54 equações diferenciais de primeira ordem a serem avaliadas numericamente, ao invés das 81 originais.

3.4.5 - ASPECTOS NUMÉRICOS

Um argumento a favor da utilização da CMD é que, apesar do estado ser aumentado (9 elementos), seu cálculo não se torna mais complicado. Em termos de carga computacional, não há um aumento exagerado do espaço necessário para armazenamento. O melhor condicionamento do filtro e a melhora na estimativa compensam estas aparentes desvantagens. Em termos de tempo de processamento, também não há incremento sensível, pois a integração da matriz de transição, $9 \times 9 = 81$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, pode ser fracionada em partes integráveis analiticamente e partes integráveis numericamente, diminuindo o tempo de processamento e a carga computacional.

CAPÍTULO 4

INFRA-ESTRUTURA COMPUTACIONAL PARA SIMULAÇÃO E ANÁLISE

4.1 - SIMULAÇÃO DA ÓRBITA

Para testar a eficiência do estimador, é necessária a simulação de uma órbita "verdadeira", para gerar os dados de observação que alimentarão o estimador, e para que se possa ter um meio de comparar as estimativas da órbita obtida com a órbita "verdadeira" simulada. Esta órbita "verdadeira" deve ser simulada, incluindo os efeitos perturbadores que influenciam o movimento de um satélite. Para satélites próximos à Terra, que são os casos mais críticos, pois as perturbações são mais acentuadas (ver Tabela 5.1), os efeitos importantes são: perturbações devidas ao geopotencial, perturbações luni-solares e perturbações devidas ao arrasto atmosférico. A órbita simulada, com todas as perturbações citadas, é obtida calculando-se cada um dos termos que compõem a aceleração do satélite:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}_G + \vec{a}_{SL} + \vec{a}_D, \quad (4.1)$$

onde $\ddot{\vec{r}}$ vetor aceleração do satélite; \vec{a}_G aceleração devida ao geopotencial; \vec{a}_{SL} aceleração devida a perturbações luni-solares; e \vec{a}_D aceleração devida ao arrasto atmosférico.

Cada uma das parcelas merece ser discutida separadamente, o que é feito a seguir.

4.1.1 - ACELERAÇÃO DEVIDA AO GEOPOTENCIAL

A aceleração devida ao geopotencial leva em conta o problema dos dois corpos (movimento kepleriano), o achatamento terrestre expresso pelo coeficiente do harmônico zonal J_2 , os coeficientes zonais até J_6 , e os coeficientes dos harmônicos tesserais até C_{44} e S_{44} .

De uma maneira geral, o potencial de um ponto (centro de massa do satélite) pode ser formulado como um desenvolvimento em série de harmônicos esféricos:

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^k P_k^{(m)}(\sin\phi) [C_{km} \cos m\lambda + S_{km} \sin m\lambda] \right\}, \quad (4.2)$$

com $P_k^{(m)}(\cdot)$ polinômios de Legendre definidos por:

$$P_k^{(m)}(x) \triangleq (1-x^2)^{(1/2)m} \frac{d^m P_k(x)}{d x^m},$$

onde C_{km} e S_{km} são os coeficientes dos harmônicos esféricos; λ é a longitude do ponto subsatélite (projeção do centro de massa do satélite na superfície terrestre); ϕ é a latitude do ponto subsatélite; R é o raio equatorial terrestre; e r é o módulo do vetor posição do centro de massa do satélite. Detalhes sobre os polinômios de Legendre podem ser obtidos nos livros de Brouwer and Clemence (1961) e Kaula (1966), e sobre os coeficientes dos harmônicos, em tabelas como as contidas no livro de Kaula (1966).

Caracterizada a expressão do geopotencial, nota-se a possibilidade de seu desenvolvimento em série e, conseqüentemente, o truncamento da série na precisão desejada.

A expressão para a aceleração devida ao geopotencial, \bar{a}_G , advém da aplicação do operador gradiente ∇ :

$$\bar{a}_G = \nabla U. \quad (4.3)$$

A rotina computacional utilizada consiste numa fórmula recursiva, onde se trunca a ordem dos termos no quarto harmônico esférico, incluindo, no entanto, os termos zonais até J_6 . Esta rotina foi desenvolvida por Hagar Jr. (1972) e implementada por Negreiros de Paiva (1980a).

4.1.2 - ACELERAÇÃO DEVIDA AO SOL E À LUA

O cálculo da perturbação em um satélite, devido a outros corpos, pode ser feito de maneira simples, considerando-se uma aproximação de primeira ordem. Basicamente, a equação de movimento de um corpo de massa m_i , em relação às coordenadas inerciais, sujeito à atração de $n-1$ outros corpos (Escobal, 1965), é dado por:

$$\ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} \quad (4.4)$$

onde G é a constante gravitacional e r_{ij} é o módulo do vetor que aponta de i para j . Transferindo-se as coordenadas para um sistema de coordenadas relativo; i.é., tomando a Terra como referência, a Equação 4.4 torna-se:

$$\ddot{\vec{r}} = G \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left(\frac{\vec{r}_{oj}}{r_{oj}^3} - \frac{\vec{r}_{Tj}}{r_{Tj}^3} \right), \quad (4.5)$$

onde os índices o e T se referem ao corpo e à Terra, respectivamente, e o primeiro índice indica a origem do vetor. Considerando-se o Sol e a Lua, tem-se:

$$\ddot{\vec{a}}_{SL} = G m_L \left(\frac{\vec{r}_{oL}}{r_{oL}^3} - \frac{\vec{r}_{TL}}{r_{TL}^3} \right) + G m_S \left(\frac{\vec{r}_{oS}}{r_{oS}^3} - \frac{\vec{r}_{TS}}{r_{TS}^3} \right), \quad (4.6)$$

onde m_L é a massa da Lua; \vec{r}_{oL} é o vetor posição da Lua em relação ao corpo (satélite); \vec{r}_{TL} é o vetor posição da Lua em relação à Terra; m_S é a massa do Sol; \vec{r}_{oS} é o vetor posição do Sol em relação ao corpo; e \vec{r}_{TS} é o vetor posição do Sol em relação à Terra. Para o cálculo final dos termos dessa equação, toma-se:

$$\vec{r}_{oL} = \vec{r}_{TL} - \vec{r}, \quad \vec{r}_{oS} = \vec{r}_{TS} - \vec{r}, \quad (4.7)$$

onde \vec{r} é o vetor posição do corpo em relação à Terra. A dificuldade adicional é a obtenção da posição do Sol e da Lua em relação à Terra. Para contornar tal dificuldade, foi implementada uma rotina computacional (Me deirós e Kuga, 1980) que calcula as posições do Sol e da Lua, desde que fornecida a data em que se deseja a efeméride luni-solar.

4.1.3 - ACELERAÇÃO DEVIDA AO ARRASTO ATMOSFÉRICO

A aceleração devida ao arrasto atmosférico é dada pela seguinte expressão:

$$\vec{a}_D = \frac{1}{2} \rho \frac{A}{m} C_D v_o \vec{v}_o, \quad (4.8)$$

onde ρ é a densidade atmosférica local; A é a área da seção transversal (área de referência); m é a massa do satélite; C_D é o coeficiente de arrasto baseado na área A ; v_o é o módulo da velocidade orbital; e \vec{v}_o é o vetor velocidade orbital. A velocidade orbital é definida como a velocidade do satélite em relação à atmosfera local, sendo calculada por:

$$\vec{v}_o = \dot{\vec{r}} - \vec{\omega} \wedge \vec{r}, \quad (4.9)$$

onde $\dot{\vec{r}}$ é o vetor velocidade do satélite; $\vec{\omega}$ é o vetor velocidade angular da Terra; \wedge é o produto vetorial; e \vec{r} é o vetor posição do satélite. A densidade atmosférica local é avaliada por uma rotina (Rios Neto, 1973; Negreiros de Paiva, 1979) que se baseia no procedimento analítico de Roberts (1971) e no modelo atmosférico de Jacchia (1970, 1971). Como saídas complementares, a rotina fornece a temperatura local, a temperatura exosférica, e o peso molecular local médio do ar, utilizáveis no cálculo de outros parâmetros necessários.

A maior dificuldade para o cálculo da Expressão 4.8 é, sem dúvida, a obtenção do coeficiente de arrasto C_D . Para tal fim, foi ajustada uma expressão polinomial, de tal modo que C_D é função de uma variável s , definida por:

$$s \triangleq v_0/v_s, \quad (4.10)$$

onde v_s é a mais provável velocidade térmica do ar, sendo dada por:

$$v_s = \left[\frac{2 k N_A T}{M} \right]^{1/2}, \quad (4.11)$$

onde k é a constante de Boltzman; N_A é o número de advogadro; T é a temperatura absoluta local; e M é o peso molecular local médio do ar. A obtenção de valores C_D dependentes de s é produto de uma simulação do satélite em questão (protótipo do primeiro satélite nacional, ver Seção 5.1), onde se usa a teoria molecular dos gases, combinada com a teoria de mecânica dos fluidos envolvida nos cálculos aerodinâmicos. Assim, conclui-se que tendo a forma geométrica e demais dados do satélite, é sempre possível simular seu comportamento aerodinâmico mais provável para obter funções $C_D(s)$. Ressalte-se o caráter determinístico para obtenção de C_D , que neste trabalho foi obtido a partir dos dados levantados por Carrara (1980).

4.1.4 - INTEGRAÇÃO DA ÓRBITA

A integração da Equação 4.1, para simular a órbita "verdadeira", é feita com o uso da sub-rotina ODE (Shampine and Gordon, 1975) que integra sistemas de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A Equação 4.1 é colocada na forma:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v},$$

$$\dot{\vec{v}} = \vec{a}_G + \vec{a}_{SL} + \vec{a}_D,$$

onde \vec{r} é o vetor posição do satélite e \vec{v} o vetor velocidade do satélite.

Uma descrição da montagem das equações diferenciais e uso da sub-rotina, bem como um estudo das precisões e rapidez computacional envolvidas, estão contidas no trabalho de Negreiros de Paiva (1980a).

4.2 - SIMULAÇÃO DAS ESTAÇÕES DE RASTREAMENTO

A fim de completar a situação de teste, as estações de rastreamento devem ser incluídas para simular a obtenção dos dados de observações. Neste trabalho, dois tipos de estações rastreadoras foram simuladas: estações fictícias e rede de estações reais NET-A.

• Estações fictícias

As estações fictícias são criadas para gerar condições ideais de teste, onde o satélite está sempre visível através estações topocêntricas, localizadas em posições simétricas ao ponto subsatélite (projeção do satélite na superfície terrestre, ver Figura 4.1). Deste modo, consegue-se uma geometria favorável ao estimador, que trabalha com dados suficientes para produzir um nível de precisão da estimativa bastante alto.

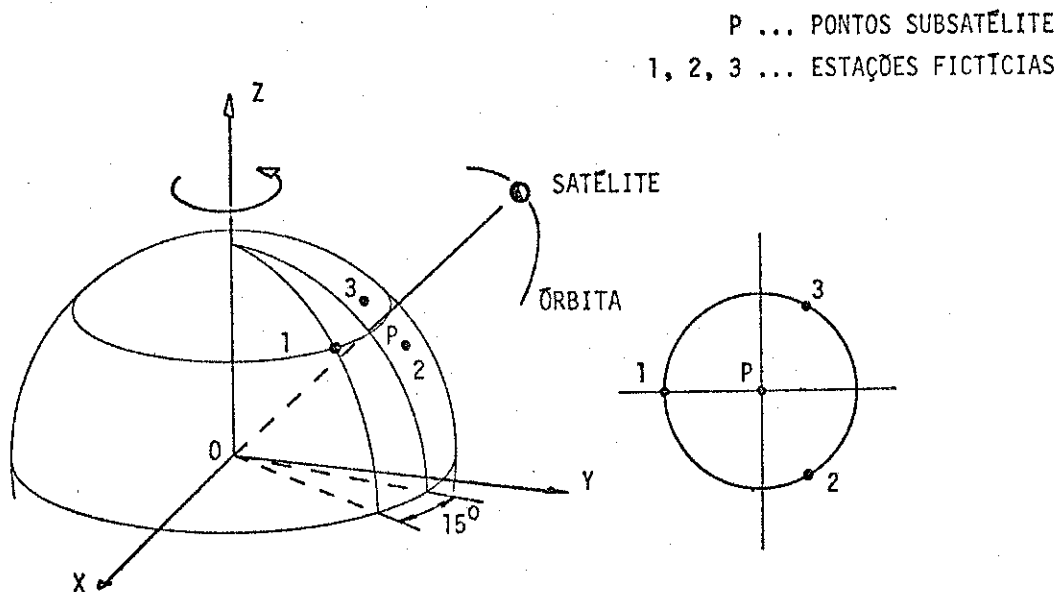


Fig. 4.1 - Estações fictícias de rastreamento.

Em um dado momento genérico, cada estação fictícia efetua observações de "range" e "range-rate" (Apêndice B), de modo que, considerando todas as estações fictícias, obtêm-se um total de seis observações nesse instante.

• Estações reais

Com a rede de estações NET-A, pretende-se simular um conjunto de estações reais. Vinte estações de rastreamento topocêntricas, existentes e espalhadas pela Terra, pertencentes ao conjunto NET-A da NASA, foram catalogadas e estão relacionadas na Tabela 4.1. Cada uma delas está capacitada a medir o "range" e o "range-rate" do satélite a cada instante. Para visualizar a localização destas estações no globo terrestre, reporte-se à Figura 5.2.

TABELA 4.1

ESTAÇÕES DE RASTREAMENTO NET-A

NÚMERO	NOME	LATITUDE (GRAU)	LONGITUDE (GRAU)	ALTITUDE (km)
1	CANB	-35.5833900	148.9777300	1.149
2	CARN	-24.9066444	113.7253249	0.008
3	GUAM	13.3104666	144.7374610	0.076
4	DODR	36.0055300	139.1919900	0.879
5	KOKE	22.1261200	200.3348900	1.123
6	FAIR	64.9719499	212.4866860	0.340
7	GOLD	35.3415110	243.1261749	0.920
8	GUAY	27.9629777	249.2787249	-.028
9	ROSM	35.1960110	277.1238332	0.818
10	MERT	28.5080944	279.3064194	-.045
11	G.BH	26.6326638	281.7621972	-.046
12	STGO	-33.1497000	289.3315700	0.710
13	ASCN	-7.9553600	345.6724400	0.555
14	WINK	51.4462200	359.3022000	0.090
15	GREC	38.0789900	23.9327800	0.490
16	SHIR	29.6371600	52.5197900	1.564
17	NAIN	29.3592500	79.4575200	1.856
18	ADAD	8.7474200	38.9591600	1.901
19	JOHN	-25.8838300	27.7072800	1.541
20	TANV	-19.0110800	47.4247200	1.367

A partir da órbita "real" simulada (Seção 4.1), deve-se fazer o teste de visibilidade, a cada instante, para que se saiba qual das estações da rede NET-A "vê" o satélite. O teste de visibilidade é feito pela inequação:

$$90^\circ - \cos^{-1} \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{R}}{\rho R} > \alpha \quad (4.12)$$

que, se satisfeita, indica que o satélite é visível à estação em questão. Na Inequação 4.12, \cdot é o produto escalar, e as variáveis $\vec{\rho}$ e \vec{R} estão de acordo com a Figura 4.2 e representam o vetor "range" do satélite e o vetor posição da estação, respectivamente; considerou-se um ângulo de elevação mínima da antena da estação, $\alpha = 15^\circ$, em relação ao horizonte. Após tal teste de visibilidade, se houver uma ou mais estações que vêem o satélite, cada uma delas efetua observações de "range" e "range-rate". Eventualmente, há trechos da órbita em que nenhuma estação vê o satélite.

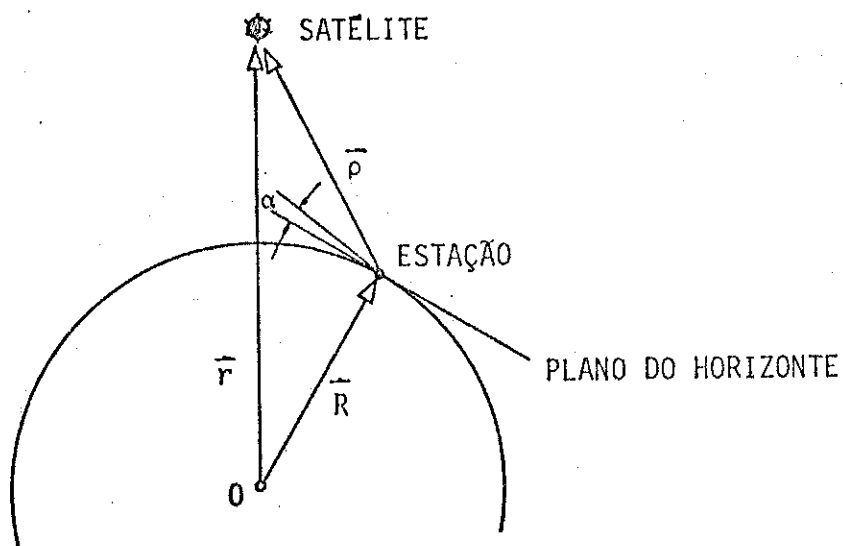


Fig. 4.2 . Teste de visibilidade.

Dadas essas considerações sobre os tipos de estações rastreadoras simuladas, conclui-se que ambas auxiliam a análise do procedimento de estimação, sendo que o primeiro tipo, estações fictícias, gera condições ideais para estimação de órbita, e o segundo tipo, estações reais, simula o que poderia acontecer numa situação realista.

4.3 - GERAÇÃO DE OBSERVAÇÕES CORRUMPIDAS POR UM RUIDO ALEATÓRIO

Após efetuar o teste de visibilidade, se as estações reais estiverem sendo usadas, é necessário simular as condições em que são efetuadas as observações. No caso das estações fictícias, não é necessário o teste de visibilidade, pois há sempre três estações bem definidas que observam o satélite. As equações determinísticas que produzem o valor real das medidas são apresentadas no Apêndice B.

Existem várias fontes que influem na obtenção dos valores das medidas, sendo, na maioria delas, diretamente relacionadas ao equipamento utilizado. Assim, a cada estação e a cada medida realizada, está associado um desvio-padrão, devido ao erro de equipamento, aos erros de leitura ou conversão dos dados, erros de modelagem do observador, erros tendenciosos da estação, erros relativísticos de correção do tempo, etc. Portanto, uma maneira simples de simular as observações é corrompê-las com um ruído gaussiano de média nula e variância unitária, multiplicado pelo desvio-padrão correspondente. A geração das observações é efetuada por meio da equação:

$$Y = Y_r + (\text{RUÍDO}) \cdot \sigma \quad , \quad (4.13)$$

onde Y é a observação simulada que será utilizado como dado no estimador; Y_r é a observação determinística, obtida a partir da órbita "real" simulada; RUÍDO é a variável gaussiana de média nula e variância unitária; e σ é o desvio-padrão da estação, relativa à observação que exprime os vários tipos de erros que podem ocorrer. Maiores detalhes podem ser obtidos no trabalho de Negreiros de Paiva (1980a), que usa tal esquema.

4.4 - GENERALIDADES

● Integração numérica

O integrador usado para propagar a estimativa e calcular a matriz de transição ϕ (ver Equações 2.36 e 2.21) é um subprograma baseado no método de Runge-Kutta de quarta ordem, com passo ajustável internamente (Fehlberg, 1969; Forsythe et alii, 1977). O subprograma fornece informações sobre erros internos e permite o controle sobre o erro de integração. Para o trabalho, utiliza-se a precisão de 10^{-5} , tanto para os erros absolutos como para os erros relativos locais.

● Passo de integração

O passo utilizado para integração é de um segundo, quando há visibilidade satélite-estação. Quando não há visibilidade, as equações de estado e a matriz de transição são integradas em um único passo para todo o intervalo não-visível. O passo de integração de um segundo é adotado por limitação do problema, porque, na verdade, a capacidade atual do equipamento de medidas limita a escolha deste passo. Atualmente, consegue-se fazer um conjunto de medidas a cada intervalo de um segundo, daí a motivação para adotar-se este valor.

● Plotagem

As curvas traçadas são obtidas, usando-se as sub-rotinas de plotagem descritas no relatório de Kuga e Carrara (1980). As plotagens são feitas "OFF-LINE" por meio de equipamento CALCOMP-470, usando-se auxiliariamente uma fita magnética interpretadora (Graminho, 1976).

CAPÍTULO 5

TESTES E ANÁLISES

5.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo destes testes é estudar o comportamento do procedimento de estimação sob os mais diversos aspectos, com ênfase às situações críticas, simuladas propositadamente. Tais situações são expostas detalhadamente ao longo deste capítulo. Também, mostra-se, através de gráficos, a melhora progressiva que se obtém com a utilização de procedimentos de estimação mais elaborados, descritos no Capítulo 3.

Escolheu-se para teste o satélite projetado para ser o primeiro nacional, a ser lançado e operado em território brasileiro. As características básicas do protótipo do satélite são: relação área sobre a massa de $0.00729 \text{ m}^2/\text{kg}$, com área de referência de 0.707107 m^2 e peso de aproximadamente 97 kg, apresentando a geometria de um prisma reto de base octogonal, conforme a Figura 5.1. Atualmente vários estudos referentes a este satélite estão em andamento, o que possibilita aproveitá-los no sentido de facilitar a manipulação e, ou, obtenção de dados para simulação. Por exemplo, a dificuldade de simular perturbações de origem atmosférica é contornada, desde que já se dispõe de estudos relativos ao comportamento aerodinâmico do satélite (Carrara, 1980). Além disso, tendo em vista que este trabalho objetiva ser parte do pacote computacional que fará a determinação de órbita, é oportuna a escolha de tal satélite, acrescentando mais subsídios para a Missão Espacial Completa Brasileira.

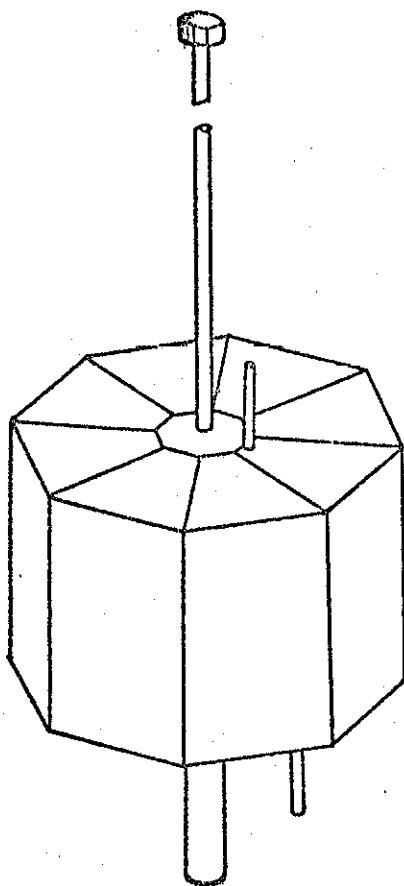


Fig. 5.1 - Satélite nacional.

5.2 - ÓRBITA BÁSICA

A órbita é um dos parâmetros fundamentais que influencia o movimento do satélite. Conforme a altitude correspondente a tal órbita, há perturbações que agem em maior ou menor escala no movimento do satélite. A Tabela 5.1 mostra a influência dos termos perturbadores da aceleração de um satélite de área e massa unitária a várias altitudes (Jensen et alii, 1962). A situação que ocorre é a seguinte: a dinâmica de estado modelada no estimador contém as acelerações devidas ao movimento kepleriano e ao achatamento terrestre (tipos 1 e 2 da Tabela 5.1); e a órbita "real" simulada (Seção 4.1) leva em conta, adicionalmente, os termos superiores do geopotencial, a aceleração luni-solar, e a aceleração de arrasto atmosférico (tipos 1 a 5 da Tabela 5.1). Portanto, quanto mais baixa a altitude, maior a influência dos termos não-modelados na dinâmi

ca do estimador, o qual cria uma situação crítica ao procedimento de estimação. Com este intuito, simula-se uma órbita denominada básica, de baixa altitude (~250 km), com excentricidade praticamente nula (órbita circular) e inclinação de 42° , que parte de um ponto cuja longitude leste é 223° e latitude de 34° . No sistema geocêntrico inercial, a órbita é caracterizada pelo seguinte vetor de estado: $x = -0,62847935$; $y = -0,59584712$; $z = -0,57437687$; $\dot{x} = 0,058140365$; $\dot{y} = -0,034575644$; $\dot{z} = 0,027313138$; onde x, y, z são dados em unidades de raio terrestre (1 raio terrestre = 6378,160 km), e $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ são dados em unidades de raio terrestre por minuto. A data na qual ocorrem tais efemérides é: ano de 1970, mês de janeiro, dia 19, zero hora, zero minuto e zero segundo, correspondendo à data juliana de 2440587,5. Em tal data são especificados os parâmetros do Sol: fluxo solar corrigido para a data de $155 \text{ watts}/10^{-22} \text{ m}^2\text{Hz}$, fluxo solar real do dia anterior de $136 \text{ watts}/10^{-22} \text{ m}^2\text{Hz}$, e índice de atividade geomagnética de duas unidades. Para ilustração, mostra-se na Figura 5.2 o traço de 30 minutos da órbita básica, junto com as estações de rastreamento reais (Tabela 4.1) e os círculos de visibilidade destas estações para 250 km de altitude do satélite e para o ângulo de elevação mínima da antena de 15° acima do horizonte.

TABELA 5.1

PERTURBAÇÕES EM UM SATÉLITE EM RELAÇÃO À ÓRBITA KEPLERIANA

TIPO	PERTURBAÇÃO	ALTITUDE ACIMA DA SUPERFÍCIE TERRESTRE EM km			
		250	700	2.000	15.000
1	kepler	1	1	1	1
2	achatamento	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}
3	geopotencial	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	-
4	arrasto atmosférico	10^{-4}	10^{-6}	-	-
5	luni-solar	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-6}

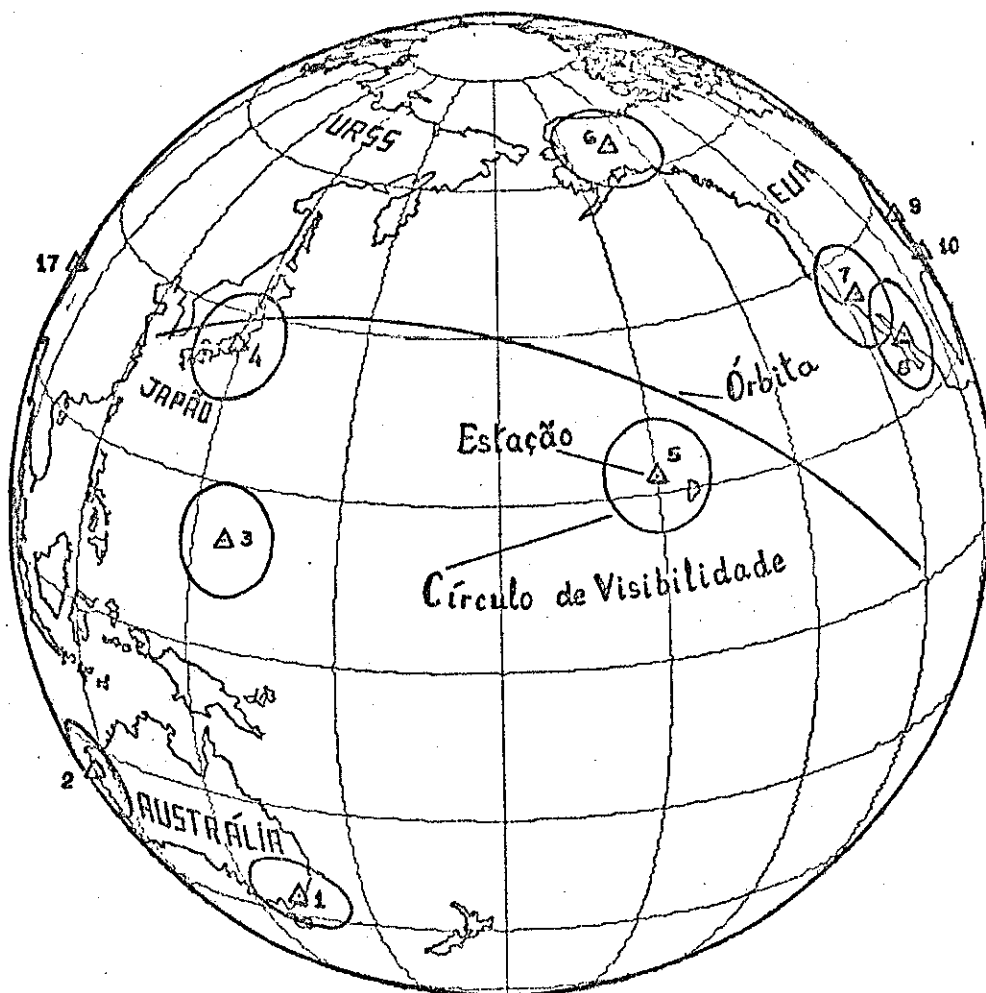


Fig. 5.2 - Traço da órbita básica, estações de rastreamento e círculos de visibilidade.

5.3 - ESTAÇÕES DE RASTREAMENTO

As características geométricas das estações de rastreamento já foram descritas na Seção 4.2. Dois tipos de estações foram simuladas: estações fictícias e estações reais. Tais estações devem fornecer as informações necessárias para estimar a órbita. Além das características citadas na Seção 4.2, outros parâmetros devem ser especificados. Um dos parâmetros importantes para estimação da órbita diz respeito à taxa com que cada estação efetua observações. A taxa de observações é caracterizada pelo intervalo de tempo necessário para a estação obter um conjunto de medidas (no caso, "range" e "range-rate") consecutivamente. Quanto mais alta esta taxa, maior a densidade de informações fornecida aos

timador e melhor é seu desempenho (Negreiros de Paiva, 1980b). A taxa adotada no trabalho é: taxa de observações = 2 medidas/seg/estação; ou seja, cada estação obtém medidas de "range" e "range-rate" a cada segundo.

Outro parâmetro dependente da estação de rastreamento é o desvio-padrão da medida efetuada. Os equipamentos de medida de cada estação, ao efetuarem observações, fornecem valores para "range" e "range-rate" com uma certa precisão, e tais valores são os reais com exceção de um erro cometido, inerente ao equipamento utilizado (ver Seção 4.3). Assim, para caracterizar a precisão envolvida, a cada medida vem associada um certo desvio-padrão característico do equipamento utilizado pela estação. Neste trabalho, supõe-se que todas as estações têm iguais desvios-padrão nas medidas: $\sigma_p \triangleq$ desvio-padrão da observação do "range" = 3 metros; $\sigma_{\dot{p}} \triangleq$ desvio-padrão da observação de "range-rate" = 1 cm/seg. Tais valores foram retirados do trabalho de Jazwinski and Hipkins (1975).

5.4 - CONDIÇÕES INICIAIS DO ESTIMADOR

Os testes a serem efetuados visam essencialmente dois objetivos: comprovação dos procedimentos elaborados no Capítulo 3 e análise de viabilidade prática. A associação com a utilização prática sugere a escolha das estatísticas a priori do estimador.

A determinação preliminar da órbita computada por métodos clássicos, tais como: o método de Laplace, de Gauss, de Herrick-Gibbs, de trilateração (Escobal, 1965), fornece precisões das seguintes ordens: $\sigma_r \approx 100$ metros e $\sigma_v \approx 0,1$ metros/seg, onde σ_r é a precisão em posição e σ_v é a precisão em velocidade. Tais dados são tomados como base para produzir as condições iniciais do estimador. O estado inicial (\bar{x}_0) é calculado da seguinte forma: dado σ_r e σ_v , automaticamente gera-se o estado inicial, corrompendo-se o estado "real" simulado por um ruído aleatório:

$$\begin{aligned} (\hat{x}_0)_r &= (x_0)_r + (\text{RUÍDO}) \cdot \sigma_r, \\ (\hat{x}_0)_v &= (x_0)_v + (\text{RUÍDO}) \cdot \sigma_v, \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $(x_0)_r$ e $(x_0)_v$ são vetores (dimensão 3) que contêm os valores das coordenadas de posição e de velocidade, respectivamente, fornecidos pela órbita "real" simulada, no instante inicial; RUÍDO é a variável aleatória de média nula e variância unitária (Seção 4.3); σ_r e σ_v são os desvios-padrão admitidos em posição e velocidade; e $(\hat{x}_0)_r$ e $(\hat{x}_0)_v$ são vetores (dimensão 3) que contêm valores das coordenadas de posição e velocidade iniciais (estado inicial) do estimador.

Para manter consistência estatística, a matriz de covariância do erro no estado inicial (P_0) é tomada diagonal, com variâncias valendo:

$$\begin{aligned} (P_0)_{ii} &= \sigma_r^2, \quad i = 1, 2, 3, \\ (P_0)_{ii} &= \sigma_v^2, \quad i = 4, 5, 6, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde $(P_0)_{ii}$ são os valores da diagonal da matriz P_0 correspondentes ao elemento ii . Mantendo-se a filosofia de dificultar o trabalho do estimador, as situações, onde σ_r vale 1000 metros e σ_v vale 1 metro/seg, serão freqüentemente testadas. A Figura 5.3 mostra uma listagem típica das condições iniciais adotadas no trabalho.

```

      VETOR DE ESTADO INICIAL  x0
      X = -0.628479350
      Y = -0.595847120
      Z =  0.574376870
      XP =  0.058140365
      YP = -0.034575644
      ZP =  0.027313138

ERRO INICIAL EM POSICAO = 1000.00 METROS = σr
ERRO INICIAL EM VELOCIDADE =  1.00 METROS/SEG = σv

ESTADO INICIAL DO ESTIMADOR  x̂0
  -0.628539E+00  -0.595956E+00  0.574493E+00  0.581437E-01  -0.345786E-01  0.273241E-01

MATRIZ DE COVARIANCIA INICIAL  P0
  0.245815E-07  0.  0.  0.  0.  0.
  0.  0.245815E-07  0.  0.  0.  0.
  0.  0.  0.245815E-07  0.  0.  0.
  0.  0.  0.  0.884936E-10  0.  0.
  0.  0.  0.  0.  0.884936E-10  0.
  0.  0.  0.  0.  0.  0.884936E-10
  
```

Fig. 5.3 - Listagem das condições iniciais.

5.5 - PARÂMETROS PARA ANÁLISE DE RESULTADOS

A fim de analisar os resultados, definem-se algumas variáveis que, traçadas ao longo do tempo, mostram o comportamento do estimador face às mais diversas condições de teste.

• Erros em posição

Definem-se duas variáveis para análise dos erros em posição:

$$\Delta r \triangleq \left[\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x}_i)^2 \right]^{1/2} \quad (5.3)$$
$$\Delta \hat{r} \triangleq \left[\sum_{i=1}^3 P_{ii} \right]^{1/2}$$

onde Δr é o módulo do erro em posição, cometido pelo estimador em relação à órbita "real" simulada; x_i é a componente de posição obtida a partir da órbita "real" simulada; \bar{x}_i é a componente de posição estimada; $\Delta \hat{r}$ é o módulo do erro em posição estimado, calculado a partir da matriz de covariância do erro no estado P; e P_{ii} é a componente da diagonal da matriz de covariância do erro no estado, referente à posição; i.é., $i=1, 2, 3$. Denominar-se-á Δr de erro real e $\Delta \hat{r}$ de erro estimado em posição.

Ambas as variáveis serão traçadas ao longo do tempo num mesmo gráfico (superpostas). Um bom comportamento do estimador caracteriza-se quando Δr e $\Delta \hat{r}$ convergem para valores próximos, no fim do intervalo de estimação. Quanto menores seus valores, melhor é a estimativa de posição.

• Erros em velocidade

De forma análoga definem-se:

$$\Delta v \triangleq \left[\sum_{i=4}^6 (x_i - \hat{x}_i)^2 \right]^{1/2} ; \quad (5.4)$$

$$\Delta \hat{v} \triangleq \left[\sum_{i=4}^6 P_{ii} \right]^{1/2} ,$$

onde Δv é o módulo do erro real em velocidade, cometido pelo estimador em relação à órbita "real" simulada; x_i é a componente de velocidade obtida a partir da órbita "real" simulada; \hat{x}_i é a componente de velocidade estimada; $\Delta \hat{v}$ é o módulo do erro em velocidade estimado, calculado a partir da matriz de covariância do erro no estado; e P_{ii} é a componente da diagonal da matriz de covariância do erro no estado, referente à velocidade; i.é., $i = 4, 5, 6$.

Analogamente, ambas as variáveis são traçadas num mesmo gráfico e as mesmas considerações anteriores são válidas; i.é., Δv e $\Delta \hat{v}$, convergindo para valores próximos, caracteriza um bom comportamento do estimador e quanto menores seus valores, melhor é a estimativa em velocidade. Denominar-se-á Δv de erro real e $\Delta \hat{v}$ de erro em velocidade estimado.

• Resíduo normalizado da observação de "range"

O resíduo da observação, basicamente, é a diferença entre o valor observado e o valor calculado, usando-se o estado estimado. O resíduo normalizado de "range", em cada instante, é a média dos resíduos de "range" dividida pelo desvio-padrão de "range". Algebricamente, o resíduo normalizado de "range" é definido por:

$$r_\rho \triangleq \left(\frac{1}{NE} \sum_{i=1}^{NE} (y_\rho - \hat{y}_\rho)_i \right) / \sigma_\rho \quad (5.5)$$

onde y_ρ é o valor da observação de "range" obtido pela estação i ; \hat{y}_ρ é o valor da observação estimada de "range" para a mesma estação; NE é o número de estações que fazem a observação de "range"; e σ_ρ é o desvio-padrão da observação de "range", cujo valor é dado na Seção 5.3. Tal cálculo produz o resíduo normalizado em unidades do desvio-padrão de "range";

σ_ρ , facilitando a visualização para fins de análise. É desejável que o resíduo r_ρ esteja na faixa de $\pm 3 \sigma_\rho$, quando traçado seu gráfico ao longo do tempo, tenha média nula e apresente características não-tendenciosas. Tal fato indica convergência da estimativa.

• Resíduo normalizado da observação de "range-rate"

Analogamente, a cada instante, expressa-se o resíduo normalizado de "range-rate" por:

$$r_\rho \triangleq \left(\frac{1}{NE} \sum_{i=1}^{NE} (y_\rho - \hat{y}_\rho)_i \right) / \sigma_\rho, \quad (5.6)$$

onde y_ρ é o valor da observação de "range-rate" obtido pela estação i ; \hat{y}_ρ é o valor da observação estimada de "range-rate" para a mesma estação; NE é o número de estações que fazem a observação de "range-rate"; e σ_ρ é o desvio-padrão da observação de "range-rate", dado na Seção 5.3. A variável r_ρ resulta em unidades de desvio-padrão de "range-rate", σ_ρ . As considerações anteriores são válidas, i.é., é desejável que r_ρ se situe na faixa de $\pm 3 \sigma_\rho$, apresentando média nula, ao longo do tempo. É importante salientar que os resíduos normalizados, tanto de "range" como de "range-rate", somente são avaliáveis quando as observações estão disponíveis; ou seja, quando haja ao menos uma estação vendo o satélite por algum intervalo de tempo (Seção 4.2). Nos gráficos, freqüentemente aparecerão intervalos de tempo em que não há visibilidade estação-satélite e, em tais intervalos, para efeito de visualização, os resíduos serão zerados (vide por exemplo Figura 5.13).

5.6 - TESTES

Nesta seção mostra-se os resultados de simulações de diversos casos, realizados no computador digital BURROUGHS 6800 do Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE. Dividem-se os testes em duas etapas: testes de casos básicos e testes de casos especiais. Os testes de casos básicos têm por finalidade verificar o funcionamento dos procedimentos elaborados no Capítulo 3. Tais procedimentos são introduzidos de maneira

gradual, de forma que se note suas influências de acordo com os resultados e progressos obtidos. Inicialmente, o fenômeno da divergência das estimativas, que até o momento foi descrito somente no plano teórico, é caracterizado graficamente. Em seguida, mostram-se os resultados na forma gráfica, quando aplicado o procedimento de ruído adaptativo (Seção 3.3). Finaliza-se os casos básicos, expondo-se os resultados da aplicação do modelo de compensação dinâmica com estimação das acelerações não-modeladas (Seção 3.4), e conjuntamente incluindo-se a técnica de ruído adaptativo. Quanto aos testes de casos especiais, estes caracterizam situações hipotéticas e peculiares. Tais situações diferem da dos casos básicos em termos das estações de rastreamento e taxas de observações, e são incluídas a título de ilustração.

5.6.1 - CARACTERIZAÇÃO DA DIVERGÊNCIA: CASO BÁSICO 1

Os gráficos expostos destinam-se a mostrar o comportamento do estimador quando ocorre o fenômeno da divergência. Neste teste, o ruído no estado não é considerado e nenhuma técnica de compensação é utilizada. Com as 3 estações fictícias, 6 observações a cada instante garantem níveis de informação suficientes para estimar o estado. Também, erros usuais em posição e em velocidade são admitidos (Seção 5.4). Para esta corrida, utilizam-se as seguintes condições de teste:

- filtro estendido de Kalman com processamento seqüencial das observações;
- estimação da posição e velocidade (estado com 6 elementos);
- sem ruído dinâmico; i.é., a matriz de covariância do ruído Q_k é identicamente nula;
- estações fictícias de rastreamento;
- órbita básica inicial, conforme a Seção 5.2;
- erros iniciais em posição, $\sigma_{\vec{r}} = 100$ metros, e em velocidade, $\sigma_{\vec{v}} = 0,1$ metros/seg.

A Figura 5.4 mostra a caracterização da divergência, como crescimento em magnitude dos resíduos normalizados de "range". As Figuras 5.5 e 5.6 mostram os erros reais e estimados ao longo do tempo, em posição e velocidade respectivamente. Os erros estimados decrescem, fornecendo uma visão otimista e irrealista ao estimador, que supõe estar aumentando o conhecimento do sistema (Seção 3.3.1). Como consequência, os erros reais aumentam, deteriorando cada vez mais as estimativas com o passar do tempo. Gráficos como estes são típicos quando ocorre a divergência das estimativas.

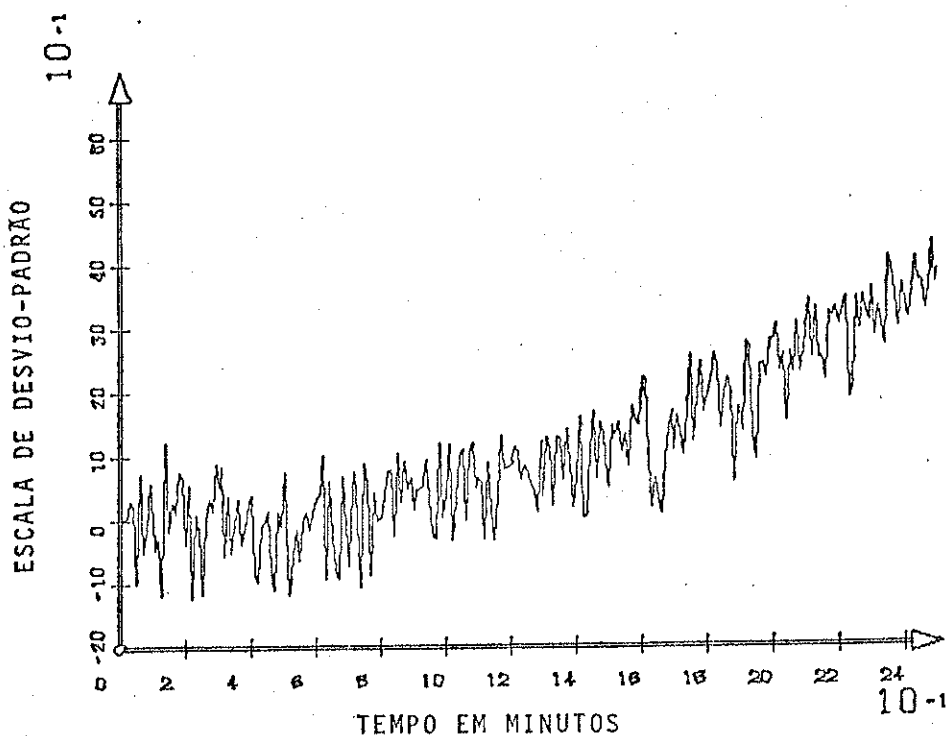


Fig. 5.4 - Resíduo normalizado de "range", caso básico 1.

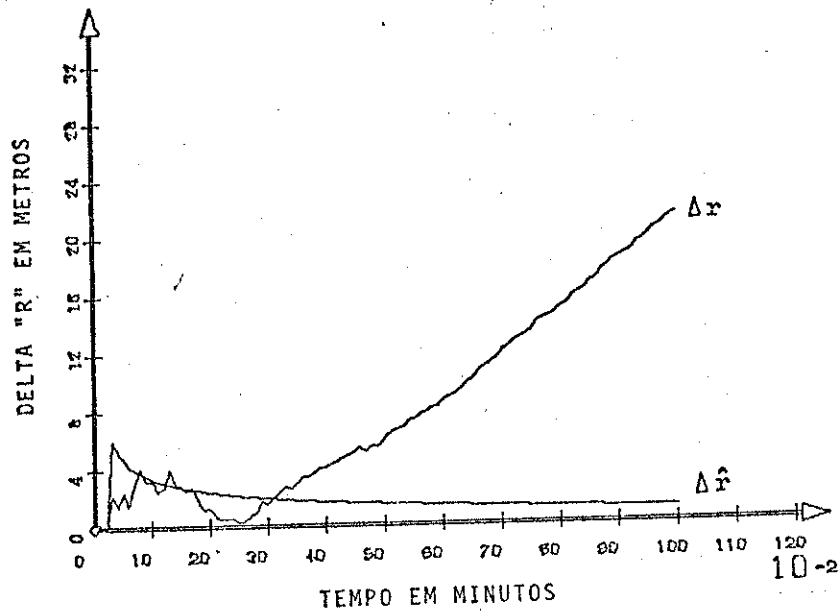


Fig. 5.5 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso básico 1.

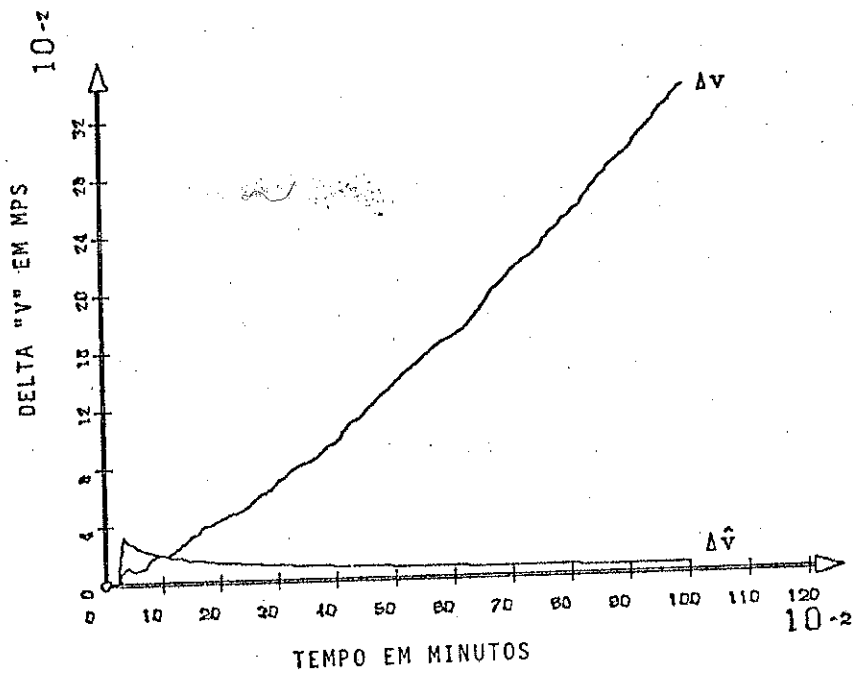


Fig. 5.6 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso básico 1.

5.6.2 - INCLUSÃO DA TÉCNICA DE RUÍDO ADAPTATIVO: CASOS BÁSICOS 2 E 3

Nestes testes, o procedimento adaptativo, descrito na Seção 3.3, é implementado. Dois casos são testados: o primeiro (caso básico 2) comprova o funcionamento do processo de estimar o ruído no estado adaptativamente, quando o estimador trabalha sob condições ideais, semelhantes ao caso anterior (caso básico 1), e a divergência não manifesta; o segundo (caso básico 3) expõe o comportamento do estimador, quando condições críticas de trabalho (em termos de obtenção dos dados para processamento) são simuladas.

e Caso básico 2

Para este caso, observações em quantidade suficientes (6) são obtidas pelas três estações fictícias, de forma a assegurar condições ideais de teste quanto ao nível de informação. Erros iniciais maiores que os do caso básico 1 são admitidos para a posição e a velocidade. As especificações deste caso são:

- filtro estendido de Kalman com processamento seqüencial das observações;
- estimação da posição e velocidade (estado com 6 elementos);
- estatística do ruído dinâmico estimado adaptativamente, conforme a Seção 3.3, i.é., $Q_k \neq 0$;
- estações fictícias de rastreamento;
- órbita básica inicial, conforme a Seção 5.2;
- erros iniciais em posição, $\sigma_r = 1000$ metros, e em velocidade, $\sigma_v = 1$ metro/seg;

As Figuras 5.7 e 5.8 atestam a convergência rápida em posição e velocidade, obtendo-se erros finais de cerca de 1 metro em posição e 1,5 cm/seg em velocidade. Neste caso, nota-se a coerência estatística das estimativas, pois o erro estimado, fornecido pela matriz de covariância do erro no estado, está de acordo com os erros reais cometidos

pele estimador. As Figuras 5.9 e 5.10 mostram o comportamento dos resíduos normalizados de "range" e "range-rate", respectivamente. Nota-se que tais resíduos são não-tendenciosos (média nula) e estão na faixa de $\pm 3\sigma$, sem qualquer vestígio de divergência.

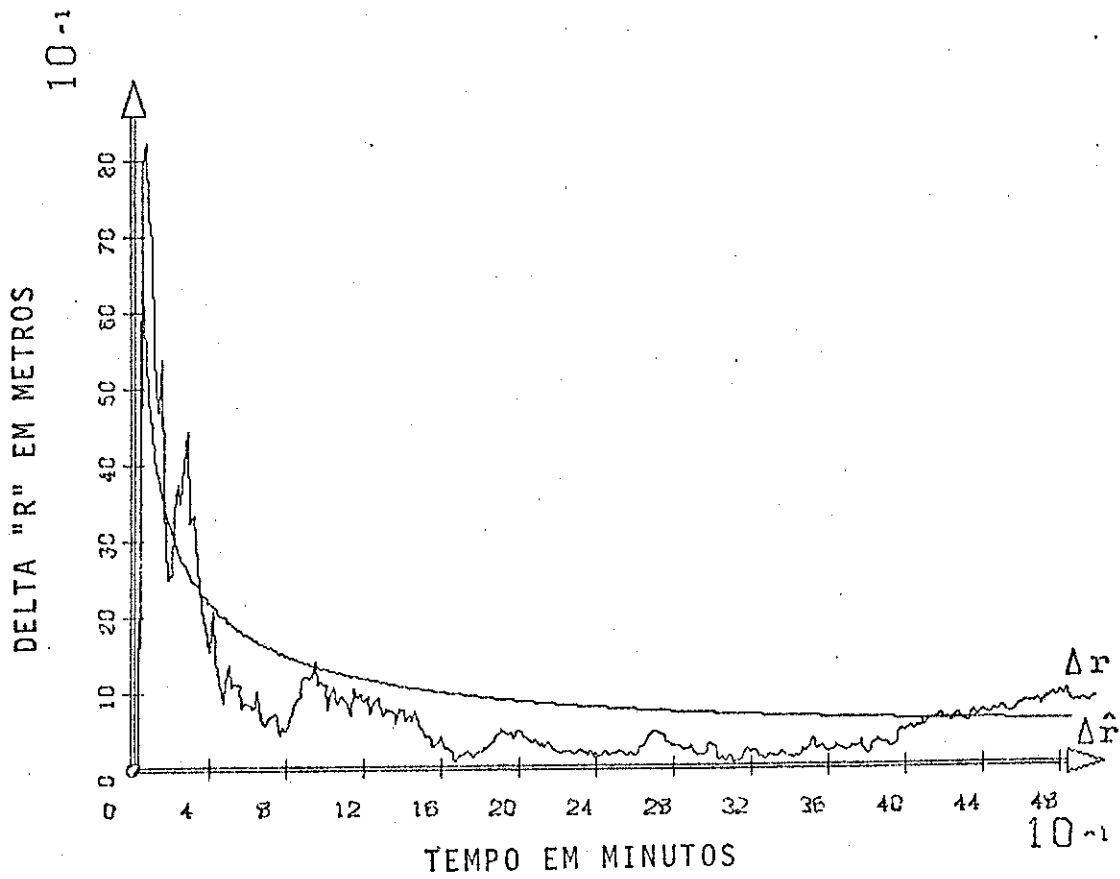


Fig. 5.7 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso básico 2.

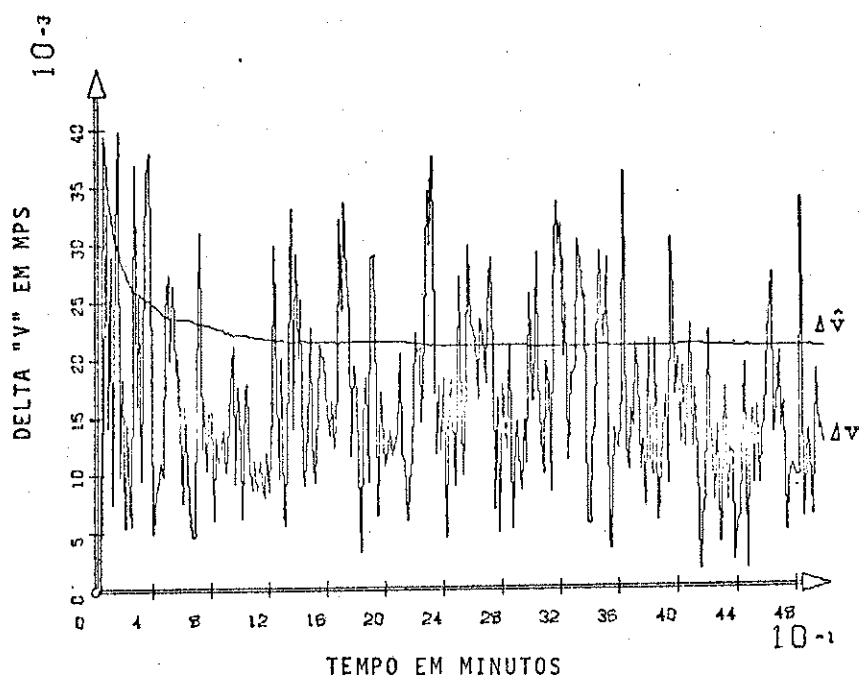


Fig. 5.8 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso básico 2.

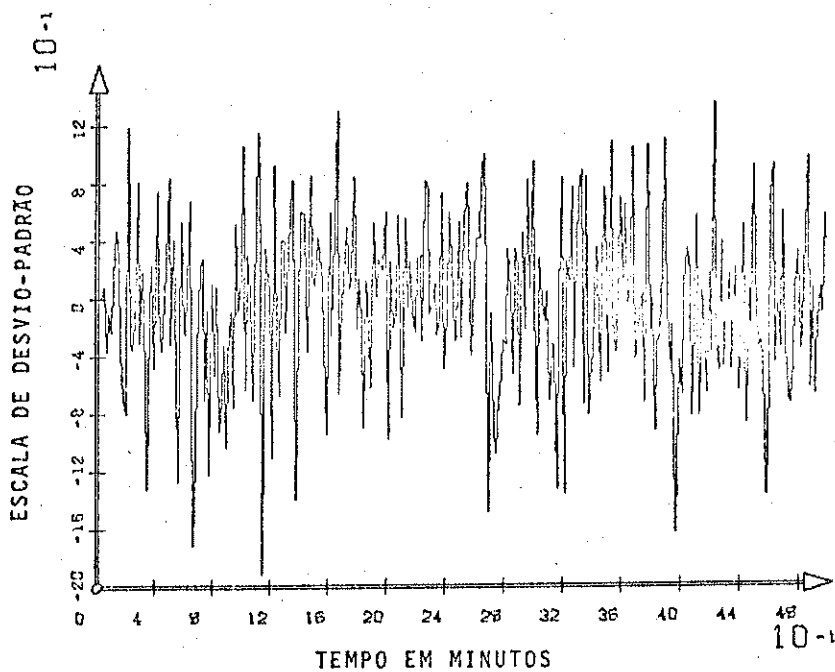


Fig. 5.9 - Resíduo normalizado de "range", caso básico 2.

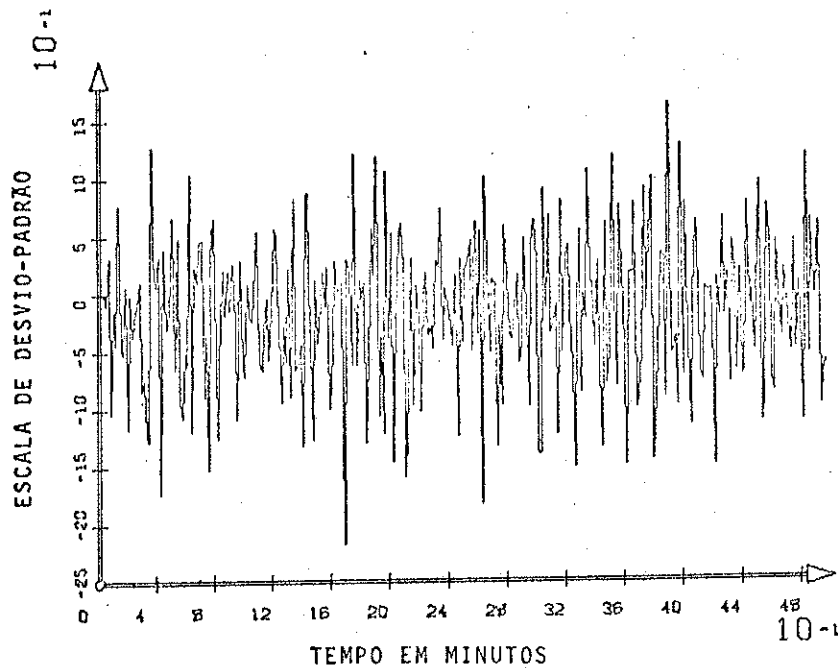


Fig. 5.10 - Resíduo normalizado de "range-rate", caso básico 2.

• Caso básico 3

Desta feita, mãs condições de obtenção de dados são criadas por meio das estações reais de rastreamento, onde no intervalo de 1,8 a 4,8 minutos, aproximadamente, somente uma estação vê o satélite. Na Figura 5.2, no intervalo considerado (5 minutos), comprova-se que só a estação número 4 (ver Tabela 4.1) observa o satélite. Este fato implica que a cada segundo são efetuadas duas observações no intervalo visível, ao passo que com as três estações fictícias obtêm-se seis observações a cada segundo, em todo o intervalo visível. Erros iniciais idênticos aos do caso básico 2 são admitidos para a posição e a velocidade. As especificações são as mesmas do caso anterior, com exceção das estações fictícias de rastreamento que são substituídas pelas estações reais constantes da Tabela 4.1. As Figuras 5.11 e 5.12 mostram os erros em posição e em velocidade, obtendo-se, após o intervalo de visibilidade, 800 metros de erro em posição e 3 metros/seg de erro em velocidade. Em relação aos erros iniciais (1000 metros e 1 metro/seg), a estimativa em posição melhorou e um velocidade deteriorou-se. As estatísticas fornecem $\Delta \hat{r}$ e $\Delta \hat{v}$ um tanto a favor da segurança, provavelmente devido à escolha da in

formação a priori para o ruído no estado também a favor da segurança (Seção 3.3.5). As Figuras 5.13 e 5.14 mostram o comportamento dos resíduos normalizados no intervalo visível. Após uma instabilidade inicial, os resíduos recuperam-se e acomodam-se em torno de zero. Em particular, para o "range-rate" (Figura 5.14) no intervalo de 3,0 a 3,4 minutos, os resíduos aparentemente mostram um início de divergência que logo é eliminado. Em tal intervalo, este fato reflete-se nitidamente na estimativa de velocidade e, em escala menos perceptível, na estimativa de posição. Todavia, o fato mais importante é que a técnica de ruído adaptativo consegue captar tal irregularidade no resíduo e rapidamente informar a matriz de covariância do erro no estado, para se adaptar a tal ocorrência de modo a regularizar a situação.

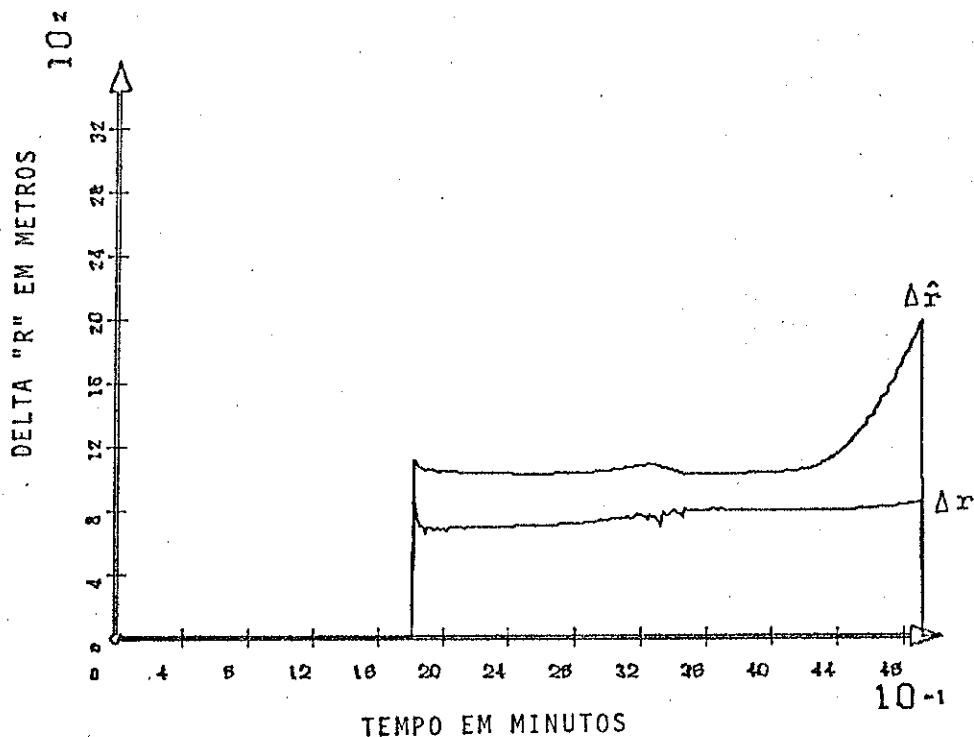


Fig. 5.11 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso básico 3.

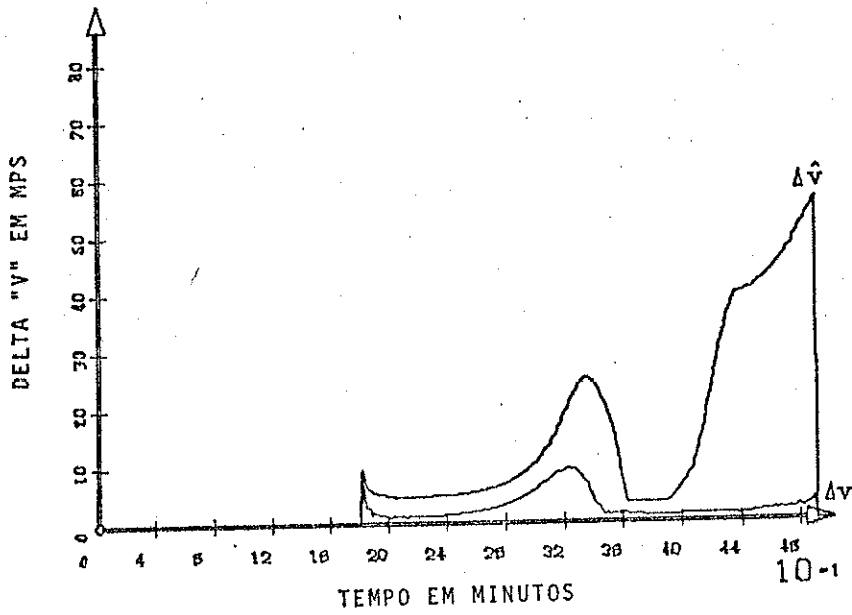


Fig. 5.12 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso básico 3.

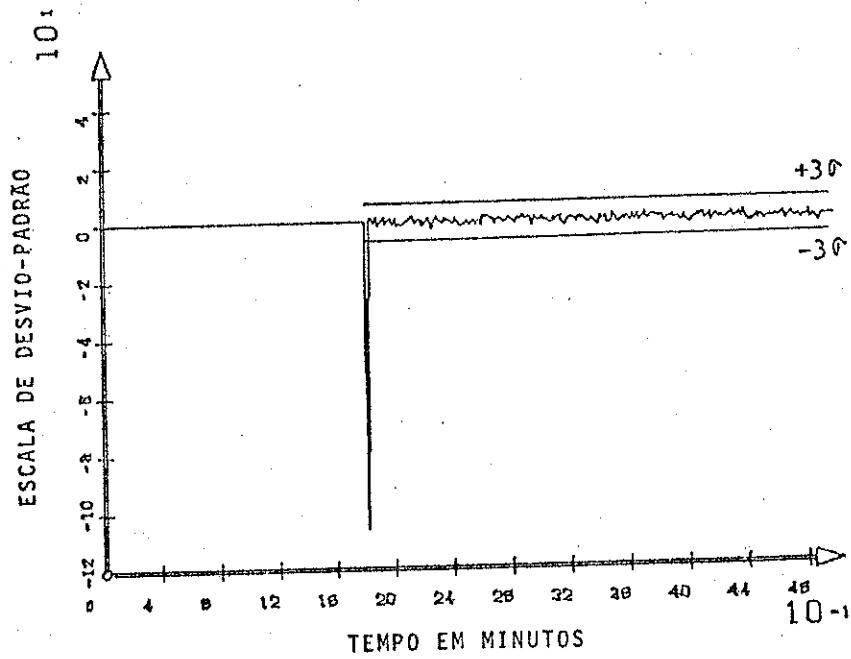


Fig. 5.13 - Resíduo normalizado de "range", caso básico 3.

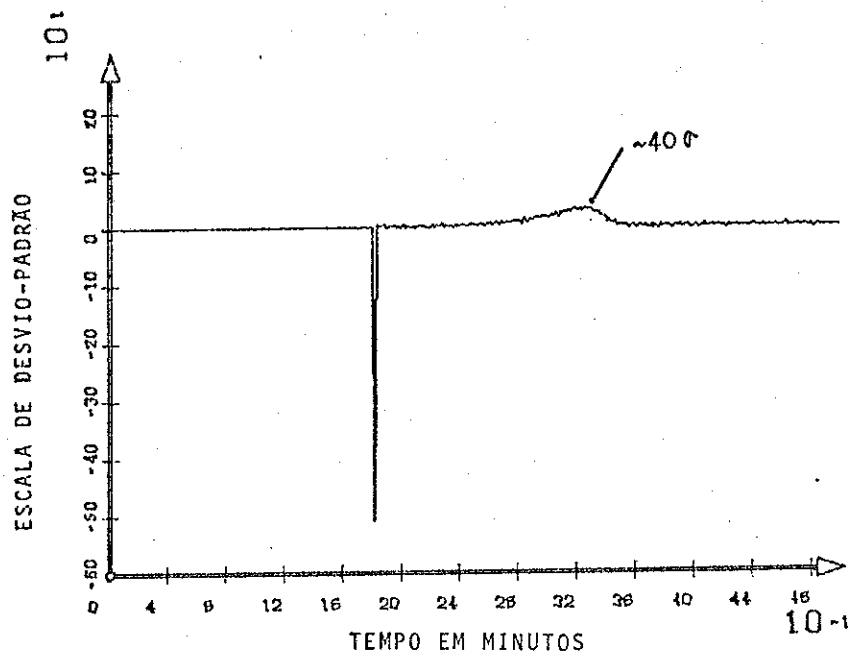


Fig. 5.14 - Resíduo normalizado de "range-rate", caso básico 3.

5.6.3 - UTILIZAÇÃO DA COMPENSAÇÃO DO MODELO DINÂMICO: CASOS BÁSICOS 4 E 5

A Compensação do Modelo Dinâmico - CMD - permite estimar as acelerações não-modeladas juntamente com a posição e a velocidade do satélite (Seção 3.4). Com os resultados obtidos e utilizando-se tal técnica, mostra-se a melhoria na precisão da estimativa. A estatística do ruído no estado é avaliada pela técnica de ruído adaptativo, descrita na Seção 3.3. Dois casos são testados: o primeiro (caso básico 4) mostra o desempenho do estimador quando são utilizadas as estações fictícias de rastreamento para obtenção de dados de observação; o segundo (caso básico 5) utiliza as estações reais para obter tais dados. Para ilustração, traça-se um gráfico que mostra o comportamento das acelerações não-modeladas ao longo do tempo. Calcula-se tais acelerações por:

$$a_{nm} = a_{real} - a_m,$$

$$\hat{a}_{nm} \triangleq \hat{e},$$

(5.7)

onde a_{nm} é o vetor das acelerações não-modeladas; a_{real} é o vetor das acelerações "reais" simuladas (ver Seção 4.1); a_m é o vetor das acelerações modeladas no estimador, cujas equações são descritas no Apêndice A; \hat{a}_{nm} é o vetor das acelerações não-modeladas estimadas; e \hat{e} é o vetor das acelerações não-modeladas estimadas, produzidas pela CMD.

• Caso básico 4

A única diferença entre este caso e o caso básico 2 é a inclusão da CMD. Todavia, tal fato acarreta também a inclusão de parâmetros necessários para gerar informações a priori ao estimador adaptativo de ruído dinâmico, que devem ser especificados (Seção 3.4.3). As especificações deste caso são:

- filtro estendido de Kalman com processamento seqüencial das observações;
- estimação da posição, da velocidade e das acelerações não-modeladas (estado com 9 elementos);
- estatística do ruído dinâmico estimado adaptativamente, conforme a Seção 3.3; i.é., $Q_k \neq 0$;
- estações fictícias de rastreamento;
- órbita básica inicial, conforme a Seção 5.2;
- erros iniciais em posição, $\sigma_r = 1000$ metros, e em velocidade, $\sigma_v = 1$ metro/seg;
- acelerações não-modeladas com inicialização nula; i.é., $\hat{e}(0) \equiv 0$;
- erros iniciais nas acelerações não-modeladas de $2 \cdot 10^{-3}$ metros/seg², i.é., $P_{ii}(0) = 4 \cdot 10^{-6}$ metros²/seg⁴ para $i = 7, 8, 9$, onde P_{ii} são os valores das diagonais correspondentes ao elemento ii da matriz de covariância do erro no estado;
- a porcentagem γ , para o cálculo da informação a priori da matriz Q_k , é considerada com valor 0,1 (10%) e a matriz de covariância P^0 é inicializada com valor 10^{-12} (ver Seção 3.4.3).

Os resultados obtidos pouco diferem dos do caso básico 2, o que era de se esperar, uma vez que se trabalha com abundância de dados (alto nível de informação). Assim, as Figuras 5.15 e 5.16 mostram convergência e coerência estatística nas estimativas de posição e de velocidade. Ao fim de 4 minutos de estimação, obtêm-se erros de 1 metro em posição e 2 cm/seg em velocidade. As Figuras 5.17 e 5.18 mostram a variação dos resíduos normalizados de "range" e "range-rate" ao longo do tempo, que se mantêm dentro da faixa de $\pm 3\sigma$. A Figura 5.19 mostra a componente z da aceleração não-modelada e sua estimativa. Pela figura nota-se erros da ordem de 10^{-6} raios terrestres/min².

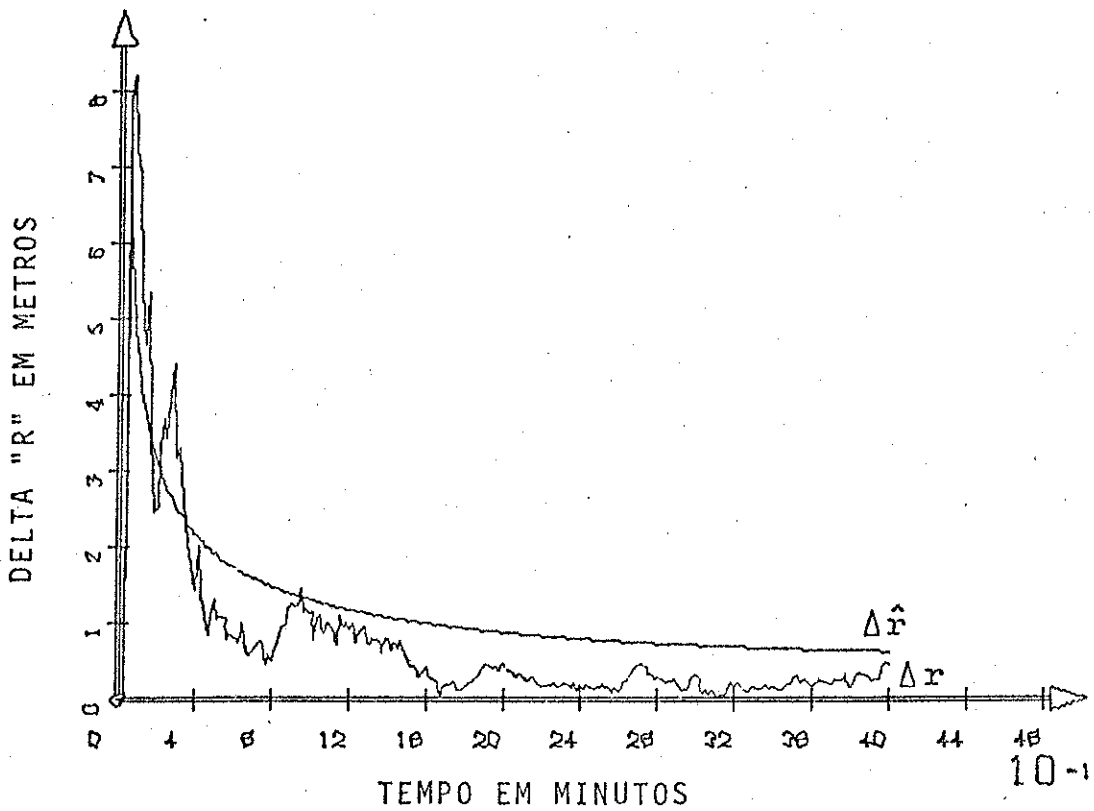


Fig. 5.15 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso básico 4.

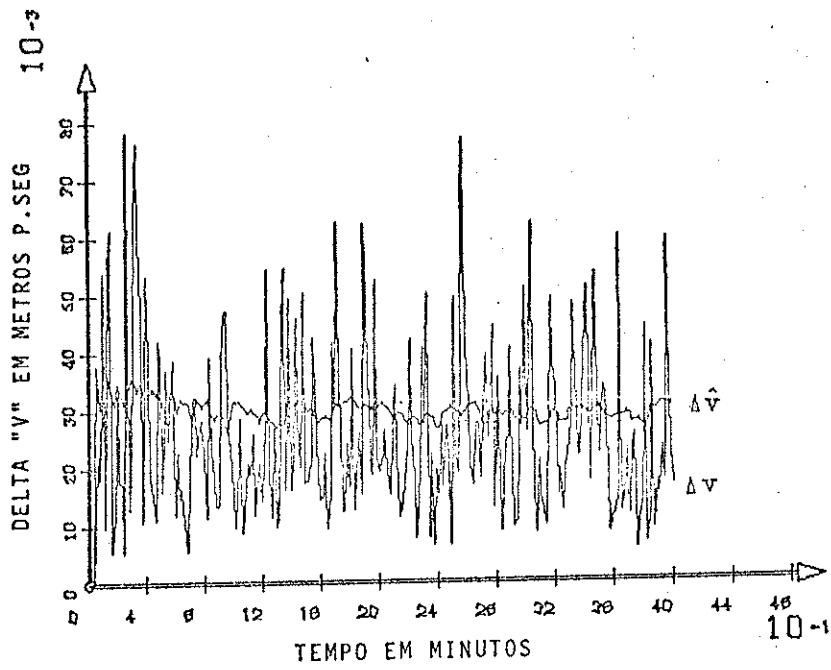


Fig. 5.16 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso básico 4.

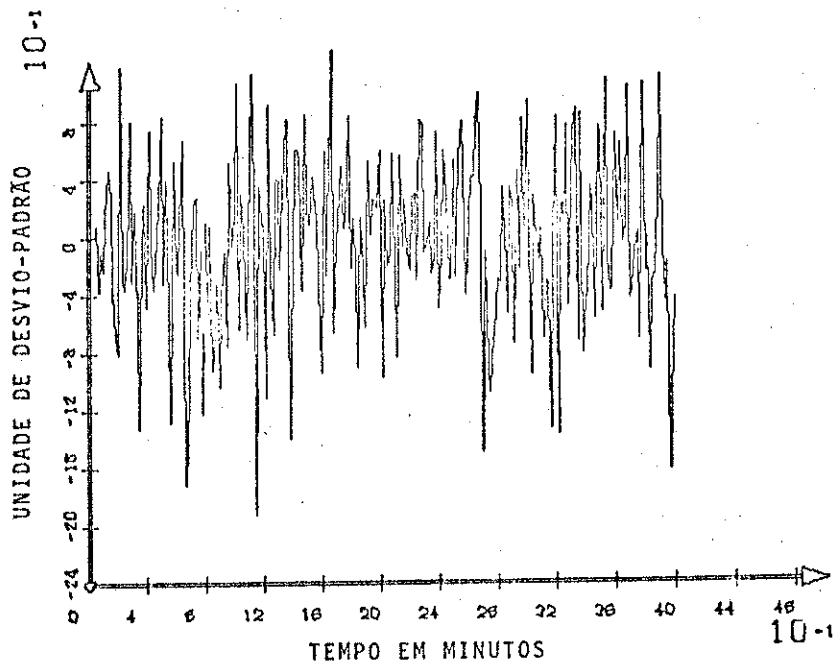


Fig. 5.17 - Resíduo normalizado de "range", caso básico 4.

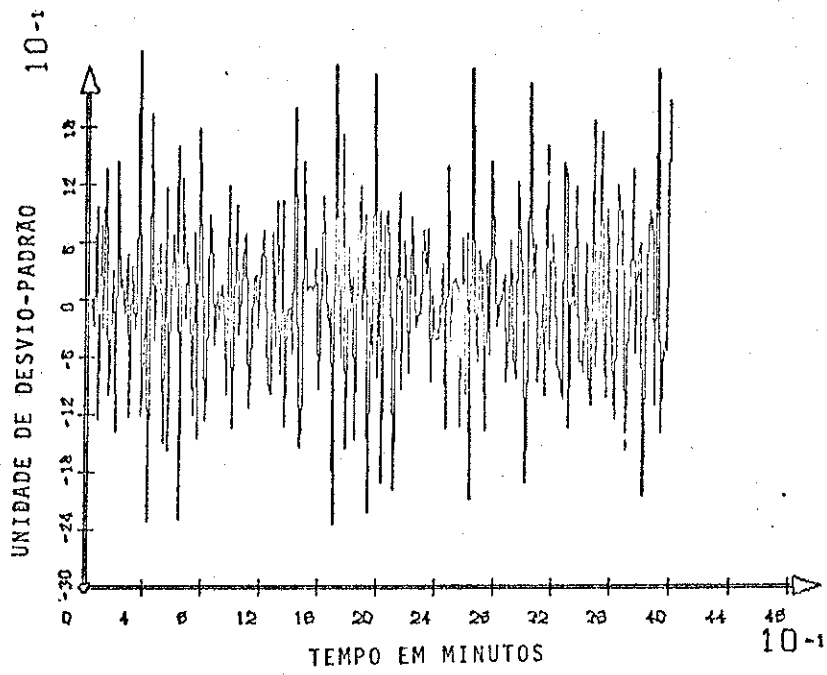


Fig. 5.18 - Resíduo normalizado de "range-rate", caso básico 4.

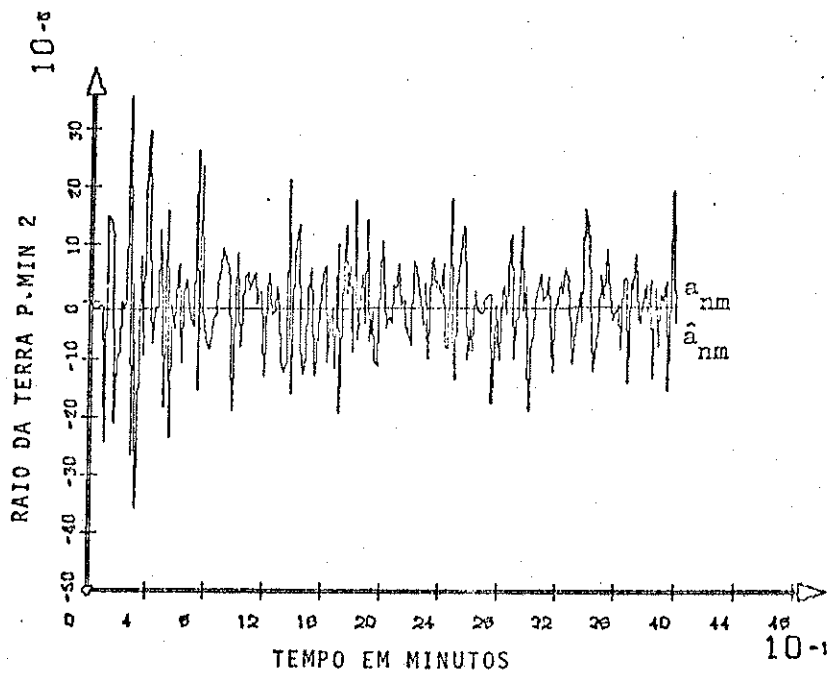


Fig. 5.19 - Acelerações não-modeladas, caso básico 4.

● Caso básico 5

Utilizam-se as estações reais de rastreamento para obter dados, o que é possível somente entre 1,8 a 4,9 minutos, conforme a explanação do caso básico 3. Portanto, as especificações são as mesmas do teste anterior (caso básico 4), onde as estações fictícias são substituídas pelas estações reais de rastreamento.

As Figuras 5.20 e 5.21 mostram os erros em posição e em velocidade, obtendo-se, após o intervalo de visibilidade, cerca de 300 me tros de erro em posição e 2 metros/seg de erro em velocidade. Tais erros mostram uma melhor precisão na estimativa do estado em comparação com o caso básico 3 (ver Tabela 5.2). Os resíduos normalizados se mantêm den tro do previsto, conforme as Figuras 5.22 e 5.23.

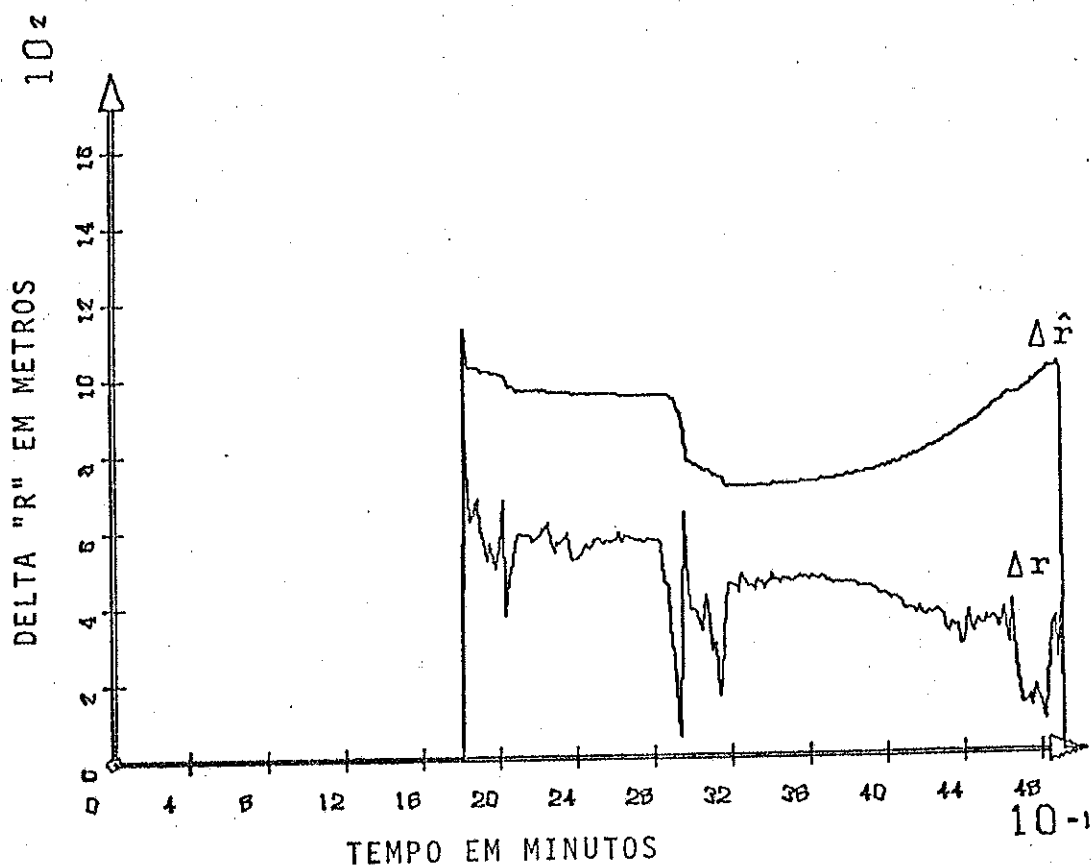


Fig. 5.20 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso básico 5.

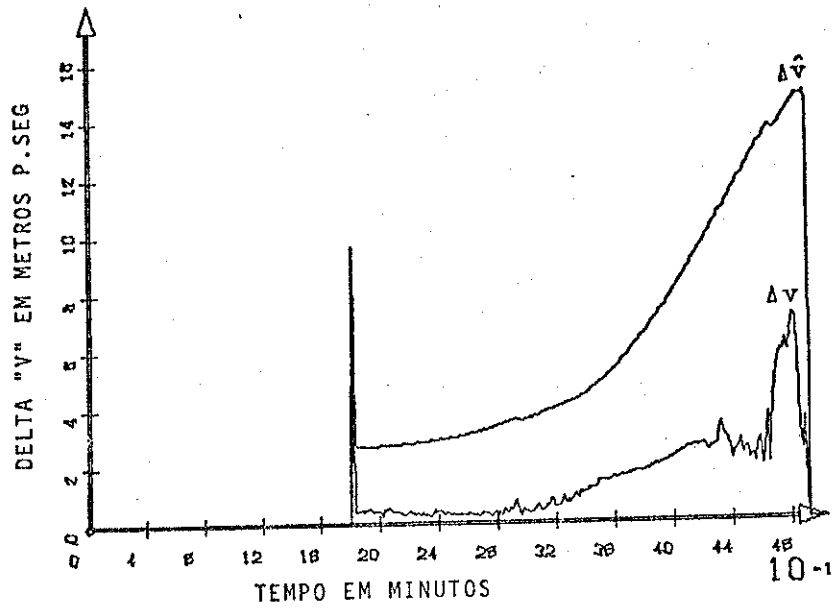


Fig. 5.21 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso básico 5.

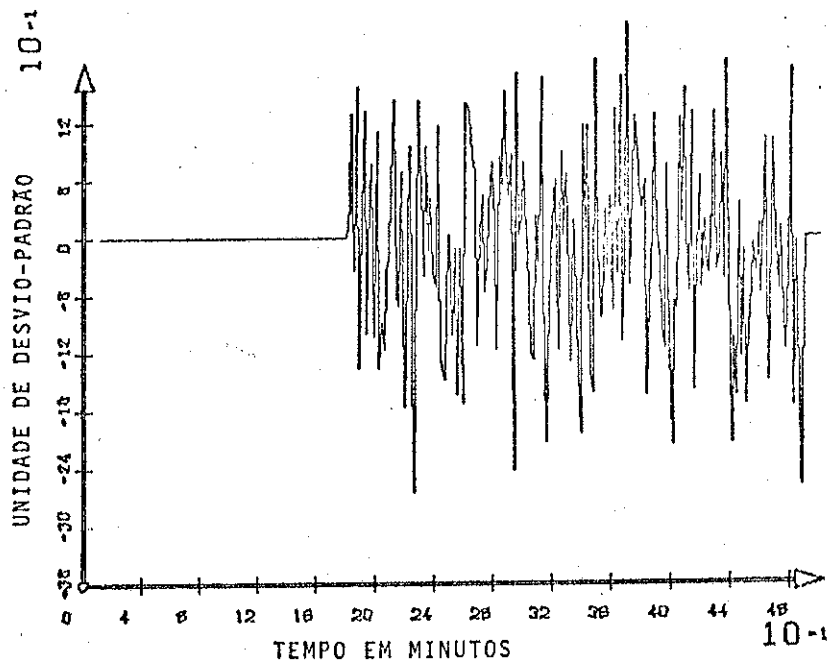


Fig. 5.22 - Resíduo normalizado de "range", caso básico 5.

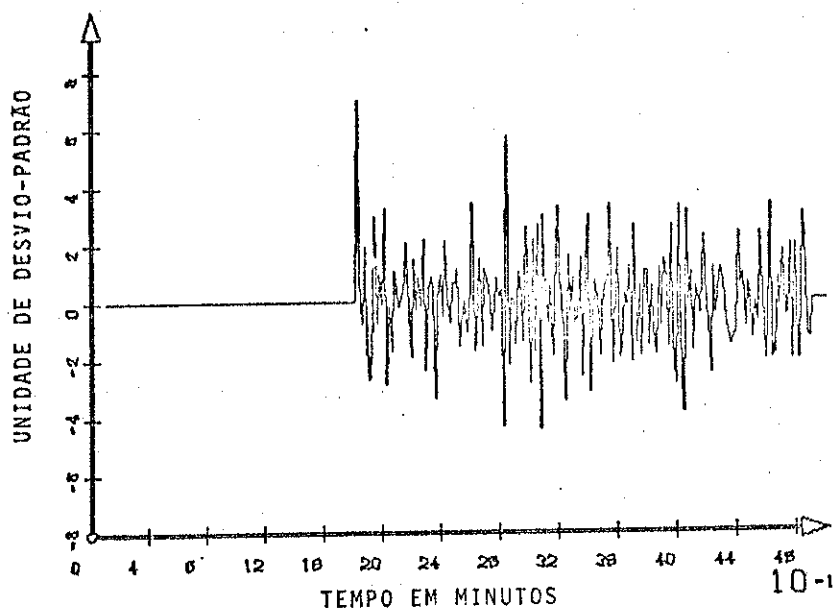


Fig. 5.23 - Resíduo normalizado de "range-rate", caso básico 5.

5.6.4 - CASO ESPECIAL 1

Este caso ilustra a influência da taxa de observações na convergência do procedimento de estimação (ver Seção 5.3). Para tal fim, diminui-se a taxa de observações para 2 medidas a cada 6 segundos por estação. É de se esperar uma convergência mais lenta (Negreiros de Paiva, 1980b), característica inerente aos estimadores sequenciais, como o filtro de Kalman (Jazwinski, 1970). Utilizaram-se as estações reais para coletar observações com tal taxa. As especificações deste caso são as mesmas do caso anterior, caso básico 5, exceto pelo fato das estações reais trabalharem com menor taxa de observações; i.é., das estações reais obterem 2 medidas a cada 6 segundos no intervalo visível.

As Figuras 5.24 e 5.25 mostram os erros em posição e em velocidade, respectivamente. O erro real em posição é da ordem de 800 metros e em velocidade é de 2 metros/seg, obtidos ao fim do intervalo visível. Em relação ao caso anterior, caso básico 5, a estimativa em velocidade conservou a ordem de precisão; entretanto, em posição piorou. Conclui-se, daí, que o estimador responde mais lentamente quando se diminui a taxa de observações.

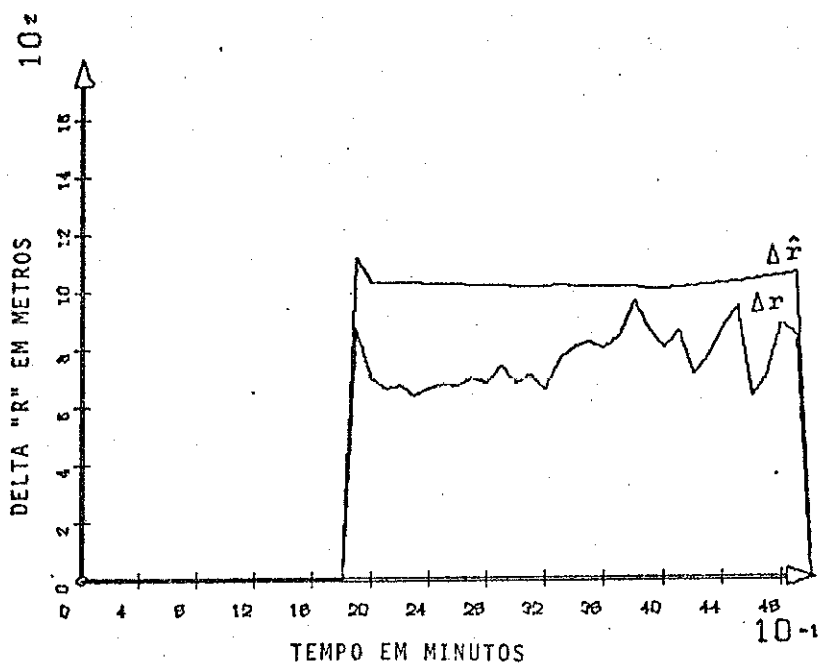


Fig. 5.24 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso especial 1.

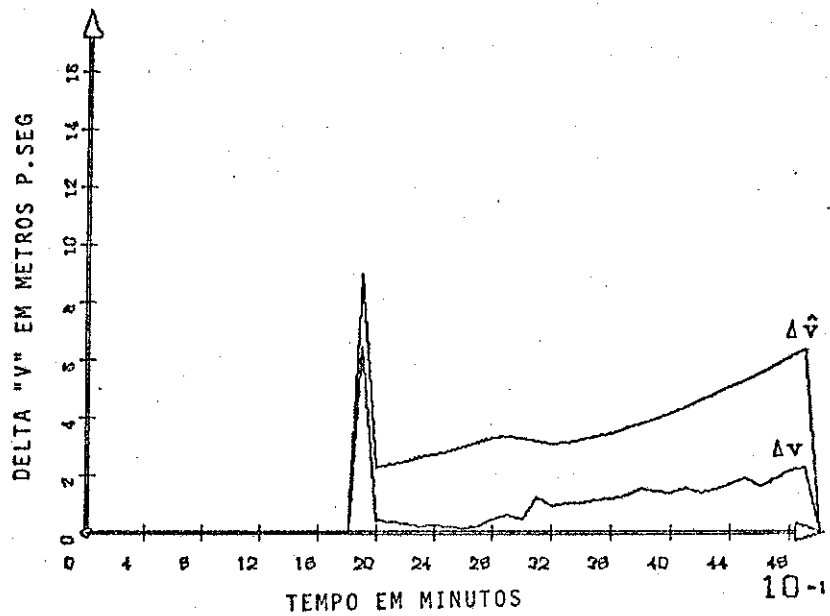


Fig. 5.25 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso especial 1.

5.6.5 - CASO ESPECIAL 2

Este caso ilustra a influência do nível de informação na precisão das estimativas. O nível de informação está relacionado com o número de estações de rastreamento que fazem observações simultaneamente; quanto maior a quantidade de observações simultâneas, maior o nível de informação, implicando numa maior quantidade de informações enviadas ao estimador. Para tanto, relacionou-se 100 estações de rastreamento existentes e espalhadas pela Terra, que colhem dados de observações quando há visibilidade. As especificações são as mesmas do caso básico 5, exceto as das estações de rastreamento que são substituídas pelas 100 estações aqui catalogadas. Para a mesma órbita básica inicial, em 5 minutos, há, eventualmente, até 3 estações observando simultaneamente o satélite. Assim, no intervalo de 0 a 1,8 minutos, uma estação vê o satélite; de 1,8 a 2,4 minutos, 3 estações vêem o satélite; e de 2,4 a 4,9 minutos, 2 estações vêem o satélite.

As Figuras 5.26 e 5.27 mostram os erros em posição e em velocidade. No intervalo de 0 a 1,8 minutos, os erros aumentam até decrescerem brusca e rapidamente de 1,8 a 2,4 minutos. No intervalo posterior, de 2,4 a 4,9 minutos, os erros se deterioram até alcançarem uma precisão na estimativa de 100 metros em posição e 2 metros/seg em velocidade.

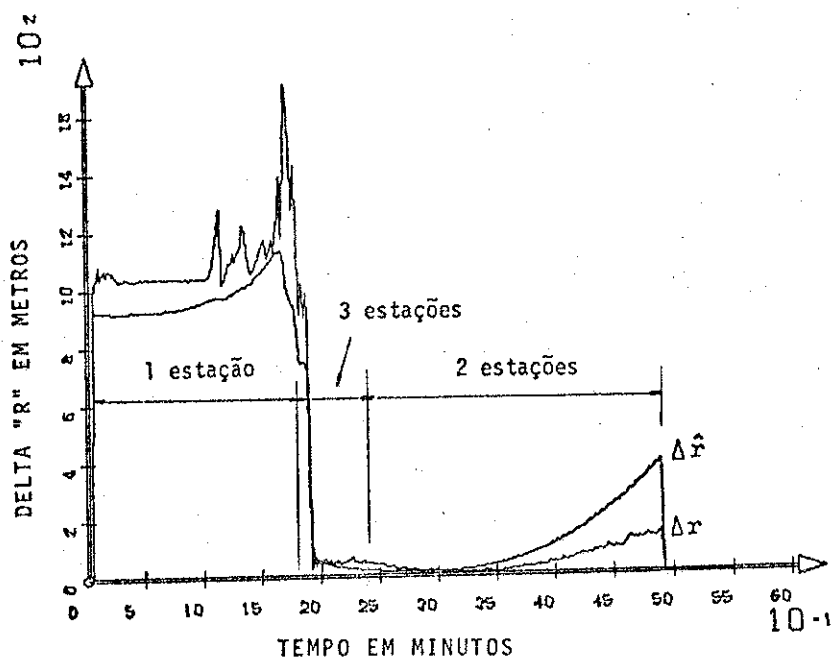


Fig. 5.26 - Δr e $\Delta \hat{r}$, caso especial 2.

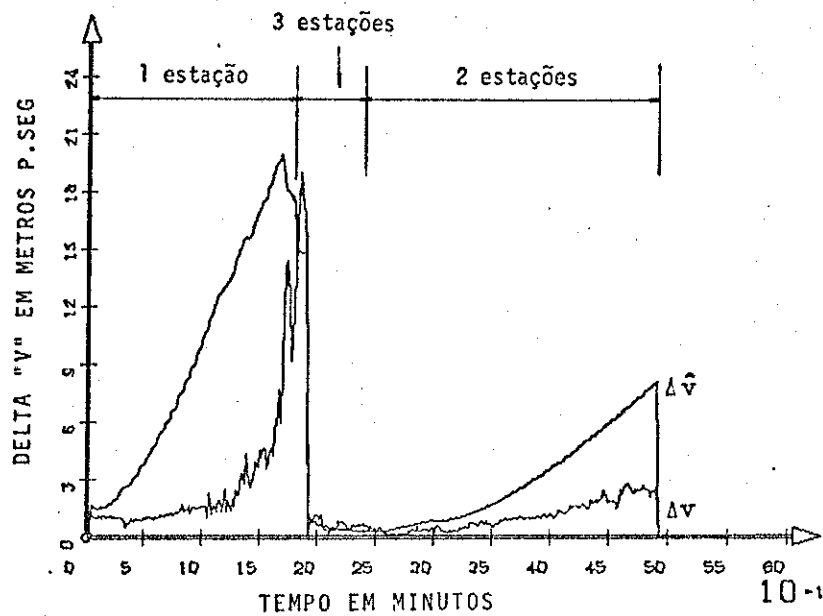


Fig. 5.27 - Δv e $\Delta \hat{v}$, caso especial 2.

5.7 - CONCLUSÕES SOBRE OS CASOS TESTADOS

Um quadro sinótico expondo os resultados dos casos testados é apresentado na Tabela 5.2.

Com a apresentação dos 5 casos básicos e dos 2 casos especiais, algumas conclusões são imediatas:

- a mais importante conclusão obtida é sobre a necessidade da inclusão de procedimentos de compensação no estimador, para evitar a divergência das estimativas, sendo, no mínimo, recomendável a aplicação do estimador de ruído no estado adaptativo, descrito na Seção 3.3;
- quando se utiliza as estações fictícias para colher dados de observações, o estimador fornece boa precisão das estimativas mesmo quando ele usa somente a técnica adaptativa de ruído, e a influência da CMD é pouco notada quando esta é incluída no procedimento;

- quando se utiliza as estações reais, acentua-se a influência da CMD, obtendo-se maior precisão nas estimativas;
- quanto maior a taxa de observações efetuadas por cada estação, mais rápida a convergência, conforme atesta o caso especial 1;
- uma análise rápida sugere o aumento do nível de informação; em outras palavras, o aumento do número de estações de rastreamento, que vêem o satélite simultaneamente, gera condições para estimativas mais precisas, conforme o caso especial 2.

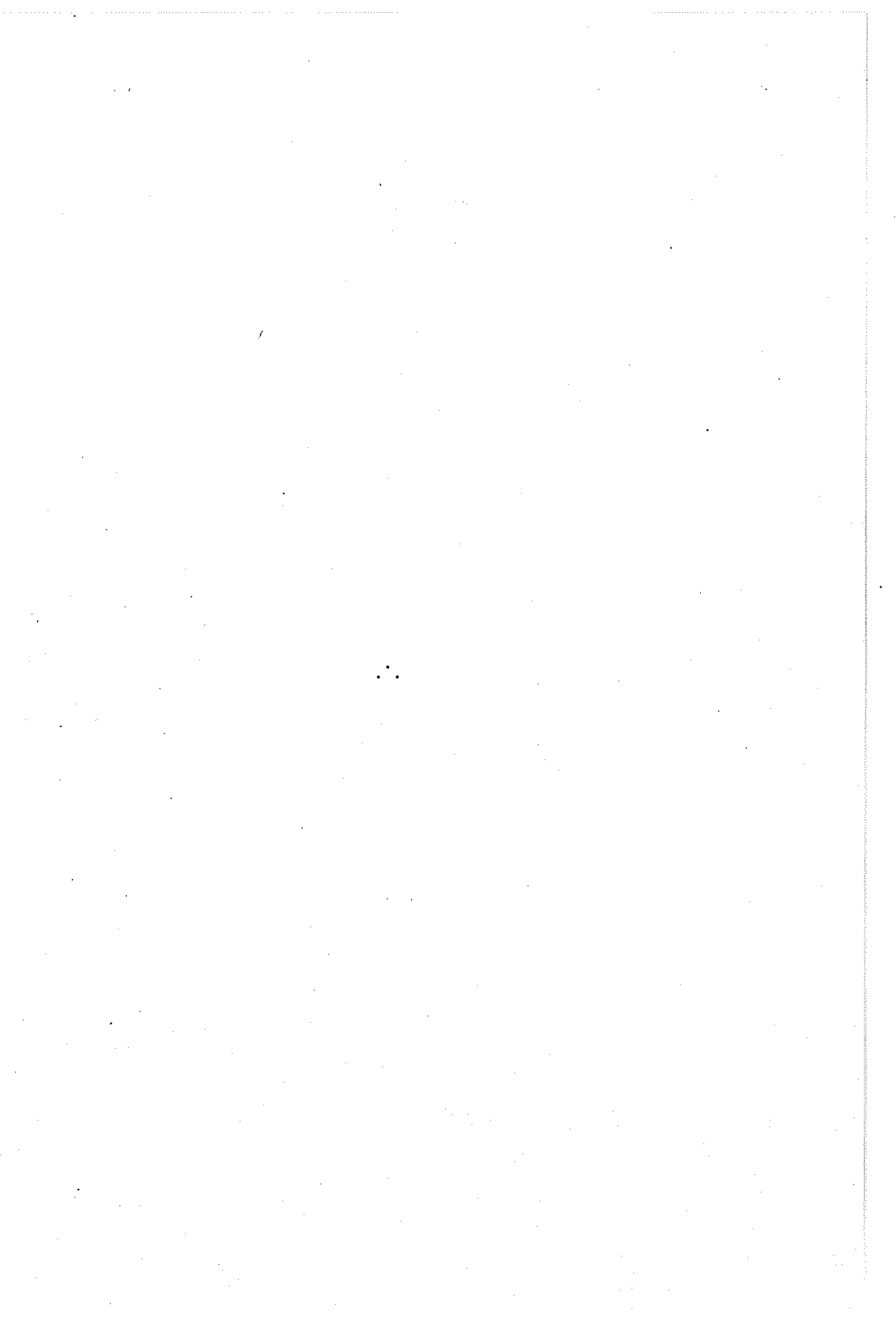
TABELA 5.2

QUADRO SINÓPTICO DOS TESTES

CASOS b... BÁSICOS e... ESPECIAIS	PROCEDIMENTOS UTILIZADOS	OBSERVAÇÃO	ESTAÇÕES DE RASTREAMENTO UTILIZADAS	Δr (m)		Δv (m/seg)	
				INICIAL	FINAL	INICIAL	FINAL
b 1	1	$Q_k \equiv 0$	fictícias	100	diverge	0,1	diverge
b 2	1 + 2	$Q_k \neq 0$	fictícias	1000	1	1	0,015
b 3	1 + 2	$Q_k \neq 0$	reais	1000	800	1	3
b 4	1 + 2 + 3	$Q_k, \bar{a}_{nm} \neq 0$	fictícias	1000	1	1	0,020
b 5	1 + 2 + 3	$Q_k, \bar{a}_{nm} \neq 0$	reais	1000	300	1	2
e 1	1 + 2 + 3	$Q_k, \bar{a}_{nm} \neq 0$	reais	1000	800	1	2
e 2	1 + 2 + 3	$Q_k, \bar{a}_{nm} \neq 0$	100 estações	1000	100	1	2

PROCEDIMENTOS: 1 - Filtro estendido de Kalman com processamento sequencial das observações.
 2 - Técnica de ruído no estado adaptativo (Seção 3.3)
 3 - Compensação do Modelo Dinâmico (Seção 3.4)

NOTAS: a) órbita básica inicial conforme Seção 5.2
 b) estações reais: só a estação 4 é visível de 1,5 a 4,9 minutos
 c) caso e1: taxa de observações de 2 medidas a cada 6 seg por estação



CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

6.1 - INTRODUÇÃO

O procedimento de estimação, implementado e testado neste trabalho, consiste em uma técnica adaptativa para avaliar o ruído no estado, agregado a uma técnica de Compensação do Modelo Dinâmico - CMD. Estas técnicas foram utilizadas adaptativa e sequencialmente, possibilitando o processamento em tempo real dos dados de observação de satélites a baixa altitude. Os testes feitos mostram a efetividade do procedimento, tanto em termos de precisão das estimativas, quanto no aspecto de consistência estatística das estimativas, provida pela matriz de covariância dos erros no estado.

6.2 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Devido ao caráter genérico do procedimento de estimação adotado, sua utilização não se restringe ao tipo de problema aqui tratado, podendo ser aplicado a problemas semelhantes, conforme o desenvolvimento exposto no Capítulo 3. Todavia, a aplicação desse procedimento ao problema em estudo, a determinação de órbita de um satélite artificial terrestre, permite tecer algumas considerações sobre o desempenho do procedimento. Estas considerações são características inerentes aos estimadores sequenciais, semelhantes às discutidas por Jazwinski (1970), ao analisar o filtro de Kalman aplicado à determinação de órbita, assim:

- devido ao modelo dinâmico simplificado em relação à dinâmica real, a não-utilização de técnicas de compensação acarreta o fenômeno de divergência, veja caso básico 1 (Seção 5.6.1);
- quanto maior o nível de informação (maior número de estações que observam o satélite simultaneamente, implicando em redundância de dados), tanto melhor a estimativa e mais rápida a convergência,

veja caso especial 2 (Seção 5.6.5) e casos básicos 4 e 5 (Seção 5.6.3);

- quanto maior a taxa de observações, mais rápida a convergência, veja caso especial 1 (Seção 5.6.4).

A Tabela 5.2 fornece uma visão global dos casos testados, permitindo extrair as conclusões citadas.

Deve-se citar ainda que outros tipos de testes foram efetuados. Um deles trata da adição de observações angulares do tipo ângulos de "gimbal", azimute-elevação, co-senos diretores, às observações de "range" e "range-rate". Entretanto, conforme previsto por Jazwinski (1970), devido à baixa precisão, tais medidas não melhoram a estimativa da órbita e, portanto, são desconsideradas.

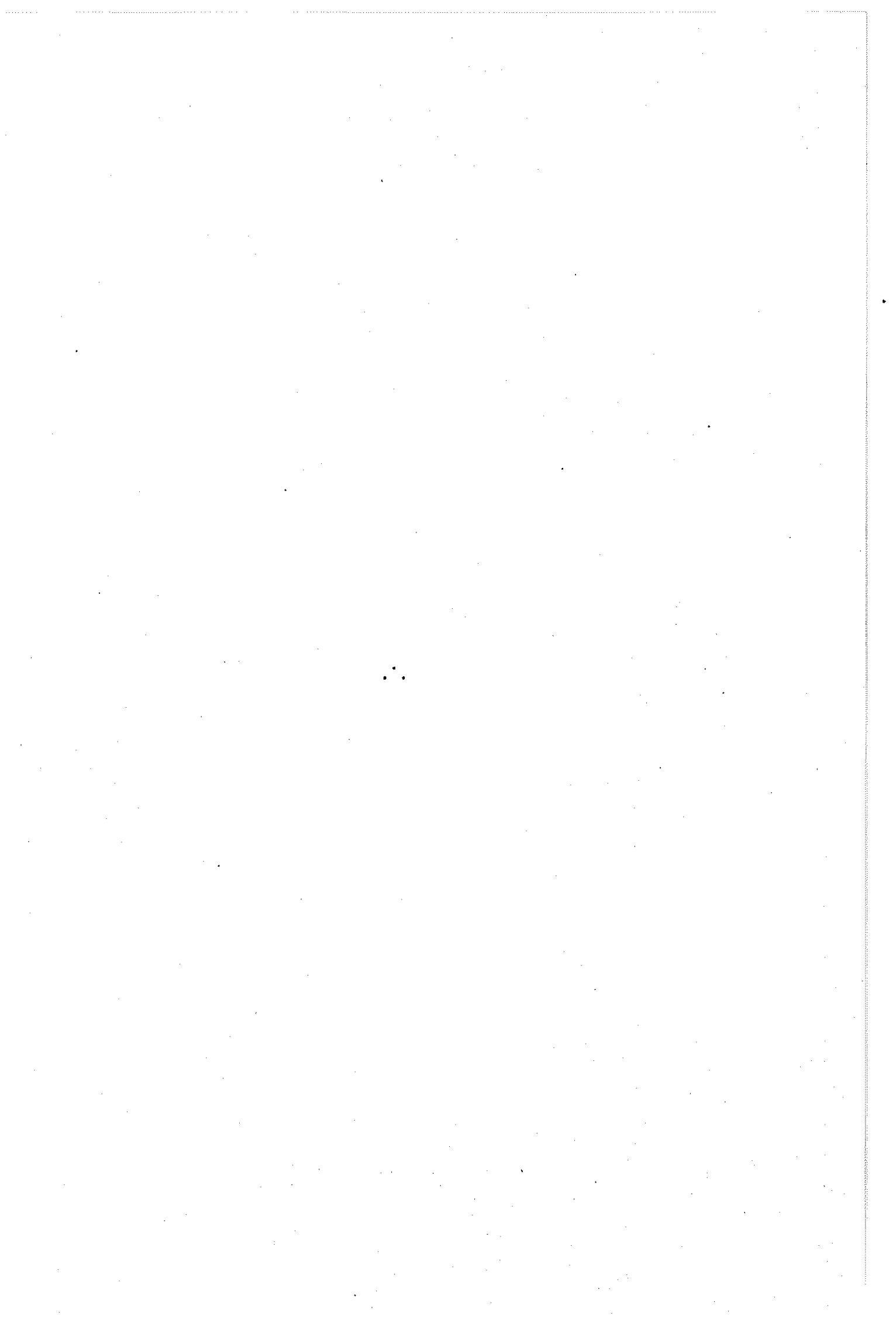
As precisões, conseguidas nas estimativas de posição e de velocidade, fornecem condições para o rastreamento e a propagação da órbita do satélite, de modo que a função primordial da determinação de órbita é satisfatoriamente alcançada.

6.3 - DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Para o estimador adaptativo do ruído no estado, sugere-se um estudo para evitar o decaimento prematuro da matriz P^q , que poderia ser calculada de maneira adaptativa pela análise do resíduo das pseudo-observações.

No aspecto numérico, pode-se minimizar erros de arredondamento, truncamento, armazenamento, advindos do processo de cálculo utilizado, otimizando-se o programa. Por outro lado, visando eficiência computacional, confiabilidade e estabilidade numérica do procedimento de estimação seqüencial, pode-se alterar o algoritmo de cálculo utilizado no filtro de Kalman, optando-se por algo equivalente, porém de melhor desempenho numérico, tal como o filtro de raiz quadrada, ou o filtro de fatorização U-D (Kortüm, 1979; Bierman, 1976).

Outro estudo em vista trata do aperfeiçoamento do modelo dinâmico, através da inclusão de mais efeitos perturbadores nas equações de movimento, ou através de uma técnica de compensação do modelo dinâmico mais refinada, por exemplo um processo de Gauss-Markov de segunda ordem, ou procedimentos empíricos semelhantes aos desenvolvidos por Rios Neto (1973). Tais desenvolvimentos permitiriam a obtenção de estimativas propagadas precisas, concorrendo para a qualidade da estimativa final.

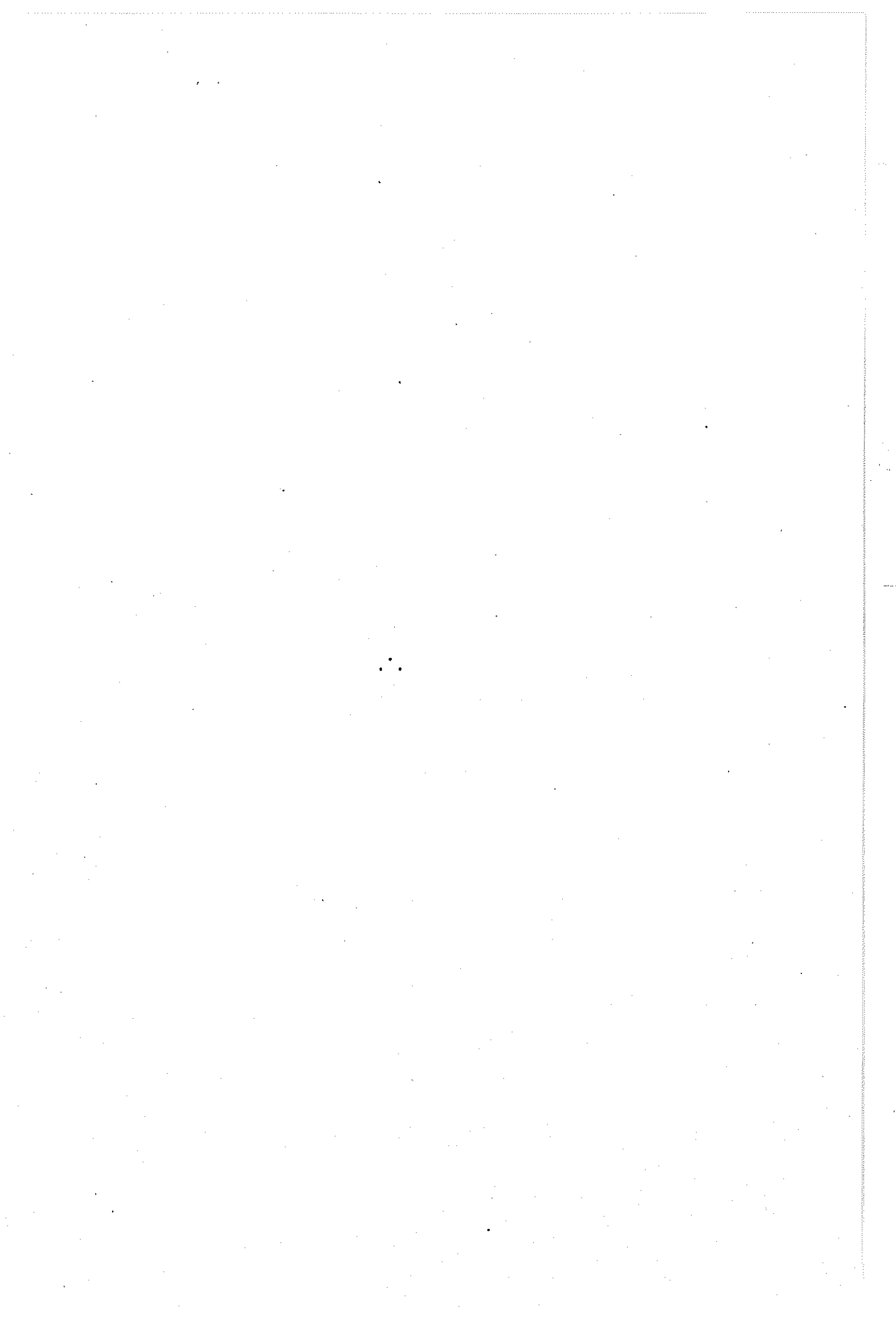


REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BIERMAN, G.J. *Factorization methods for discrete sequential estimation*. New York, Academic, 1976.
- BRINATI, H.L. *Investigação sobre emprego do filtro estendido de Kalman para identificação da manobrabilidade do navio*. Tese de doutoramento. São Paulo, SP, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1976.
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G.M. *Methods of celestial mechanics*. New York, Academic, 1951.
- CARRARA, V. *Estimação das forças aerodinâmicas em satélites terrestres, aplicação a um satélite experimental*. São José dos Campos, INPE, nov. 1980. (INPE-1944-RPE/262).
- ESCOBAL, P.R. *Methods of orbit determination*. New York, John Wiley, 1965.
- FEHLBERG, E. *Low-order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems*. Washington, DC, NASA, 1969. (NASA TR-R-315).
- FORSYTHE, G.E.; MALCOLM, M.A.; MOLER, G.B. *Computer methods for mathematical computations*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1977.
- GELB, A.; KASPER JR., J.F.; NASH JR., R.A.; PRICE, C.F.; SUTHERLAND JR., A.A. *Applied optimal estimation*. Cambridge, MA, MIT, 1974.
- GRAMINHO, E.B. *Confecção de rotinas de plotter para o computador BURROUGHS B-6700*. São José dos Campos, INPE, fev. 1976. (INPE-829-NTI/057).
- HAGAR JR., H. *Recursive computation of the perturbing potential. First and second partial derivatives*. Austin, TX, The University of Texas at Austin, 1972.
- INGRAM, D.S. *Orbit determination in the presence of unmodeled accelerations*. Austin, TX, The University of Texas at Austin, 1971. (Applied Mechanics Research Laboratory Report 1022).

- JACCHIA, L.G. *New static models of the thermosphere and exosphere with empirical temperature profiles*. Cambridge, MA, Smithsonian Astrophysical Observatory, 1970. (SAO Special Report no. 313).
- , *Revised static models of the thermosphere and exosphere with empirical temperature profiles*. Cambridge, MA, Smithsonian Astrophysical Observatory, 1971. (SAO Special Report no. 332).
- JAZWINSKI, A.H. Adaptive filtering. *Automatica* (5):475-485, 1969.
- , *Stochastic processes and filtering theory*. New York, Academic, 1970. (Mathematics in Science and Engineering, 64).
- JAZWINSKI, A.H.; HIPKINS, C. J-adaptive estimation with estimated noise statistics. In: COSPAR-IAU-IUTAM. *Satellite Dynamics Symposium*, held in São Paulo, June 19-21, 1974. Proceedings. New York, Springer-Verlag, 1975, Session II, p. 98-110.
- JENSEN, J.; TOWNSEND, G.E.; KORK, J.; KRAFT, J.D. *Design guide to orbital flight*. New York, NY, McGraw-Hill, 1962.
- KAULA, W.M. *Theory of satellite geodesy*. Waltham, MA, Blaisdell, 1966.
- KORTUM, W. Computational techniques in optimal state-estimation - A tutorial review. *Journal of dynamic systems, measurement and control* (101):99-107, June, 1979.
- KUGA, H.K.; CARRARA, V. *Sub-rotinas para plotagem de funções uni e bidimensionais*. São José dos Campos, INPE, nov. 1980. (INPE-1943-RPI/029).
- LEIBOLD, A.; RAJASINGH, C.K. Orbit determination error analysis through satellite-satellite systems. In: *AOCS Conference* held in Noordwijk, Oct. 3-6, 1977. Proceedings, p. 177-191. (ESASP-128).
- LIEBELT, P.B. *An introduction to optimal estimation*. Menlo Park, CA, Addison-Wesley, 1967.
- MEDEIROS, V.M.; KUGA, H.K. *Algoritmo de baixa precisão para determinação da posição dos dez corpos mais importantes do sistema solar*. São José dos Campos, INPE, dez. 1980. (INPE-1954-RPE/268).
- NEGREIROS DE PAIVA, R. *Simulação numérica da densidade atmosférica*. São José dos Campos, INPE, mar. 1979. (INPE-1436-RPI/002).

- , *Simulação da órbita e de observações de um satélite artificial ao redor da Terra*. São José dos Campos, INPE, dez. 1980a. (INPE-1955-RPE/269).
- , *Determinação de órbitas de satélites artificiais através de um estimador, na presença de acelerações não-modeladas, usando a transformação KS*. Tese de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1980b. (INPE-1998-TDL/040).
- RAUCH, H.E. Optimum estimation of satellite trajectories including random fluctuations in drag. *AIAA Journal* 4(3), April, 1965.
- RIOS NETO, A. *The estimation of the state and the unmodeled atmospheric drag for near Earth satellites*. Ph. D. Dissertation. Austin, TX, The University of Texas at Austin, 1973.
- RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. *Estimação adaptativa do ruído no estado para estimadores sequenciais*. A ser publicado. São José dos Campos, INPE, 1981.
- ROBERTS JR., C.E. An analytical model for upper atmospheric densities based upon Jacchia's 1970 models. *Celestial Mechanics* 4(314):368-377, Dec. 1971.
- SHAMPINE, L.F.; GORDON, M.K. *Computer solution of ordinary differential equations: the inicial value problem*. San Francisco, CA, W. H. Freeman, 1975.
- SORENSEN, H.W. Kalman filtering techniques. New York, NY, Academic, 1966. *Advances in control systems* (3):219-292.
- TAPLEY, B.D.; INGRAM, D.S. Orbit determination in the presence of unmodeled accelerations. *IEEE Transactions on automatic control*: 369-373, Aug. 1973.



APÊNDICE A

MODELAGEM DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA O ESTIMADOR

As equações que representam o movimento de um satélite artificial terrestre são caracterizadas por:

$$\dot{x}(t) = f_m(x, t) + f_{nm}(x, t), \quad (\text{A.1})$$

e o movimento modelado no estimador é dado por:

$$\dot{x}(t) = f_m(x, t), \quad (\text{A.2})$$

onde x é o vetor $[x : y : z : \dot{x} : \dot{y} : \dot{z}]^T$ de estado; x, y, z são coordenadas de posição do centro de massa; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ são coordenadas de velocidade do centro de massa; $f_m(x, t)$ é uma função vetorial que caracteriza o movimento modelado; e $f_{nm}(x, t)$ é uma função vetorial que representa a fração não-modelada. As equações modeladas no estimador consideram a influência do potencial gravitacional terrestre, que inclui o problema dos dois corpos mais o achatamento terrestre por meio do coeficiente do harmônico zonal J_2 . O potencial terrestre assim representado tem a seguinte expressão:

$$U = - \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{J_2 R^2}{2 r^2} \left(1 - 3 \frac{z^2}{r^2} \right) \right], \quad (\text{A.3})$$

onde μ é a constante geogravitacional; r é o módulo do vetor posição do satélite; J_2 é o coeficiente do segundo harmônico zonal; e R é o raio equatorial da Terra. As acelerações são obtidas com a aplicação do operador gradiente ∇ ; i.é., $\ddot{r} = -\nabla U$, ou:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= - \frac{\partial U}{\partial x} \triangleq f_1, \\ \ddot{y} &= - \frac{\partial U}{\partial y} \triangleq f_2, \\ \ddot{z} &= - \frac{\partial U}{\partial z} \triangleq f_3. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Com o desenvolvimento da derivação em U, acha-se:

$$f_1 = - \frac{\mu X}{r^3} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{r^2} \left(1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right],$$

$$f_2 = \frac{y}{x} f_1, \quad (A.5)$$

$$f_3 = - \frac{\mu Z}{r^3} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{r^2} \left(3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right].$$

Considerando-se $x_1 \triangleq x$, $x_2 \triangleq y$, $x_3 \triangleq z$, a Expressão A.2 pode ser reescrita numa forma conveniente para a integração: $\dot{x}_1 \triangleq \dot{x}_4$, $\dot{x}_2 \triangleq \dot{x}_5$, $\dot{x}_3 \triangleq \dot{x}_6$, $\dot{x}_4 \triangleq f_1$, $\dot{x}_5 \triangleq f_2$, $\dot{x}_6 \triangleq f_3$, de modo que $\dot{x} = [\dot{x}_1 : \dot{x}_2 : \dot{x}_3 : \dot{x}_4 : \dot{x}_5 : \dot{x}_6]^T$ e

$$f_m(x, t) = [x_4 : x_5 : x_6 : f_1 : f_2 : f_3]^T, \quad (A.6)$$

caracterizando completamente o movimento modelado.

APÊNDICE B

MODELAGEM DAS OBSERVAÇÕES

As observações efetuadas por estações topocêntricas de rastreamento são os dados de medidas necessários para estimar o estado do satélite e devem ser modelados de acordo com o tipo de observação efetuada. Neste trabalho, particularmente, há interesse em medidas de "range" e "range-rate", que são bastante utilizados para tais operações. A modelagem das medidas é baseada na equação escalar:

$$Y = h(x, t), \quad (B.1)$$

onde Y é o valor da observação; h é a função não-linear em x , que caracteriza o modelo de observação; e x é o vetor de estado do satélite. As medidas de "range" e "range-rate" referem-se ao sistema de coordenadas quase-inercial, com a origem do vetor Ox no centro do plano equatorial terrestre, apontando para o ponto vernal da data de 1950,0.

B.1 - OBSERVAÇÕES DE "RANGE"

A observação de "range" caracteriza uma medida da distância do centro de massa do satélite até a antena da estação de rastreamento. A estação de rastreamento obtém a medida da magnitude do vetor "range", conforme caracterizada na Figura B.1.

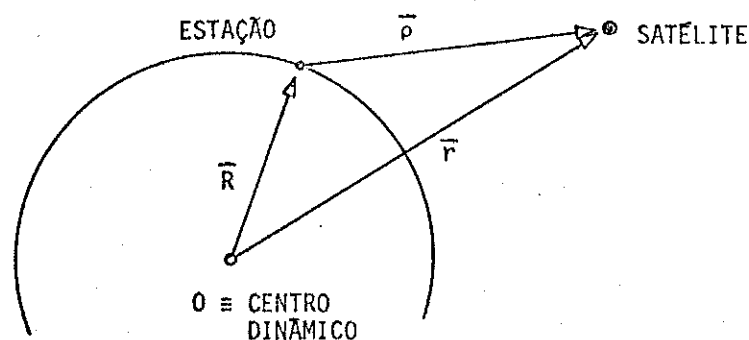


Fig. B.1- Vetor "range".

Na Figura B.1 identificam-se $\bar{\rho}$, vetor "range"; \bar{R} , vetor posição da estação observadora; e \bar{r} , vetor posição do satélite, onde $\bar{R} = (X_e, Y_e, Z_e)$ e $\bar{r} = (x, y, z)$. Assim, o vetor "range" é dado pela expressão vetorial:

$$\bar{\rho} = \bar{r} - \bar{R} \quad (\text{B.2})$$

e, como consequência, seu módulo é:

$$\rho = [(x - X_e)^2 + (y - Y_e)^2 + (z - Z_e)^2]^{1/2} . \quad (\text{B.3})$$

Portanto, quando a medida efetuada for de "range", a função h será dada por:

$$h(x, t) \equiv [(x - X_e)^2 + (y - Y_e)^2 + (z - Z_e)^2]^{1/2} . \quad (\text{B.4})$$

B.2 - OBSERVAÇÕES DE "RANGE-RATE"

A expressão do "range-rate" é dada pela taxa temporal do "range", ou seja, $\dot{\rho}$. Para seu cálculo basta lembrar que:

$$\rho^2 = \bar{\rho} \cdot \bar{\rho} = (\bar{r} - \bar{R}) \cdot (\bar{r} - \bar{R}) . \quad (\text{B.5})$$

Tomando-se a derivada da equação acima, obtêm-se:

$$\rho \dot{\rho} = (\bar{r} - \bar{R}) \cdot (\dot{\bar{r}} - \dot{\bar{R}}) \quad (\text{B.6})$$

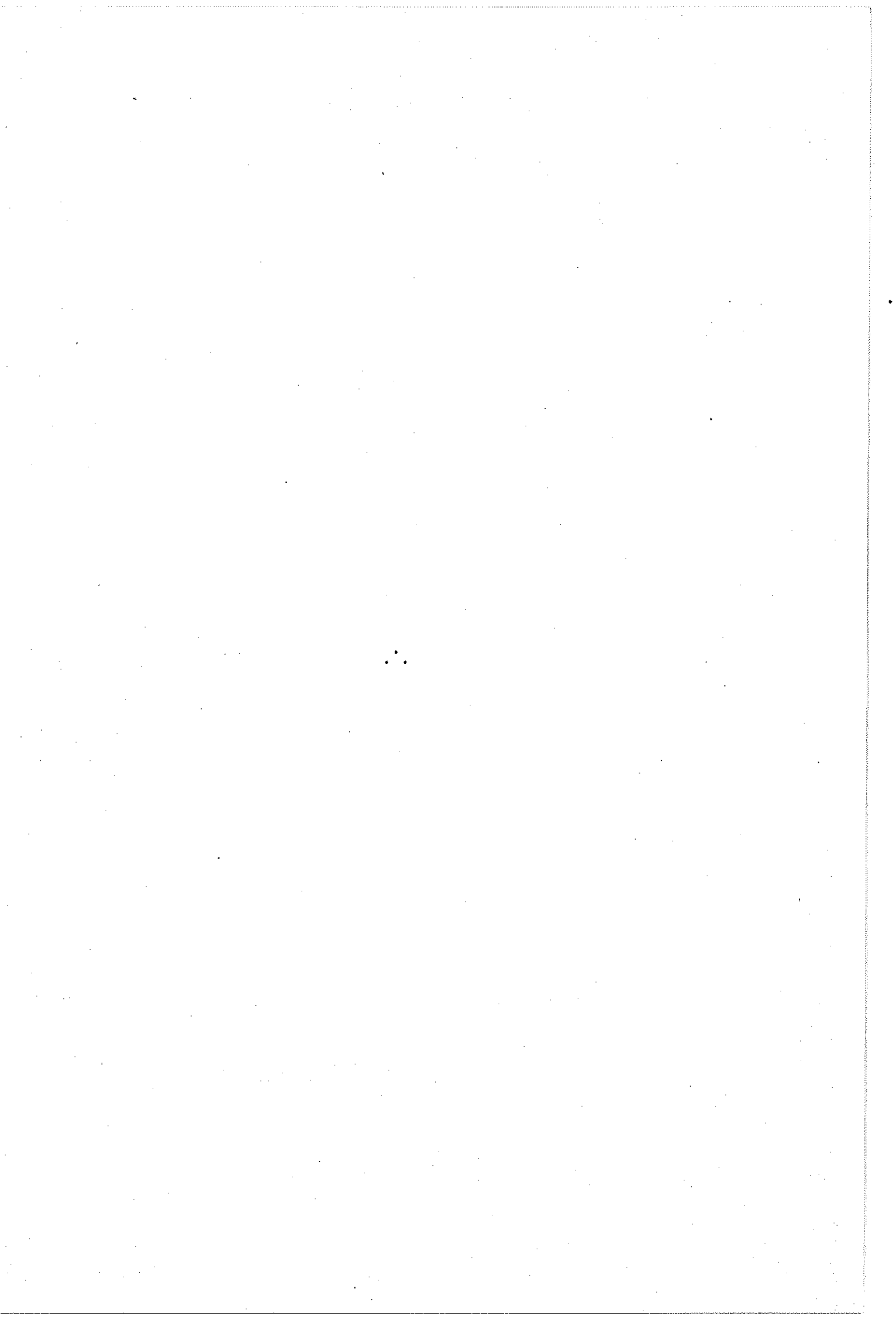
Definindo-se $\dot{\bar{r}} \triangleq (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ e $\dot{\bar{R}} \triangleq (\dot{X}_e, \dot{Y}_e, \dot{Z}_e)$, coordenadas de velocidade do satélite e da estação respectivamente, isola-se $\dot{\rho}$ da Expressão B.6 e chega-se a:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho} [(x - X_e) (\dot{x} - \dot{X}_e) + (y - Y_e) (\dot{y} - \dot{Y}_e) + (z - Z_e) (\dot{z} - \dot{Z}_e)] , \quad (\text{B.7})$$

com ρ dado pela Equação B.3. Portanto, para o "range-rate", a função h é dada por:

$$h(x,t) = \frac{1}{\rho} [(x - x_e)(\dot{x} - \dot{x}_e) + (y - y_e)(\dot{y} - \dot{y}_e) + (z - z_e)(\dot{z} - \dot{z}_e)] .$$

(B.8)



APÊNDICE C

DERIVADAS PARCIAIS

A avaliação de várias derivadas parciais é necessária, pois, sendo as equações não-lineares, a conseqüente linearização para a aplicação do filtro estendido de Kalman exige uma expansão de Taylor até primeira ordem.

C.1 - DERIVADAS PARCIAIS DO MOVIMENTO MODELADO

A expansão de Taylor até primeira ordem da Expressão A.2 produz

$$f_m(x, t) = f_m(\bar{x}, t) + \left. \frac{\partial f_m}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}), \quad (C.1)$$

onde x é o vetor de estado; \bar{x} é o vetor de estado de referência em torno do qual se faz a expansão; e $\partial f_m / \partial x$ é a matriz de derivadas parciais de f_m em relação a x . Portanto, torna-se necessário o cálculo das expressões da matriz de derivadas parciais. Conforme a Expressão A.6, tem-se:

$$\frac{\partial f_m}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

e lembrando-se que $x \triangleq [x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6]^T = [x : y : z : \dot{x} : \dot{y} : \dot{z}]^T$, e revendo-se a Expressão A.5, conclui-se que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = \frac{\partial f_1}{\partial x_5} = \frac{\partial f_1}{\partial x_6} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = \frac{\partial f_2}{\partial x_5} = \frac{\partial f_2}{\partial x_6} = \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{\partial f_3}{\partial x_5} = \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \equiv 0. \quad (C.3)$$

Ainda, de acordo com a Expressão A.5, o cálculo algébrico das derivadas parciais fornece:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\mu}{r^5} \left[3x^2 - r^2 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R^2}{r^2} + \frac{15}{2} \frac{J_2 R^2}{r^2} (x^2 + z^2) - \frac{105}{2} \frac{J_2 R^2}{r^4} x^2 z^2 \right],$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 3 \frac{\mu xy}{r^5} \left[1 + \frac{5}{2} \frac{J_2 R^2}{r^2} - \frac{35}{2} \frac{J_2 R^2}{r^4} z^2 \right],$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = 3 \frac{\mu xz}{r^5} \left[1 + \frac{15}{2} \frac{J_2 R^2}{r^2} - \frac{35}{2} \frac{J_2 R^2}{r^4} z^2 \right],$$

(C.4)

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{y}{x} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{f_1}{x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{y}{x} \frac{\partial f_1}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\mu}{r^5} \left[-r^2 + 3(z^2 - \frac{3}{2} J_2 R^2 + 15 \frac{J_2 R^2}{r^2} z^2 - \frac{35}{2} \frac{J_2 R^2}{r^4} z^4) \right].$$

Logo, a Equação C.2 torna-se:

$$\frac{\partial f_m}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \mathbb{I}_{3 \times 3} \\ A_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

onde $0_{3 \times 3}$ é uma submatriz 3×3 nula; $\mathbb{I}_{3 \times 3}$ é uma submatriz 3×3 identidade; e $A_{3 \times 3}$ é uma submatriz 3×3 , dada por:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

que com as Relações C.4 compõem totalmente a matriz.

C.2 - DERIVADAS PARCIAIS DAS OBSERVAÇÕES

Analogamente às equações de movimento, expande-se a função $h(x, t)$, da Expressão B.1, em série de Taylor até primeira ordem para obter:

$$h(x, t) = h(\bar{x}, t) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) . \quad (C.6)$$

Posto que, para cada tipo de observação há uma função $h(x, t)$ que a expressa algebricamente, desenvolve-se a expressão das derivadas para cada caso, ou seja, para o "range" e para o "range-rate".

C.2.1 - DERIVADAS PARCIAIS DO "RANGE"

A partir da Equação B.3, conclui-se que $\partial h / \partial x \equiv \partial \rho / \partial x$ é um vetor linha com a mesma dimensão do vetor x . Recapitulando-se que:

$$\rho = [(x - X_e)^2 + (y - Y_e)^2 + (z - Z_e)^2]^{1/2} ,$$

e $x = [x : y : z : \dot{x} : \dot{y} : \dot{z}]^T$, a expressão das derivadas é imediata:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x - X_e}{\rho} , \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y - Y_e}{\rho} , \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{z - Z_e}{\rho} \quad (C.7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \rho}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \rho}{\partial \dot{z}} \equiv 0 .$$

Portanto,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} : \frac{\partial \rho}{\partial y} : \frac{\partial \rho}{\partial z} : 0 : 0 : 0 \right] . \quad (C.8)$$

C.2.2 - DERIVADAS PARCIAIS DO "RANGE-RATE"

Lembrando-se a Equação B.6, tem-se:

$$\rho \dot{\rho} = (x - x_e)(\dot{x} - \dot{x}_e) + (y - y_e)(\dot{y} - \dot{y}_e) + (z - z_e)(\dot{z} - \dot{z}_e) . \quad (C.9)$$

Há interesse em calcular $\partial h / \partial x = \partial \dot{\rho} / \partial x$, assim, desenvolve-se inicialmente as seguintes derivadas auxiliares:

$$\frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - \dot{x}_e , \quad \frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial \dot{y}} = \dot{y} - \dot{y}_e , \quad \frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial \dot{z}} = \dot{z} - \dot{z}_e , \quad (C.10)$$

$$\frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial x} = x - x_e , \quad \frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial y} = y - y_e , \quad \frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial z} = z - z_e .$$

Para obter $\partial \dot{\rho} / \partial x$, usa-se a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial x} = \rho \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial x} + \dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} , \quad (C.11)$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho \dot{\rho}}{\partial x} - \dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) .$$

Usando-se a Equação C.10, conclui-se que:

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left[(\dot{x} - \dot{x}_e) - \dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] , \quad (C.12)$$

com ρ dado pela Equação B.3, $\dot{\rho}$, pela Equação B.7 e $\partial \rho / \partial x$, pela Equação C.7. Analogamente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \left[(\dot{y} - \dot{y}_e) - \dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \left[(\dot{z} - \dot{z}_e) - \dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right]\end{aligned}\tag{C.13}$$

Para as derivadas relativas à velocidade, basta usar as Expressões C.7 para chegar a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{x}} &= \frac{1}{\rho} (x - x_e) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial x} , \\ \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{y}} &= \frac{1}{\rho} (y - y_e) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial y} , \\ \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{z}} &= \frac{1}{\rho} (z - z_e) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial z} .\end{aligned}\tag{C.14}$$

Consequentemente, $\frac{\partial h}{\partial x} = \left[\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial x} : \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial y} : \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial z} : \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{x}} : \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{y}} : \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{z}} \right]$ junto com as Equações C.12, C.13, C.14 fica determinado.

