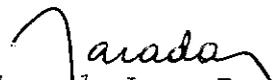


1. Publicação nº <i>INPE-2329-RPE/404</i>	2. Versão	3. Data <i>Fev., 1982</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa
4. Origem <i>DME</i>	Programa <i>PNTE</i>		<input type="checkbox"/> Restrita
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>GRADE DE RICHARDSON; OSCILAÇÕES BAROTRÓPICA</i>			
7. C.D.U.: <i>551.511.61</i>			
8. Título <i>INPE-2329-RPE/404</i> <i>UM ESTUDO NUMÉRICO DA ESTRUTURA DA GRADE DE RICHARDSON, QUANDO APLICADA ÀS EQUAÇÕES DAS ONDAS LONGAS DE GRAVIDADE</i>		10. Páginas: <i>29</i>	
9. Autoria <i>Marco Antonio Maringolo Lemes</i> <i>Yoshihiro Yamazaki</i>		11. Última página: <i>23</i>	
Assinatura responsável 		12. Revisada por <i>L. A. V. Dias</i> <i>Luiz Alberto V. Dias</i>	
		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor</i>	
14. Resumo/Notas <i>O problema de simulação numérica para oscilações barotrópicas, em um fluido incompressível, confinado em um canal unidimensional é aqui considerado. Em especial, são discutidas as discrepâncias entre as soluções analítica e numérica, para o caso linear e sem topografia de fundo. São também apresentados dois experimentos que ilustram a aplicação do método numérico (diferenças centradas em espaço e tempo, em uma grade de Richardson) ao problema não-linear do quebrar de ondas, com e sem topografia de fundo.</i>			
15. Observações			

ABSTRACT

It is considered the problem of numerical simulation for barotropic oscillations in an incompressible fluid confined in a one-dimensional channel. In particular, the discrepancies between the analytical and numerical solutions, for the linear case, without bottom-topography, are discussed. Two experiments are shown in order to illustrate the application of the numerical method (centered differences in space and time, in a Richardson grid) to the non-linear problem of wave breaking, with and without topography.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	v
1 - INTRODUÇÃO	01
2 - CARACTERIZAÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA	02
2.1 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	02
2.2 - SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA LINEARIZADO	03
3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM DIFERENÇAS FINITAS	05
3.1 - GRADE E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITAS	05
3.2 - SOLUÇÃO EXATA DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITAS	07
4 - RESULTADOS	14
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	23

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1 - Representação esquemática do modelo físico	02
2 - Representação da grade de Richardson usada na integração numérica.....	06
3 - Ilustração do método gráfico de determinação das raízes da Equação 16.....	09
4 - Gráfico da curva de distorção máxima da amplitude em função de $\lambda \sin\theta_n$	11
5 - Curvas de distorção nas frequências numéricas em função de θ_n para três valores de λ	12
6 - Configuração da superfície livre para vários instantes de tempo, quando $\eta(x,0) = a \cos \frac{2\pi x}{L}$ é especificado para $t=0$ e com os termos não-lineares inclusos.....	15
7 - Configuração da superfície livre, para vários instantes de tempo, que mostra a propagação de uma onda senoidal para dentro de uma região com fluido em repouso e topografia de fundo plana	18
8 - Configuração da superfície livre, para vários instantes de tempo, que mostra a propagação de uma onda senoidal para dentro de uma região com fluido em repouso e topografia de fundo do tipo "rampa"	20

1. INTRODUÇÃO

O sucesso da solução de um problema de valor inicial, por meio de integração numérica, requer uma certa atenção para a estrutura da grade, no tocante à distribuição das variáveis dependentes no espaço e no tempo. Essa consideração deve, obviamente, incluir os tipos de diferenças finitas usados nas aproximações das equações diferenciais do problema.

Nesse trabalho é estudado, mais do ponto de vista de análise numérica do que da física propriamente dita, o problema de simulação dos modos normais e de propagação de ondas barotrópicas de gravidade, utilizando-se um tipo especial de grade e esquemas centrados em tempo e espaço. Matematicamente, o problema consiste na obtenção e estudo de soluções numéricas de um sistema hiperbólico de equações (equações do movimento e da conservação de massa) que descreve as oscilações em um fluido homogêneo. Por simplicidade, as duas variáveis dependentes (velocidade do fluido e desvio de sua superfície livre) são funções de uma única coordenada espacial, x , (por exemplo) e do tempo, t .

A inconveniência de ter duas soluções independentes, como seria o caso das duas variáveis serem definidas em todos os níveis de tempo, foi evitada ao se escolher um esquema alternado em tempo, onde uma variável é definida para os níveis $t/\Delta t = 0, 1, 2 \dots$ e a outra, para os intermediários. As equações são tais que sugerem uma alternância das variáveis também em espaço, com apreciável economia de tempo de computação, sem diminuir a resolução da grade. Além disso, os modos computacionais são inteiramente eliminados, de modo a tornar essa formulação de diferenças finitas bastante apropriada para tratar ondas puras de gravidade.

Essa grade - denominada grade de Richardson - pode ser considerada como uma versão modificada do esquema C de Arakawa (Messinger and Arakawa, 1976), com a introdução da alternância das variáveis em tempo.

A Seção 2 descreve a formulação matemática do problema, com referência ao problema físico de um fluido homogêneo confinado em uma bacia unidimensional, e mostra a solução analítica obtida para o caso linearizado e com topografia de fundo plana. A seção 3 introduz a grade de Richardson e contém a solução exata das equações de diferenças finitas para o mesmo caso da seção anterior, enfatizando as diferenças entre essa e a analítica. Finalmente, alguns experimentos ilustrativos são apresentados e discutidos na última seção.

2 . CARACTERIZAÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA

2.1 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Como mencionado, o objetivo principal desse trabalho é estudar um esquema centrado em tempo e espaço, usando uma grade de Richardson e enfatizando as discrepâncias entre as soluções analítica e numérica. Para esse fim, escolheu-se um problema físico que fosse susceptível a um tratamento analítico e que fornecesse exemplos bastante ilustrativos quando tratado numericamente. Assim sendo, o problema será considerado mais do ponto de vista da análise numérica do que da dinâmica propriamente dita.

Considere-se um fluido incompressível confinado em uma bacia unidimensional de comprimento L , com paredes verticais em $x = 0$ e $x = L$. Seja $h_0(x)$ a sua espessura, no caso de um estado básico de repouso, como mostrado na Figura 1.

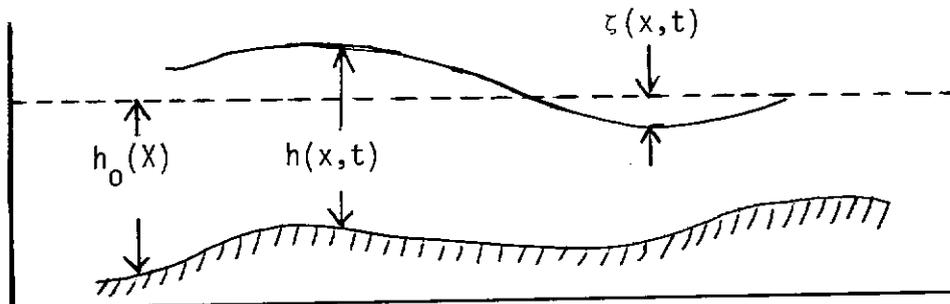


Fig. 1 - Representação esquemática do modelo físico.

Supondo que a razão de aspecto $\max(h_0)/L$ seja $\ll 1$, i.e., o caso de águas rasas, as equações aplicáveis do movimento e da conservação de massa são:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (h_0 u) - \frac{\partial}{\partial x} (\zeta u) \quad (2)$$

onde $u(x,t)$ e $\zeta(x,t)$ são, respectivamente, os campos de velocidade e de desvio da superfície livre (em torno de sua posição de repouso) referentes a um estado perturbado, e g é a aceleração da gravidade. Os termos sublinhados são os termos não-lineares.

A formulação completa exige a especificação de condições iniciais e de fronteiras. Para essas últimas é realista adotar as condições de escoamento nulo, i.e:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{para } \forall t \quad (3)$$

enquanto para as condições iniciais serão usadas:

$$u(x,0) = 0 \quad (4.a)$$

$$\zeta(x,0) = f(x) \quad (4.b)$$

2.2 - SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA LINEARIZADO

O problema de valores iniciais e de contornos, como formulado na seção anterior, pode ser resolvido por vários métodos. A solução pode ser obtida, por exemplo, em termos de um par de equações diferenciais ordinárias denominadas equações diferenciais características, como didaticamente mostrado em Stoker (1957), para o caso particular de uma topografia do tipo "rampa" (i.e. $\partial h_0 / \partial x = \text{constante}$).

No entanto, para se conseguir uma solução analítica explícita, torna-se necessária a linearização do problema, bastando para isso não

considerar os termos sublinhados nas Equações 1 e 2. Com a hipótese simplificadora de uma topografia plana, $h_0(x) = H$, o problema linear será agora resolvido usando-se uma técnica de expansão da solução em série de Fourier, que fornece a solução analítica que servirá de referência na avaliação do esquema de diferenças finitas e na interpretação física dos experimentos realizados a título de ilustração.

Supondo solução do tipo de série de Fourier para $\zeta(x,t)$:

$$\zeta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (5)$$

pode-se notar que as condições de contorno 3 - que, no caso linear, através da Equação 1, implicam $\partial\zeta/\partial x = 0$ em $x = 0$ e $x = L$ - são automaticamente satisfeitas. O coeficiente $Z_0(t)$ é nulo para não violar o princípio de conservação de massa.

Para $t = 0$, a Equação 5 reduz-se se a:

$$\zeta(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(0) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = f(x)$$

a partir da qual os coeficientes iniciais da série de Fourier podem ser facilmente obtidos, usando-se a condição de ortogonalidade das funções trigonométricas. São eles dados por:

$$Z_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (6)$$

Uma equação em apenas $\zeta(x,t)$ pode ser facilmente derivada a partir das Equações 1 e 2:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = C_0^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (7)$$

que é a equação da onda em sua forma mais simples, onde $C_0 = \pm \sqrt{gH}$ são as velocidades de fase dos dois modos de ondas longas de gravidade.

Com a substituição da Equação 5 na Equação 7 obtêm-se um número infinito de equações diferenciais ordinárias que governam a evolução temporal de cada um dos coeficientes $Z_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, ou seja:

$$\frac{d^2 Z_n}{dt^2} + \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} C_0^2 \right) Z_n = 0 \quad (8)$$

Finalmente, usando-se a condição inicial $u = 0$, o que implica que em $dZ_n/dt = 0$ para $t = 0$, chega-se à solução desejada, que em sua forma completa é:

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(0) \cdot \cos\left(\frac{n\pi C_0}{L} t\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (9)$$

que permite escrever para o campo de velocidade:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{g}{H}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(0) \cdot \sin\left(\frac{n\pi C_0}{L} t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (10)$$

As Equações 9 e 10, juntamente com as frequências $\sigma_n^{(a)} = n\pi C_0/L$ (ou equivalentemente com os períodos $T^{(a)} = 2\pi/\sigma_n^{(a)}$), caracterizam completamente os modos normais (no caso, estacionários) de oscilação do sistema.

3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM DIFERENÇAS FINITAS

3.1 - GRADE E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITAS

Para a obtenção das soluções numéricas dos experimentos realizados, utiliza-se uma grade de Richardson, que é essencialmente uma versão alternada em tempo do esquema C de Arakawa (Messinger e Arakawa, 1976). Essa grade, no plano (x,t) , é mostrada na Figura 2.

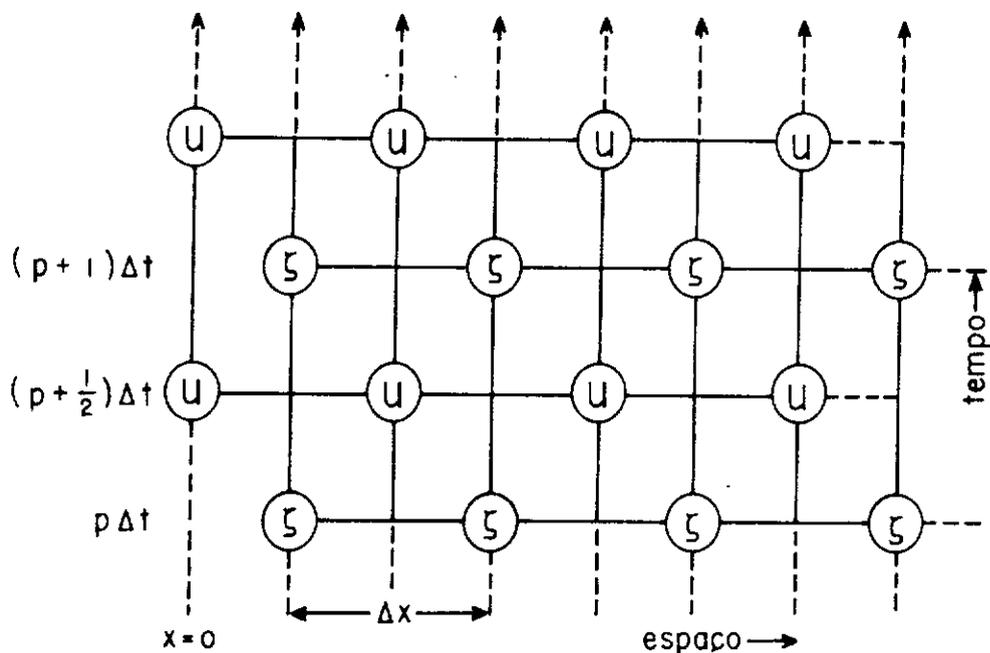


Fig. 2 - Representação da grade de Richardson usada na integração numérica.

As variáveis u e ζ são portanto definidas no espaço discretizado (x, t) do seguinte modo:

$$u(x, t) = u(j\Delta x, (p + \frac{1}{2}) \Delta t) \equiv u_j^{p + \frac{1}{2}}$$

$$\zeta(x, t) = \zeta((j + \frac{1}{2}) \Delta x, p\Delta t) \equiv \zeta_{j + \frac{1}{2}}^p$$

onde $p = 0, 1, 2, \dots$ e $j = 0, 1, 2, \dots, N$ com $N = L/\Delta x$.

As derivadas temporais e espaciais nessa grade são aproximadas por diferenças centradas com intervalos Δt e Δx , sem no entanto apresentar o inconveniente de ter duas soluções independentes coexistindo durante o processo de integração (Platzman, 1958). Os erros de truncamento em x e t são, portanto, de segunda ordem.

Usando-se esses esquemas, as Equações 2 e 1 são aproximadas respectivamente pelas seguintes equações de diferenças finitas:

$$\zeta_{j+1}^{p+1} = \zeta_{j+1}^p - r (h_{0j+1} u_{j+1}^{p+\frac{1}{2}} - h_{0j} u_j^{p+\frac{1}{2}}) - R_{j+\frac{1}{2}}^{p+1} \quad (11)$$

$$u_j^{p+\frac{3}{2}} = u_j^{p+\frac{1}{2}} - g r (\zeta_{j+1}^{p+1} - \zeta_{j-1}^{p+1}) - S_j^{p+1} \quad (12)$$

onde r é a razão entre o incremento de tempo (Δt) e o espaço (Δx), e $R_{j+\frac{1}{2}}^{p+1}$ e S_j^{p+1} são os termos não-lineares explicitamente dados por:

$$R_{j+\frac{1}{2}}^{p+1} = \left\{ \left(\zeta_{j+\frac{3}{2}}^p + \zeta_{j+\frac{1}{2}}^p \right) * u_{j+1}^{p+\frac{1}{2}} - \left(\zeta_{j+\frac{1}{2}}^p + \zeta_{j-\frac{1}{2}}^p \right) * u_j^{p+\frac{1}{2}} \right\} 0.5$$

$$S_j^{p+1} = \left\{ \left[\frac{u_{j+1}^{p+\frac{1}{2}} + u_j^{p+\frac{1}{2}}}{2} \right]^2 - \left[\frac{u_j^{p+\frac{1}{2}} + u_{j-1}^{p+\frac{1}{2}}}{2} \right]^2 \right\} * 0.5$$

3.2 - SOLUÇÃO EXATA DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITAS

Considerando-se novamente a versão linear do problema com topografia plana, as Equações 11 e 12, rescritas como

$$\frac{\Delta_t \zeta}{\Delta t} = -H \frac{\Delta_x u}{\Delta x} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta_t u}{\Delta t} = -g \frac{\Delta_x \zeta}{\Delta x},$$

podem ser manipuladas de uma forma similar à derivação da Equação 7 ou

$$\frac{\Delta_t}{\Delta t} \left(\frac{\Delta_t \zeta}{\Delta t} \right) = -H \frac{\Delta_x}{\Delta x} \left(\frac{\Delta_t u}{\Delta x} \right) = gH \frac{\Delta_x}{\Delta x} \left(\frac{\Delta_x \zeta}{\Delta x} \right) \quad (13)$$

onde

$$\Delta_t \zeta = \zeta \left(x, t + \frac{\Delta t}{2} \right) - \zeta \left(x, t - \frac{\Delta t}{2} \right)$$

e

$$\Delta_x \zeta = \zeta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) - \zeta \left(x - \frac{\Delta x}{2}, t \right)$$

Supondo-se a solução do tipo

$$\zeta_{j + \frac{1}{2}}^p = \sum_{n=1}^{N-1} Z_n(t) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (14)$$

com $t = (0, 1, 2, \dots, p, \dots) \Delta t$ e $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, j + \frac{1}{2}, \dots, N - \frac{1}{2} \right) \Delta x$, che

ga-se ap \bar{o} s o uso de algumas identidades trigonom \bar{e} tricas, a

$$\frac{\Delta_t(\Delta_t Z_n)}{(\Delta t)^2} = gH \left[\frac{\sin \left(\frac{n\pi \Delta x}{2L} \right)}{\Delta x/2} \right]^2 Z_n(t) \quad (15)$$

para cada termo da s \bar{e} rie de Fourier. Essa equa \bar{c} o \bar{e} \bar{e} o an \bar{a} logo, em diferenças finitas, da Equa \bar{c} o \bar{e} 8.

O limite do somat \bar{o} rio \bar{e} igual ao n \bar{u} mero de graus de liberdade do sistema, evitando assim o problemas de "aliasing" decorrente da discretiza \bar{c} o \bar{e} espacial.

A Equa \bar{c} o \bar{e} 15, al \bar{e} m de determinar a evolu \bar{c} o \bar{e} temporal dos coeficientes Z_n , permite a obten \bar{c} o \bar{e} das frequ \bar{e} ncias num \bar{e} ricas de oscila \bar{c} o \bar{e} , σ_n , dos modos normais. Para isso, sup \bar{o} e-se $Z_n \propto \exp(i \sigma_n t)$, com t discretizado, que usado na Equa \bar{c} o \bar{e} 15 resulta, ap \bar{o} s alguns arranjos, em uma equa \bar{c} o \bar{e} transcendental dada por:

$$\frac{\text{sen} \left(\frac{1}{2} \sigma_n \Delta t \right)}{\Delta t/2} = \pm \sqrt{gH} \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi \Delta x}{2L} \right)}{\Delta x/2} \quad (16)$$

que é a relação de dispersão desejada.

Suas raízes podem ser graficamente determinadas, como ilustrado na Figura 3.

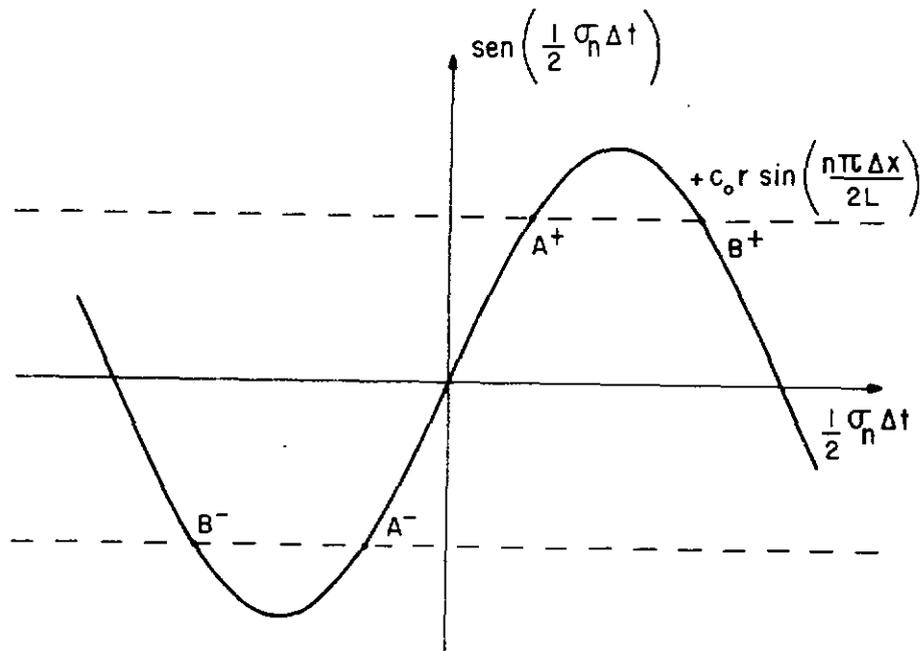


Fig. 3 - Ilustração do método gráfico de determinação das raízes da Equação 16.

Do infinito número de raízes reais (quando elas existem), somente duas devem ser consideradas, $\sigma_n(A^+)$ e $\sigma_n(A^-)$, pois todas as demais diferirão dessas em um número inteiro de 2π radianos, como por exemplo:

$$\sigma(B^+) = \frac{2\pi}{\Delta t} + \sigma_n(A^-)$$

o que implica que

$$e^{i\sigma_n(B^+)t} = e^{i\frac{2\pi}{\Delta t}t} e^{i\sigma_n(A^-)t} = e^{i\sigma_n(A^-)t}$$

pois $t/\Delta t$ assume valores inteiros. Pode-se ainda verificar que $\sigma(A^-)$ pode ser escrita como $-\sigma(A^+)$, com $0 < \frac{1}{2} \sigma_n(A^+) \Delta t < \frac{\pi}{2}$.

A solução da Equação 15 é:

$$Z_n(t) = C \cos_{\sigma_n} (A^+) t + D \operatorname{sen}_{\sigma_n} (A^-) t \quad (17)$$

onde C e D são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais, que são $u(x, \frac{\Delta t}{2}) = 0$ (deslocado de $\Delta t/2$ devido ao arranjo das variáveis na grade) e $\zeta(x, \Delta t) = \zeta(x, 0)$, como dado pela Equação 11, linearizada.

O campo de desvio $\zeta(x, 0)$ conhecido é dado por

$$\zeta(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{N-1} Z_n(0) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (18)$$

Após a determinação das constantes C e D, obtêm-se:

$$\zeta(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{Z_n(0)}{\cos\left(\frac{1}{2} \sigma_n \Delta t\right)} * \cos_{\sigma_n}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) * \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (19)$$

De uma maneira análoga:

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{g}{H}} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{Z_n(0)}{\cos\left(\frac{1}{2} \sigma_n \Delta t\right)} * \operatorname{sen}_{\sigma_n}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) * \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (20)$$

que, juntamente com a Equação 19, são as soluções exatas das equações de diferenças finitas 11 e 12 linearizadas e com topografia plana, que serão agora comparadas com as correspondentes soluções analíticas, i.e., com as Equações 9 e 10.

Em primeiro lugar, nota-se uma distorção na amplitude da solução numérica de um fator $\sec\left(\frac{1}{2} \sigma_n \Delta t\right)$, que para uma dada harmônica aumenta com o parâmetro $\lambda = C_0 \Delta t / \Delta x$. Essa distorção é mais acentuada na região de ondas curtas (n grande), como observado na Figura 4, que mostra a curva de distorção máxima na amplitude, em função de $\lambda \operatorname{sen} \theta_n$, onde $\theta_n = n\pi/2N$.

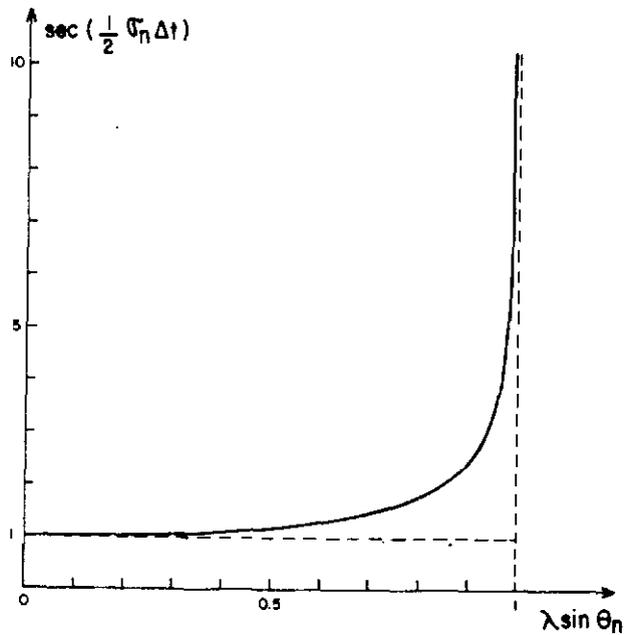


Fig. 4 - Gráfico da curva de distorção máxima da amplitude em função de $\lambda \sin\theta_n$.

Com a introdução dos parâmetros θ_n e λ , a Equação 16 pode ser escrita como:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\sigma_n\Delta t\right) = \lambda \sin\theta_n$$

o que faz o fator de distorção ser dado por:

$$\sec\left(\frac{1}{2}\sigma_n\Delta t\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda \sin\theta_n)^2}}$$

que aparece na Figura 4.

Ainda nessa linha de comparação, nota-se também um outro efeito da discretização, ou seja, provocar uma defasagem de $\Delta t/2$ nas soluções numéricas, efeito esse que pode ser considerado secundário para períodos curtos de integração.

Para apreciar os efeitos das discretizações espacial e temporal nas frequências numéricas, é conveniente reescrever a Equação 16 na forma:

$$\sigma_n = \sigma_n^{(a)} \frac{\text{arc. sen.}(\lambda \text{sen}\theta_n)}{\lambda\theta_n} \quad \lambda \neq 0 \quad (21)$$

notando que, como $n = 1, 2, \dots, N-1$, tem-se que

$\frac{\pi\Delta x}{2L} \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2} (1 - \frac{\Delta x}{L}) \sim \frac{\pi}{2}$ se $\Delta x \ll L$. $\sigma_n^{(a)}$ são as frequências analíticas.

Para $\lambda \rightarrow 0$, a última equação reduz-se a:

$$\sigma_n = \sigma_n^{(a)} \frac{\text{sen}\theta_n}{\theta_n} \quad (22)$$

Os efeitos da discretização nas frequências são ilustrados na Figura 5, que mostra curvas de distorção na frequência numérica, normalizada com respeito à correspondente frequência analítica, em função de θ_n para três valores de λ .

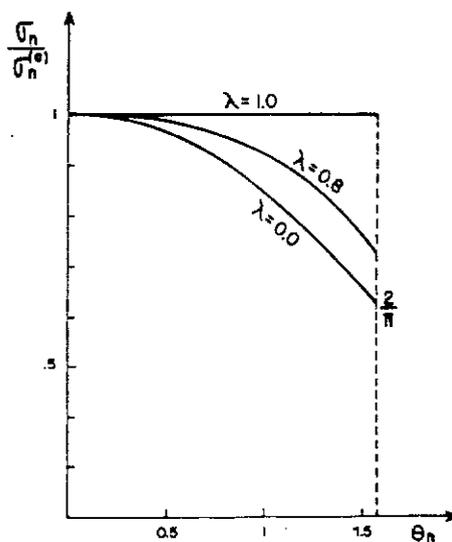


Fig. 5 - Curvas de distorção nas frequências numéricas em função de θ_n para três valores de λ .

O efeito do truncamento apenas em espaço ($\lambda = 0$) torna-se mais crítico para os modos de ordem superior, podendo, no entanto, ser diminuído com a discretização em tempo; em particular, para $\lambda=1$ (valor limite do domínio de estabilidade, como mostrado em seguida) o efeito compensador entre as duas discretizações é ideal no sentido de reproduzir exatamente as frequências analíticas, porém com pronunciada distorção na amplitude, sobretudo para as ondas curtas, como mostrado na Figura 4.

Finalizando, é interessante observar na Figura 3 que raízes (ou frequências) reais nem sempre existem; isso acontece quando:

$$\left| C_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi\Delta x}{2L} \right) \right| > 1$$

Nesse caso, sendo as frequências complexas, implicam a existência de um crescimento exponencial das soluções numéricas. Esse crescimento espúrio é conhecido por instabilidade computacional linear e é mais provável de ocorrer na região espectral das ondas curtas. Para o maior valor permissível de n , i.e., $n = N - 1$, tem-se

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi\Delta x}{2L} \left(\frac{L}{\Delta x} - 1 \right) \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\Delta x}{L} \right) \right) < 1$$

Assim, para se evitar esse fenômeno altamente danoso é necessário que se escolham Δt e Δx , tais que

$$C_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

ou em palavras, Δt deve ser menor ou no máximo igual ao tempo gasto para um impulso percorrer a distância Δx , a uma velocidade C_0 . A relação acima nada mais é que o critério C-F-L (Courant, Friedrichs, Lewy, 1928), ou a condição necessária de estabilidade de von Neuman que, uma vez satisfeita, garante a convergência das soluções numéricas para a solução da equação diferencial, quando Δt e $\Delta x \rightarrow 0$.

A análise das soluções numéricas do domínio de instabilidade não é feita nesse trabalho.

4 - RESULTADOS

Em todos os experimentos numéricos realizados foram usados $\Delta t = 5$ seg, $\Delta x = 236$ m e $H = 50$ m, resultando o valor de 0,469 para o parâmetro λ .

Experimento A

Nesse experimento, supôs-se que a superfície livre foi inicialmente uma onda cossenoidal:

$$\zeta(x,0) = 0.1 H \cos \frac{2\pi x}{L}$$

que ocupa um canal de comprimento $L = 11800$ m ($N = 50$). O período linear da oscilação é de aproximadamente $105 \Delta t$.

As Figuras 6a e 6b mostram os resultados desse experimento apresentando a superfície livre para vários níveis de tempo, como obtida pela integração numérica das Equações 11 e 12, com os termos não-lineares inclusos. Após um período linear, já se torna evidente na configuração da superfície livre um afastamento da forma inicial, devido à não-linearidade das equações. Após aproximadamente 2,5 períodos lineares ($t \sim 245 \Delta t$), a inclinação da superfície é bastante pronunciada, tornando-se vertical para tempos maiores ($t \sim 260 \Delta t$). Pode-se observar também o aparecimento de ondas curtas parasitas superpostas à oscilação; a partir desse instante as Equações 1 e 2 já não têm nenhum significado físico. As curvas pontilhadas nos dois últimos níveis de tempo representam as oscilações da superfície livre se os termos não-lineares são omitidos na integração.

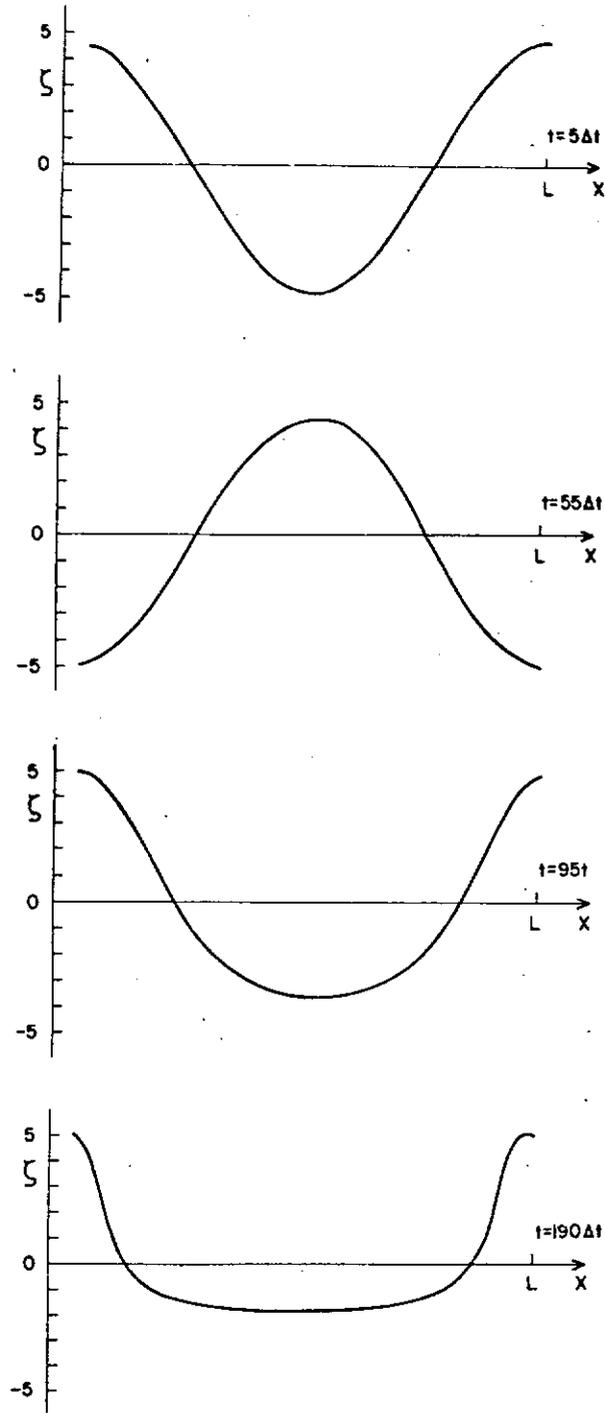


Fig. 6a - Configuração da superfície livre para vários instantes de tempo quando, $\eta(x,0) = a \cos \frac{2\pi x}{L}$ é especificado para $t = 0$ e com os termos não-lineares inclusos.

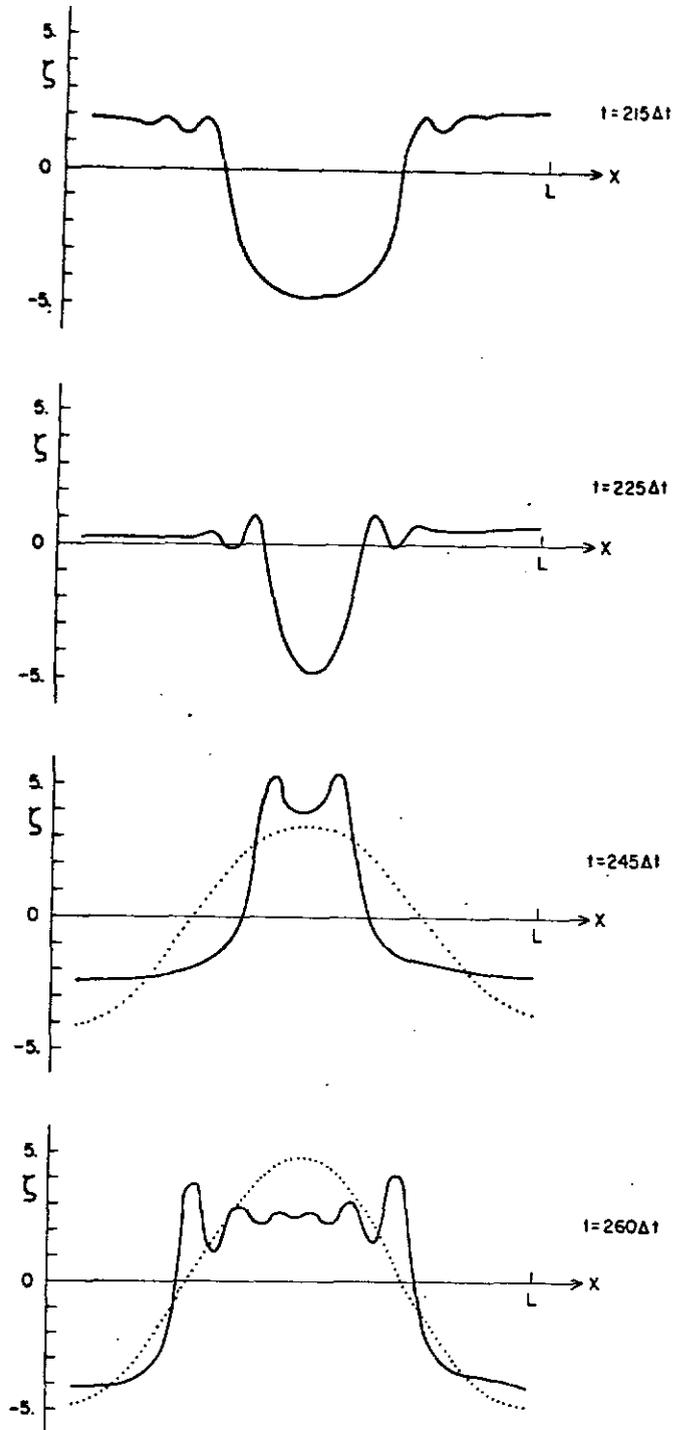


Fig. 6b - Continuação.

Experimento B

Esse é um experimento que simula a propagação de um trem de ondas senoidais para dentro de uma região com o fluido em repouso. As ondas são geradas por um "wave-maker" colocado na extremidade de $x=0$ da bacia; matematicamente:

$$\zeta(0,t) = 3 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} - \pi \right)$$

com $T = 50$ s. O comprimento da bacia nesse experimento foi aumentado para $300 \Delta x$ a fim de evitar o problema de ter ondas refletidas interferindo com a onda progressiva na direção de x positivo, pelo menos até essa onda tornar-se mais inclinada em sua crista e quebrar-se.

Primeiramente as Equações 11 e 12, não-lineares, foram integradas considerando-se uma topografia de fundo plana. Esses resultados são ilustrados na sequência mostrada nas Figuras 7a e 7b e estão de acordo com as observações, i.e., a porção dianteira (com respeito à direção de propagação) torna-se mais inclinada, pois a velocidade de fase $\sqrt{g(H + \zeta)}$ é maior. A maior inclinação corresponde ao fenômeno de quebra das ondas, aqui caracterizado pelo aparecimento das ondas parasitas, com a conseqüente invalidez das equações governantes.

Em seguida foi colocada uma topografia de fundo do tipo "rampa" que se estende de $x = 0$ a $x = L$, com uma inclinação de 30:70800. Em $x = L$ a profundidade do fluído é de 20 m na ausência de movimento, de modo que o problema de afloramento do fundo não surge, simplificando enormemente o tratamento numérico do problema.

A Figura 8 mostra uma sequência da superfície livre, a partir de $t = 150 \Delta t$, visto que as configurações dessa superfície não diferem qualitativamente das configurações para o caso de topografia plana. Os resultados mostram, de acordo com a teoria, que a frente da onda move-se com uma velocidade menor que no caso de topografia plana, e que torna-se menor à medida que a onda penetra em regiões de profundidades gradativamente menores. É evidente que a topografia de fundo

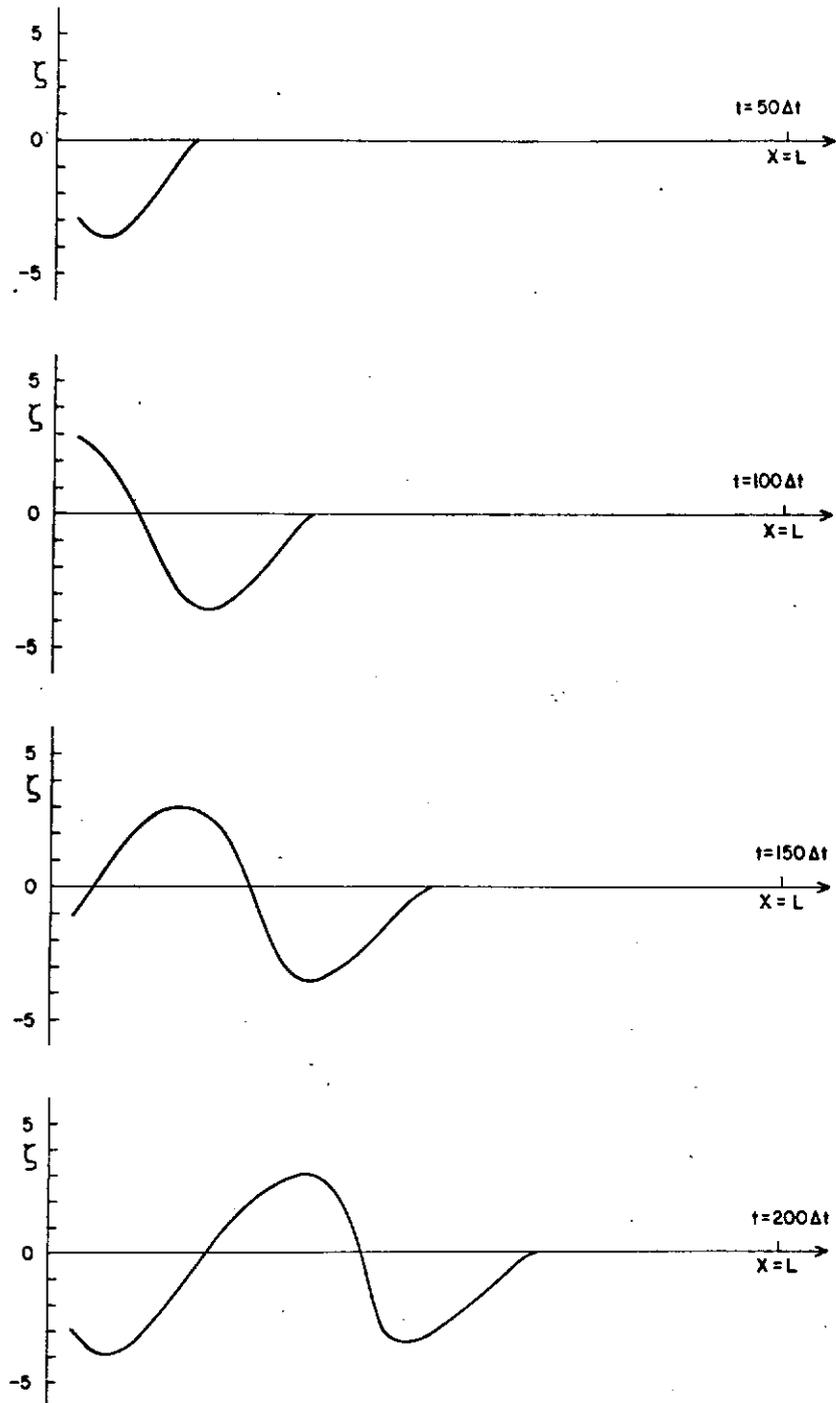


Fig. 7a - Configuração da superfície livre, para vários instantes de tempo, que mostra a propagação de uma onda senoidal para dentro de uma região com fluido em repouso e topografia de fundo plana.

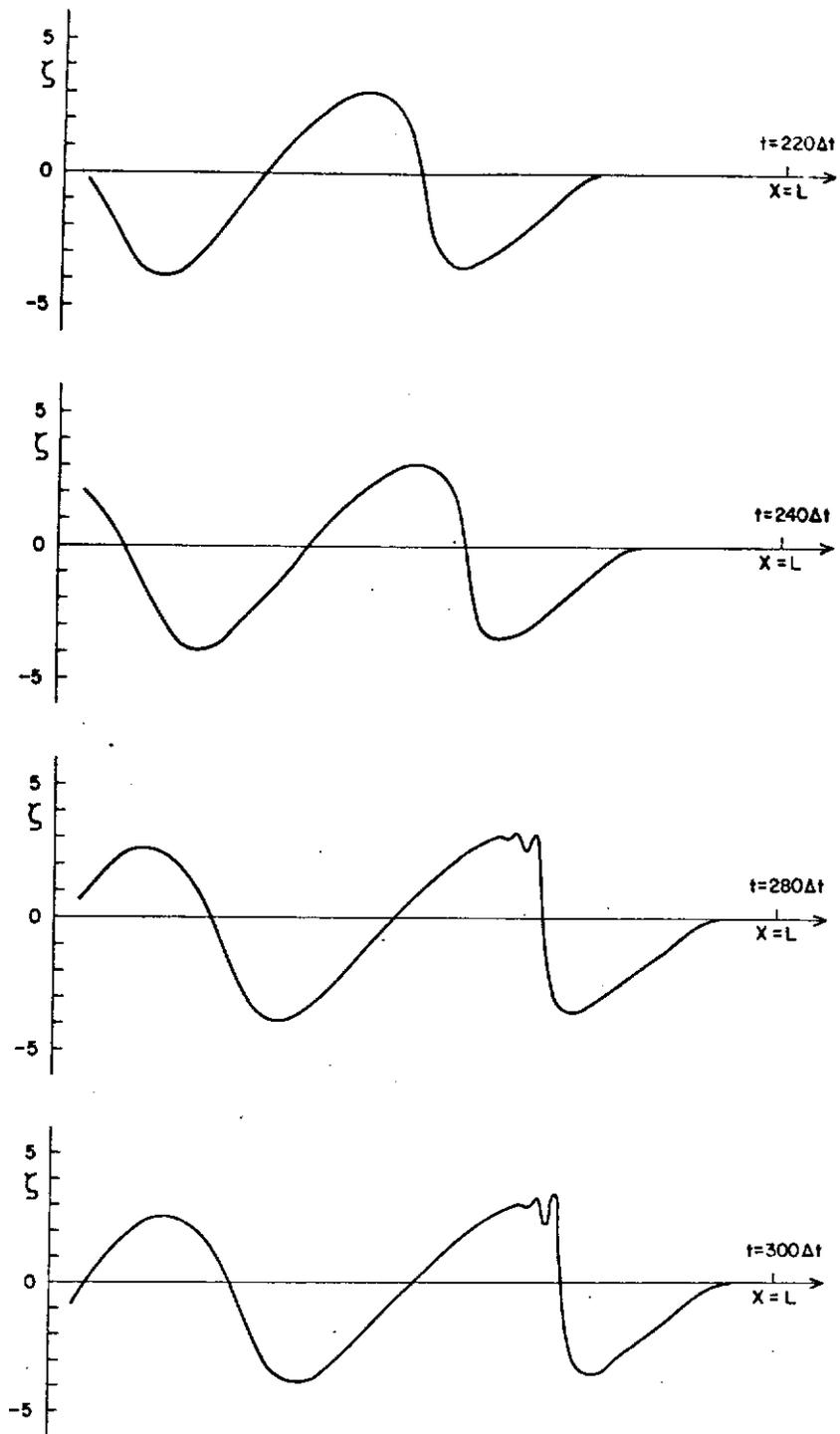


Fig. 7b - Continuação.

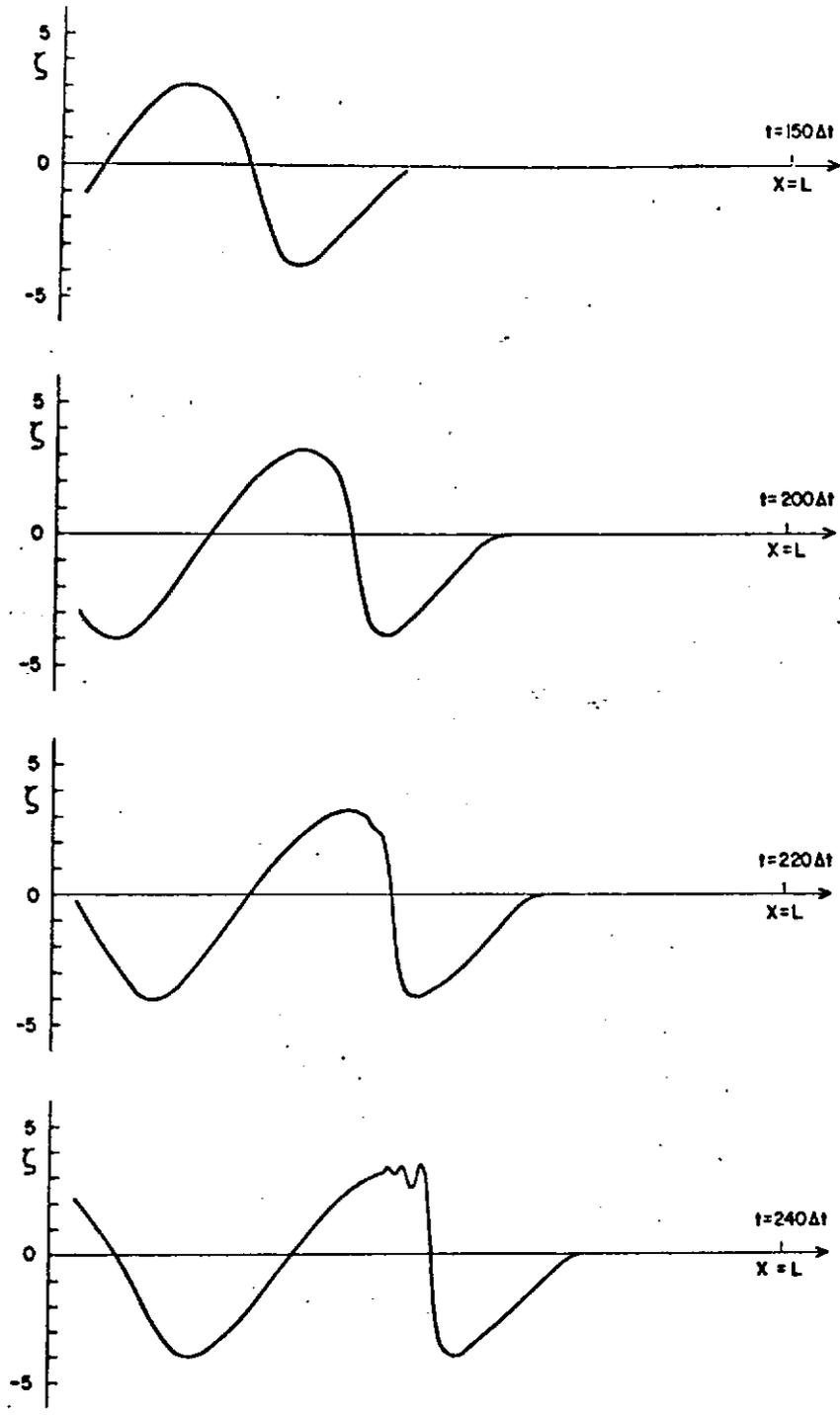


Fig. 8 - Configuração da superfície livre, para vários instantes de tempo, que mostra a propagação de uma onda senoidal para dentro de uma região com fluido em repouso e topografia de fundo do tipo "rampa".

favorece o quebrar da onda mais cedo ($220 \Delta t$ versus $280 \Delta t$ do caso anterior), e isso ocorre após a frente ter-se deslocado de uma distância menor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. Ueber die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physic. *Mathematischen Annalen* 100, 1928.
- MESSINGER, F.; ARAKAWA, A. Numerical methods used in atmospheric models. *Garp Publications Series n° 17*, agosto, 1976, 64 pp.
- PLATZMAN, G. W. The lattice structure of the finite-difference primitive and vorticity equation. *Technical Report n° 6 to United States Weather Bureau*. agosto, 1958.
- STOKER, J. J. *Water Waves*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1957, 567 pp.