
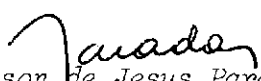



1. Publicação nº <i>INPE-2556-TDL/103</i>	2. Versão	3. Data <i>Out., 1982</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DRH-DGA</i>	Programa <i>FRH/CEA</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>CAMPOS ELÉTRICOS ATMOSFÉRICOS ANOMALIA MAGNÉTICA DO ATLÂNTICO SUL SIMULAÇÃO NUMÉRICA EM ELETRICIDADE ATMOSFÉRICA</i>			
7. C.D.U.: <i>523.4-852</i>			
8. Título <i>CAMPOS ELÉTRICOS EM ALTURAS DE BALÃO ESTRATOSFÉRICO</i>		<i>INPE-2556-TDL/103</i>	10. Páginas: <i>203</i>
			11. Última página: <i>B.20</i>
			12. Revisada por  <i>Walter D.G. Alarcon</i>
9. Autoria <i>Severino Luiz Guimarães Dutra</i>			13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada Diretor</i>
Assinatura responsável 			
14. Resumo/Notas <i>Um estudo de campos elétricos atmosféricos quase estáticos em regiões equatoriais e de baixas latitudes é apresentado. Experiências com detectores a bordo de balões estratosféricos são discutidas e algoritmos numéricos para uma simulação relacionada aos campos foram desenvolvidos, fornecendo informações originais sobre processos eletrodinâmicos existentes na atmosfera. A análise dos campos medidos apresenta resultados não-esperados (com valores até de 10mV/m para os campos horizontais). A simulação permitiu a associação dessas medidas com o fenômeno de precipitação de partículas energéticas existente na região da Anomalia Magnética do Atlântico Sul, precipitação esta que parece intensificar-se em períodos magneticamente perturbados.</i>			
15. Observações <i>Tese de Doutorado em Ciência Espacial aprovada em 02 de Abril de 1982.</i>			

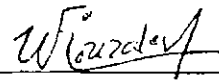
Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Doutor
em Ciência Espacial

Dr. Ivan Jelinek Kantor



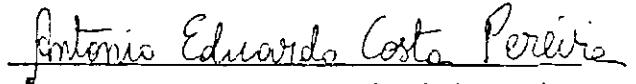
Presidente

Dr. Walter Demétrio Gonzalez Alarcon



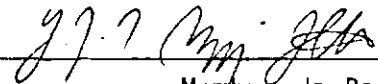
Orientador

Dr. Antonio Eduardo Costa Pereira



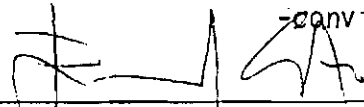
Co-Orientador

Dr. José Luiz Rodolpho Muzzio



Membro da Banca
-convidado-

Dr. Emanuel Paiva de Oliveira Costa



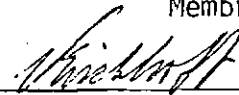
Membro da Banca
-convidado-

Dr. Inacio Malmonge Martin



Membro da Banca

Dr. Volker W.J.H. Kirchhoff



Membro da Banca

Candidato: Severino Luiz Guimarães Dutra

São José dos Campos, 02 de abril de 1982

*Aos meus pontinhos.
À Ariane, Diogo, Hugo e Tânia ($\epsilon = 0$).*

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Dr. Nelson de Jesus Parada, Diretor do Instituto de Pesquisas Espaciais (INPE-CNPq), cujo apoio possibilitou a realização deste trabalho.

Ao Dr. Walter Demétrio Gonzalez Alarcon e ao Dr. Antonio Eduardo Costa Pereira a eficiente orientação, dedicação e incentivo, em todas as fases desta pesquisa.

Ao Dr. Ivan Jelinek Kantor, ao Dr. José Luiz Rodolpho Muzzio, ao Dr. Emanuel Paiva de Oliveira Costa, ao Dr. Inacio Malmonge Martin e ao Dr. Volker Walter Johann Heinrich Kirchhoff a participação na Banca Examinadora e as críticas e sugestões ao presente trabalho; em particular, ao Dr. Volker Walter Johann Heinrich Kirchhoff o interesse e sugestões durante a revisão.

Ao Dr. Nalin Babulal Trivedi e ao Dr. José Marques da Costa o constante incentivo e interesse ao longo de todo o trabalho.

À Dra. Alicia Luisa Clúa de Gonzalez Alarcon e ao Osmar Pinto Júnior as valiosas e numerosas discussões.

Ao Prof. Forrest Mozer e ao Dr. John Robert Wygant, do Laboratório de Ciências Espaciais da Universidade da Califórnia, Berkeley, a colaboração e o interesse, sem os quais seria impossível o bom termo desta pesquisa, na realização dos experimentos.

Ao Ubirajara Moura de Freitas e ao Arry Carlos Buss Filho o apoio e valiosos esclarecimentos na utilização dos computadores Burroughs B6700 e B6800. Ao pessoal de operação do B6800 a pronta e atenciosa colaboração nas várias "rodadas" de programas durante a simulação.

Ao grupo de lançamento de balão e carga útil do INPE o melhor esforço realizado na obtenção das medidas.

À Maria José Faria Barbosa o auxílio na análise dos dados e diversas fases da simulação.

À Marília Prado de Carvalho o cuidado na revisão de linguagem do texto. À Marciana Leite Ribeiro a correção e revisão das referências bibliográficas. À Célia Regina Rosa a cuidadosa datilografia e montagem do texto final.

Ao pessoal da Seção de Desenho do Departamento de Integração e Testes e a todos os colegas e amigos do INPE que, apesar de não citados nominalmente aqui, apoiaram e auxiliaram a realização deste trabalho.

ABSTRACT

A study of equatorial and low latitude quasi-static atmospheric electric fields is presented. Measurements with detectors on board stratospheric balloons are discussed and numerical algorithms for a related simulation are developed, providing original information on electrodynamic processes that seem to occur in these regions. The measurements show unexpectedly large horizontal fields of the order of 10mV/m, and in the simulation we associate them to energetic particle precipitation events in the South Atlantic Magnetic Anomaly region that seem to get enhanced during magnetically active periods.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE SÍMBOLOS	xv
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO 2 - FENÔMENOS ELÉTRICOS NA ATMOSFERA</u>	5
2.1 - Introdução	5
2.2 - Campo elétrico ionosférico	18
2.3 - Perturbações no campo elétrico ionosférico de baixas latitudes	27
2.4 - Campo elétrico troposférico	36
2.5 - Campo elétrico associado à precipitação de partículas na Anomalia Magnética do Atlântico Sul	41
2.5.1 - Partículas aprisionadas no campo geomagnético	45
2.5.2 - Precipitação de partículas na Anomalia	49
2.5.3 - Distorção do campo elétrico vertical de tempo bom	59
<u>CAPÍTULO 3 - MÉTODO EXPERIMENTAL</u>	63
3.1 - Introdução	63
3.2 - Método da sonda dupla	65
3.3 - Técnica de detecção em altura de balão	67
3.4 - Análise das medidas	70
<u>CAPÍTULO 4 - MÉTODOS NUMÉRICOS</u>	85
4.1 - Introdução	85
4.2 - Métodos empregados	87
4.3 - Diferença finita	88
4.3.1 - Solução encontrada iterativamente (SOR)	91
4.3.2 - Solução encontrada diretamente (BTM)	93
4.4 - Solução encontrada por integração direta (Varredura)	96
4.5 - Elementos Finitos	100
<u>CAPÍTULO 5 - RESULTADOS</u>	107
5.1 - Introdução	107
5.2 - Modelos para os campos elétricos	111

	<u>Pág.</u>
5.2.1 - Abordagem bidimensional	112
5.2.1.1 - Mapeamento do campo elétrico ionosférico	112
5.2.1.2 - Campos elétricos orográficos	119
5.2.1.3 - Irregularidade na condutividade	123
5.2.2 - Abordagem tridimensional	129
5.3 - Discussão	132
<u>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES</u>	139
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141
APÊNDICE A - NOTAS ADICIONAIS AO MÉTODO DE VARREDURA	
APÊNDICE B - SISTEMAS ESPARSOS DE EQUAÇÕES LINEARES - RESOLUÇÃO	

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Regiões da atmosfera	6
2.2 - Penetração de partículas e raios X na atmosfera capazes de ionizá-la, em função da energia	8
2.3 - Intensidade integral em energia dos núcleos dos raios cósmicos galácticos	9
2.4 - Sumário da irradiação solar na faixa que vai de raios X ao infravermelho	10
2.5 - Dependência em altura da taxa de ionização decorrente dos raios cósmicos galácticos e da linha H Ly - α solar	11
2.6 - Dependência em altura da taxa de ionização devida aos raios X solares, comparada com a dos raios cósmicos, do ultravioleta e da linha H Ly - α solar	12
2.7 - Dimensões aproximadas das tempestades ("thunderstorms") pequenas, típicas e gigantes	14
2.8 - Configuração da magnetosfera no plano meio-dia/meia-noite	15
2.9 - Corte tridimensional demonstrativo das diferentes regiões da magnetosfera	17
2.10 - Perfil vertical das frequências características do plasma ionosférico	19
2.11 - Sistema de correntes do S_Q durante o IGY visto do plano equatorial magnético nos horários das 00, 06, 12 e 18 horas e dos pólos magnéticos norte e sul	21
2.12 - Variações em tempo local das componentes sul (---) e leste (—) do campo de polarização em diversas latitudes ..	23
2.13 - Movimento convectivo do plasma magnetosférico	25
2.14 - Potencial ionosférico associado ao movimento convectivo do plasma magnetosférico	26
2.15 - Sistema de correntes horizontais (integradas em altura) e velocidade de deriva para três horários de ocorrência de uma tempestade magnética	29
2.16 - Variação em tempo local: (a) das componentes da densidade de corrente na direção leste (J_ϕ) e na direção do equador (J_θ); (b) das componentes leste (E_ϕ) e na direção do equador/para baixo (E_ϵ) do campo eletrostático; e (c) do campo eletrostático (E_ϕ) e da corrente total (I_E) do eletro-jato equatorial	30
2.17 - Campo elétrico máximo induzido pelas correntes de Birkeland em função da latitude (equinócio)	31

	<u>Pág.</u>
2.18 - Linhas equipotenciais associadas às correntes Birkeland em períodos calmos e perturbados (a e b) e campos elétricos equatoriais correspondentes (c e d)	32
2.19 - Comparação entre os dados magnéticos observados no chão (estação equatorial Huancayo) e os dados obtidos com satélite no espaço interplanetário	33
2.20 - Inter-relação entre o campo magnético interplanetário e as variações do campo elétrico ionosférico equatorial ...	35
2.21 - Diagrama esquemático do circuito atmosférico global	37
2.22 - Perspectiva do potencial e da diferença de potencial em relação à ionosfera para alturas aproximadas (no equador) de: (a) 105km; (b) 50km; (c) 25km; (d) 8km; (e) 4km; e (f) 2km	39
2.23 - Perspectiva da orografia terrestre	40
2.24 - Campos elétricos horizontais (representados por setas) medidos sobre montanhas	41
2.25 - Campo magnético na superfície da Terra (em gauss)	42
2.26 - Distribuição geográfica de elétrons quase-aprisionados em altitudes entre 240 e 410km com energias de aproximadamente 100keV	44
2.27 - Movimentos das partículas aprisionadas nos cinturões de radiação	45
2.28 - Frequências dos movimentos ciclotrônicos, de "bounce" e de deriva das partículas aprisionadas	48
2.29 - Espectros de elétrons medidos	51
2.30 - Variação da energia central do pico com o parâmetro magnético L	52
2.31 - Tempo de vida dos elétrons devido ao espalhamento atmosférico coulombiano	54
2.32 - "Hiss" observado em períodos magneticamente perturbados .	56
2.33 - Probabilidade de ocorrência do "hiss" na zona interna dos cinturões	57
2.34 - Campo elétrico vertical de tempo bom em baixas latitudes e para o meio-dia	61
2.35 - Esquema ilustrativo da irregularidade na condutividade ..	62
3.1 - Diagrama de potencial de um condutor isolado imerso em um plasma (a) e de um par de sondas de Langmuir em um plasma com um campo elétrico (b)	66
3.2 - Campos elétricos medidos simultaneamente por dois balões em região de altas latitudes	69

	<u>Pág.</u>
3.3 - Croqui do detector lançado em balão	71
3.4 - Sinal do campo elétrico	74
3.5 - Diagrama sinótico da eletrônica do detector	75
3.6 - Sinal obtido pelo detector nos dois vôos	77
3.7 - Campos elétricos medidos (mV/m) em 09/04/1980	79
3.8 - Detalhe dos campos elétricos medidos (mV/m) em 09/04/1980	80
3.9 - Índice ΣK_p para o mês de abril de 1980 (a) e magnetogra ma registrado em Vassouras no dia 09/04/1980 (b)	81
3.10 - Magnitudes do campo elétrico horizontal medidas em 03/04/ 1980 (primeiro vôo, nos intervalos 1000-1200TU e 1300 -1430TU) e em 09/04/1980 (segundo vôo, no intervalo 1000 -1200TU)	83
4.1 - Regiões contínua e discretizada da solução	89
4.2 - Grade ilustrativa do método SOR	92
4.3 - Grade ilustrativa do método de Varredura	97
4.4 - Grade ilustrativa do método de Elementos Finitos	103
5.1 - Atenuação do campo elétrico ionosférico (altas latitudes)	108
5.2 - Modelo de condutividade	115
5.3 - Mapeamento do campo elétrico ionosférico	116
5.4 - Atenuação do campo elétrico ionosférico (região equato rial)	117
5.5 - Mapeamento do campo elétrico ionosférico $E_{y_0} = 1\text{mV/m}$ ($L = 50\text{km}$) entre 0 e 110km de altura	118
5.6 - Grade usada na simulação dos campos orográficos, com o mé todo de Elementos Finitos (Galerkin)	120
5.7 - Campo elétrico horizontal orográfico para uma montanha ..	121
5.8 - Variação do campo elétrico orográfico em altura de balão (31km) com a base da montanha para várias alturas da mon tanha, com $\phi_0 = 300\text{kV}$	122
5.9 - Isolinhas do campo elétrico horizontal devido a uma irre gularidade na condutividade, superposto ao de um campo iõ nosférico de -2mV/m (para oeste) e $L = 2000\text{km}$	126
5.10 - Isolinhas do fator de aumento e sua variação $f(0,z)$ com a altura (no ponto $y = 0$) e $f(y,z_i)$ com a distância horizon tal (no ponto $z = z_i$), para os dois casos discutidos no texto	128
5.11 - Croqui ilustrativo da caixa tridimensional	130
5.12 - Isolinhas do campo elétrico horizontal devido a uma irre gularidade na condutividade	131

	<u>Pág.</u>
5.13 - Perfis verticais normalizados de $F(z;E_0)$ para valores se- leccionados de E_0	135
5.14 - Dependência em altura das taxas de ionização devidas a elē- trons de precipitação e aos raios X de bremsstrahlung a s̄ sociados	135
B.1 - Representação de uma matriz esparsa	B.5
B.2 - Representação mais simplificada de uma matriz esparsa ...	B.7
B.3 - Pilha de armazenamento da matriz da Figura B.2	B.11

LISTA DE SÍMBOLOS

- AMAS - Anomalia Magnética do Atlântico Sul.
- AU - Unidade Astronômica de distância, $1,495979 \times 10^{11} \text{m}$.
- b - Base de uma montanha.
- B - Magnitude do campo magnético.
- \underline{B} - Campo magnético.
- B_C - Magnitude do campo geomagnético da região crítica (relacionada com o cone de perda).
- B_m - Magnitude do campo geomagnético no ponto de espelhamento.
- B_z - Magnitude da componente z de \underline{B} .
- B_0 - Magnitude do campo geomagnético equatorial.
- BTM - "Block tridiagonal matrix".
- C - Co-seno do ângulo de inclinação I.
- \underline{d} - Vetor-distância.
- DC - Sinal eletrônico residual.
- E - Energia de uma partícula.
- $\underline{E}, \underline{E}'$ - Campo elétrico.
- E_y - Componente na direção y de \underline{E}
- E_{y_0} - Campo elétrico ionosférico.
- E_0 - Energia "e-folding" do espectro diferencial em energia de elétrons.
- f - Fator de aumento da irregularidade na condutividade.
- f_Q - Variação da produção total de pares íon-elétron na ocorrência de uma perturbação magnética.
- f_ψ - Variação do coeficiente efetivo de perda de elétrons na ocorrência de uma perturbação magnética.
- f_{Be} - Frequência ciclotrônica eletrônica.

- f_{Bi} - Frequência ciclotrônica iônica.
- h - Altura de uma montanha.
- h_c - Altura crítica (relacionada com o cone de perda).
- I - Ângulo de inclinação do campo geomagnético; intensidade de corrente elétrica.
- \underline{I} - Matriz identidade.
- IGY - International Geophysical Year.
- J - Amplitude do espectro diferencial em energia de elétrons; invariante adiabático longitudinal.
- \underline{J} - Densidade de corrente elétrica.
- $k_{//}$ - Número de onda para propagação paralela ao campo magnético.
- l_1, l_2 - Distâncias dos pontos de espelhamento ao equador ao longo da linha magnética.
- L - Parâmetro magnético de McIlwain; distância característica de variação do campo elétrico ionosférico; "light".
- LH - "Light heavy".
- m - Massa de uma partícula.
- m_p - Massa do próton, $1,672 \times 10^{-27}$ kg.
- M - Momento magnético; "medium".
- MH - "Medium heavy".
- MLAT - Latitude magnética.
- n - Densidade do vento solar.
- N - Densidade eletrônica.
- N' - Densidade eletrônica em período magneticamente perturbado.
- p_{\perp} - Magnitude da componente perpendicular ao campo magnético \underline{B} da quantidade de movimento.
- $p_{//}$ - Magnitude da componente paralela ao campo magnético B da quantidade de movimento.

- P - Proton.
- q - Carga elétrica de uma partícula.
- Q_p - Produção total de pares íon-elétron devida às partículas em precipitação ($Q_{pp} + Q_{pB}$).
- Q_{pp} - Produção total de pares íon-elétron originada pela precipitação de partículas.
- Q_{pB} - Produção total de pares íon-elétron resultante da radiação bremsstrahlung produzida pela precipitação de partículas.
- Q_{OF} - Produção total de pares íon-elétron referente a outras fontes.
- Q_T - Produção total de pares íon-elétron ($Q_p + Q_{OF}$).
- R - Resistência elétrica.
- R_C - Raio ciclotrônico.
- R_T - Raio médio da Terra, 6371km.
- R_1 - Resistência elétrica na vizinhança do condutor 1.
- R_2 - Resistência elétrica na vizinhança do condutor 2.
- S - Seno do ângulo de inclinação I.
- SC - "Sudden Commencement".
- SOR - "Successive over-relaxation".
- T - Período de rotação do detector.
- T_B - Período de "bounce".
- T_C - Período ciclotrônico.
- T_D - Período de deriva.
- \underline{u}^T - Vetor transposto de \underline{u} .
- UV - Radiação ultravioleta.
- \underline{v} - Velocidade.
- \underline{v}_B - Velocidade de "bulk flow" (ou de deriva, na região F).
- v_D - Magnitude da velocidade de deriva \underline{v}_D nos cinturões de radiação.

- v_{\perp} - Magnitude da componente perpendicular ao campo magnético \underline{B} da velocidade \underline{v} .
 v_{\parallel} - Magnitude da componente paralela ao campo magnético \underline{B} da velocidade \underline{v} .
 V_A - Potencial elétrico no ponto A.
 V_B - Potencial elétrico no ponto B.
 V_i - Potencial elétrico do condutor i ($i = 1, 2, 3, 4$ e 5).
VH - "Very heavy".
VVH - "Very very heavy".
 x, y, z - Sistema destrógiro de coordenadas cartesianas.
 y_0 - Distância de atenuação horizontal do fator de aumento da irregularidade na condutividade.
 Y_0 - Dimensão característica da região de variação não-gaussiana do fator de aumento f .
 z_i - Altura onde está centrada a irregularidade na condutividade.
 z_m - Altura de referência.
 z_0 - Distância de atenuação vertical do fator de aumento da irregularidade na condutividade.
Z - Número atômico.
 α - Ângulo de passo ("pitch angle"); partícula alfa.
 α_c - Ângulo de passo crítico equatorial (ângulo do cone de perda).
 α_D - Coeficiente de recombinação dissociativa.
 α_i - Coeficiente de recombinação íon-íon.
 α_0 - Ângulo de passo equatorial.
 γ - Fator de correção relativística.
 Δt - Intervalo de tempo.
 ΔV - Diferença de potencial elétrico.

- $\Delta\phi$ - Variação do potencial ionosférico em uma distância característica L.
- θ - Ângulo que o campo magnético interplanetário faz com o plano eclíptico.
- λ - Razão entre as densidades de íons negativos e de elétrons; comprimento de onda.
- λ_D - Comprimento de Debye.
- Λ - Amplitude do fator de aumento da irregularidade na condutividade.
- μ_0 - Permeabilidade do vácuo, $4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$.
- ν_{en} - Frequência de colisão dos elétrons com as partículas neutras.
- ν_{in} - Frequência de colisão dos íons com as partículas neutras.
- σ_0 - Condutividade elétrica direta.
- σ_1 - Condutividade elétrica Pedersen.
- σ_2 - Condutividade elétrica Hall.
- $\underline{\sigma}$ - Tensor condutividade elétrica.
- ΣK_p - Valor diário total do índice de atividade magnética K_p .
- φ - Ângulo azimutal do campo magnético interplanetário no plano eclíptico.
- ϕ - Potencial elétrico.
- Φ - Invariante adiabático de fluxo.
- ϕ_0 - Potencial ionosférico médio.
- ϕ_1 - Função de trabalho do condutor 1.
- ϕ_2 - Função de trabalho do condutor 2.
- ψ - Coeficiente efetivo de perda de elétrons.
- ψ' - Coeficiente efetivo de perda de elétrons em período magneticamente perturbado.
- ω - Frequência angular da onda.

ω_c - Frequência angular ciclotrônica.

∇ - Operador nabla.

$:=$ - Definido por.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Resultados recentes nos estudos da interação Sol-Terra mostram que o campo elétrico atmosférico é um importante parâmetro relacionado à influência da radiação corpuscular solar nos níveis mais baixos da atmosfera (por volta de 50km de altura ou menos), como observado principalmente em altas latitudes (e.g. Holzworth and Mozer, 1979; Maynard, 1979). Apesar de nesses níveis a energia envolvida em processos elétricos induzidos pela atividade solar ser muito menor que a energia nos processos meteorológicos, pode-se pensar que o campo elétrico comporta-se como um mecanismo inicializador. Em alturas ionosféricas, tal interação é realçada pelos campos elétricos lá existentes, constituindo um importante parâmetro nos estudos Sol-Terra (Reiter, 1969, 1977; Roberts and Olson, 1973; Märçz, 1976; Herman and Goldberg, 1978; Markson, 1978; Maynard, 1979; Markson and Muir, 1980).

O objetivo do presente trabalho é o estudo dos campos elétricos atmosféricos existentes em regiões de baixas latitudes. Particularmente, pretende contribuir para uma melhor compreensão de fenômenos geofísicos associados à Anomalia Magnética do Atlântico Sul. Nessa região, pode ocorrer a precipitação de partículas energéticas (Martin et alii, 1972, 1974; Abdu et alii, 1973; Trivedi et alii, 1973; Paulikas, 1975; Gledhill, 1976, 1979; Gonzalez and Gonzalez, 1979). Embora não se saiba ao certo a origem dessas partículas energéticas, é possível que parte delas possa ser relacionada a uma combinação de difusão radial e de ângulo de passo dos elétrons relativistas nos cinturões de radiação da Terra. Flutuações eletromagnéticas com frequências apropriadas dão lugar a interações ondas-partículas e conseqüente difusão e perdas na atmosfera da região da Anomalia das partículas energéticas ressonantes.

Quando observados em alturas de balão estratosférico, os campos elétricos existentes na atmosfera podem apresentar diversas in

fluências. Basicamente essas influências se originam das camadas mais baixas da atmosfera e da região por volta de 110km de altura, o que define os campos elétricos de origem troposférica e de origem ionosférica, respectivamente. Uma média de 2000 tempestades atmosféricas ativas em cada instante e espalhadas pelo globo terrestre originam os campos elétricos troposféricos. Longe das tempestades e próximo ao chão, seu valor é da ordem de 100V/m e são essencialmente verticais (dirigidos para baixo). São os campos elétricos de tempo bom. Na vizinhança de uma tempestade, esse valor é grandemente alterado e as linhas de força são distorcidas, caracterizando os campos elétricos de tempestades. Globalmente, o sistema associado de correntes elétricas mantém uma diferença média de potencial ionosfera-chão da ordem de 300kV. Na ionosfera, o mapeamento do campo elétrico magnetosférico ao longo das linhas de força do campo geomagnético e o efeito dínamo pela ação de ventos neutros ao arrastar partículas carregadas através das linhas do campo geomagnético caracterizam os campos elétricos ionosféricos. Esses campos são tipicamente da ordem de 1mV/m, em baixas latitudes; em altas latitudes, devido a uma maior interação ionosfera-magnetosfera, esses campos podem chegar a 100mV/m; e em médias latitudes, entre 1 e 10mV/m.

Campos elétricos ionosféricos podem se mapear para baixas alturas, até por volta de 10km, com pouca atenuação em seu valor. O contrário também acontece. Isto é, campos elétricos horizontais de origem troposférica podem chegar às regiões da ionosfera, situadas sobre grandes tempestades atmosféricas, com valores da ordem de 1mV/m. Modelos e observações indicam que fenômenos ionosféricos de alta latitude podem se transmitir eficientemente para baixas latitudes, em direção ao equador, com importantes efeitos na dinâmica ionosférica associada (e.g. Gonzales et alii, 1979; Blanc and Richmond, 1980). As observações sugerem que o parâmetro mais importante associado à física dessa transmissão é o campo elétrico ionosférico.

De forma específica, o objetivo do presente trabalho foi desenvolvido em duas fases, igualmente importantes, representadas por uma fase experimental e uma fase de simulação teórica.

Para investigar a física dos acoplamentos entre a ionosfera de alta e de baixa latitudes e entre a atmosfera superior e a baixa, foram realizadas em abril de 1980, pela primeira vez, medidas de campos elétricos atmosféricos com detectores a bordo de balões estratosféricos na região da Anomalia Magnética do Atlântico Sul, com vistas particularmente aos campos elétricos ionosféricos (Gonzalez et alii, 1982). O detector é baseado na técnica de sonda dupla, exaustivamente empregada e testada em regiões de altas latitudes (Mozer, 1972, 1974; Holzworth, 1980; Wygant et alii, 1979). Grandes valores de campo elétrico, de magnitude não esperada, foram obtidos nessas medidas.

Para reconhecer as diversas contribuições de campo elétrico nos valores medidos, desenvolveram-se técnicas e algoritmos numéricos de simulação. Nesta importante fase, a participação dos campos elétricos ionosféricos nas medidas mediante o seu mapeamento de altitudes ionosféricas para altitudes de balões estratosféricos, bem como a contribuição dos campos elétricos troposféricos decorrentes da orografia (simplificadamente denominados campos elétricos orográficos), são investigadas. A influência da Anomalia Magnética do Atlântico Sul é também discutida.

O Capítulo 2 contém um resumo dos fenômenos elétricos na atmosfera. O Capítulo 3 traz um estudo do método experimental utilizado na obtenção das medidas do campo elétrico atmosférico, em alturas de balão estratosférico, com a descrição da carga útil, o procedimento de análise dos dados, e os resultados obtidos. O Capítulo 4 apresenta as técnicas numéricas desenvolvidas e aplicadas na simulação dos diversos fenômenos em estudo. O Capítulo 5 mostra as aplicações das técnicas numéricas apresentadas, terminando com uma discussão dos resultados. O Capítulo 6 contém as principais conclusões da presente pesquisa.

CAPÍTULO 2

FENÔMENOS ELÉTRICOS NA ATMOSFERA

2.1 - INTRODUÇÃO

A atmosfera é um meio contínuo, cujas características variam monotonicamente com a altura. Entretanto, segundo o ponto de vista adotado (térmico, elétrico, etc.), usa-se classificá-la em regiões. Com base na distribuição de temperatura, a atmosfera é dividida em diversas camadas. Cada camada está situada entre aqueles pontos onde o gradiente vertical térmico se anula. A camada mais baixa, próxima da superfície terrestre, é a *troposfera*. A mais alta (mais externa) é a *termosfera*. Entre elas existem a *estratosfera* e a *mesosfera*. Se se considera a densidade eletrônica em uma dada altura, a atmosfera é caracterizada pelas *regiões ionosféricas*. A mais baixa é a região *D* e a mais alta, que contém a região do pico da densidade eletrônica, é a região *F₂*. Entre as regiões *D* e *F₂* existem as regiões *E* e *F₁*. Algumas vezes, considera-se também a região *C*, abaixo da *D*. A Figura 2.1 mostra a nomenclatura citada, e traz também os valores típicos de cada região. A estratosfera e a mesosfera constituem, basicamente, a *média atmosfera*. *Alta atmosfera* e *baixa atmosfera* são as regiões acima e abaixo, naturalmente, da média atmosfera. Efeitos elétricos de baixa altitude, de origem troposférica ou estratosférica, podem se fazer sentir em altitudes mais altas e vice-versa. A atmosfera é eletricamente acoplada em toda a sua extensão.

A estrutura elétrica da atmosfera é um tópico atualmente em estudos, conhecendo-se já, com razoável grau de profundidade, algumas de suas características (Maynard, 1979).

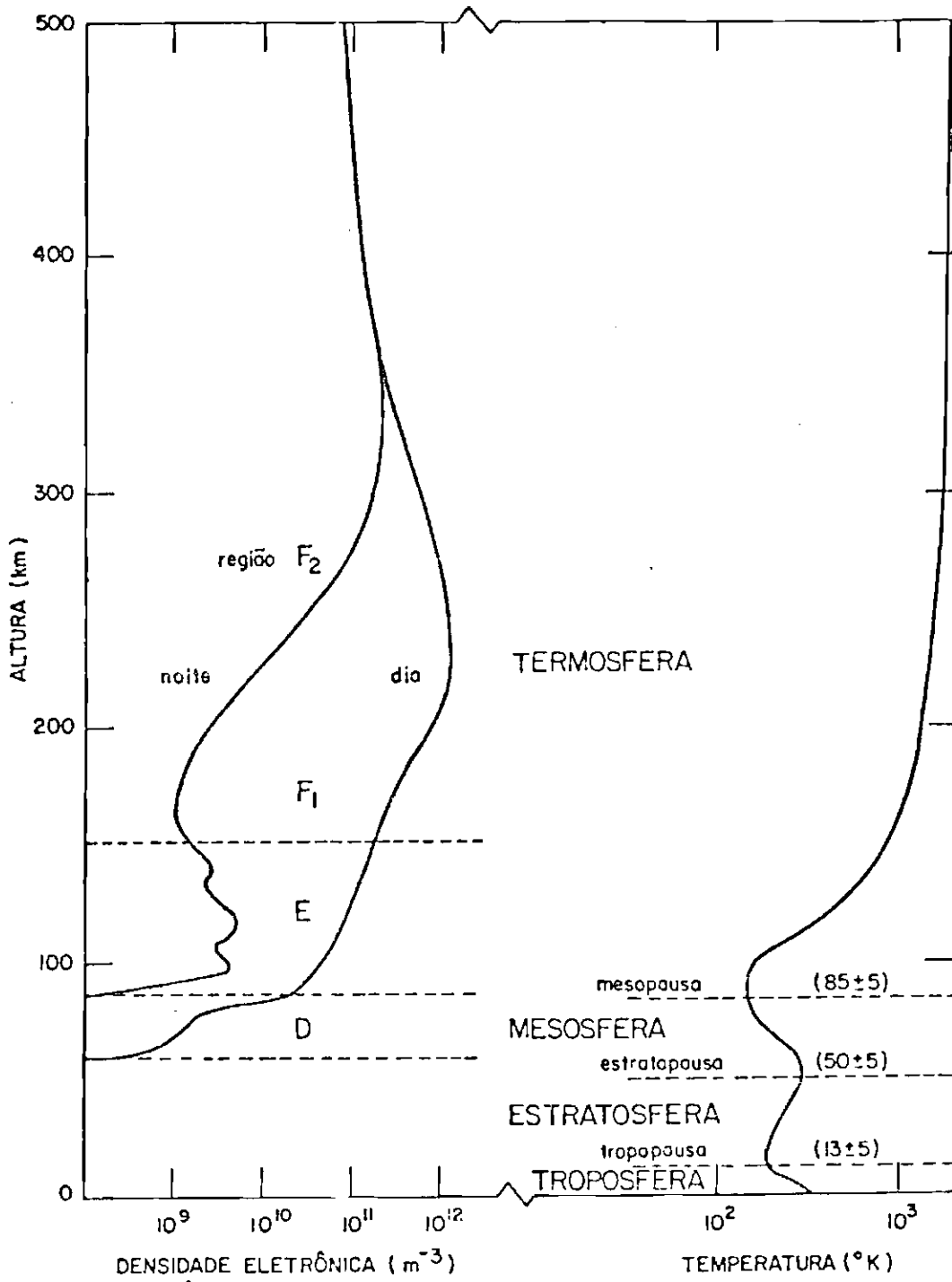


Fig. 2.1 - Regiões da atmosfera.

A existência da *ionosfera* deve-se às radiações ionizantes vindas do sol e da galáxia. A penetração dessa radiação na atmosfera produz íons e elétrons em altitudes onde processos de ionização, dependentes basicamente da energia da radiação e da composição atmosférica, ocorrem. As fontes ionizantes incluem *radiação corpuscular*, cuja energia é perdida por sucessivas interações com os constituintes atmosféricos, e *radiação eletromagnética*, que tem sua energia absorvida principalmente por fotoionização. Os elétrons e as partículas carregadas em um fundo predominante de partículas neutras introduz efeitos eletrodinâmicos importantes na atmosfera.

A Figura 2.2 mostra a penetração de elétrons, prótons e partículas alfa na atmosfera, bem como os pontos com 50% de transmissão para raios X, onde se vê que, por exemplo, somente elétrons com energias maiores que 200keV, prótons com energias maiores que 7MeV, partículas alfa com energias maiores que 28MeV e raios X com comprimento de onda menor que 2\AA podem atingir altitudes menores que 70km. Com exceção da radiação cósmica galáctica, muito energética, a radiação corpuscular afeta principalmente as regiões ionosféricas de altas latitudes, devido à blindagem oferecida pelo campo magnético terrestre.

A radiação cósmica galáctica é a fonte de ionização dominante (particularmente durante períodos de mínima atividade solar) na metade inferior da média atmosfera. A Figura 2.3 mostra o espectro integral em energia dos raios cósmicos incidente na Terra. A intensidade dessa radiação que incide na atmosfera mostra um efeito latitudinal (devido ao "cutoff" geomagnético) e uma modulação com o ciclo solar (Sandström, 1965; Pomerantz and Duggal, 1974).

A energia diretamente cedida pelo sol na forma de radiação eletromagnética predomina em relação à ionização causada pela radiação cósmica galáctica na parte superior da média e na alta atmosfera. A Figura 2.4 mostra o fluxo solar de fótons, a qual vai de raios X ao infravermelho (Smith and Gottlieb, 1974). Sol calmo representa tipicamente um número de manchas solares de 10 a 40 (ciclo solar mínimo);

ativo, de 40 a 100, sem a presença de erupções solares (ciclo solar máximo); e "lentamente variando" representa o crescimento/decrescimento de grandes regiões ativas no disco solar e seu aparecimento/desaparecimento com a rotação do sol. Da energia total emitida, 1358 W/m^2 em 1AU (*constante solar*, sol calmo), aproximadamente 10^{-5} desse total é irradiado pelo sol na região abaixo de 1500 \AA . Esta parcela, aparentemente insignificante, é a responsável pelo aparecimento da ionosfera nas alturas acima mencionadas.

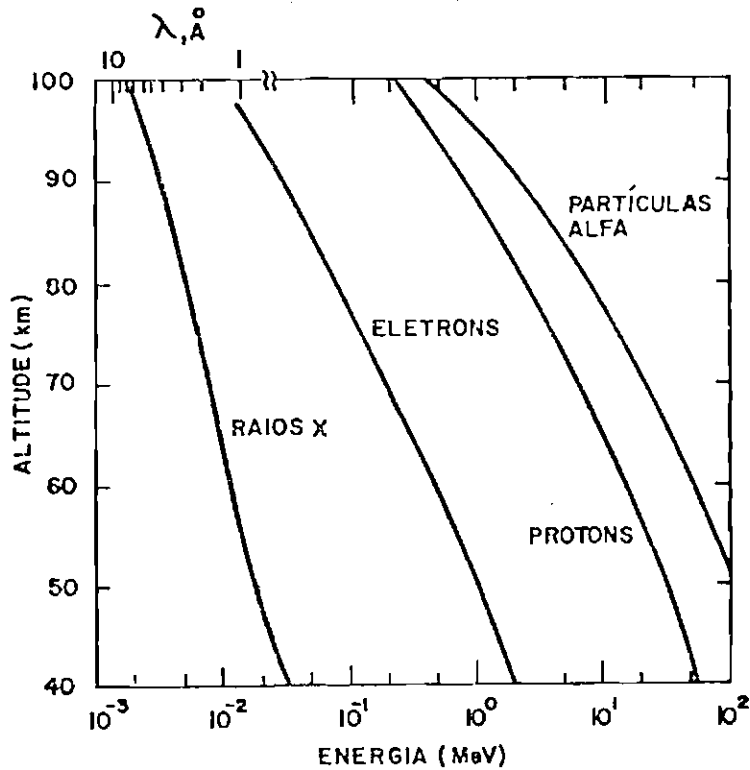


Fig. 2.2 - Penetração de partículas e raios X na atmosfera capazes de ionizá-la, em função da energia.

FONTE: Potemra (1974), p. 24.

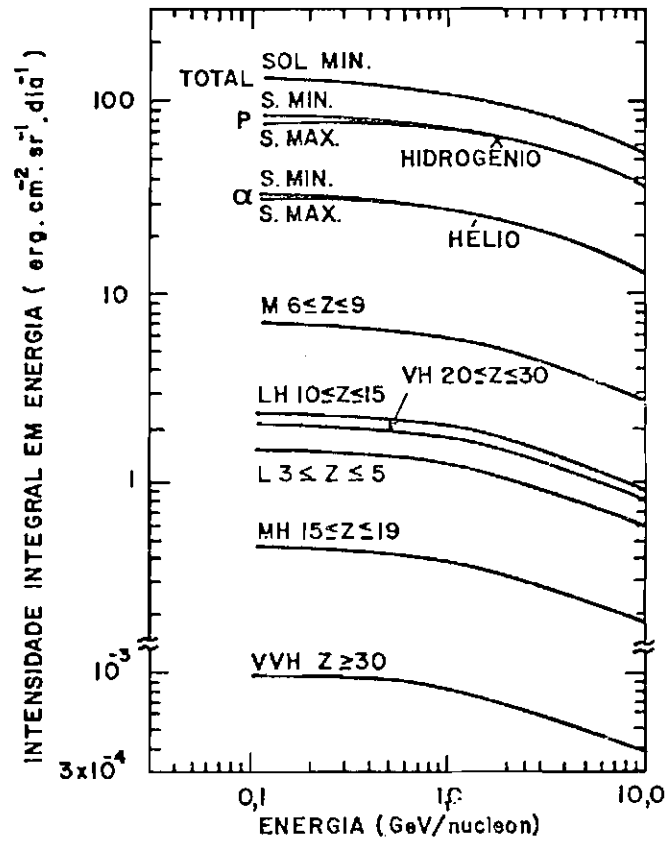


Fig. 2.3 - Intensidade integral em energia dos núcleos dos raios cômicos galáticos.

FONTE: Rosenberg and Lanzerotti (1979), p. 57.

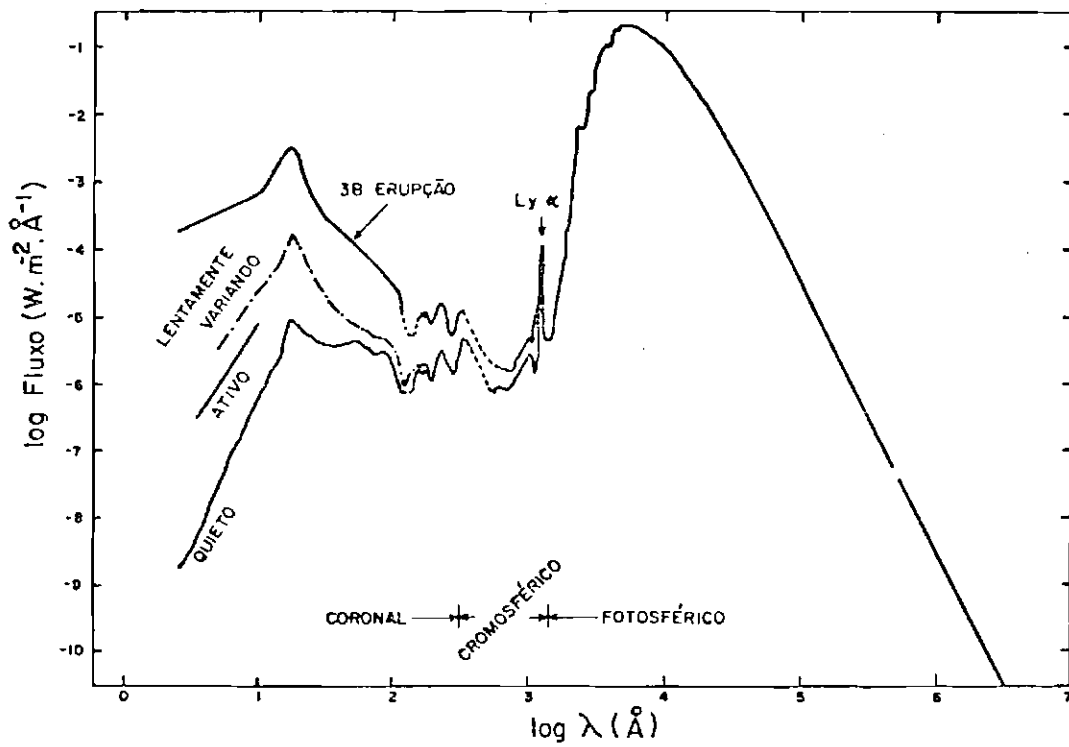


Fig. 2.4 - Sumário da irradiação solar na faixa que vai de raios X ao infravermelho

FONTE: Smith and Gottlieb (1974), p. 786.

A Figura 2.5 mostra a taxa de ionização provocada pela radiação cômica galática e pela radiação Lyman-alfa do hidrogênio solar ($H Ly - \alpha$). A dependência da radiação cômica com o ciclo solar pode ser apreciada nas latitudes geomagnéticas de 0° , 50° e 70° . No equador geomagnético tal dependência é praticamente inexistente. Na Figura 2.6 tem-se a comparação da taxa de ionização devida ao ultravioleta (UV) e raios X solares com a $H Ly - \alpha$. MIN e MAX referem-se ao sol mínimo e sol máximo. Vê-se que nos anos de sol máximo a ionização por raios X solares pode dominar a ionização $H Ly - \alpha$ em alturas acima de 85km. A variação diurna da ionização $H Ly - \alpha$ indica a sua predominância na faixa de altura por volta de 60km durante o dia (fluxo direto) até 70km durante a noite (fluxo espalhado), em baixas latitudes.

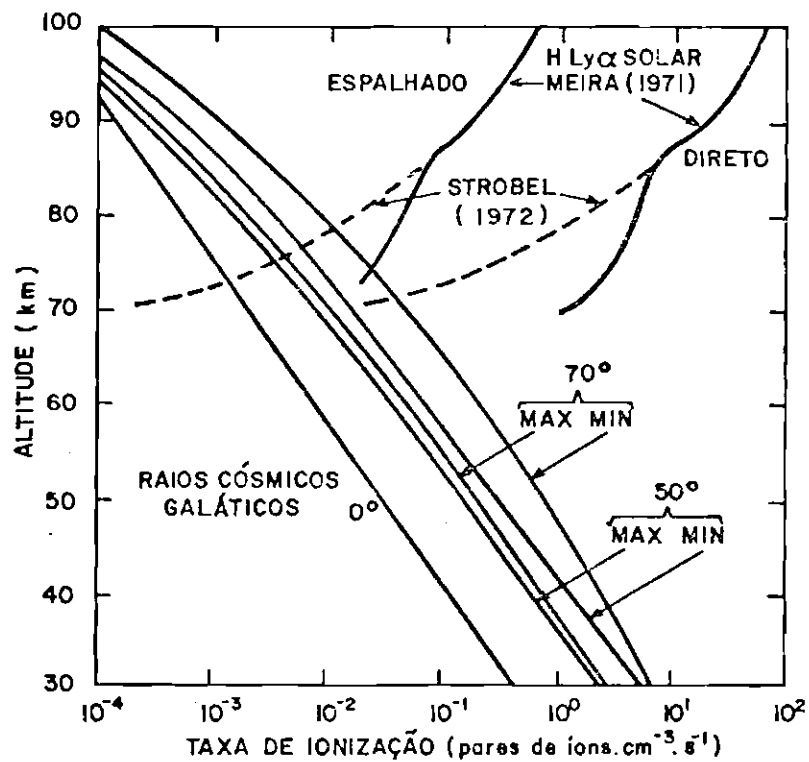


Fig. 2.5 - Dependência em altura da taxa de ionização decorrente dos raios cômicos galáticos e da linha $H Ly - \alpha$ solar.

FONTE: Rosenberg and Lanzerotti (1979), p. 59.

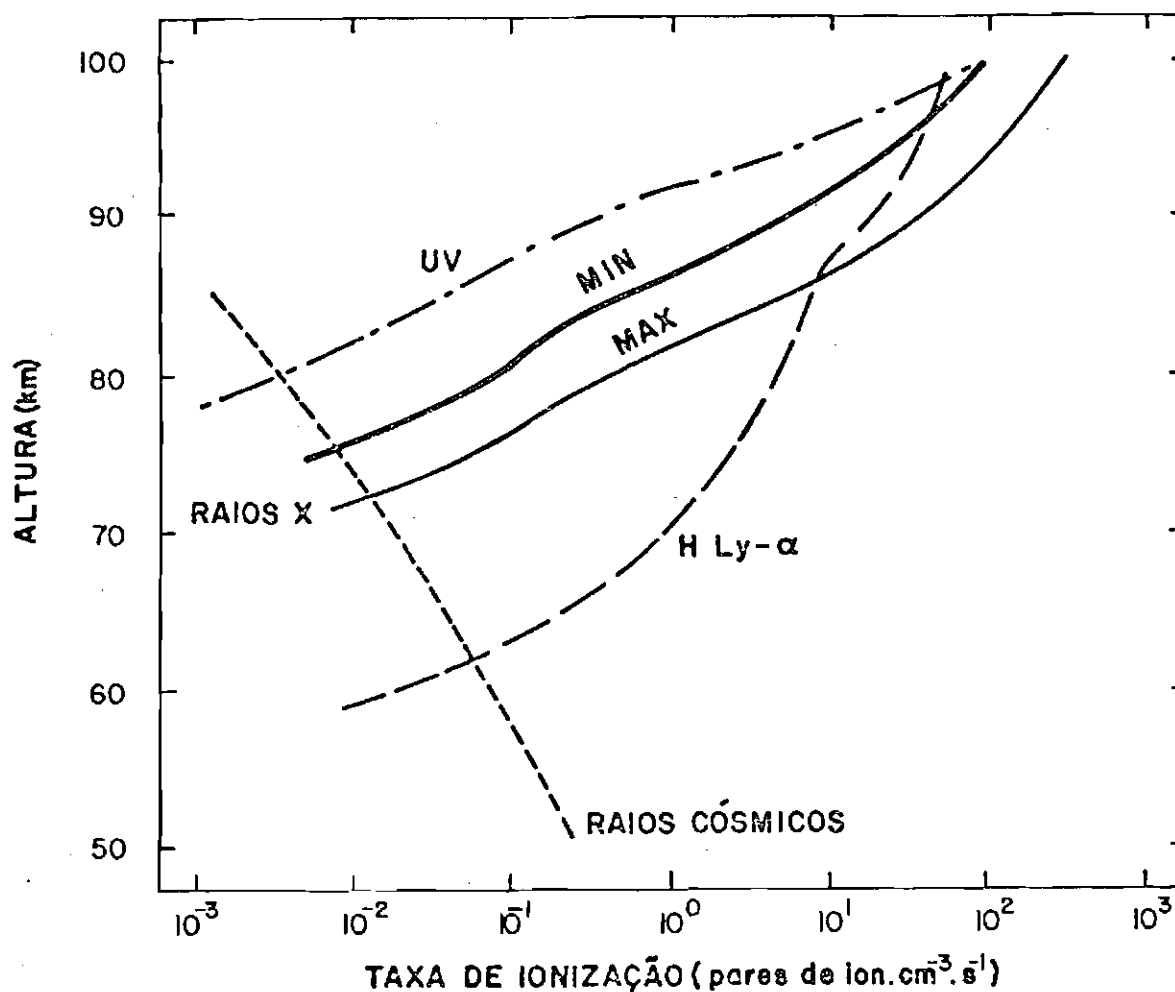


Fig. 2.6 - Dependência em altura da taxa de ionização devida aos raios X solares, comparada com a dos raios cósmicos, do ultravioleta e da linha H Ly - α solar.

FONTE: Rosenberg and Lanzerotti (1979), p. 60.

A ocorrência de *tempestades atmosféricas* ("thunderstorms"), associadas a trovoadas e com (ou sem) efeitos meteorológicos como chuva, etc., também introduz efeitos eletrodinâmicos na atmosfera. As tempestades atmosféricas originam-se, primariamente, do acúmulo de regiões de partículas de água carregadas eletricamente, as *nuvens de tempestade* ("thunderclouds"). A origem dessas regiões é um fato relativamente bem conhecido, mas não o seu processo de eletrificação (Vonnegut, 1979).

Movimentos convectivos rápidos (inicialmente para cima e posteriormente para baixo) e expansão e resfriamento adiabáticos definem o estado final dessas nuvens. A temperatura da parte superior convectiva de uma nuvem de tempestade pode apresentar uma diferença de até -80°C em relação ao meio ambiente, o que permite o seu monitoramento no infravermelho por satélites artificiais.

O campo elétrico de uma nuvem de tempestade aproxima-se àquele de um dipolo com uma carga elétrica de algumas dezenas ou centenas de coulombs na parte superior da nuvem e uma carga negativa de magnitude similar na parte inferior. Campos elétricos da ordem de 10^5V/m podem ser originados (Mason, 1971). No estágio inicial de crescimento das nuvens de tempestades, até o seu topo chegar aos 5km de altura, pouca ou nenhuma eletrificação existe. Aos 9 ou 10km, em um estágio posterior, começam a aparecer raios dentro da nuvem ou mesmo entre a nuvem e o chão. Observa-se que, devido a um contínuo acúmulo de cargas, o campo elétrico cresce exponencialmente no tempo, dobrando de valor em intervalos de alguns minutos, aproximadamente. Usualmente, as tempestades atmosféricas atingem 10 a 12km de altura, podendo chegar durante grandes tempestades a 20km ou mais, já na estratosfera (Figura 2.7).

Outros efeitos, devidos à interação do campo magnético terrestre com o vento solar, que aparecem predominantemente em regiões de latitudes altas e podem (e muitas vezes é o que ocorre) se propagar para baixas latitudes ou mesmo para a região equatorial, também são importantes na compreensão global da eletricidade atmosférica. Partículas, principalmente prótons e elétrons, são continuamente emitidas pelo sol na forma de um plasma magnetizado que flui radialmente na direção da Terra, constituindo o vento solar. A velocidade do plasma solar, aproximadamente correlacionada (em km/s) com o índice ΣK_p de atividade magnética por $8,44 \Sigma K_p + 330$ (Snyder et alii, 1963), tem seu valor típico de 460km/s. Com uma densidade de $2,5$ prótons/cm³ e um campo magnético médio de 5 gamas (Neugebauer and Snyder, 1962, 1966), a velocidade de Alfvén, $B/(\mu_0 n m_p)^{1/2}$, é da ordem de 69km/s, o que mostra que o vento solar é supersônico (número de Mach $\approx 6,7$). Suas densidades de

energia cinética e magnética de $4,4 \times 10^{-9}$ e $1,0 \times 10^{-10}$ erg/cm³, respectivamente (na proporção de 44:1), indicam que o campo magnético é preso ("frozen-in") ao vento solar, sendo transportado juntamente com o plasma.

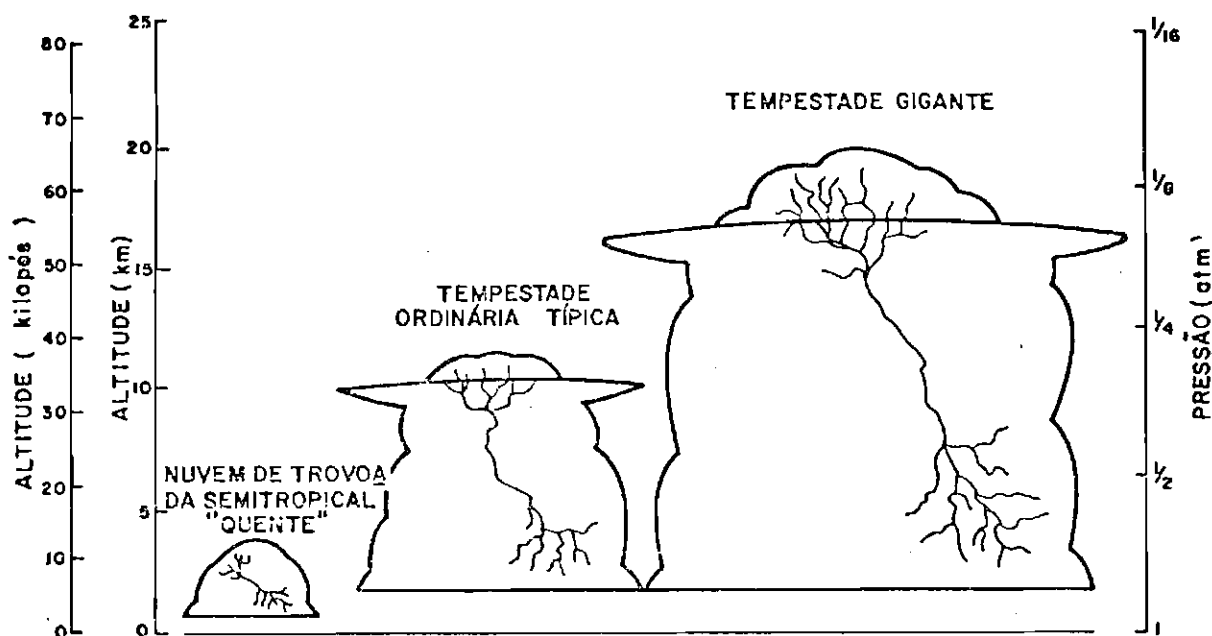


Fig. 2.7 - Dimensões aproximadas das tempestades ("thunderstorms") pequenas, típicas e gigantes.

FONTE: Vonnegut (1979), p. 165.

Para os planetas que possuem um campo magnético, como a Terra, a interação do vento solar com esse campo origina uma cavidade no plasma denominada *magnetosfera* (Figura 2.8). Ininterruptamente so prado pelo sol, o vento solar flui ao redor do planeta, sentindo a existência do campo geomagnético em distâncias onde existe um equilíbrio hidrodinâmico entre a pressão externa exercida por si mesmo e a pressão interna exercida pelo campo geomagnético. Essa região de equilíbrio, a região de contorno da magnetosfera, é a *magnetopausa*. No lado solar, a magnetopausa pode distar da Terra, tipicamente, cerca de 10 raios terrestres (R_T); nos pólos, $14R_T$; e no lado anti-solar, tomando uma forma aproximadamente cilíndrica com diâmetro de $40R_T$, ela se estende até 500 ou mais raios terrestres. Sua espessura é da ordem de $0,016R_T$.

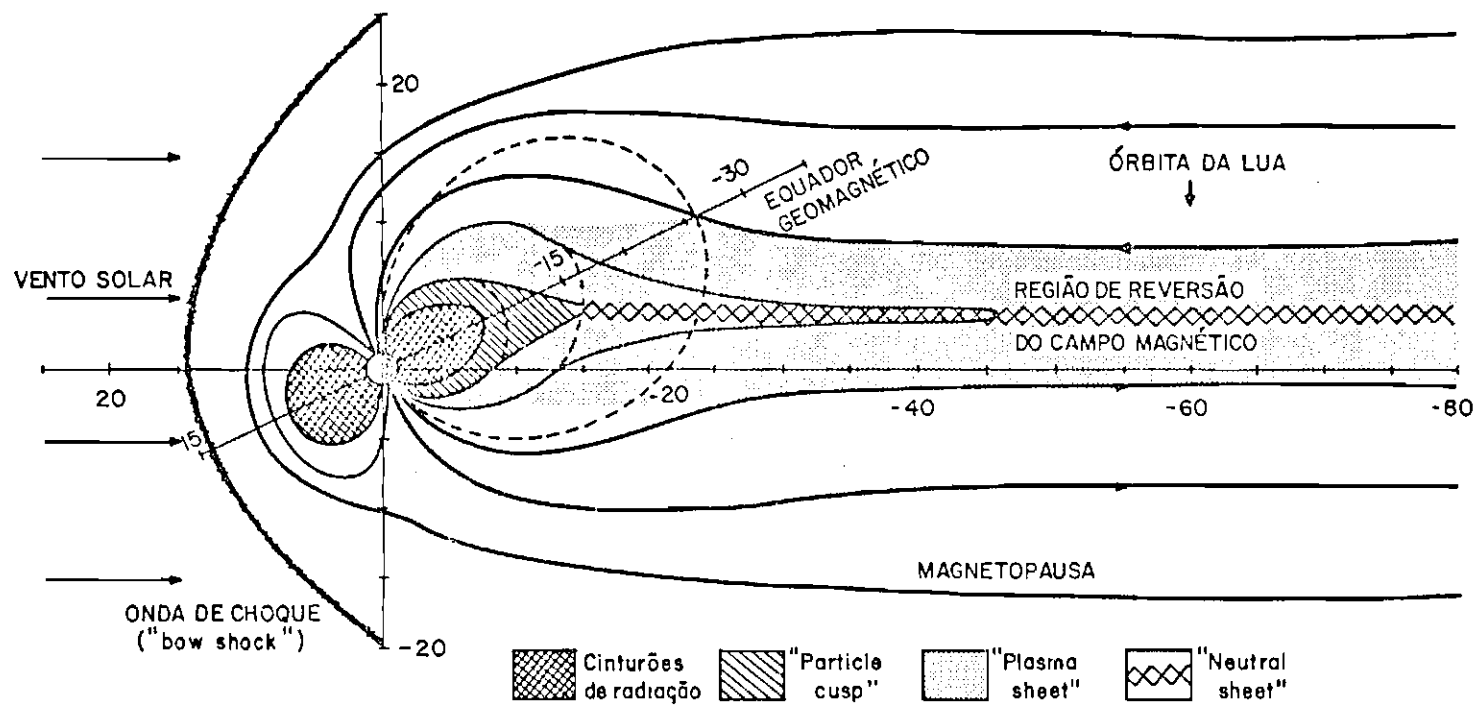


Fig. 2.8 - Configuração da magnetosfera no plano meio-dia/meia-noite.

FONTE: Hess (1968), p. 334.

Devido à velocidade do plasma solar, uma onda de choque, a "*bow shock*", é originada do impacto desse plasma com o campo geomagnético, e está situada a cerca de $14R_T$ no lado solar e $20R_T$ nos pólos. Ela representa a região de transição entre o regime supersônico característico do plasma solar e uma região turbulenta subsônica, onde esse plasma é "termalizado" e o campo magnético flutua rapidamente. Essa região subsônica, chamada "*magnetosheath*", está situada entre a "*bow shock*" e a magnetopausa.

A magnetopausa não é uma superfície estática. Ela se expande ou se contrai devido a variações na atividade solar. A interação do campo geomagnético com o vento solar é um fenômeno ainda em estudos; existem duas correntes de pensamento que indicam que tal interação pode ser do tipo viscosa ou efetuada através de uma reconexão magnética. No primeiro caso, tem-se uma magnetosfera fechada (Johnson, 1960; Axford and Hines, 1961) e no outro, aberta (Dungey, 1961; Levy et alii, 1964). Em todo o caso, partículas energéticas como prótons, elétrons e mesmo partículas alfa e núcleos pesados (em quantidades bem menores) vindas da "*magnetosheath*" penetram na magnetosfera através, principalmente, da região polar chamada "*cusp*".

A parte anti-solar da magnetosfera, a *cauda magnética* ("*magnetotail*"), é preenchida por um plasma rarefeito (onde efeitos de colisão são desprezíveis), principalmente no plano médio da magnetosfera, formando uma camada de plasma ("*plasmasheth*"). Um campo elétrico, tipicamente da ordem de $0,2\text{mV/m}$, existe na camada de plasma, dirigido desde o lado do amanhecer para o lado do entardecer ("*dawn-dusk*"). Entretanto, devido às dimensões da região, diferenças de potencial tão elevadas quanto 50kV podem existir entre o entardecer e o amanhecer. Um plasma rarefeito na presença de um campo elétrico \underline{E} e de um campo magnético \underline{B} tende a se deslocar em uma direção perpendicular a ambos os campos, com velocidade dada por $\underline{v} = \underline{E} \times \underline{B}/B^2$ (Figura 2.9). Como o campo magnético é dirigido para o norte, o plasma se desloca na direção da Terra (ou do Sol). É o *movimento convectivo do plasma magnetosférico*. A Figura 2.9, mostrando um corte tridimensional da magnetosfe

ressem. Esses três processos, além da *injeção de partículas* carregadas na região de aprisionamento, controlam a existência dos cinturões de radiação. Para os elétrons, o principal processo de injeção é a difusão radial e o de perdas é a interação coulombiana com os constituintes atmosféricos. Perdas devidas à interação ressonante dos elétrons com ondas magnetosféricas também são importantes.

A seguir discutir-se-á a natureza dos campos elétricos esperados, principalmente nas regiões de baixas e médias latitudes que abrangem a Anomalia Magnética do Atlântico Sul. Estes campos estão relacionados aos movimentos diurnos da ionosfera (dínamo) em períodos magneticamente calmos e perturbados, à dinâmica elétrica da troposfera, e às influências elétricas da dinâmica de precipitação de partículas energéticas na Anomalia Magnética do Atlântico Sul.

2.2 - CAMPO ELÉTRICO IONOSFÉRICO

A ionosfera é um meio constituído de partículas carregadas em um fundo predominantemente neutro, atravessado pelo campo geomagnético. O campo geomagnético apresenta na superfície da Terra variações diurnas sistemáticas, com amplitudes da ordem de 10^{-5} a 10^{-2} vezes o seu valor normal (da ordem de 10^5 gamas). Essas variações em geral podem ser associadas às correntes elétricas que se formam na ionosfera, devido à existência de ventos neutros nessa região, ou às correntes elétricas que circulam nas regiões externas da magnetosfera.

A existência do campo geomagnético introduz um certo comportamento na dinâmica das partículas ionosféricas. Em alturas menores que aproximadamente 85km, onde a frequência de colisão dos elétrons e íons, ν_{en} e ν_{in} (Figura 2.10), com as partículas neutras é maior que as respectivas frequências ciclotrônicas, f_{Be} e f_{Bi} (do movimento das partículas em torno do campo geomagnético), o controle do campo geomagnético não é efetivo, ou seja, na baixa ionosfera o comportamento das partículas carregadas é controlado pela presença das partículas neutras. A frequência de colisão diminui com a altura, o que permite que,

acima de tipicamente, 130km, a situação se inverte, com o plasma ionosférico sob controle magnético.

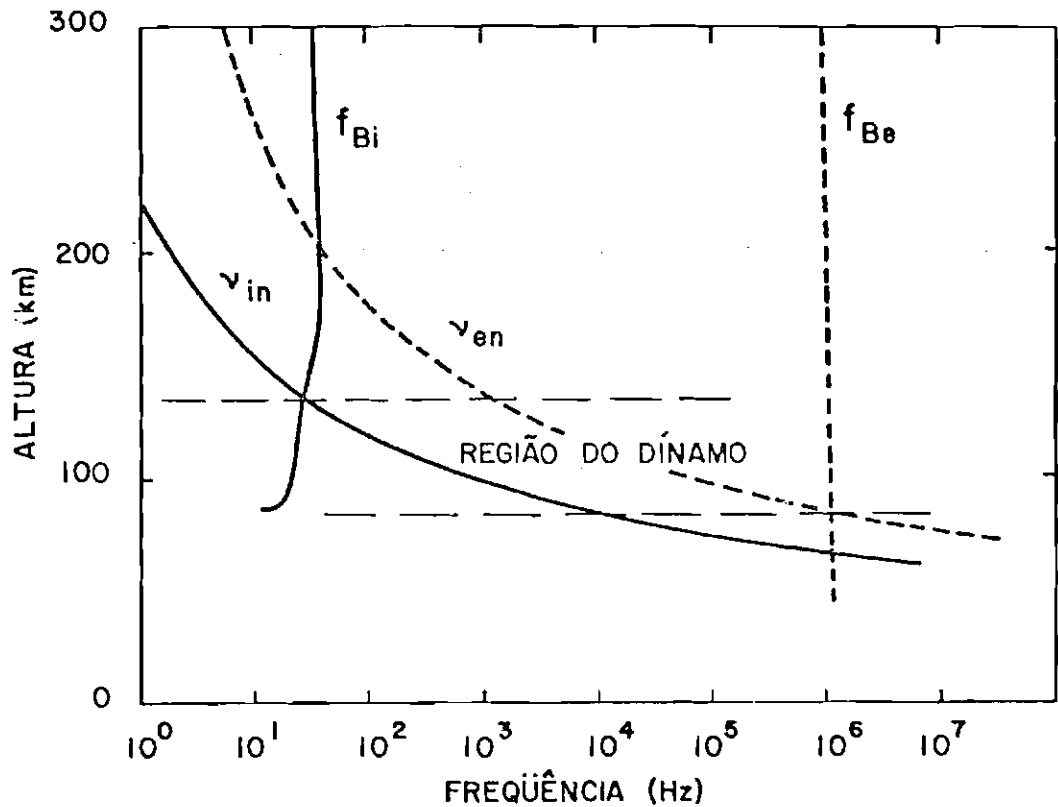


Fig. 2.10 - Perfil vertical das frequências características do plasma ionosférico.

FONTE: Giraud and Petit (1978), p. 24.

Os ventos neutros presentes na região E da ionosfera tendem a deslocar as partículas através do campo geomagnético, \underline{B} , o que origina na região intermediária correntes elétricas pelo *efeito dínamo* (sob a ação do termo $\underline{v} \times \underline{B}$, onde \underline{v} é a velocidade), devido ao comportamento diverso dos elétrons e íons (colisões são mais importantes para os íons que para os elétrons). Essa região intermediária, entre 85 e 130km aproximadamente, é a região do dínamo ionosférico. As correntes elétricas na região do dínamo ionosférico em períodos magneticamente calmos caracterizam o *sistema Sq* ("solar quiet"), associadas às variações geomagnéticas regulares, mencionadas acima (Figura 2.11). Caracte

risticamente, o sistema Sq apresenta dois vórtices no lado diurno, com os pontos centrais distanciados da ordem de 1 hora. No Hemisfério Norte, a direção da corrente é contrária ao movimento dos ponteiros do relógio; no Hemisfério Sul, é com os ponteiros do relógio. Na vizinhança do equador as correntes se intensificam, formando o eletrojato equatorial. Acima da região E ionosférica, na região F, os efeitos de colisão podem ser desprezados e o plasma ionosférico se desloca, como um todo, sob controle do campo geomagnético e do campo elétrico lá existentes, com a velocidade de deriva $\underline{v}_B := \underline{E} \times \underline{B}/B^2$ que, nessa região é também a velocidade de "bulk flow".

O campo elétrico do dínamo depende das propriedades elétricas do plasma ionosférico (condutividade elétrica), da dinâmica dos ventos neutros e do campo geomagnético. Na região do dínamo a condutividade é anisotrópica, existindo a *condutividade direta* (ou *paralela*), σ_0 , ao longo das linhas do campo geomagnético; a *condutividade Pedersen*, σ_1 , que é perpendicular ao campo geomagnético, e está na direção do campo elétrico existente; e a *condutividade Hall*, σ_2 , que é perpendicular aos campos magnético e elétrico. As correntes elétricas do dínamo são basicamente correntes Pedersen e Hall, que fluem na região ionosférica E. Na região equatorial verifica-se uma amplificação das correntes Pedersen horizontais que fluem na parte diurna dessa região, devido a um campo de polarização vertical causado pela componente leste-oeste do dínamo ionosférico, introduzindo assim a *condutividade Cowling*, σ_3 ($\sigma_3 := \sigma_1 + \sigma_2^2/\sigma_0$). O eletrojato equatorial é formado basicamente por correntes Cowling.

Um vento neutro periódico e estável, como os ventos de *marés atmosféricas*, pode originar o padrão Sq observado, embora haja dúvidas sobre os modos de propagação que contribuem efetivamente. Na parte superior da região do dínamo, os *ventos termosféricos* também poderiam trazer uma contribuição ao Sq (Kato, 1980).

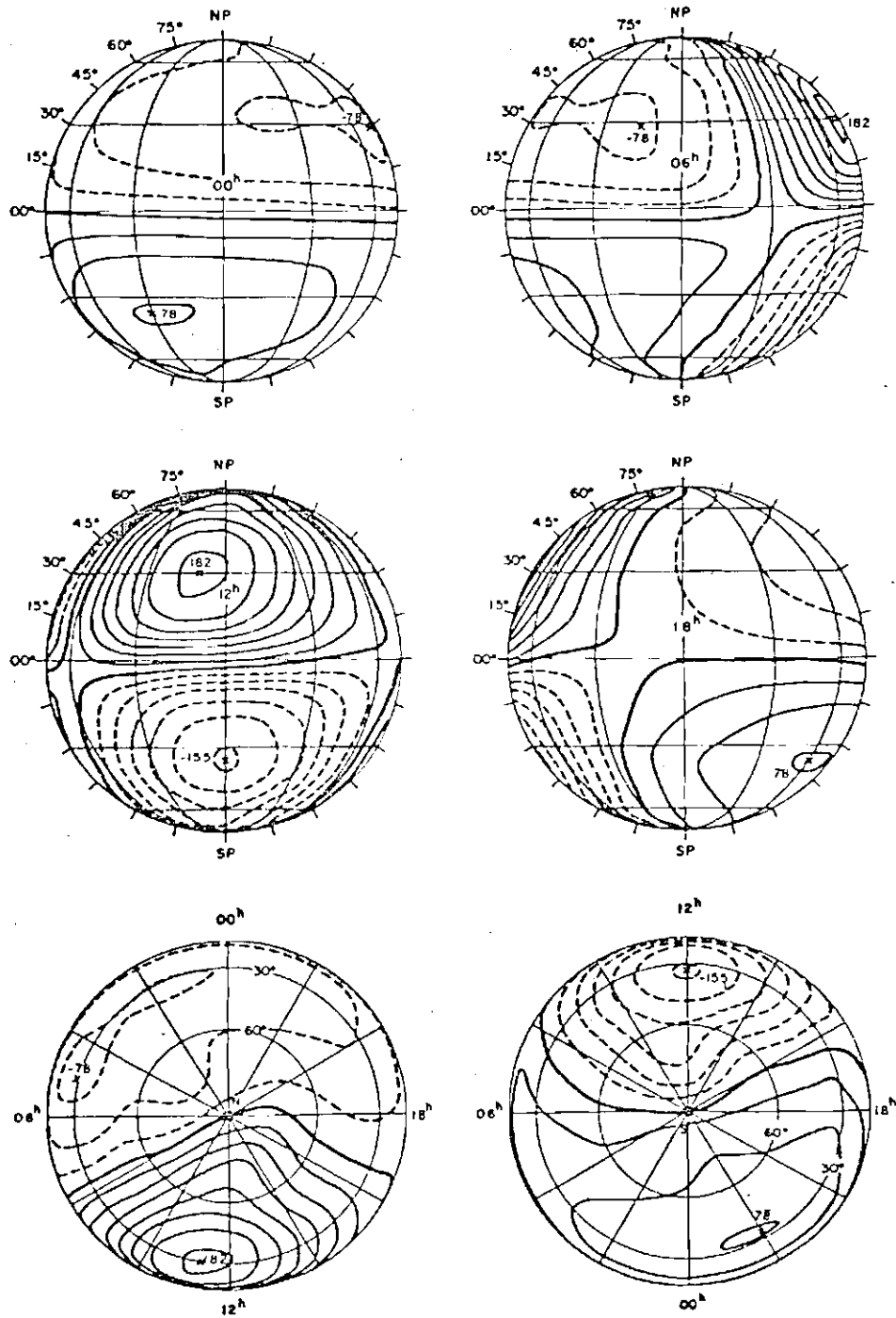


Fig. 2.11 - Sistema de correntes do Sq durante o IGY visto do plano equatorial magnético nos horários das 00, 06, 12 e 18 horas e dos pólos magnéticos norte e sul.

FONTE: Matsushita (1965), p. 4397.

A ação conjunta da condutividade e dos ventos neutros de termina a magnitude do campo elétrico do dinamo. Não somente a região ionosférica E, com alta condutividade e velocidade dos ventos menores, mas também a região F, com menor condutividade e velocidades dos ventos maiores, pode ser uma região apropriada para originar campos elétricos ionosféricos (Wagner et alii, 1979, 1980). Durante o dia, entre tanto, a alta condutividade da região E "curto-circuita" o campo elétrico que porventura se forme na região F, através das linhas de campo geomagnético altamente condutoras (o campo geomagnético força as partículas a se deslocarem em movimento ciclotrônico em torno de suas linhas de força, impedindo o movimento transversal, mas não o movimento ao longo dele). À noite, a condutividade na região E cai para pequenos valores (da ordem de 1/30 do dia) e o efeito de curto-circuito é menos efetivo, surgindo correntes na região F (Rishbeth, 1971, 1972). Na Figura 2.12 tem-se o campo elétrico de polarização da região E (Forbes and Lindzen, 1977).

O campo elétrico ionosférico pode se propagar para baixo, atingindo a baixa atmosfera, ou mesmo para cima, em alturas já na magnetosfera. O mapeamento desde a ionosfera até as regiões mais baixas da atmosfera é que permite a observação desse campo em alturas de balão estratosférico. Em regiões equatoriais (linhas de força do campo geomagnético na direção horizontal), o mapeamento da componente leste-oeste do dinamo ionosférico é regulado pelas condutividades σ_1 e σ_2 ; o da componente norte-sul, pelas condutividades σ_0 e σ_1 . Em altas latitudes (linhas do campo geomagnético na direção vertical), aparecem também as condutividades σ_0 e σ_1 . É a magnitude relativa entre as condutividades σ_0 , σ_1 e σ_2 que determina em cada caso o comportamento desse mapeamento (como será mostrado no Capítulo 5).

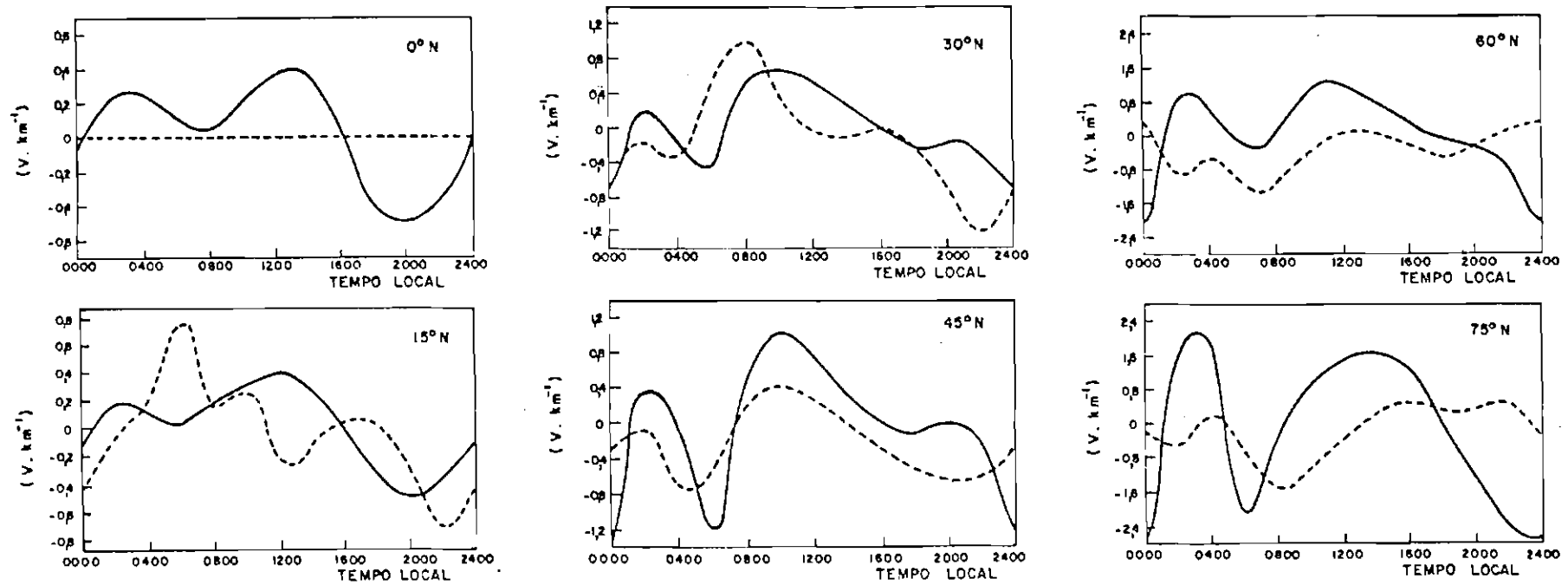
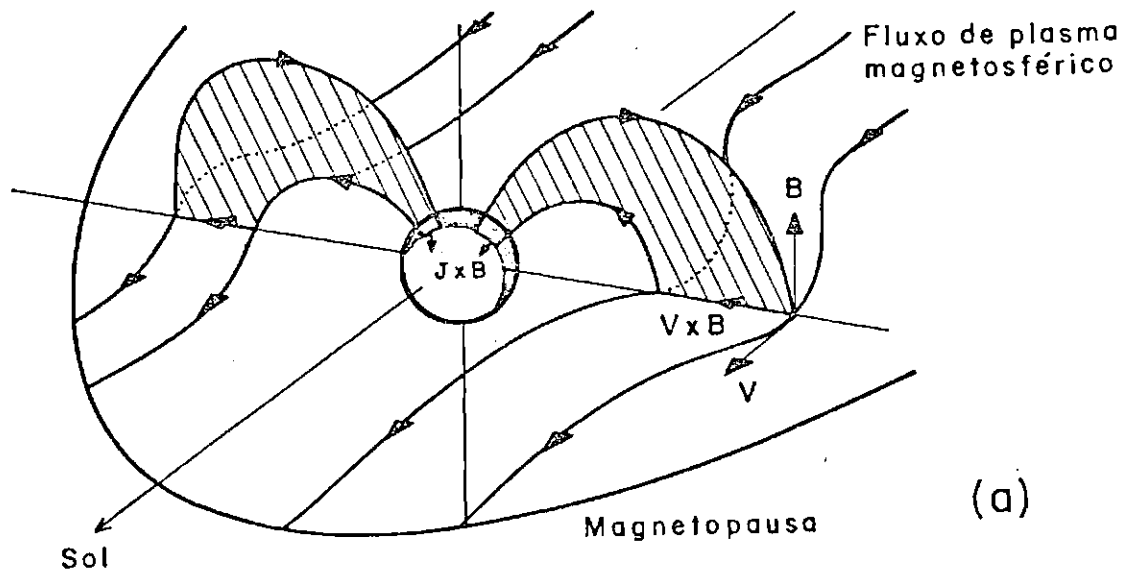


Fig. 2.12 - Variações em tempo local das componentes sul (---) e leste (—) do campo de polarização em diversas latitudes

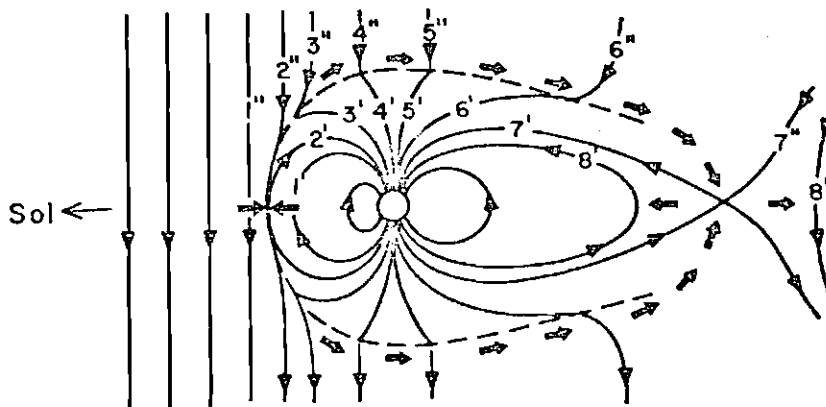
FONTE: Forbes and Lindzen (1977), pp. 1373 e 1374.

Campos elétricos atmosféricos nas regiões equatoriais e de baixas latitudes são originados principalmente pelo efeito dínamo. Em regiões de médias latitudes, outros mecanismos, de origem magnetosférica (Matsushita, 1971, 1972), parecem contribuir significativamente para esses campos elétricos, mesmo em períodos magneticamente calmos (Carpenter and Kirchhoff, 1975). Para regiões de latitudes com magnitudes da ordem de 60° geomagnéticos ou menos, acredita-se atualmente que a origem desses campos seja predominantemente ionosférica (Richmond, 1979a). Em baixas latitudes e na região equatorial, valores típicos do campo elétrico do dínamo ionosférico são da ordem de 1mV/m ou menos.

Em altas latitudes, as correntes ionosféricas são associadas ao movimento convectivo do plasma magnetosférico. As linhas do campo geomagnético que atravessam a ionosfera em altas latitudes atravessam também a magnetosfera. O movimento preferencial das partículas do plasma magnetosférico ao longo das linhas do campo geomagnético elimina quase completamente qualquer diferença de potencial entre a ionosfera e a magnetosfera. Assim, o movimento convectivo magnetosférico em direção ao Sol tende a atingir e arrastar a ionosfera. As correntes, ao longo do campo geomagnético, originadas pelo efeito dínamo (magnetosférico) durante o movimento lateral à Terra do plasma magnetosférico transmitem à ionosfera a força de Lorentz $\underline{J} \times \underline{B}$ em direção ao Sol (Figura 2.13a), com \underline{J} dirigido na ionosfera auroral para o sul no lado do amanhecer e para o norte no lado do entardecer. O movimento ionosférico é completado, através da calota polar, pelo transporte das linhas geomagnéticas pelo vento solar (Figura 2.13b). O movimento do plasma solar ao redor da Terra arrasta as linhas do campo geomagnético desde a parte anterior da magnetosfera até a sua cauda. O campo elétrico de convecção, $\underline{E} = -\underline{v} \times \underline{B}$, do plasma solar é mapeado praticamente sem perdas até a ionosfera polar, transmitindo o seu movimento convectivo na direção anti-solar. A Figura 2.14 apresenta o potencial ionosférico associado ao movimento convectivo magnetosférico (Heppner, 1977).



(a)



(b)

Fig. 2.13 - Movimento convectivo do plasma magnetosférico.

FONTES: (a) Akasofu (1981), p. 495.

(b) Dessler (1968), p. 84.

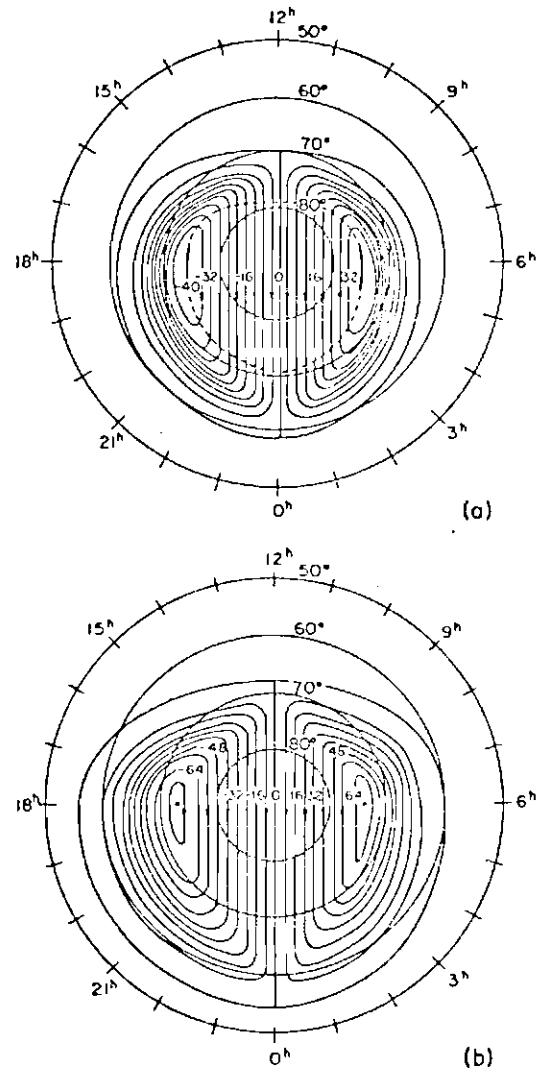


Fig. 2.14 - Potencial ionosférico associado ao movimento convectivo do plasma magnetosférico.

(a) períodos magneticamente calmos; (b) períodos magneticamente perturbados.

FONTE: Heppner (1977), pp. 1119 e 1121.

2.3 - PERTURBAÇÕES NO CAMPO ELÉTRICO IONOSFÉRICO DE BAIXAS LATITUDES

Os campos elétricos ionosféricos nas regiões de baixas latitudes são pequenos em comparação aos de altas latitudes. Durante tempestades magnéticas, fenômenos originalmente iniciados na magnetosfera atingem a ionosfera polar e auroral, perturbando o padrão de campo elétrico de tempo calmo nessas regiões. Observações mostram que essa perturbação pode se propagar até médias e baixas latitudes (Carpenter and Kirchoff, 1974; Blanc, 1978; Fejer et alii, 1979b; Gonzales et alii, 1979; Kelley et alii, 1979), mostrando variações com as estações do ano e com o ciclo solar (Fejer et alii, 1979a).

Basicamente, uma perturbação na ionosfera de altas latitudes pode ser transportada para médias e baixas latitudes mediante vários fatores, tais como: uma perturbação no sistema dos ventos termosféricos, na densidade de correntes alinhadas ao campo geomagnético ou nos campos elétricos ionosféricos.

Durante uma perturbação magnética, observa-se que a densidade e a temperatura aumentam globalmente mais rápida e fortemente em altas que em baixas latitudes. Isto sugere que um fornecimento de energia é realizado basicamente na termosfera auroral, o que implica um mecanismo de transporte para as regiões de baixas latitudes. Tal mecanismo é a *circulação convectiva meridional* (Richmond, 1979b). Com o aquecimento auroral, o ar nessas regiões ascende a alturas maiores, flui horizontalmente para longe das regiões aquecidas (soprado em direção ao equador, acima de 120km em médias latitudes), desce nas regiões de mais baixas latitudes e retorna para a região auroral em alturas mais baixas, formando uma célula do tipo da de Hadley. A circulação termosférica global é perturbada, podendo modificar o dínamo ionosférico de tempo calmo em baixas latitudes. O resultado é um vórtice de correntes, em sentido contrário ao do sistema de correntes Sq normal (Blanc and Richmond, 1980). A Figura 2.15 apresenta o sistema de correntes horizontais e a velocidade de deriva perpendicular às linhas de campo elétrico e magnético para três horários de ocorrência de uma tem

pestade magnética (às 3, 6 e 9 horas). Um vórtice reverso ao S_q aparece centrado em torno das 12 horas e 25° de latitude, atingindo a região equatorial. A Figura 2.16a mostra as componentes da densidade de corrente na direção leste e na direção do equador para as latitudes de 14 e 44° , bem como para o campo eletrostático (Figura 2.16b). Na Figura 2.16c, tem-se o campo eletrostático e a corrente total (entre -10 e 10° de latitude magnética) do eletrojato equatorial. Basicamente, o padrão é o reverso daquele em dias calmos (Woodman, 1970).

Em tempos calmos, correntes aurorais alinhadas ao campo geomagnético (*correntes Birkeland*) em altas latitudes levam sua influência às regiões de média e baixa latitude, com um campo elétrico máximo da ordem de $4,5$ e $0,45\text{mV/m}$ (Figura 2.17), em 45 e 20° de latitude, respectivamente. Para as regiões equatoriais, tem-se $0,32\text{mV/m}$ (Nisbet et alii, 1978). Em períodos magneticamente perturbados, correntes secundárias fecham-se na região equatorial com magnitudes bem maiores, podendo mesmo inverter o campo elétrico lá existente (Nopper and Carovillano, 1978). As Figuras 2.18a e b mostram o padrão das linhas equipotenciais associadas às correntes Birkeland em períodos calmo e perturbado, como modelado por Nopper e Carovillano (1978), obtido com as observações do satélite TRIAD. O campo elétrico no equador em função do tempo local, está apresentado nas Figuras 2.18c e d.

Perturbações no dínamo ionosférico equatorial relacionadas com o *campo magnético interplanetário* têm sido observadas (Nishida, 1968; Patel, 1978). Comparações dos dados magnéticos do satélite IMP 1 com os dados obtidos na superfície terrestre mostram que tais perturbações originam-se da interação entre o vento solar e a magnetosfera. A Figura 2.19 mostra o campo geomagnético medido na estação equatorial de Huancayo e os dados obtidos com o satélite próximo ao meridiano do meio-dia terrestre, distante $30R_T$ da Terra. Observa-se claramente uma alta correlação entre as variações medidas no chão com as medidas do ângulo que o campo magnético interplanetário faz com o plano eclíptico. Quando o campo magnético tende para o sul, as variações crescem e vice-versa.

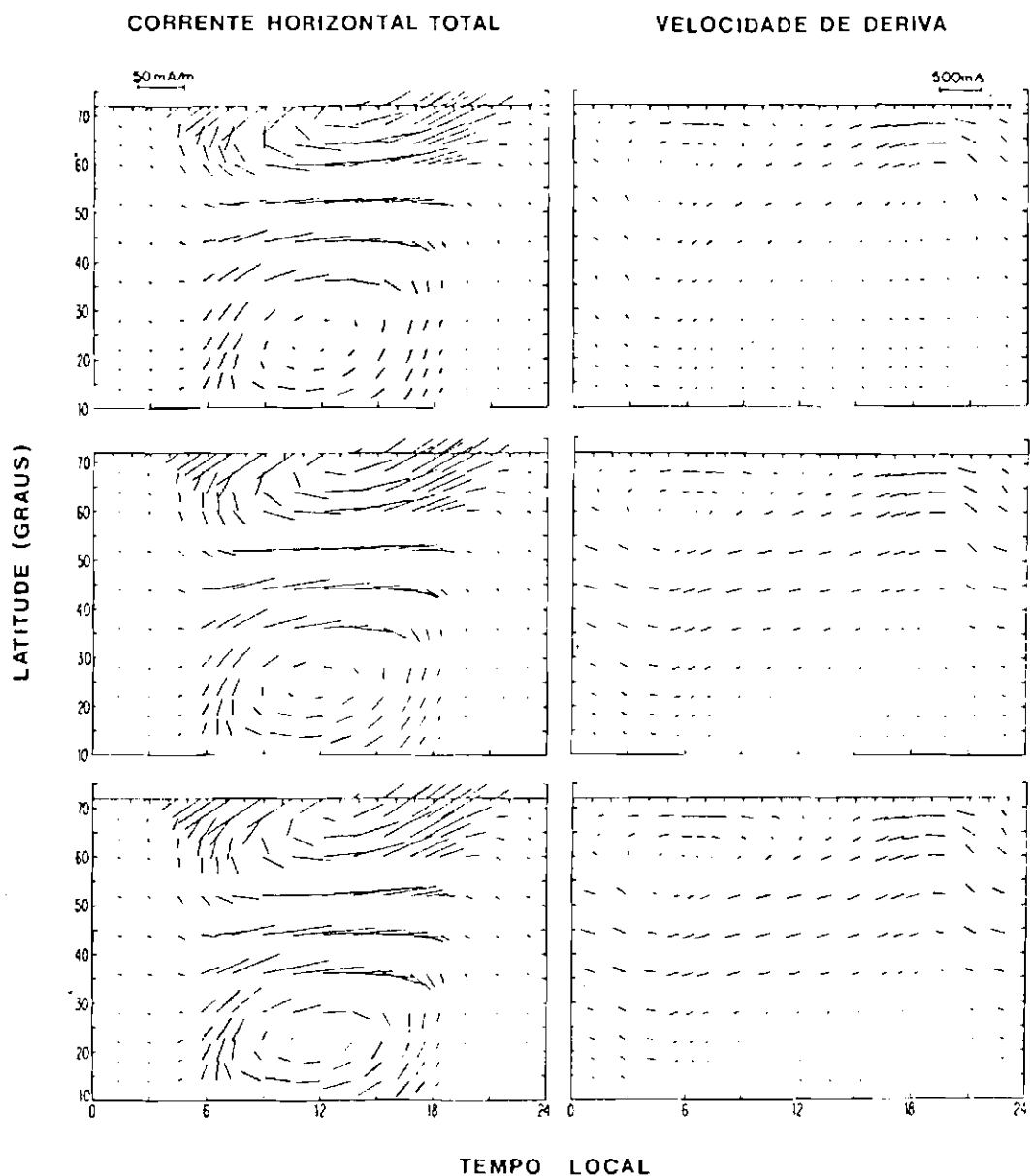


Fig. 2.15 - Sistema de correntes horizontais (integradas em altura) e velocidade de deriva para três horários de ocorrência de uma tempestade magnética.

As partes superior, do meio e inferior correspondem aos instantes 3, 6 e 9 horas, respectivamente.

FONTE: Blanc and Richmond (1980), p. 1675.

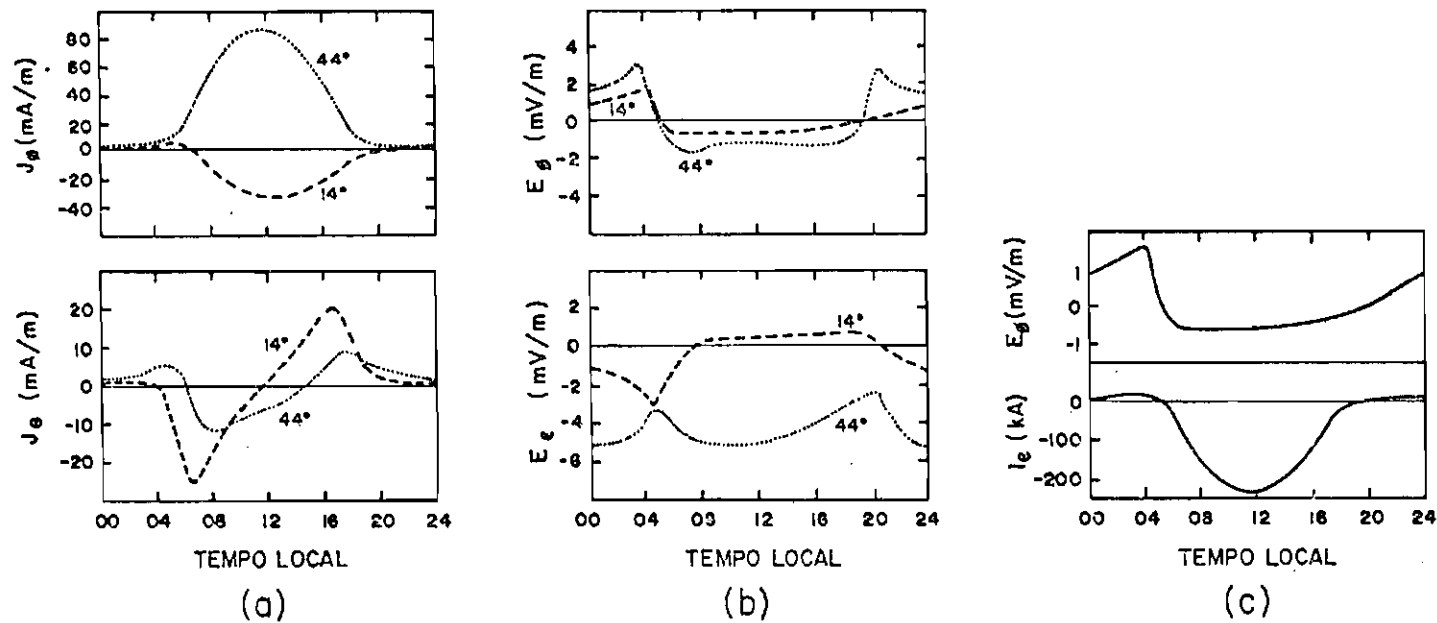


Fig. 2.16 - Variação em tempo local: (a) das componentes da densidade de corrente na direção leste (J_ϕ) e na direção do equador (J_θ); (b) das componentes leste (E_ϕ) e na direção do equador/para baixo (E_e) do campo eletrostático; e (c) do campo eletrostático (E_ϕ) e da corrente total (I_E) do eletrojato equatorial.

FONTE: Blanc and Richmond (1980), p. 1677.

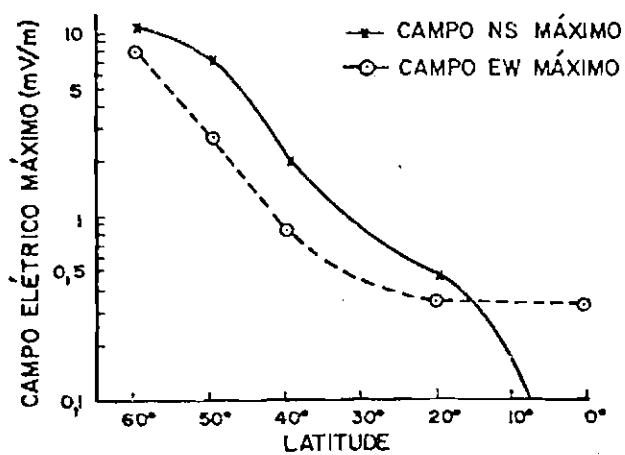


Fig. 2.17 - Campo elétrico máximo induzido pelas correntes de Birkeland em função da latitude (equinócio).

FONTE: Nisbet et alii (1978), p. 2655.

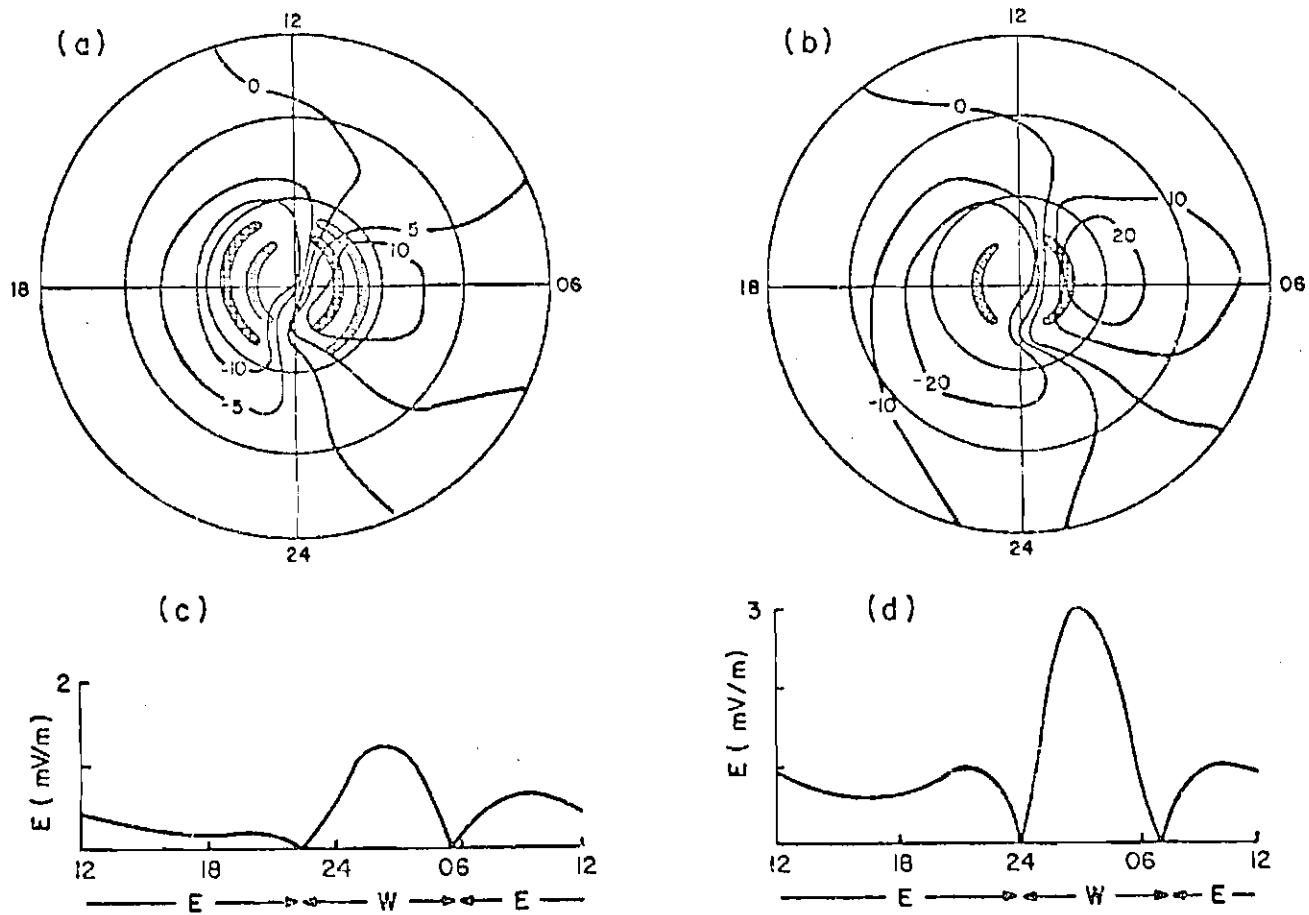


Fig. 2.18 - Linhas equipotenciais associadas às correntes Birkeland em períodos calmos e perturbados (a e b) e campos elétricos equatoriais correspondentes (c e d).

FONTE: Nopper and Carovillano (1978), p. 700.

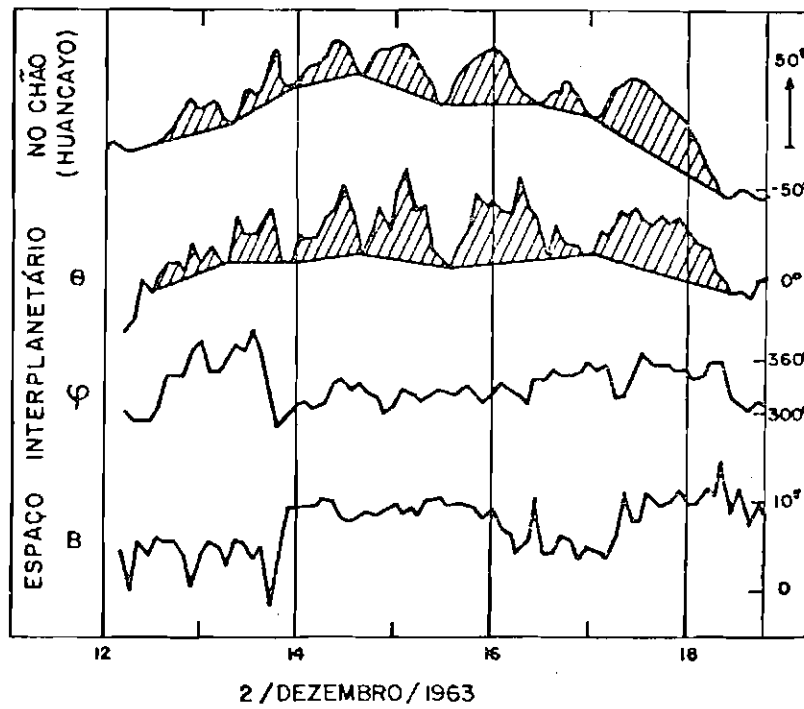


Fig. 2.19 - Comparação entre os dados magnéticos observados no chão (estação equatorial Huancayo) e os dados obtidos com satélite no espaço interplanetário.

FONTE: Nishida (1968), p. 5550.

Um estudo detalhado dessa inter-relação entre o campo magnético interplanetário e as variações no campo elétrico ionosférico equatorial foi realizado por Fejer et alii (1979b), usando 8 anos de medidas do radar de espalhamento Thomson de Jicamarca. A Figura 2.20a ilustra uma reversão no campo elétrico equatorial associada a uma mudança na direção do campo magnético interplanetário ocorrida por volta das 0400 horas (Fejer et alii, 1979b). Devido à interação viscosa ou à reconexão magnética do vento solar com o campo geomagnético, existe um campo elétrico dirigido do lado do amanhecer para o entardecer dentro da magnetosfera em regiões de linhas magnéticas fechadas, o que resulta em uma convecção na direção do Sol. Em estado estacionário, o campo de convecção não consegue penetrar na plasmasfera devido ao desenvolvimento na plasmapausa (separando a região que gira com a Terra das regiões mais externas da magnetosfera) de um campo elétrico de polarização. Durante reversões abruptas da componente B_z do campo magnético interplanetário, o campo de convecção pode rapidamente deixar de existir ou quase se anular, o que não ocorre tão rapidamente com as cargas de polarização na plasmapausa, aparecendo dentro da plasmasfera o campo que não foi equilibrado, provocando uma perturbação de mesma magnitude no campo elétrico ionosférico equatorial no lado noturno terrestre (Fejer et alii, 1979b; Gonzales et alii, 1979; Kelley et alii, 1979). A Figura 2.20b evidencia a validade desse mecanismo. A meia-noite magnética está indicada por um ponto em cada observatório e o tempo de interesse é a faixa hachurada. As estações de Chatanika e Millstone Hill, na zona auroral e próximo dela, respectivamente, mostram um rápido de crescimento no campo elétrico de convecção, que começa por volta das 0740 com duração de quase 2 horas. Simultaneamente, apareceu uma perturbação dirigida para leste na componente zonal de Jicamarca. A correlação desse decrescimento com a rápida reversão para o norte do campo magnético interplanetário indica boa concordância com o mecanismo discutido (Kelley et alii, 1979).

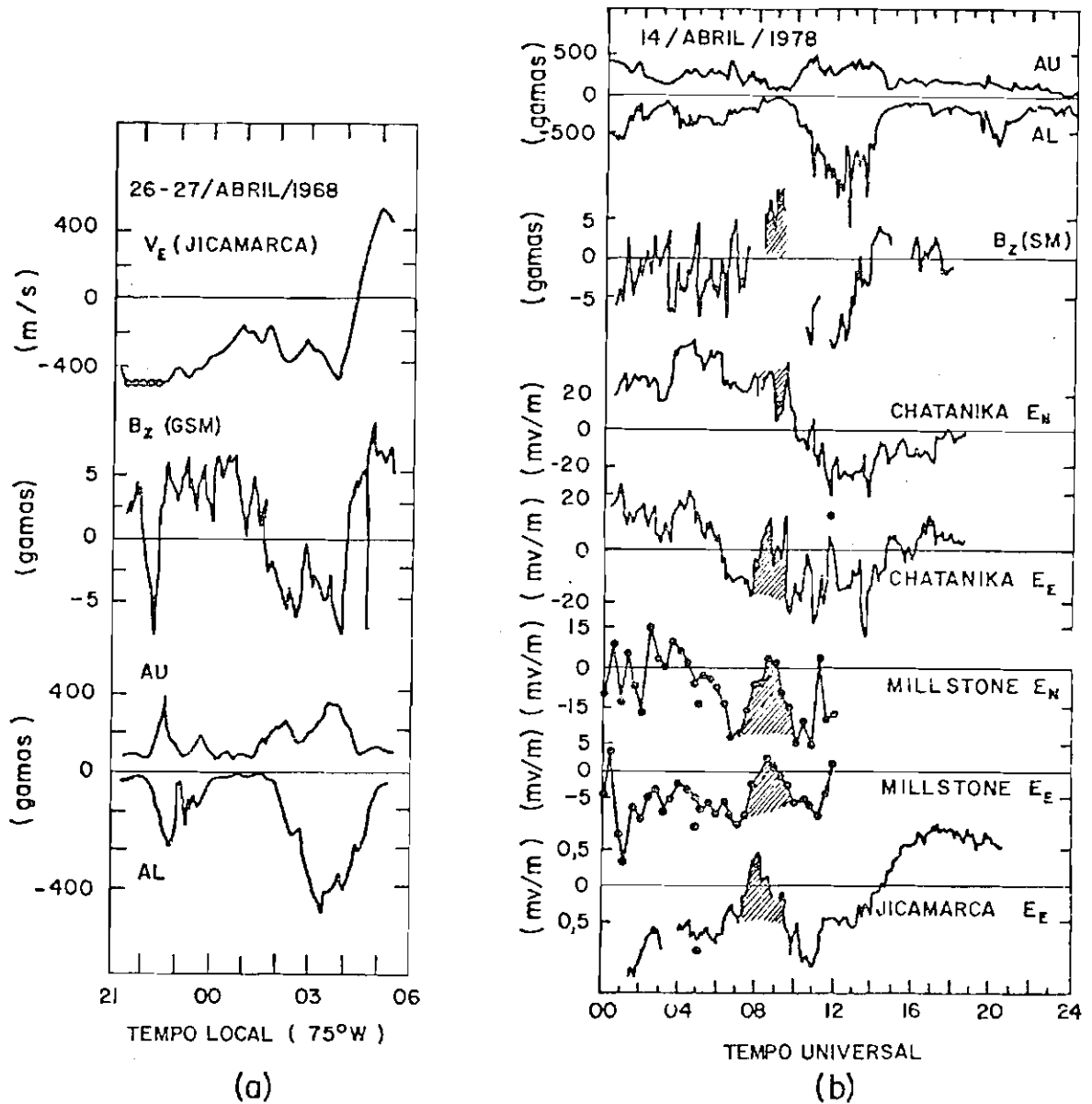


Fig. 2.20 - Inter-relação entre o campo magnético interplanetário e as variações do campo elétrico ionosférico equatorial.

(a) Reversão do campo elétrico equatorial. (b) Comparação entre os dados de duas estações (na zona auroral e próximo dela) com os de uma estação equatorial e com o valor do campo magnético interplanetário.

FONTE: Kelley et alii (1979), p. 302.

2.4 - CAMPO ELÉTRICO TROPOSFÉRICO

As tempestades atmosféricas determinam o circuito elétrico atmosférico de tempo bom, "fair weather" (Dolezalek, 1972; Hays and Roble, 1979). Aproximadamente 1500 a 2000 tempestades atmosféricas existem a cada instante, distribuídas por todo o globo terrestre, levando a ionosfera a um potencial na faixa de aproximadamente 180 a 500kV em relação a superfície terrestre. O sistema associado de correntes elétricas é dirigido para baixo em regiões livres de tempestades atmosféricas, o que caracteriza o *campo elétrico vertical de tempo bom*. Nas vizinhanças de uma tempestade, as linhas de força verticais são distorcidas e o valor do campo elétrico alterado. A Terra possui um tempo de relaxação elétrica (tempo para estabelecer um estado estacionário a partir de um estado inicial arbitrário) da ordem de 10^{-5} s, e na atmosfera próximo ao chão de aproximadamente 20min (Roble and Hays, 1979). Assim a Terra comporta-se como um bom condutor, ficando as linhas de força do campo elétrico de tempo bom perpendiculares a sua superfície, que em regiões planas são caracteristicamente verticais e apontam para baixo.

As tempestades atuam como um gerador de corrente no circuito atmosférico global (Figura 2.21), fornecendo uma corrente líquida positiva (valor médio de 0,5 a 1A por tempestade) dirigida do topo da nuvem de tempestade para a ionosfera e do chão para a base da nuvem. Na Figura 2.21, a região 0 representa a parte inferior da troposfera, onde a condutividade pode apresentar grandes variações (horizontal e verticalmente). A orografia pode introduzir distorções no campo elétrico vertical de tempo bom. A componente horizontal do campo elétrico distorcido é de natureza orográfica, caracterizando assim os *campos elétricos orográficos*. A região 1 consiste na parte superior da troposfera e a região 2 representa a média atmosfera. A região 3 é a ionosfera acima da região do dínamo e a magnetosfera, onde regiões conjugadas são acopladas ao longo das linhas de campo geomagnético. Em uma escala global o circuito elétrico é fechado, onde a corrente recircula da baixa para a alta atmosfera e vice-versa.

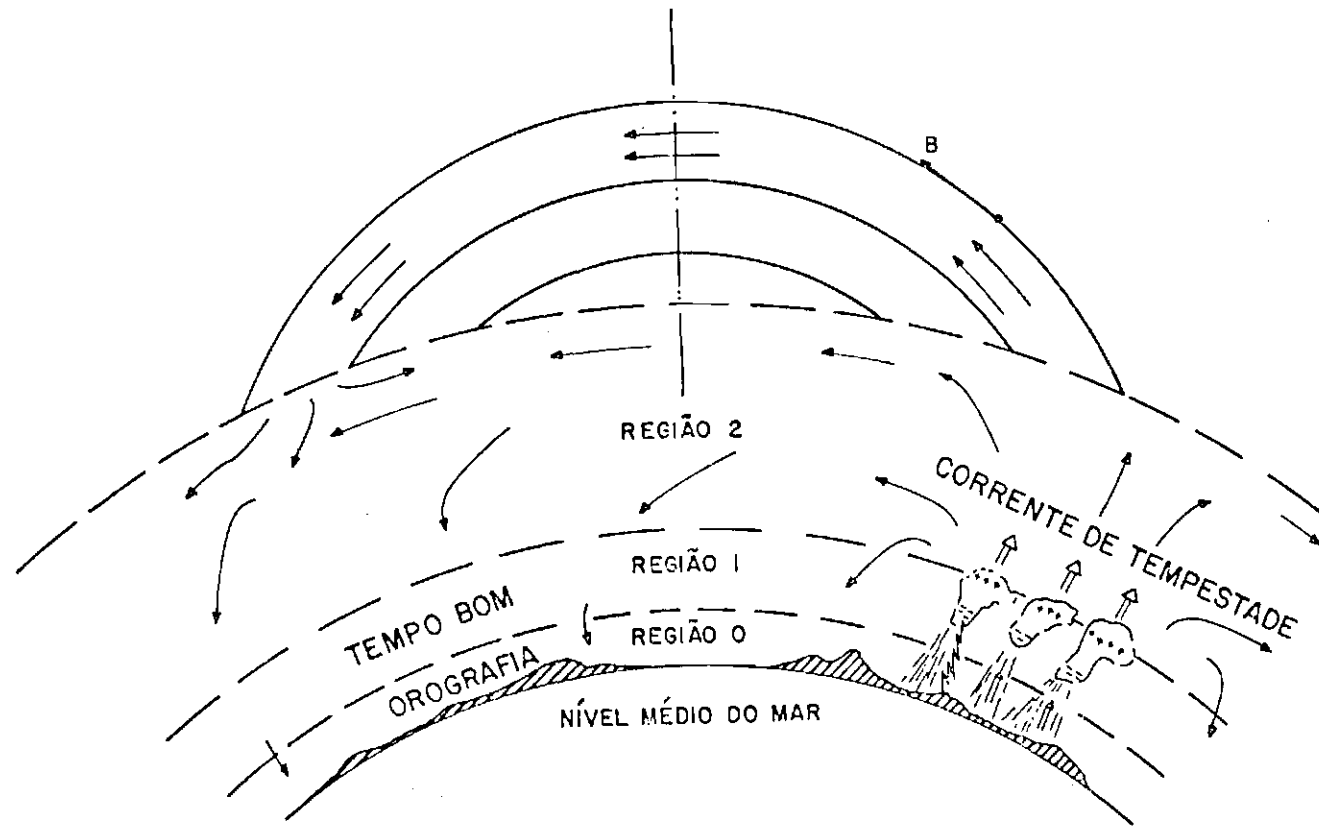


Fig. 2.21 - Diagrama esquemático do circuito atmosférico global.

FONTE: Hays and Roble (1979), p. 3292.

A Figura 2.22 ilustra o modelo global de Hays e Roble (1979) para 2000 tempestades atmosféricas distribuídas aleatoriamente em latitude e longitude de acordo com sua probabilidade de ocorrência, no horário das 1900TU. Neste modelo, supõe-se que existe um potencial ionosférico médio da ordem de 291kV, cuja orografia considerada está mostrada na Figura 2.23. Os picos na diferença de potencial em baixas alturas (da ordem de 25km) estão associados à atividade das tempestades atmosféricas. Tomando-se alturas maiores (de aproximadamente 50km) esses picos se espalham consideravelmente pelas regiões situadas sobre as tempestades. Em alturas por volta dos 105km, a influência do campo geomagnético aparece consideravelmente, introduzindo uma perturbação no potencial do hemisfério conjugado e equilibrando a diferença de potencial em pontos conjugados.

Medidas de campo elétrico na atmosfera com detectores a bordo de balões estratosféricos podem ser realizadas através da técnica da sonda dupla (Capítulo 3). Se o interesse das medidas aponta para os campos elétricos ionosféricos, técnicas numéricas que simulam o mapeamento desses campos até o balão precisam ser utilizadas, e o lançamento do experimento deve ser efetuado em condições de tempo bom e, de preferência, em regiões onde o relevo terrestre não seja muito acidentado, devido ao fato de que campos elétricos de tempestades e campos elétricos orográficos podem se superpor facilmente às medidas, predominando completamente. Por outro lado, os efeitos das montanhas e das tempestades podem ser minimizados colocando-se o detector em grandes altitudes.

Ilustrativamente, em uma observação de campos elétricos ionosféricos, Ogawa et alii (1975) encontraram campos elétricos associados a montanhas. Lançado inicialmente a uma distância maior que 200km da terra firme, no Oceano Pacífico, o balão voltou inesperadamente, deslocando-se em alturas de 24 a 16km sobre o solo, quando valores de campos elétricos orográficos de 20 a 60mV/m foram obtidos. A Figura 2.24 mostra a trajetória do balão no seu deslocamento sobre as montanhas, com as curvas de nível da superfície terrestre (1km de altura) e com o campo elétrico medido (representados por setas). A altitude do

balão também está mostrada (entre parênteses) para vários pontos da trajetória, bem como os picos das montanhas mais altas que 1,5km. Notar a variação do campo elétrico em direção e intensidade nos pontos da trajetória na vizinhança de uma montanha. Pode-se esperar, como será discutido no Capítulo 5, que esses valores para os campos horizontais sejam relativamente grandes, devido às alturas das montanhas encontradas na trajetória do voo e, principalmente, à baixa altitude do balão.

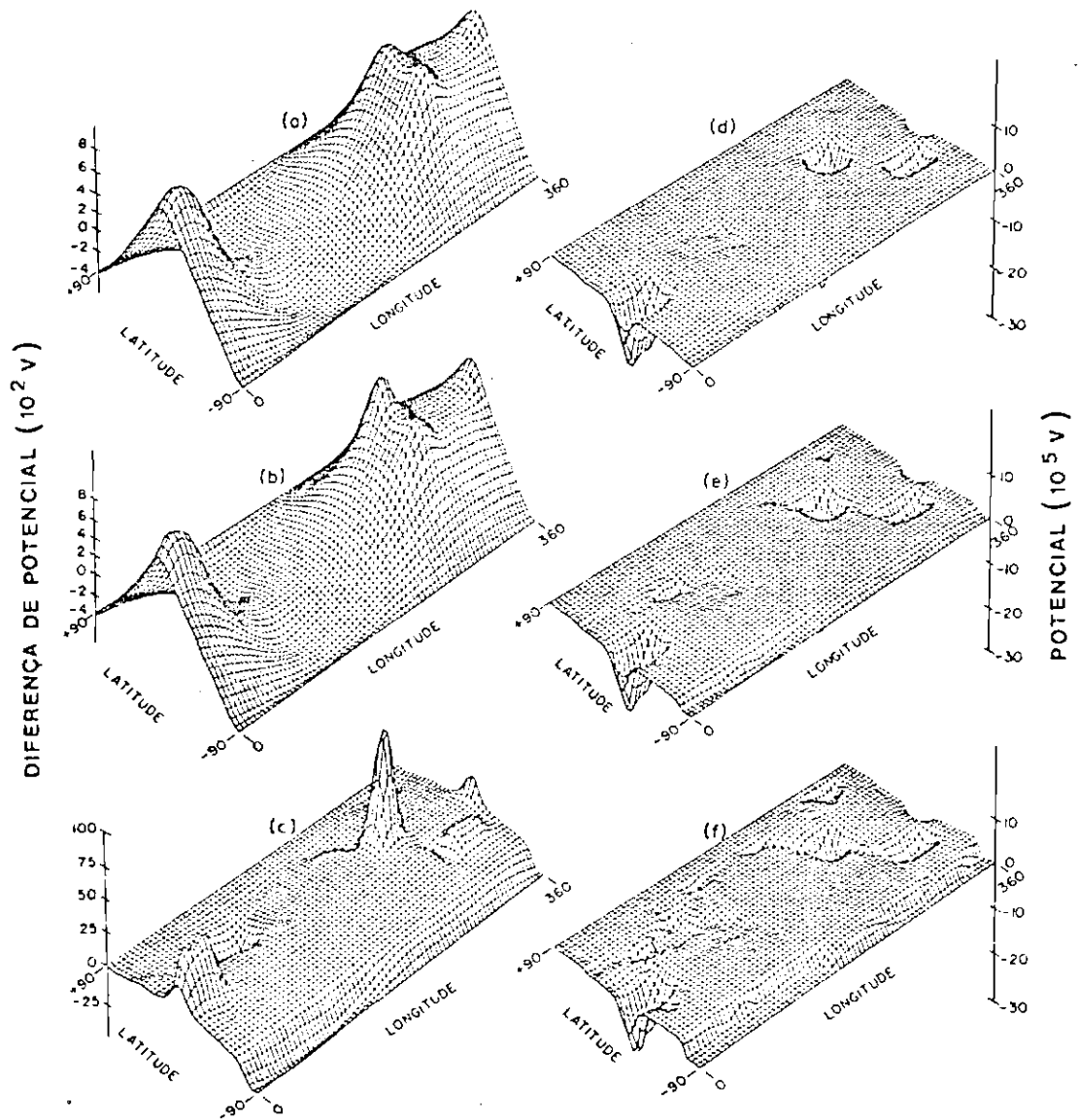


Fig. 2.22 - Perspectiva do potencial e da diferença de potencial em relação à ionosfera para alturas aproximadas (no equador) de: (a) 105km; (b) 50km; (c) 25km; (d) 8km; (e) 4km; e (f) 2km.

FONTE: Hays and Roble (1979), p. 3299.

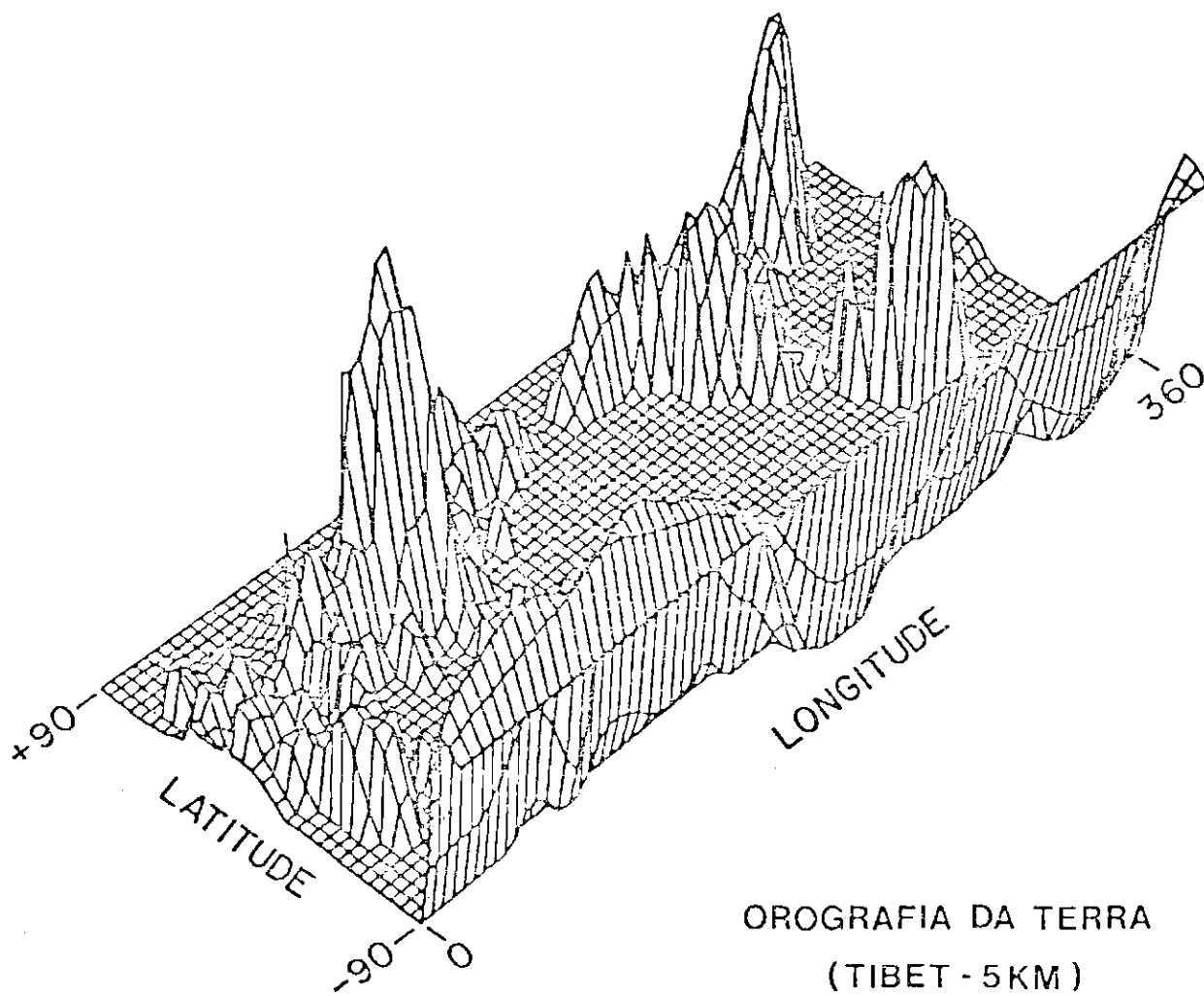


Fig. 2.23 - Perspectiva da orografia terrestre.

FONTE: Roble and Hays (1979), p. 127.

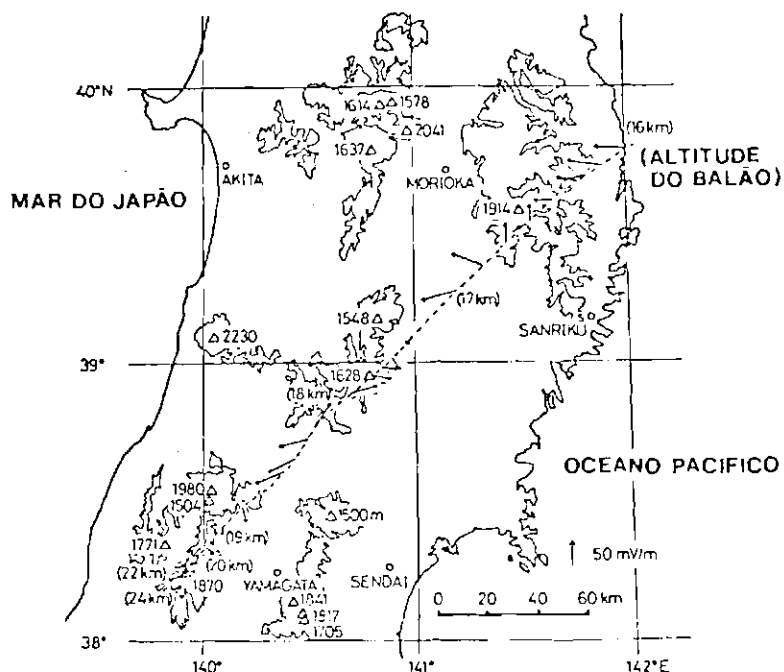


Fig. 2.24 - Campos elêtricos horizontais (representados por setas) medidos sobre montanhas.

FONTE: Ogawa et alii (1975), p. 843.

2.5 - CAMPO ELÉTRICO ASSOCIADO À PRECIPITAÇÃO DE PARTÍCULAS NA ANOMALIA MAGNÉTICA DO ATLÂNTICO SUL

A *Anomalia Magnética do Atlântico Sul* é caracterizada por uma região onde o campo geomagnético se apresenta anormalmente fraco (Figura 2.25). O seu ponto de mínimo define o menor valor em toda a superfície terrestre (por volta de 0,238 gauss) e se situa próximo a costa do Brasil. A anomalia compreende uma região com um raio da ordem de 10^3 km. Leves analogias entre fenômenos que ocorrem nessa região e aqueles da região auroral podem ser esperados, particularmente quando se considera a precipitação de partículas energéticas. Naturalmente, uma precipitação com características daquela de um evento auroral não pode ser observada nessa região. Às vezes, é também denominada *Anomalia Magnética Brasileira* (Imhof and Smith, 1966; Gledhill, 1976).

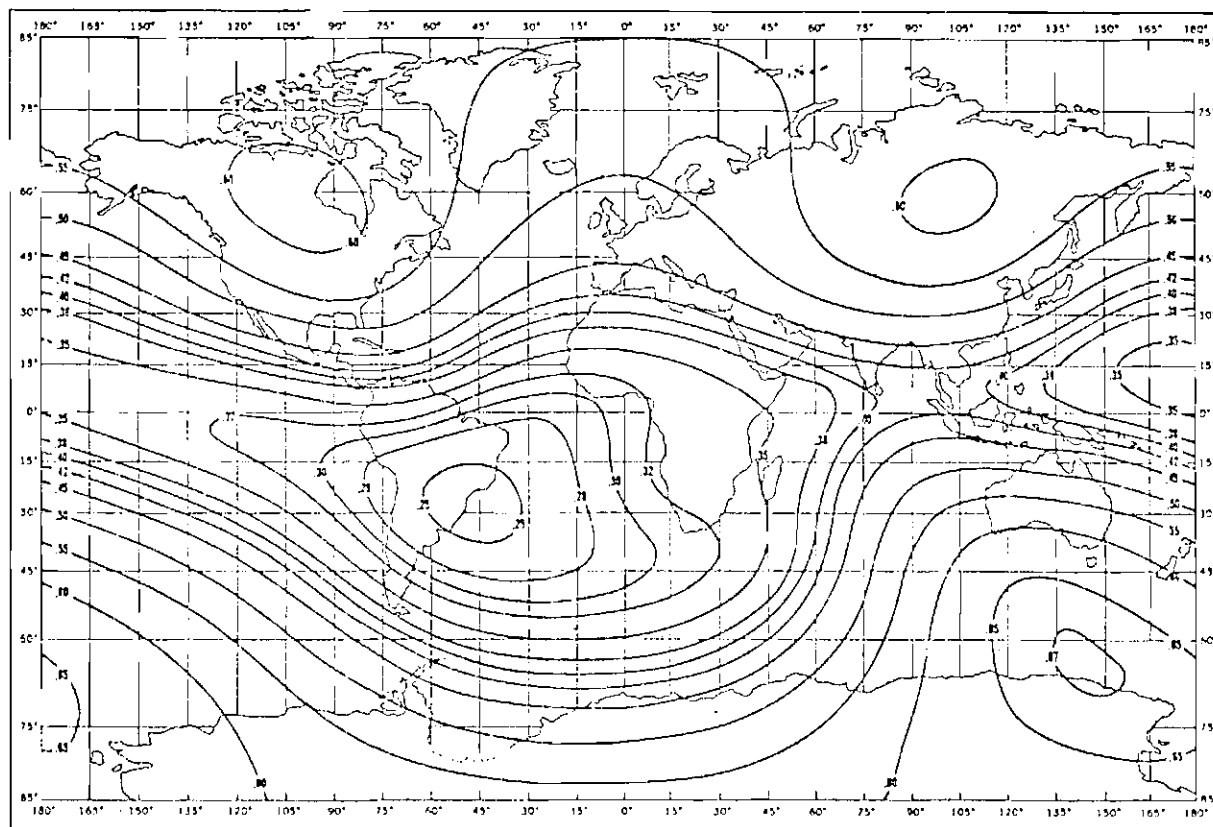


Fig. 2.25 - Campo magnético na superfície da Terra (em gauss).

FONTE: Hess (1968), p. 40.

As primeiras observações do fenômeno de precipitação de partículas na Anomalia Magnética do Atlântico Sul (AMAS) foram realizadas por Yoshida et alii (1960) e Vernov e Chudakov (1960), com os satélites artificiais Explorer 1 (em Fevereiro e Março de 1958) e Sputnik 3 (Maio de 1958), respectivamente. Uma das primeiras medidas da distribuição geográfica de elétrons quase-aprisionados, em altitudes entre 240 e 410km, foi efetuada por Seward (1973) para elétrons com energias ~ 100keV (Figura 2.26). Diferenças visíveis entre os dois hemisférios, particularmente nas vizinhanças das AMAS, são facilmente percebidas.

A precipitação de partículas na atmosfera é um fenômeno que ocorre de maneira suave e contínua, e com intensidade normalmente negligenciável. Essas partículas, originalmente aprisionadas nos cinturões de radiação terrestre pelo campo geomagnético, sofrem interações com os constituintes atmosféricos, provocando a sua perda dos cinturões.

Durante tempestades magnéticas as regiões mais externas dos cinturões de radiação têm o seu fluxo de elétrons aumentado, e esses elétrons se difundem para as regiões mais internas (menores valores do parâmetro magnético L) em um intervalo de poucos dias. A precipitação de elétrons na AMAS é então intensificada. Nesses períodos magneticamente perturbados, um outro mecanismo, a interação onda-partícula, aparece de maneira importante. Tais tópicos serão discutidos nas próximas seções.

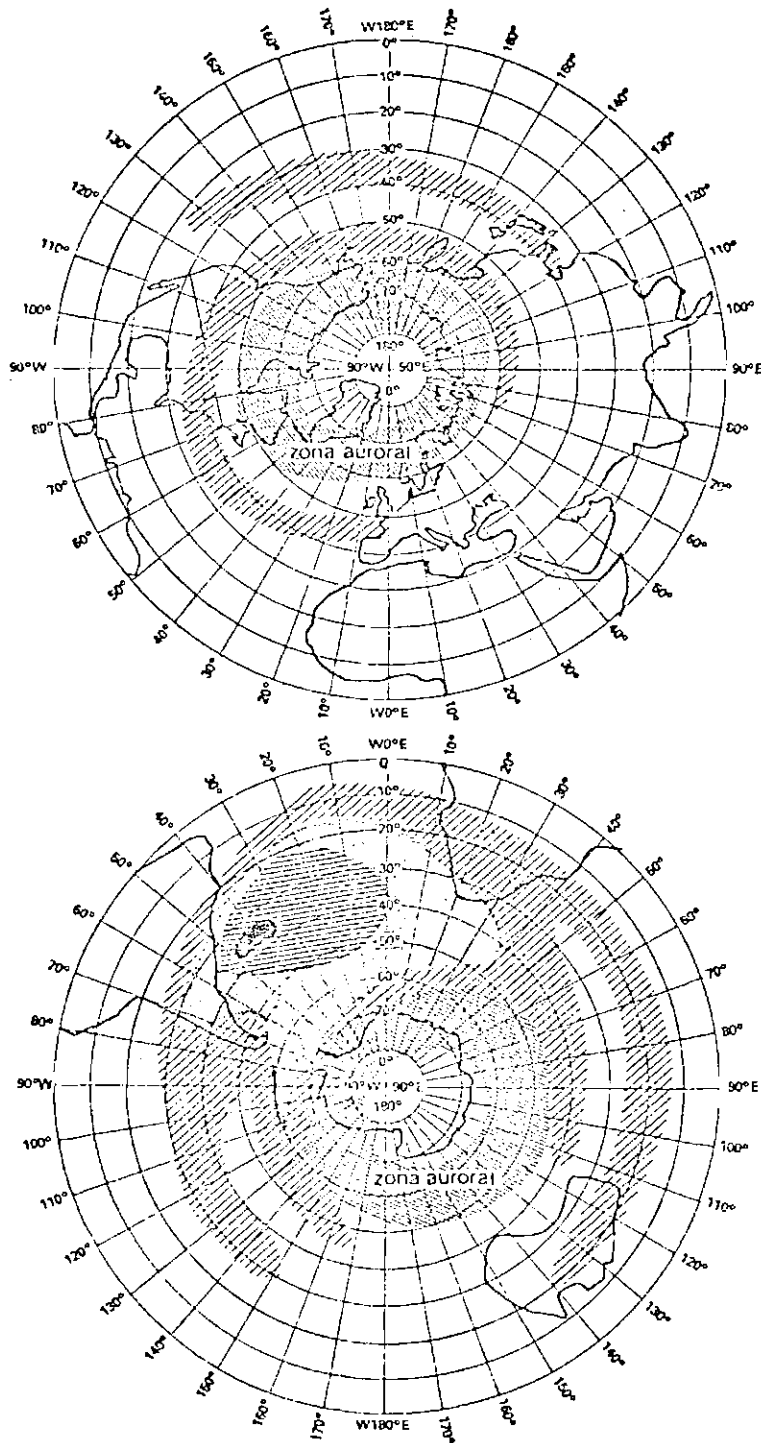


Fig. 2.26 - Distribuição geográfica de elétrons quase-aprisionados em altitudes entre 240 e 410km com energias de aproximadamente 100keV.

FONTE: Paulikas (1975), p. 712.

2.5.1 - PARTÍCULAS APRISIONADAS NO CAMPO GEOMAGNÉTICO

As partículas aprisionadas nos cinturões de radiação quando em movimento sentem (devido à sua carga elétrica) a presença do campo geomagnético, e descrevem três tipos de movimentos periódicos (ou quase-periódicos) sob a influência desse campo, quais sejam: o movimento *ciclotrônico*, o movimento de "bounce" e o movimento de deriva (Figura 2.27).

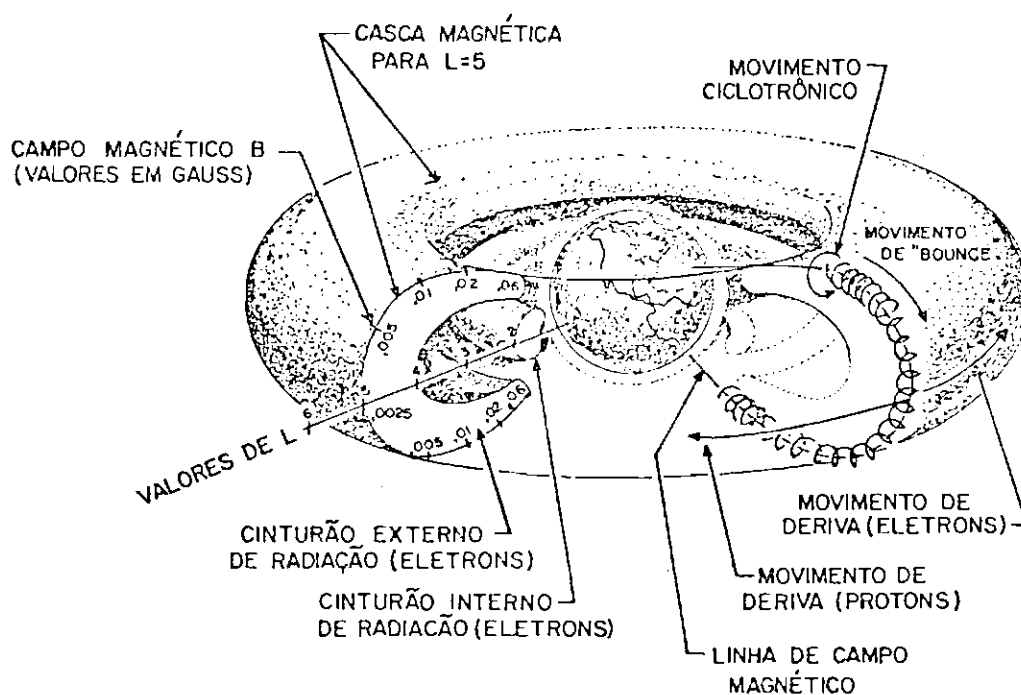


Fig. 2.27 - Movimentos das partículas aprisionadas nos cinturões de radiação.

FONTE: White (1970), p. 2.

O movimento *ciclotrônico* consiste no deslocamento circular que a partícula efetua em torno do campo magnético, em um plano perpendicular a sua linha de força, e ocorre sempre que o vetor-velocidade da partícula tenha uma componente não-nula neste plano. O centro instantâneo de giro da órbita ciclotrônica é conhecido como o *centro de guia* da partícula. O raio e o período ciclotrônico são dados por

$$R_C := \frac{m v_{\perp}}{q B}, \quad (2.1a)$$

$$T_C := 2\pi \frac{m}{q B}, \quad (2.1b)$$

onde m e q são a massa e a carga elétrica da partícula, e v_{\perp} é a componente perpendicular ao campo magnético \underline{B} da velocidade \underline{v} da partícula.

O segundo movimento, o de "bounce", é uma característica da topologia do campo magnético terrestre. Uma partícula, ao se deslocar ao longo de uma linha de força magnética, desde um ponto no equador em direção aos pólos, sente o campo magnético com valores cada vez maiores. Se essa partícula tiver também um movimento ciclotrônico, existirá um ponto onde o campo magnético causa um "repique" no seu movimento em direção aos pólos. Esses pontos, que existem aos pares em cada lado da linha de força em relação ao equador, são os *pontos de espelhamento* ("mirror points") do movimento de "bounce". A partícula vai e volta de um ponto de espelhamento ao outro, com um período dado por

$$T_B := 2 \int_{\ell_1}^{\ell_2} dl/v_{\parallel}, \quad (2.2)$$

onde v_{\parallel} é a componente paralela ao campo magnético \underline{B} da velocidade \underline{v} da partícula, e ℓ_1 e ℓ_2 é a distância ao longo da linha magnética dos pontos de espelhamento ao equador. O ângulo entre a velocidade da partícula e o campo magnético é denominado *ângulo de passo* ("pitch angle"). É esse ângulo que define a distância (medida ao longo da linha de força magnética) percorrida durante um giro da partícula, isto é, em um passo do movimento. Com isto, pode-se escrever que $v_{\perp} := v \sin \alpha$ e $v_{\parallel} := v \cos \alpha$, onde α é o ângulo de passo.

No *movimento de deriva*, as partículas se deslocam longitudinalmente em torno da Terra, com elétrons na direção leste e prótons na direção oeste. Esse movimento aparece devido às forças atuando

tes na partícula, as quais possuem uma componente não-nula em um plano perpendicular ao campo magnético, originadas da curvatura e do gradiente do campo magnético, ou mesmo de campo gravitacional e de campos elétricos. O período de deriva é dado por

$$T_D := \oint dx/v_D, \quad (2.3)$$

onde dx é o deslocamento infinitesimal realizado com a velocidade média de deriva v_D .

As partículas, no seu movimento de deriva, que ao mesmo tempo vão e vêm entre os pontos de espelhamento no movimento de "bounce", definem uma *casca magnética* caracterizada pelo parâmetro L de McIlwain (McIlwain, 1961, 1966). A Figura 2.28 mostra as frequências dos três movimentos em função da energia e do parâmetro L para prótons e elétrons.

Associadas a esses três movimentos existem grandezas de magnitudes essencialmente constantes na dinâmica das partículas aprisionadas. São três os invariantes de movimento, denominados de *invariantes adiabáticos* (e.g. Roederer, 1970).

O primeiro invariante adiabático é associado ao fluxo magnético medido no círculo definido pela órbita ciclotrônica da partícula. Ele é expresso pelo *momento magnético*, que se conserva durante o movimento de "bounce",

$$M := \frac{p_{\perp}^2}{2 m_0 B}, \quad (2.4)$$

onde p_{\perp} é a componente perpendicular ao campo magnético do vetor-quantidade de movimento da partícula cuja massa de repouso é m_0 .

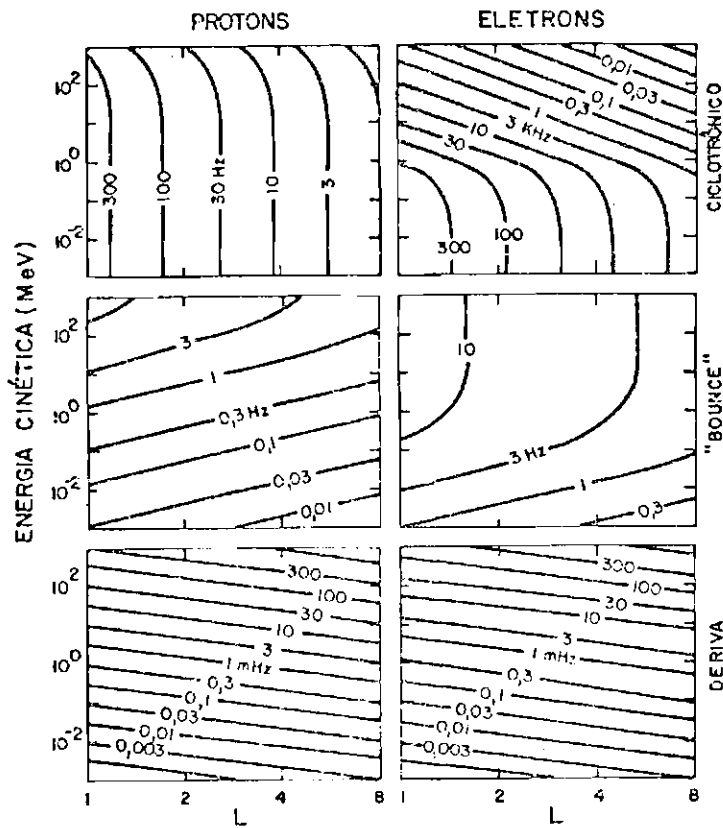


Fig. 2.28 - Frequências dos movimentos ciclotrônicos, de "bounce" e de deriva das partículas aprisionadas.

FONTE: Schulz and Lanzerotti (1974), p. 13.

O segundo invariante refere-se ao movimento de "bounce" da partícula. É o *invariante longitudinal*, dado por

$$J := 2 \int_{\ell_1}^{\ell_2} m v_{\parallel} d\ell, \quad (2.5)$$

que é conservado durante o movimento de deriva.

O terceiro invariante está associado ao movimento de deriva das partículas. É o *invariante de fluxo*, dado por

$$\Phi := \iint \underline{B} \cdot \underline{dS}, \quad (2.6)$$

que representa o fluxo magnético sobre a parte da superfície equatorial (lugar geométrico do mínimo valor de \underline{B} para todas linhas de força) que fica fora da casca magnética.

O movimento das partículas realiza-se de maneira a conservar os invariantes adiabáticos. Entretanto, variações no campo magnético, por exemplo, podem alterar tal situação. Se essas mudanças ocorrerem lentamente, as partículas continuarão ainda ao longo de trajetórias que conservam os três invariantes, apesar de terem sua energia e posição alteradas; e o processo é reversível, ou seja, se o campo voltar à configuração inicial todas as partículas voltarão também para sua dinâmica original. Esta propriedade é que caracteriza uma invariância adiabática.

No caso de mudanças bruscas, um ou mais invariantes são violados, representando um movimento de partículas não-adiabático. Se a escala de tempo Δt da perturbação for tal que $T_D \geq \Delta t \gg T_B \gg T_C$, somente o terceiro invariante será violado (tipicamente Δt da ordem de minutos); se $T_B \geq \Delta t \gg T_C$ ($\Delta t \sim$ segundos), tanto Φ como J serão em geral violados; finalmente se $T_C \geq \Delta t$ ($\Delta t \sim$ milissegundos), todos três invariantes serão violados.

2.5.2 - PRECIPITAÇÃO DE PARTÍCULAS NA ANOMALIA

A violação dos invariantes adiabáticos originam processos de difusão nas partículas dos cinturões de radiação, podendo ser agrupados em duas categorias principais: *difusão radial*, que desloca as partículas perpendicularmente às cascas magnéticas de deriva; e a *difusão em ângulo de passo*, que desloca os pontos de espelhamento das

partículas ao longo das linhas de campo magnético. A difusão radial é o processo principal de injeção de partículas carregadas nos cinturões de radiação. A difusão em ângulo de passo representa o mecanismo básico pelo qual partículas aprisionadas são perdidas nas camadas mais densas da atmosfera (Roederer, 1970; Torr et alii, 1975).

A *injeção de elétrons* na Anomalia Magnética do Atlântico Sul origina-se principalmente das regiões mais externas da magnetosfera. Vários fenômenos, de características periódicas (ou quase-periódicas) ou estocásticas, provocam difusão radial em elétrons em toda a faixa de energia ou mesmo, seletivamente, em energias específicas. Entre estes situam-se, principalmente, variações rápidas no campo magnético e flutuações do campo elétrico e magnético, intensificadas durante tempestades magnéticas. Estes fenômenos é que irão caracterizar a forma dos espectros de elétrons aprisionados. Particularmente, as flutuações no campo magnético podem produzir, mediante *interações ressonantes* com elétrons em movimento de deriva (violando o terceiro invariante adiabático), picos no espectro em energia dos elétrons. A origem dessas flutuações está ligada a variações de correntes elétricas na magnetopausa, na plasmopausa ou ainda na ionosfera (eletrojato).

A Figura 2.29 traz uma das primeiras observações da existência de picos em espectros de elétrons em baixos valores de L (Imhof and Smith, 1966). Picos em energias menores, em período magneticamente perturbado, também foram observados (Imhof et alii, 1973, 1974, 1978, 1981). A Figura 2.30 mostra a variação da energia central do pico em vários L. Para $1,5 \leq L \leq 1,8$, uma variação com $L^{-6,55}$ está indicada; para $L \leq 1,5$, a variação com $L^{-3,52}$ é mais apropriada.

Os processos de injeção que atuam simultaneamente com os processos de perda mantêm em equilíbrio o fluxo de elétrons na região da anomalia. Tanto a injeção quanto a perda de elétrons atuam continuamente na AMAS, e são intensificadas em períodos magneticamente perturbados.

A perda de elétrons na AMAS é associada à difusão em ângulo de passo. A conservação do primeiro invariante adiabático durante o movimento de "bounce" permite escrever:

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{B} = \text{cte}, \quad (2.7)$$

onde α é o ângulo de passo em um ponto do movimento com o campo magnético B . Nos pontos de espelhamento, $\alpha = 90^\circ$.

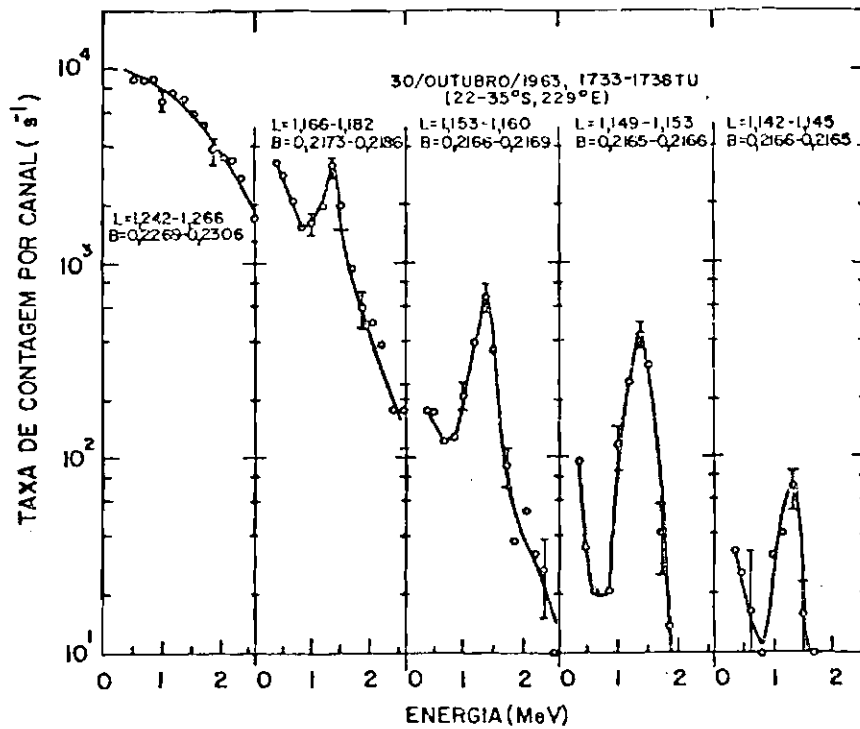


Fig. 2.29 - Espectros de elétrons medidos.

FONTE: Imhof and Smith (1966), p. 4159.

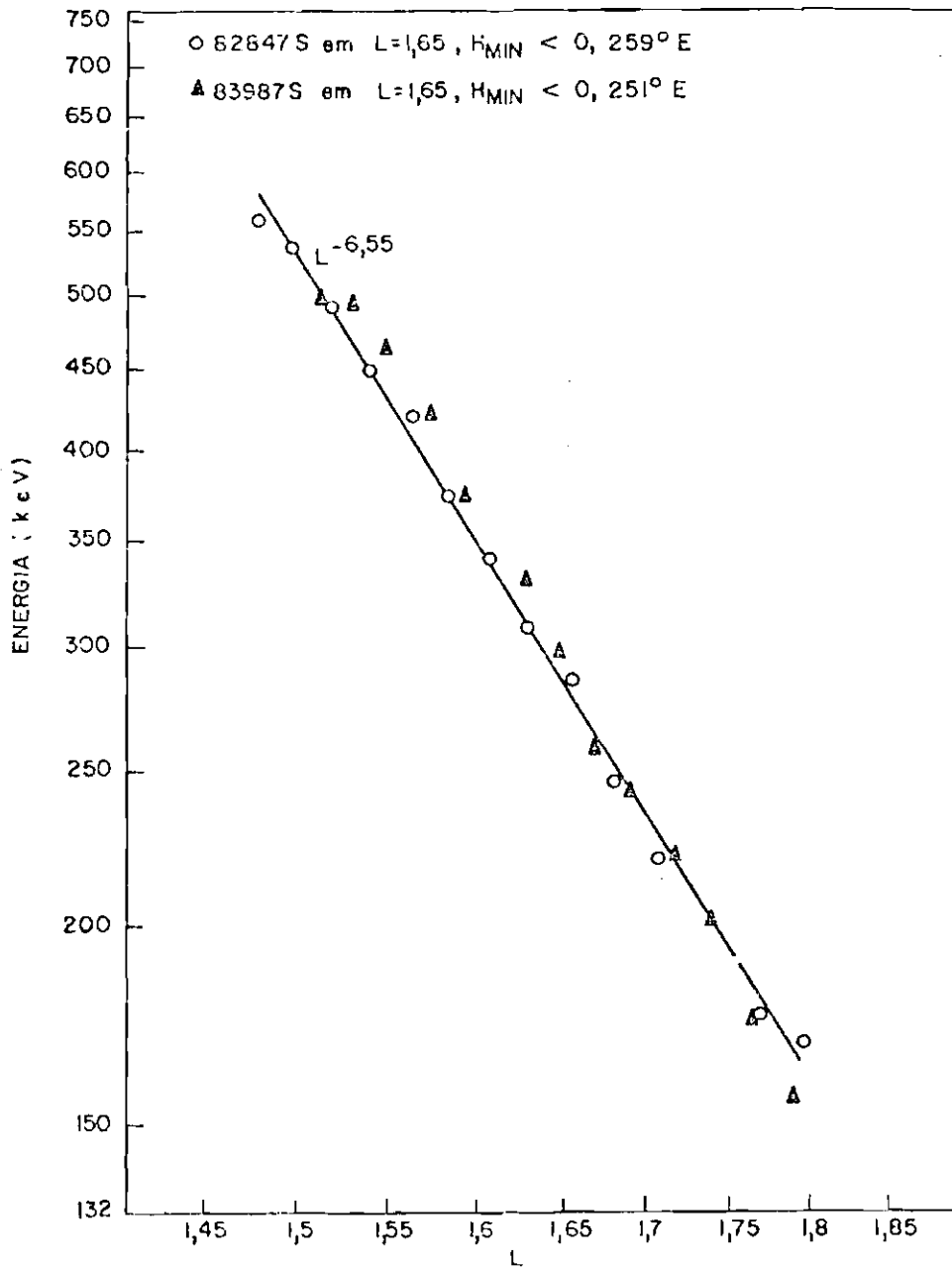


Fig. 2.30 - Variação da energia central do pico com o parâmetro magnético L.

FONTE: Imhof et alii (1978), p. 4246.

Considerando a Equação 2.7 para dois pontos da trajetória, um no equador e outro na região de espelhamento, tem-se

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha_0}{B_0} = \frac{1}{B_m}, \quad (2.8)$$

onde α_0 e B_0 referem-se ao equador e B_m ao ponto de espelhamento, o que indica que partículas com ângulos de passo menores se refletem em alturas mais baixas da atmosfera (maior B_m). A interação dos elétrons com os constituintes atmosféricos se faz através de espalhamento coulombiano e, à medida que ocorre nas camadas atmosféricas mais densas, é cada vez mais significativa. Os elétrons aprisionados que durante o seu movimento interagem nas regiões menos densas (em alturas maiores) podem permanecer nos cinturões de radiação durante vários períodos de deriva. Uma transição entre os elétrons aprisionados e os de precipitação pode ser atribuída à região com uma altura crítica h_C , de campo magnético B_C , o que leva ao ângulo de passo crítico equatorial α_C dado por (Equação 2.8):

$$\text{sen}^2 \alpha_C = B_0/B_C. \quad (2.9)$$

Isto indica que os elétrons, no seu movimento de "bounce" com ângulo de passo equatorial menor que α_C , procurarão se refletir em alturas menores que h_C , com conseqüente precipitação. O ângulo α_C caracteriza o *cone de perda de elétrons*, o qual possui uma variação longitudinal que apresenta seu máximo na região da anomalia. A precipitação de um elétron ocorre quando ele estiver no cone de perda local, durante o seu movimento de deriva pode penetrar naquele cone da região da anomalia, evidenciando assim o papel da anomalia como uma região preferencial de precipitação. Esses elétrons denominam-se *quase-aprisionados*. A região de transição é caracterizada tipicamente por $h_C \cong 100\text{km}$.

O espalhamento atmosférico pode introduzir leves modificações no ângulo de passo dos elétrons (difusão em ângulo de passo), que cumulativamente provocam a sua entrada no cone de perda, com posterior precipitação. A Figura 2.31 mostra o tempo de vida dos elétrons aprisionados para a difusão do ângulo de passo, devido ao espalhamento atmosférico coulombiano em função do parâmetro L. Na região da anomalia esse tempo é da ordem de 100 dias.

Esse processo de perda compreende a clássica precipitação de partículas na região da AMAS, que ocorre continuamente na atmosfera. Entretanto, existem evidências de outras fontes de difusão em ângulo de passo (Imhof and Smith, 1966), fontes estas que podem reduzir drasticamente o tempo de vida dos elétrons. Este outro mecanismo é a difusão devida à *interação ressonante onda-partícula*, com ondas existentes na magnetosfera.

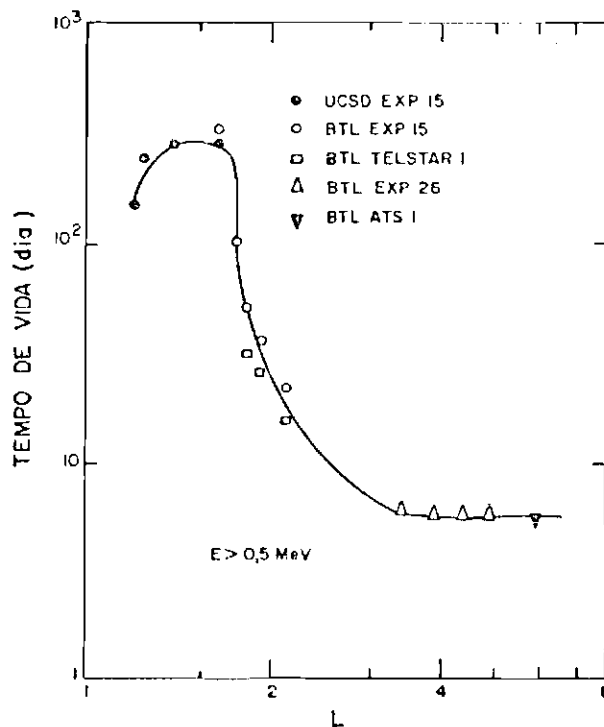


Fig. 2.31 - Tempo de vida dos elétrons devido ao espalhamento atmosférico coulombiano.

FONTE: Schulz and Lanzerotti (1974), p. 125.

As ondas magnetosféricas estão associadas à atividade magnética e se originam das flutuações dos campos magnético e elétrico, em instabilidades do plasma magnetosférico, ou vêm diretamente da "magnetosheath". Isto indica que a difusão em ângulo de passo por interação ressonante é um processo que atua intermitentemente na anomalia, sendo mais importante nos períodos magneticamente perturbados. É um processo de natureza mais localizada, dependendo da existência das ondas.

Entretanto, nem todas as ondas magnetosféricas podem interagir efetivamente com as partículas aprisionadas. Devido ao movimento adiabático das partículas, a interação efetivamente se realizará para aquelas ondas com frequência próxima a alguma frequência natural dos movimentos das partículas aprisionadas, principalmente do movimento ciclotrônico (Schulz and Lanzerotti, 1974). Como um exemplo de ressonância ciclotrônica, elétrons relativistas parecem interagir com a família do "hiss", principalmente de origem plasmassférica. O "hiss" foi detectado em vários trabalhos (e.g. Muzzio and Angerami, 1972; Thorne et alii, 1973; Tsurutani et alii, 1975). Tais ondas estão situadas na faixa de ELF (3-3000Hz), com um corte inferior abrupto de 200Hz e uma frequência superior difusa em torno de 1000Hz.

"Hiss" é detectado quase que exclusivamente durante períodos de forte atividade magnética, com sua intensidade relacionada com o nível da atividade que varia desde $10^{-7}\gamma^2/\text{Hz}$ ou menos durante períodos calmos até $10^{-6}\gamma^2/\text{Hz}$ em subtempestades magnéticas (ou mais, durante a fase de recuperação de uma tempestade magnética).

Uma característica do "hiss" é a sua presença em ambos os lados do equador, na região da AMAS próximo a $L = 1,1$. No equador magnético ele é raro. A Figura 2.32 mostra a detecção do "hiss" em períodos magneticamente perturbados. "Hiss" depende também do tempo local. Sua ocorrência verifica-se principalmente durante o dia, com um máximo relativo em torno das 0800-1000LT e um máximo diurno em torno das 1400-1600LT (Figura 2.33).

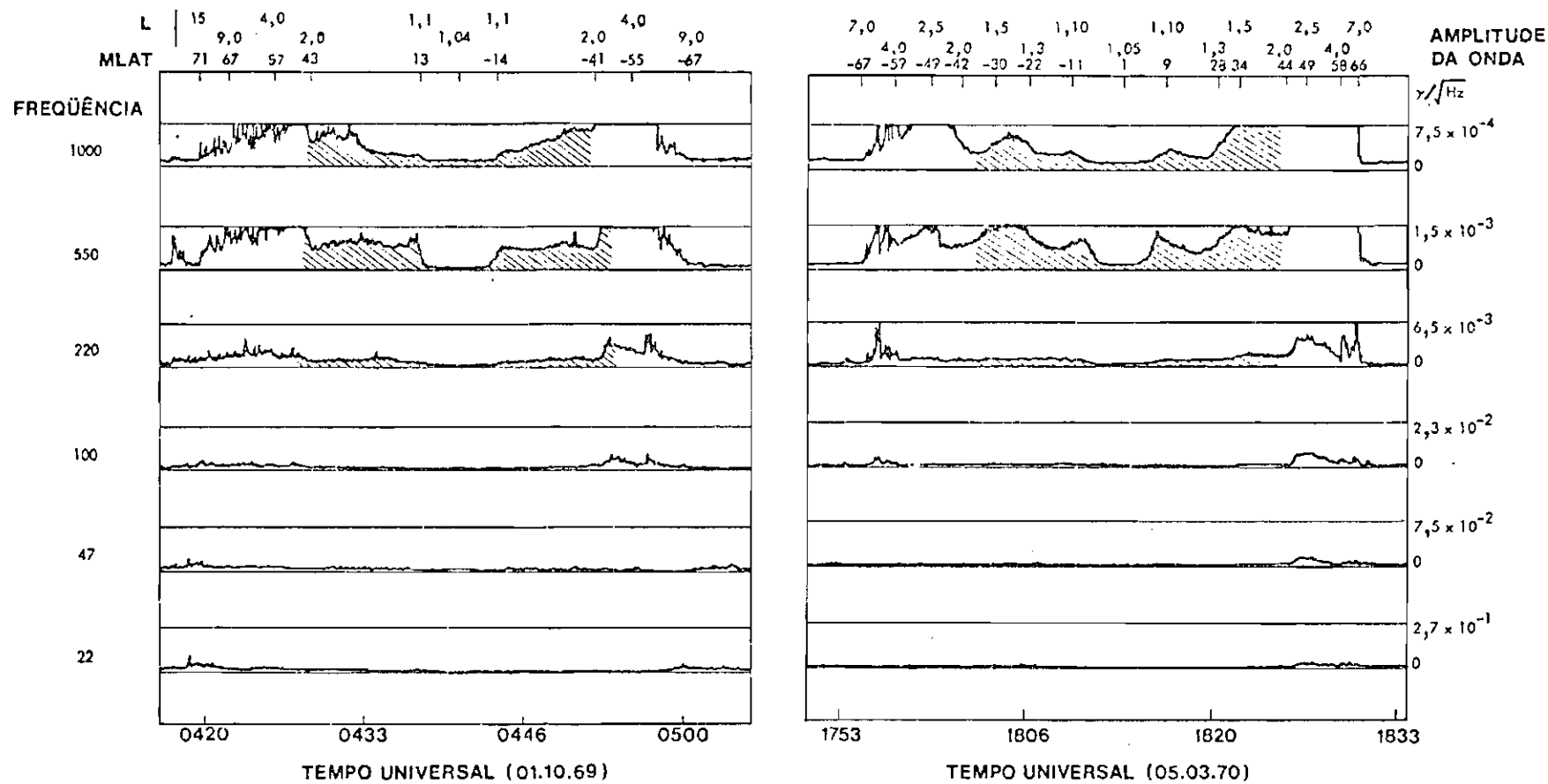


Fig. 2.32 - "Hiss" observado em períodos magneticamente perturbados.

FONTE: Tsurutani et alii (1975), pp. 602 e 603.

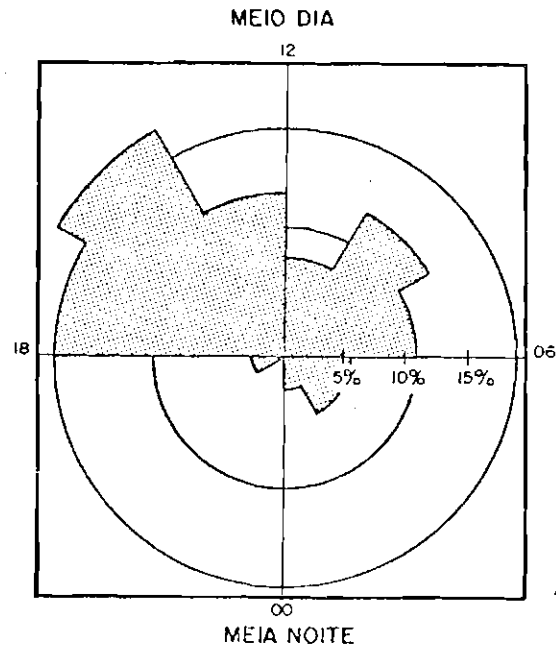


Fig. 2.33 - Probabilidade de ocorrência do "hiss" na zona interna dos cinturões.

FONTE: Tsurutani et alii (1975), p. 605.

"Hiss" pode se propagar para baixos L durante perturbações magnéticas, desde regiões de altas altitudes próximas à plasmapausa equatorial. Sua interação ressonante com elétrons relativistas em movimento ciclotrônico segue a equação (Tsurutani et alii, 1975):

$$\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = \ell \omega_C / \gamma, \quad (2.10)$$

onde $\ell = \pm 1, \pm 2, \dots$, que representa um desvio da frequência angular da onda ω por efeito Doppler para um múltiplo da frequência ciclotrônica ω_C do elétron. O número de onda para propagação paralela ao campo magnético é k_{\parallel} . O fator $\gamma := [1 - (v_{\parallel} / c)^2]^{-1/2}$ corrige relativisticamente a frequência ω_C . Tanto v_{\parallel} como ω_C variam com a posição do centro de guia da partícula. Isto indica que a ressonância ciclotrônica é um fenômeno local. A ressonância se verifica com os elétrons de energia 0,5 a 4,5 MeV, e faz com que os elétrons próximos ao cone de perda tenham seu decaimento acentuado bem mais rapidamente que aqueles devidos

ao espalhamento coulombiano, podendo atingir um tempo de vida da ordem de 10 dias ou menos. Essa perda de partículas pode permanecer horas ou alguns dias, enquanto o "hiss" estiver presente (Tsurutani et alii, 1975). Resultados de Paulikas e Freden (1964) evidenciam tal precipitação em período de forte atividade magnética, em uma estreita região centrada em $L = 1,2$, para elétrons relativistas.

Um outro exemplo de interação onda-partícula é a interação ressonante de elétrons relativistas com energias de alguns MeV com as flutuações magnéticas com períodos de algumas dezenas de minutos (do tipo PC5). A possível existência dessas flutuações em períodos magneticamente perturbados (Trivedi et alii, 1973; Schulz and Lanzerotti, 1974; Gonzalez and Gonzalez, 1979) causa uma ressonância com elétrons em movimento de deriva e conseqüente difusão radial, com precipitação.

Evidências experimentais de precipitação de partículas na AMAS incluem as obtidas por Martin et alii (1972), usando um detector a bordo de um balão estratosférico lançado em São José dos Campos ($23^{\circ}12'S$, $45^{\circ}51'W$). Tais partículas, com energias de alguns MeV, foram observadas em período magneticamente perturbado, durante várias horas do voo, com o balão na altura máxima, da ordem de 3mb de pressão residual.

Em condições similares, Martin et alii (1974) também observaram partículas energéticas se precipitando, principalmente elétrons com energias até de 10MeV aproximadamente, também por várias horas com o balão na altura máxima (4mb).

Abdu et alii (1973), usando dados de riômetro em Atibaia ($23^{\circ}11'S$, $45^{\circ}W$), indicam provável existência de precipitação na região D ionosférica, onde elétrons com energias da ordem de 0,1MeV podem penetrar até altitudes de 80km durante um SC em uma tempestade magnética.

O fluxo de partículas associadas à precipitação na região da AMAS é um parâmetro ainda pouco conhecido. Medidas de Imhof e Smith (1966) sugerem um fluxo de precipitação da ordem de $10^3 - 10^4 e\bar{e}$ trons $\cdot cm^{-2} \cdot s^{-1}$.

Zmuda (1966) mostrou que um fluxo da ordem de $10 e\bar{e}$ trons $\cdot cm^{-2} \cdot s^{-1}$ (ou maior), com energia de 300keV, pode ser o mecanismo dominante na ionização da região ionosférica D, por volta de 70km, em todos instantes (principalmente durante a noite).

Notar que a população observada de elétrons em baixos valores do parâmetro magnético L (West and Buck, 1976) é, em princípio, consistente com a esperada para o tipo de interação onda-partícula e conseqüentes efeitos de ionização por uma precipitação.

2.5.3 - DISTORÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO VERTICAL DE TEMPO BOM

Partículas carregadas em precipitação sofrem colisões elásticas e inelásticas com os átomos e moléculas da atmosfera, gradualmente perdendo energia por ionização-excitação do ar neutro e por radiação devida a processos de desaceleração no campo coulombiano dos núcleos atômicos (bremsstrahlung). A perda de energia por radiação é desprezível em relação ao primeiro processo (com uma razão dada por $(EZ/8) \times 10^{-5}$, onde E é a energia em KeV de uma partícula com carga Ze), mas seu efeito é importante devido à alta penetração dos raios-X emitidos.

Em linhas gerais, a penetração de partículas na atmosfera durante a precipitação está relacionada com a energia que elas possuem. Elétrons com energia abaixo de 2keV deixam sua energia na região ionosférica F; aqueles na faixa de 2 a 40keV atingem a região E; e aqueles acima de 40keV, a região D, ou mais baixo (Gledhill, 1976).

Embora existam somente algumas evidências diretas de precipitação de partículas energéticas na AMAS (Paulikas, 1975; Gledhill,

1976), podem-se esperar irregularidades na condutividade atmosférica local devido à precipitação de partículas com energias da ordem de 1MeV, ou maior, em alturas onde outras fontes de ionização seriam menos eficientes, tipicamente por volta de 60km (Figuras 2.2, 2.5 e 2.6), mesmo durante o dia.

Essa irregularidade originaria uma região mais condutora que a sua vizinhança, distorcendo o campo elétrico vertical de tempo bom. A Figura 2.34 ilustra o padrão desse campo de tempo bom, típico para baixas latitudes, por volta do meio-dia (Capítulo 5). A região mais condutora tende a expulsar as linhas equipotenciais do campo de tempo bom. Normalmente horizontais, essas linhas equipotenciais se afastam para cima e para baixo na região da irregularidade, forçando uma quase-perpendicularidade entre as linhas de força do campo elétrico e o contorno (difuso) da irregularidade. A Figura 2.35 ilustra tal situação. A distorção provocada poderia, sob certas condições, ser percebida por um detector colocado a bordo de um balão em alturas estratosféricas, como parece ter sido o caso do evento discutido no Capítulo 5.

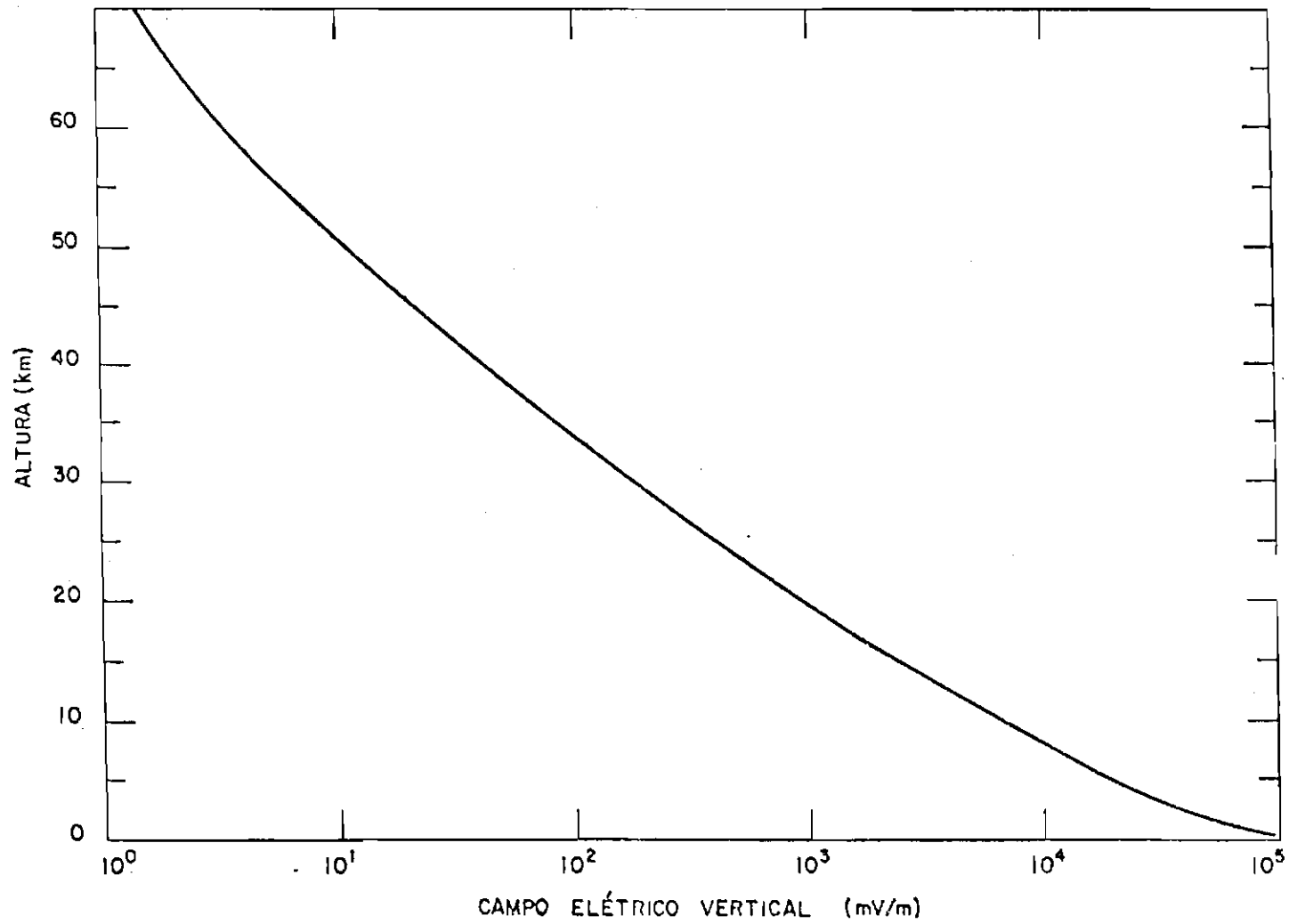
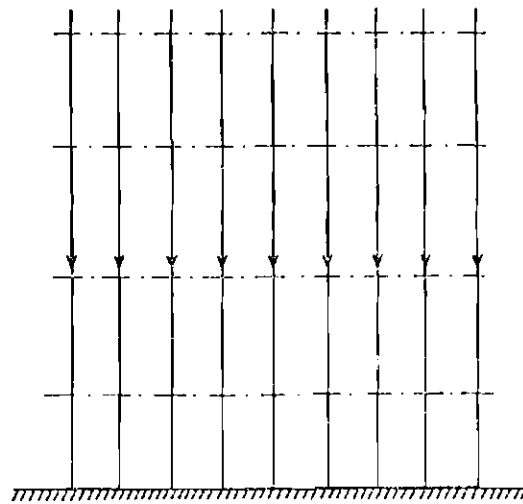
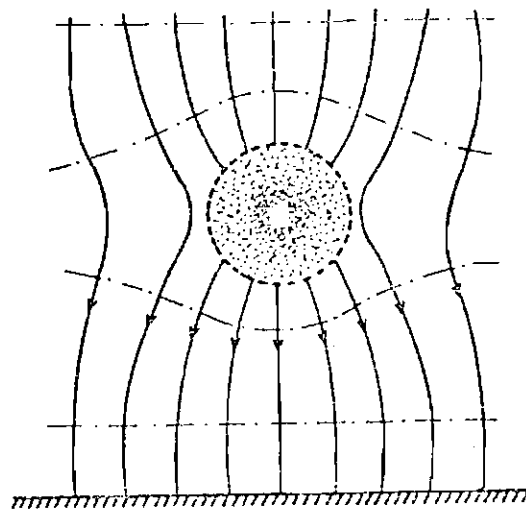


Fig. 2.34 - Campo elétrico vertical de tempo bom em baixas latitudes e para o meio-dia.



(a)



(b)

Fig. 2.35 - Esquema ilustrativo da irregularidade na condutividade.

(a) Linhas (verticais) do campo elétrico de tempo bom e equipotenciais (horizontais) associadas; (b) distorção causada pela irregularidade.

CAPÍTULO 3

MÉTODO EXPERIMENTAL

3.1 - INTRODUÇÃO

Basicamente, existem duas diferentes técnicas de medição do campo elétrico atmosférico (Mozer, 1972):

- a) "*Bulk flow*", que consiste no rastreamento do movimento de um volume de plasma na presença de um campo elétrico e magnético; e
- b) *Sonda dupla*, que consiste em um par de sondas de Langmuir.

Na primeira, partículas carregadas na presença de um campo elétrico \underline{E} e magnético \underline{B} movem-se em um plasma com velocidade de deriva \underline{v}_B dada por

$$\underline{v}_B := \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{B^2} . \quad (3.1)$$

Conhecendo-se \underline{B} e medindo-se \underline{v}_B calcula-se o campo elétrico \underline{E} . Esta técnica compreende principalmente as medidas realizadas através de:

- 1) *Nuvens artificiais de bário* - têm boa sensibilidade e medem campos menores que 1mV/m, mas só podem ser empregadas ao nascer e pôr do sol. Esta técnica é usada com foguetes acima de aproximadamente 180km (Haerendel e Lüst, 1968; Haerendel et alii, 1967).
- 2) *Espalhamento Thomson* - sensibilidade da ordem de 0,3mV/m, com observações até 500km de altura, aproximadamente. Mede uma componente da velocidade de deriva de cada vez, depois do que

a direção de visada deve ser mudada para uma segunda componente (Evans, 1969, 1972; Woodman, 1970).

- 3) *Movimento térmico de íons* - sensibilidade da ordem de 1mV/m. Esta técnica é usada com foguetes.
- 4) *Sonda de Langmuir com fenda* - precisão menor que a técnica de sonda dupla. Esta técnica é usada com foguetes e satélites.

A técnica de sonda dupla considera um par de condutores isolados, com potenciais V_A e V_B separados pelo vetor-distância \underline{d} (do condutor A para o B). Na presença de um campo elétrico, uma diferença de potencial $\Delta V = V_B - V_A$ efetivamente existirá entre os condutores. O campo elétrico existente satisfaz a seguinte relação:

$$\Delta V = - \underline{E} \cdot \underline{d}. \quad (3.2)$$

Conhecendo-se \underline{d} e medindo-se ΔV , tem-se a componente de \underline{E} na direção \underline{d} . A técnica de sonda dupla pode ser utilizada com balões, foguetes e satélites.

A velocidade do veículo que transporta o detector aparece como um fator a corrigir, pois o campo elétrico real \underline{E} está relacionado com o percebido \underline{E}' pelo veículo em movimento através de:

$$\underline{E} = \underline{E}' - \underline{v} \times \underline{B}, \quad (3.3)$$

onde \underline{v} é a velocidade do veículo e \underline{B} é o campo geomagnético. Para foguetes e satélites tem-se uma correção $|\underline{v} \times \underline{B}|$ da ordem de 10 a 50mV/m e 500mV/m, respectivamente. Usando-se balões estratosféricos, o campo elétrico medido é, para todos efeitos práticos, idêntico ao real.

As medidas experimentais apresentadas neste trabalho foram obtidas com a técnica de sonda dupla, com um detector transportado em balão estratosférico. A seguir, descrever-se-á tal técnica com mais detalhes, sob o ponto de vista de balões.

3.2 - MÉTODO DA SONDA DUPLA

O método da sonda dupla originou-se do trabalho de Mott-Smith e Langmuir (1926). Cerca de quatro décadas depois, aplicações geofísicas para medições de campos elétricos na região auroral ou de alta latitude começaram a surgir (Kavadas and Johnson, 1964; Mozer and Serlin, 1969; Mozer, 1971b).

Na sua forma mais completa, o sinal elétrico medido por um voltímetro para um par de sondas (ligadas por um resistor com resistência R) imerso em um plasma está relacionado com o campo elétrico real através de (Fahleson, 1967; Mozer, 1971b; Mozer, 1974):

$$RI = \frac{\underline{E} \cdot \underline{d} + (V_1 - V_2) + (\phi_2 - \phi_1)}{1 + (R_1/R) + (R_2/R)}, \quad (3.4)$$

onde I é a corrente que passa pelo resistor de um condutor para o outro; $V_1 - V_2$ é a diferença de potencial de equilíbrio entre os dois condutores; $\phi_2 - \phi_1$ é a diferença entre as funções de trabalho dos dois condutores ou a diferença de seus potenciais de contacto; e R_1 e R_2 são as resistências oferecidas à passagem da corrente I pela película de plasma ("plasma sheath") que se forma nas vizinhanças das sondas.

A Equação 3.4 está ilustrada na Figura 3.1. Longe da sonda, o potencial de um elétron é o do plasma (Figura 3.1a). Ao se aproximar da sonda, da ordem de um comprimento de Debye λ_D , o potencial aumenta até o potencial de equilíbrio na superfície do condutor. Penetrando-se a superfície, o potencial diminui de um valor equivalente à função de trabalho do condutor, tornando-se o potencial do mar de elétrons dentro do metal.

Para as duas sondas (Figura 3.1b) ligadas eletricamente através de um resistor com resistência R , a situação é similar, com a diferença de haver agora uma corrente elétrica I de um condutor ao outro.

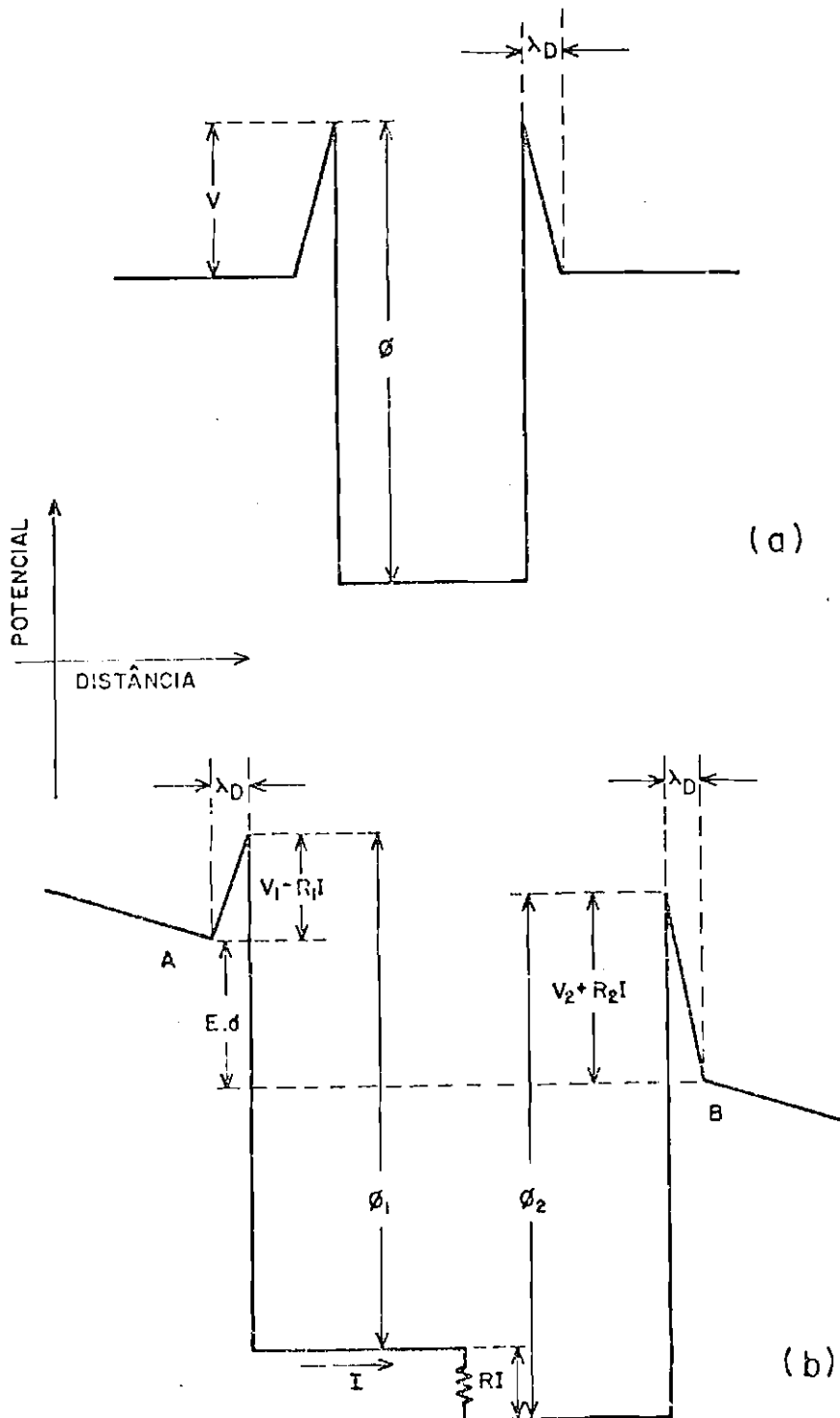


Fig. 3.1 - Diagrama de potencial de um condutor isolado imerso em um plasma (a) e de um par de sondas de Langmuir em um plasma com um campo elétrico (b).

FONTE: Mozer (1971b), pp. 9 e 10.

Vê-se assim que a diferença de potencial procurada $E \cdot d$ é medida juntamente com outros fatores. Se precauções apropriadas durante o projeto, construção, montagem e lançamento do detector não forem tomadas, tais fatores poderão mascarar completamente a medida do campo elétrico E .

Tais precauções são intensificadas (Mozer, 1971b, 1972, 1974) para medidas a bordo de foguetes ou satélites em altitudes ionosféricas, magnetosféricas ou em plasmas rarefeitos. Para balões em altitudes estratosféricas, usualmente de 20 a 50km, elas podem ser um pouco atenuadas, mas não esquecidas.

3.3 - TÉCNICA DE DETECÇÃO EM ALTURA DE BALÃO

Para medidas com balões estratosféricos, o meio onde o detector está imerso aproxima-se muito de um meio isotrópico (frequência de colisão bem maior que a frequência ciclotrônica), o que faz com que a diferença $V_1 - V_2$ (Equação 3.4) seja nula por causa da simetria.

A resistência da película de plasma é predominantemente devida ao meio atmosférico isotrópico. O par de sondas funciona como um circuito em paralelo para a corrente elétrica. Assim, para não distorcer o campo elétrico que se quer medir, a resistência interna que liga os condutores deve ser bem maior que a atmosférica. A resistência atmosférica pode ser encontrada considerando-se a queda de potencial necessária para que uma dada corrente elétrica seja coletada por um sensor, quando essa corrente flui impedida por colisões entre íons e partículas neutras. Próximo ao chão e em 30km de altura, a condutividade atmosférica tem seu valor por volta de 10^{-13} e 10^{-11} mho/m, respectivamente (Figura 5.2). Daí, considerando as dimensões típicas do detector, a resistência do circuito eletrônico deve ser da ordem de 10^{14} ohm ou maior.

Portanto, para altitudes de balões estratosféricos a Equação 3.4 fica:

$$RI = \underline{E} \cdot \underline{d} + (\phi_2 - \phi_1). \quad (3.5)$$

A diferença entre os potenciais de contacto, $\phi_2 - \phi_1$, aparece como um valor constante sobreposto ao que se quer medir. Fazendo com que o detector gire, o sinal correspondente ao campo elétrico varia de forma senoidal com um período igual ao de rotação do detector (como discutido adiante), sobressaindo-se assim do sinal constante que aparece como um nível DC ("offset" do circuito). Esse "offset" é retirado na fase de análise dos dados.

Tal técnica tem sido exaustivamente utilizada em regiões de altas latitudes (Mozer and Serlin, 1969; Mozer, 1971a; Holzworth, 1980; Wygant et alii, 1979). A Figura 3.2 ilustra sua aplicação nessas regiões, onde se vêem medidas de campos elétricos atmosféricos realizados simultaneamente por dois balões afastados em altura por mais de 6km e em distância horizontal por 30 a 140km. Um fato importante facilmente notado é a grande diferença entre as magnitudes da componente vertical e da componente horizontal do campo elétrico (uma ordem de grandeza), bem como a variação da componente vertical com a altura (quanto mais alto estiver o balão, menor será o seu valor). A razão de 3,6 entre as componentes verticais e a boa concordância entre as componentes horizontais (com uma razão média de 0,97, apesar de os balões estarem situados em alturas diferentes) indica um comportamento típico desse tipo de medidas. A componente vertical está associada ao campo elétrico de tempo bom e a horizontal, a fontes ionosféricas/magnetosféricas (Mozer, 1972).

Com leves modificações (aumentar a distância entre os condutores, por exemplo) devidas às pequenas magnitudes esperadas para a componente horizontal do campo elétrico, essa técnica pode também ser empregada em baixas latitudes.

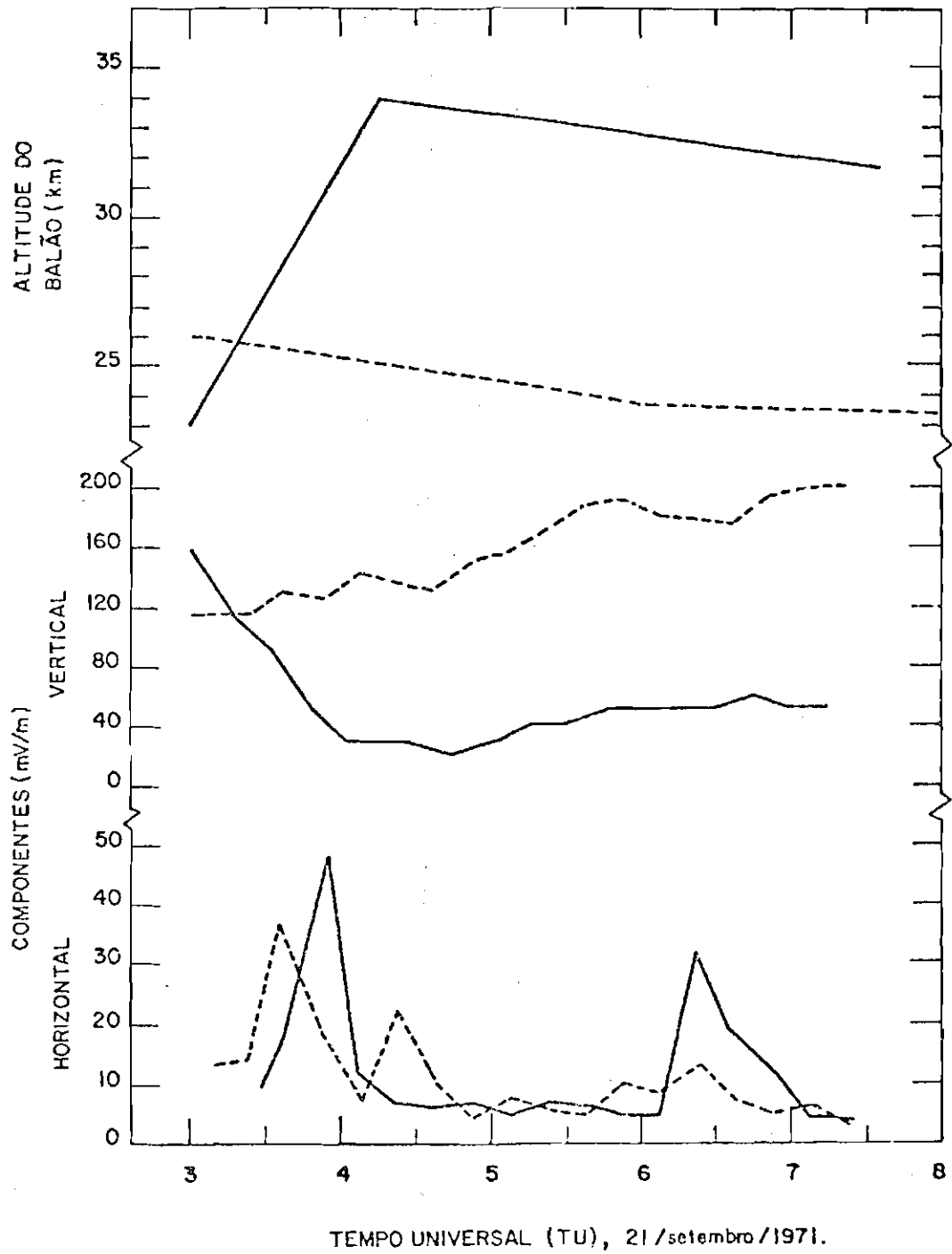


Fig. 3.2 - Campos elétricos medidos simultaneamente por dois balões em região de altas latitudes.

FONTE: Mozer (1972), p. 75.

3.4 - ANÁLISE DAS MEDIDAS

O detector utilizado para medir os campos elétricos na atmosfera, a bordo de balões estratosféricos, foi construído pelo Laboratório de Ciências Espaciais da Universidade da Califórnia, Berkeley, USA. O objetivo básico das medidas foi a observação dos campos elétricos ionosféricos de grande escala (dínamo ionosférico) na região da Anomalia Magnética do Atlântico Sul; essas medidas representam as primeiras observações desses campos nessa região.

Foram realizados dois vôos de balões estratosféricos, ambos lançados de Cachoeira Paulista ($22^{\circ}44'S$, $44^{\circ}56'W$). Os dois vôos foram planejados para observação dos campos elétricos sem atividade magnética (o primeiro deles) e em período magneticamente perturbado (o segundo vôo). O primeiro começou às 0005TU e terminou às 1440TU do dia 03 de abril de 1980, tendo chegado à altura máxima (teto) por volta de 0130TU. Sua trajetória foi predominantemente na direção oeste. Neste vôo, embora a atividade magnética estivesse normal, as condições atmosféricas não estavam apropriadas para tal observação. Tempestades atmosféricas se avolumaram logo depois do lançamento, permanecendo (ou mesmo se intensificando) durante todo o vôo. As condições de tempo bom foram assim essencialmente perturbadas, como discutido por Burke (1975) e Dejnakarindra (1974), com as medidas desse vôo apresentando campos elétricos de origem predominantemente troposférica.

A duração do segundo vôo foi de 0515TU a 1620TU do dia 09 de abril de 1980, com um teto por volta de 0640TU. Inicialmente o balão se deslocou na direção norte e, posteriormente, tomou a direção oeste, em um comportamento típico dos ventos nesta época do ano.

O detector consiste em três pares de sondas de Langmuir alinhadas com três eixos ortogonais, um deles vertical e os outros dois horizontais (Figura 3.3). A simetria do par vertical é relaxada devido à magnitude relativamente elevada do campo elétrico vertical. Desse modo, têm-se as três componentes vetoriais do campo elétrico. A distância entre os condutores de cada par horizontal é de 5,2m, quase

duas vezes o normalmente usado em altas latitudes. Assim, podem-se medir campos elétricos horizontais tão pequenos quanto 1mV/m , com precisão da ordem de $0,3\text{mV/m}$. No par vertical tem-se $1,5\text{m}$.

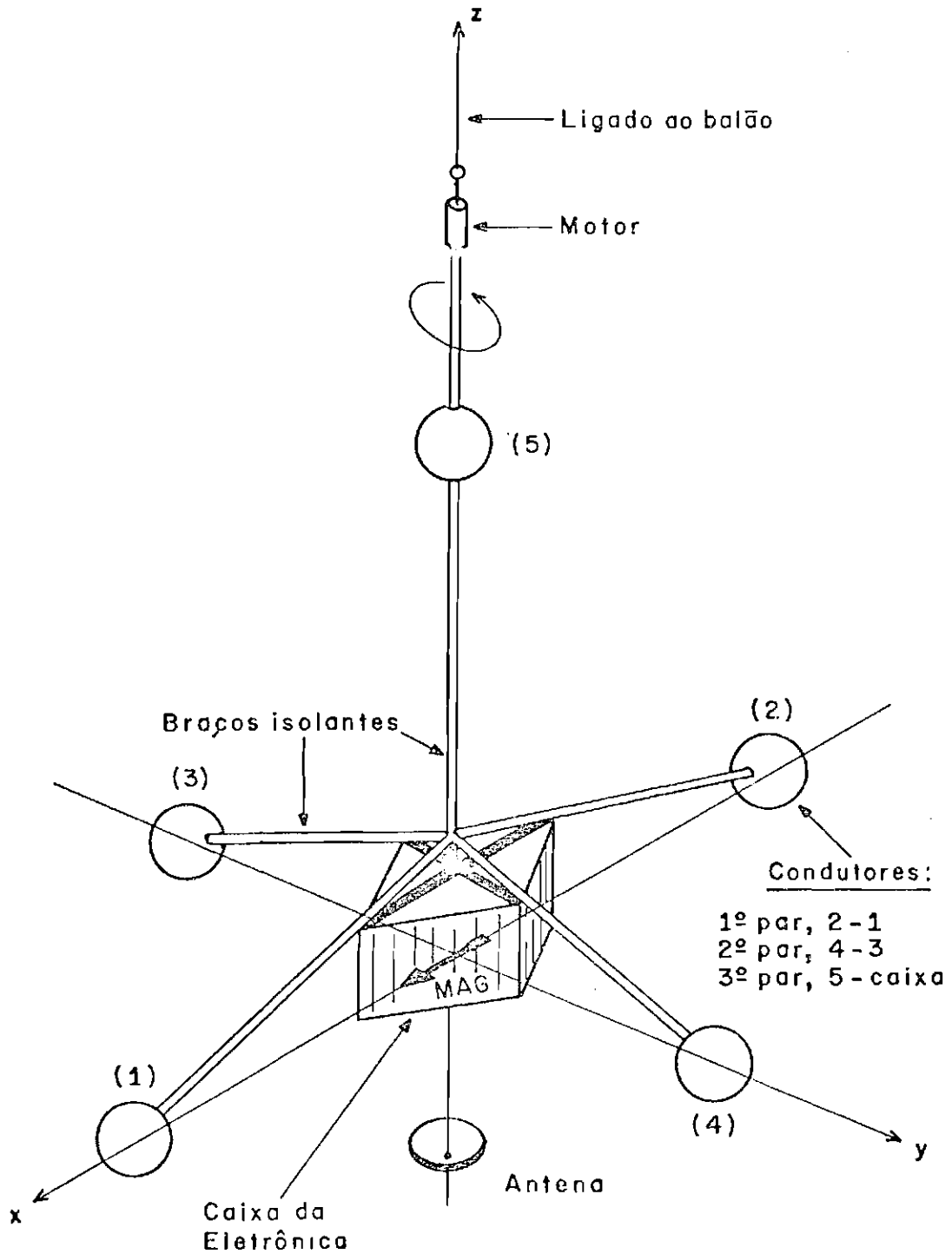


Fig. 3.3 - Croqui do detector lançado em balão.

A incidência da radiação solar nas sondas pode introduzir influências no sinal medido, devido à produção de fotoelétrons, diretamente associadas ao potencial de contacto. Em geral, para minimizar dificuldades com o potencial de contacto, as sondas são pintadas com uma solução aquosa de carbono ("aquadag"). A alta função de trabalho do carbono puro reduz o comprimento de onda crítico da emissão fotoelétrica para aproximadamente 2600\AA . Comprimentos de onda dessa ordem são absorvidos bem acima da altura máxima atingida normalmente por balões estratosféricos (Paltridge, 1965).

As superfícies externas do detector que estão em contacto com as sondas devem ter alta resistência elétrica. Os braços do detector onde as sondas estão montadas são feitos de fibra de vidro e são várias vezes cuidadosamente limpos com freon, bem como a verificação do nível horizontal das quatro sondas do plano xy (Figura 3.3), que deve ser o mesmo, antes da aprovação final para o lançamento (Holzworth, 1980).

O detector gira com um período da ordem de 15 a 20s, para obter um sinal que varia senoidalmente com uma frequência de amostragem de 2Hz. A Figura 3.4 mostra esquematicamente o efeito dessa rotação nas observações do campo elétrico por um par horizontal de sondas. Na parte superior dessa figura, tem-se a forma do sinal medido pelo par na ausência de um campo elétrico, em função do tempo. Nesse caso, só um sinal residual intrínseco do detector, o seu nível DC, pode ser observado. Na presença de um campo elétrico E (Figura 3.4b), considerado constante, o nível DC é alterado, com o par (considerado em repouso) medindo agora um sinal de magnitude $DC + E$. Se o detector gira (Figura 3.4c), esse sinal aparece na forma de uma senóide de período T , igual à rotação do detector, oscilando entre um máximo e um mínimo dados por $DC + E$ e $DC - E$, respectivamente. A amplitude da senóide é modulada pela magnitude do campo elétrico. A oscilação entre um máximo e um mínimo é a primeira indicação da existência do campo elétrico. Na prática, o sinal observado apresenta flutuações devidas a ruídos da eletrônica, etc., afastando-se da forma senoidal pura (Figura 3.4d).

Esse sinal pode ainda apresentar distorções devidas à saturação, que ocorre quando o campo elétrico que se está medindo apresenta valores além da faixa permitida ou quando o nível DC se mostra próximo ao topo ou ao fundo dessa faixa. Esta discussão aplica-se individualmente a cada par horizontal de sondas. Rigorosamente falando, as medidas de um par horizontal confirmariam as medidas do outro de maneira exata na ausência das distorções. As observações simultâneas dos pares horizontais aumentam a confiabilidade das medidas do campo elétrico horizontal.

A Figura 3.5 traz esquematicamente o diagrama do detector. Cada um dos cinco sinais originados das sondas passa inicialmente por um amplificador operacional para "casamento de impedância", sendo em seguida amplificados nos sinais V_1 , V_2 , V_3 e V_4 , com o par vertical escalonado (devido ao grande valor e possível variação da componente vertical do campo elétrico) em três faixas de variação, denominadas de baixo, médio e alto ganho, V_{5L} , V_{5M} e V_{5H} , respectivamente. As diferenças entre os condutores de cada par horizontal, V_{21} e V_{43} , são também encontradas. Esses nove sinais são enviados ao módulo de PCM ("Pulse Code Modulation"), o qual recebe também os sinais do altímetro e do sensor de direção (magnetômetro).

Cada informação é codificada em palavras de 8 bits (1 "byte"). Essas onze palavras e mais cinco outras (uma com a temperatura, duas com a informação do tempo e duas com o sincronismo) formam uma cadeia de informações, que é repetida a cada 0,5s. A perda de sincronismo anula, quase sempre, toda a cadeia de informações. As informações são enviadas ao transmissor, que opera com a taxa de 256 bits/s em formato PCM, na frequência de 1534MHz e com aproximadamente 300mW de potência, o que permite um alcance de 200 a 300km.

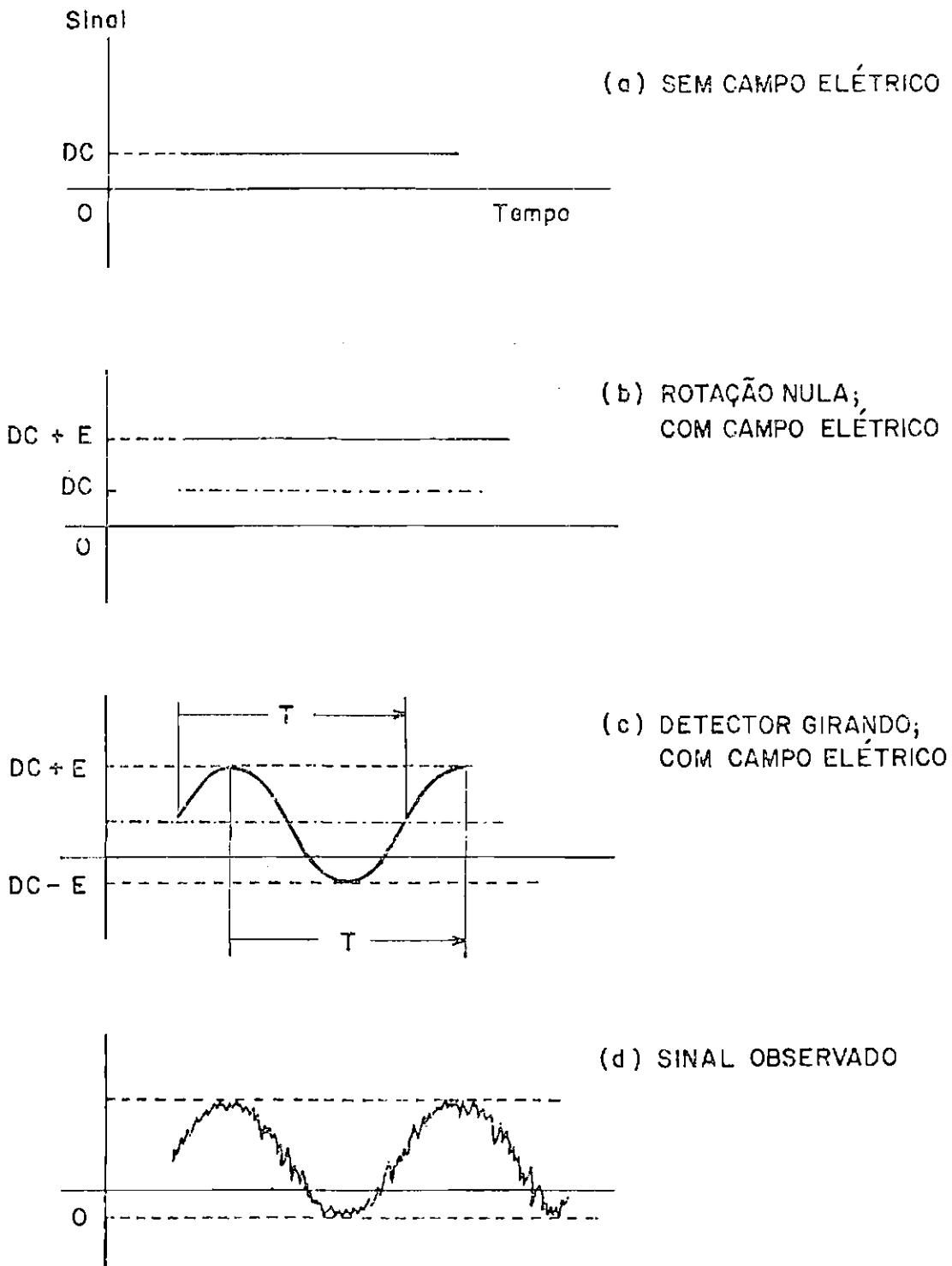


Fig. 3.4 - Sinal do campo elétrico.

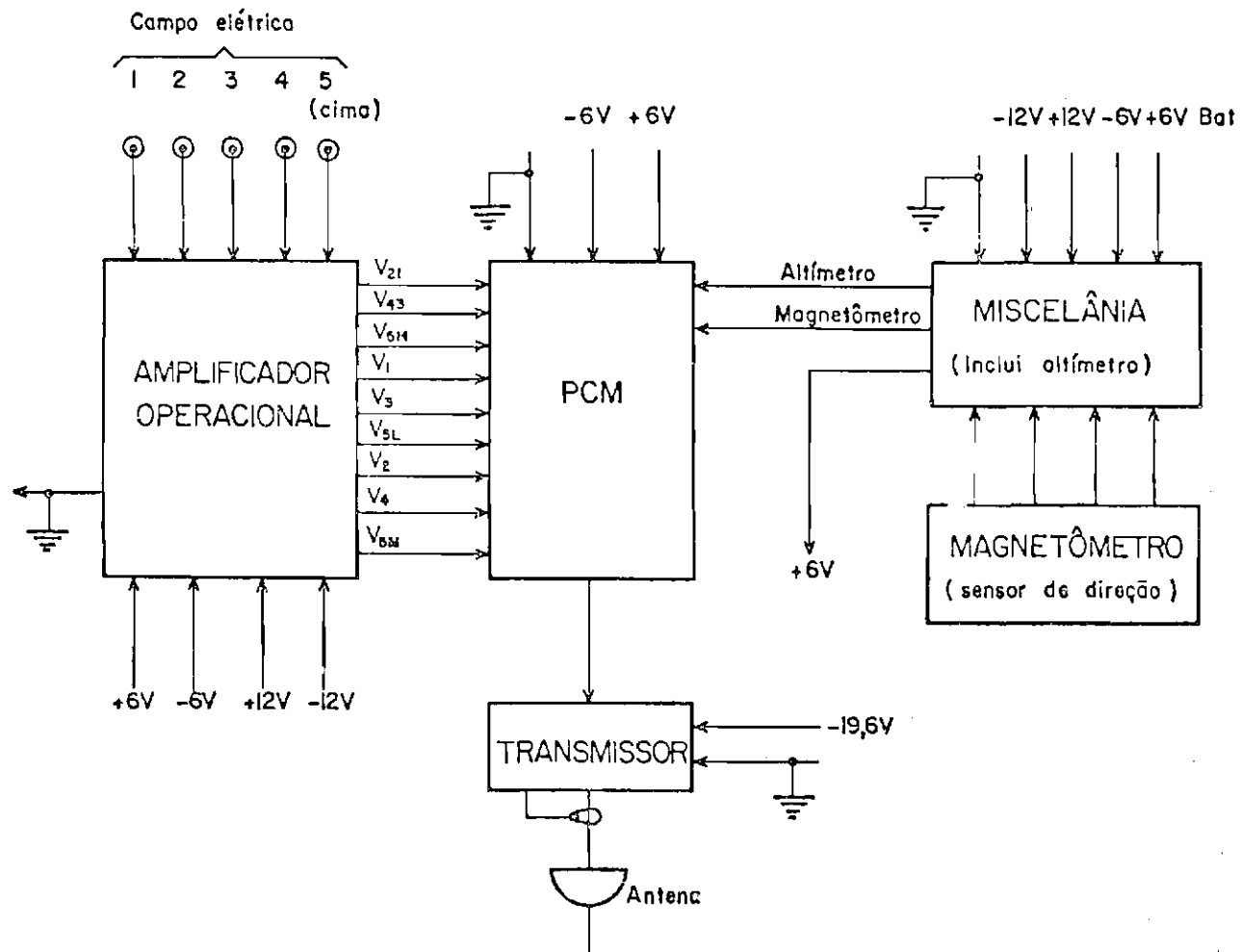


Fig. 3.5 - Diagrama sinótico da eletrônica do detector.

O sinal emitido é continuamente rastreado por uma estação de terra e gravado em fitas magnéticas. Posteriormente esses dados são formatados convenientemente para redução e análise automática em computador digital, que, para esses vôos, foi realizada principalmente no Laboratório de Ciências Espaciais da Universidade da Califórnia. Atualmente, tal método de análise (com algumas modificações) está sendo implementado no INPE, tendo-se desenvolvido vários programas utilitários que auxiliam nessa tarefa. Finalmente, a separação do detector do balão pode ser telecomandada em terra por um transmissor que atua na frequência de 138,4MHz, ou feita por um dispositivo piromecânico ("minuteria") a bordo do balão, delimitando o número máximo de horas de vôo.

A Figura 3.6 apresenta uma amostra do sinal medido pelo detector a bordo do balão, para os dois vôos. O sinal do magnetômetro, mostrado na Figura 3.6a (para o segundo vôo), é a referência básica durante a redução e análise dos dados para as medidas do campo elétrico horizontal. Ele permite encontrar em todo instante o período de rotação do detector e, posteriormente, conhecendo-se esse período, calcular a amplitude do campo elétrico mediante o ajuste de uma curva senoidal aos dados de interesse. A orientação do vetor-campo elétrico é encontrada usando-se também o sinal do magnetômetro, através do cálculo das componentes norte e leste. Nas Figuras 3.6b e 3.6c, tem-se o sinal obtido de campo elétrico dos pares horizontais 4-3 e 2-1, respectivamente, para o segundo vôo. O nível DC mostrou-se elevado, provocando saturação parcial do sinal. As Figuras 3.6d e 3.6e trazem os sinais V_{43} e V_{21} para o primeiro vôo no intervalo 1340-1430TU. A magnitude do campo elétrico horizontal detectada provocou a saturação total do sinal em vários trechos desse vôo, em direta associação com as tempestades atmosféricas existentes, como observado pelo satélite meteorológico SMS-2. Notar a variação com o tempo da amplitude do campo elétrico, ou mesmo a sua extinção em alguns pontos do vôo (próximos de 1406TU e 1416TU), em um comportamento típico de medidas efetuadas em períodos de tempestades atmosféricas (Burke, 1975). Nesse vôo, a informação do magnetômetro foi perdida, o que impossibilita o cálculo das componentes norte e leste do campo elétrico.

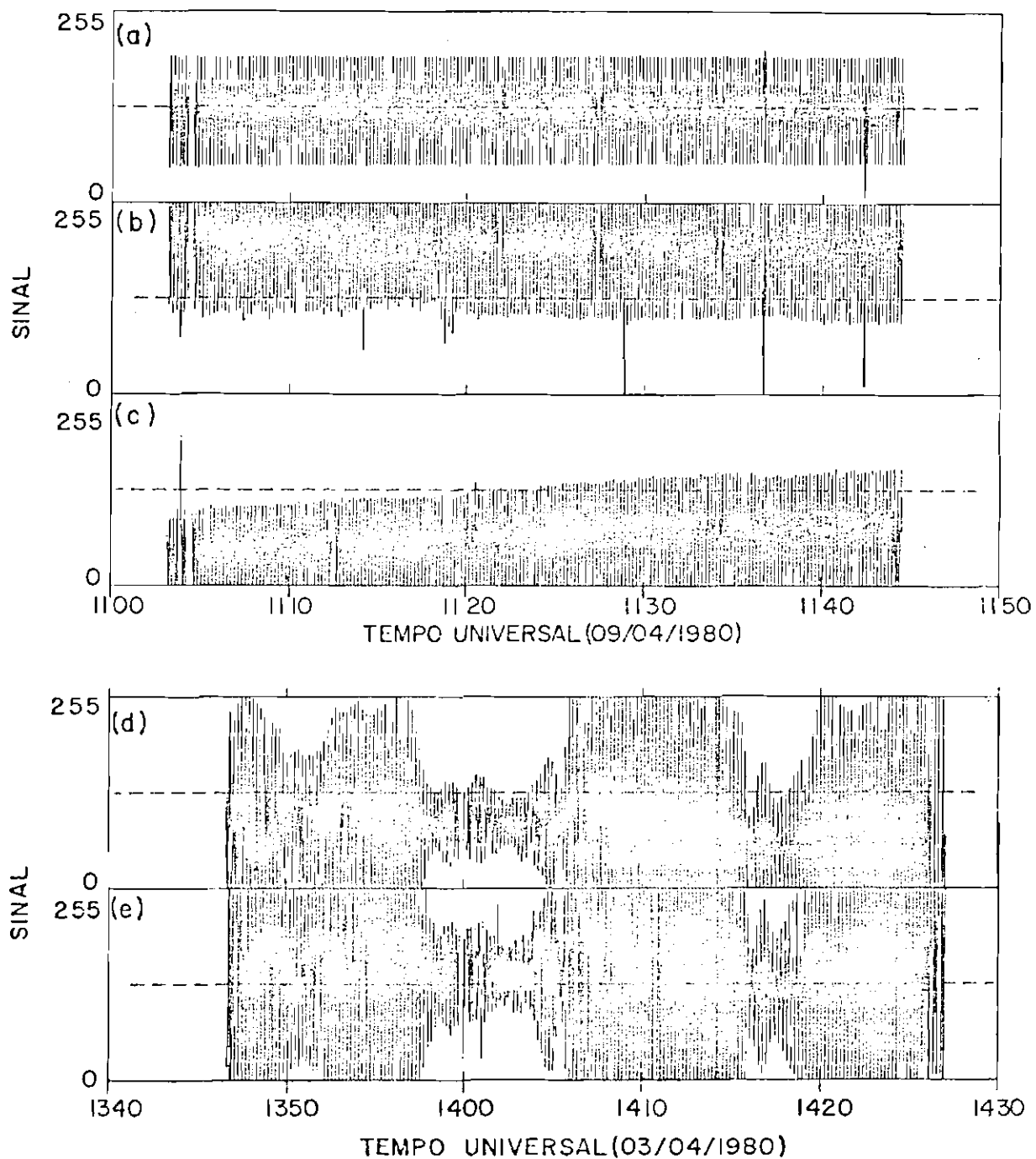


Fig. 3.6 - Sinal obtido pelo detector nos dois vôos.

(a) magnetômetro (2º vôo); (b) par horizontal 4-3 (2º vôo); (c) par horizontal 2-1 (2º vôo); (d) par horizontal 4-3 (1º vôo); e (e) par horizontal 2-1 (1º vôo).

Considerando o interesse básico que se tem em campos elétricos de grande escala (e lenta variação no tempo), a redução dos dados é realizada em períodos médios de 2,5min (pelo menos), isto é, o ajuste senoidal é feito em um conjunto de pontos que compreendem de 7 a 10 períodos de rotação de detector (aproximadamente 300 pontos medidos), ou mais. Certamente uma suavização nos valores de campo elétrico está implícita nesse procedimento, e rápidas e pequenas flutuações nas medidas (se significativas ou não) não foram analisadas no presente trabalho.

No segundo voo, sob condições atmosféricas boas e sob período de atividade magnética, foram coletados bons dados em um teto da ordem de 32km. No instante do lançamento, o detector atingiu o chão causando um mal funcionamento do sistema durante várias horas, na parte inicial do voo. O balão chegou ao teto por volta das 0640TU; até aproximadamente às 0700TU os dois pares horizontais das sondas, bem como o par vertical, forneceram sinais saturados. Então, um dos pares horizontais e o vertical começaram a se recuperar enquanto o outro par horizontal continuou saturado até aproximadamente 0940TU. Deste instante em diante, ambos os pares horizontais mediram aproximadamente o mesmo sinal não-saturado e o par vertical mediu o campo elétrico de tempo bom, da ordem esperada para altitudes de balão (Figura 3.7).

Apesar de o período de observação ser da ordem de 11 horas, os bons dados foram coletados em um período relativamente curto de aproximadamente 2 horas (região hachurada na Figura 3.7). A Figura 3.8 mostra mais detalhadamente as componentes do campo elétrico no intervalo 1000-1200TU. Os valores apresentados são médias daqueles medidos. Como se vê, grandes (até 10mV/m) e inesperados valores foram observados. As componentes horizontais norte e oeste apresentaram nesse período um erro médio da ordem de $\pm 1,5$ e $\pm 1,2$ mV/m, respectivamente. Para a componente vertical, tem-se ± 10 mV/m.

A Figura 3.9 fornece o magnetograma obtido pela estação de Vassouras ($11^{\circ}54'S$, $23^{\circ}50'E$, coordenadas geomagnéticas) durante o segundo voo. O magnetograma mostra que um aumento na atividade magnética começa por volta de 0200TL (0500TU).

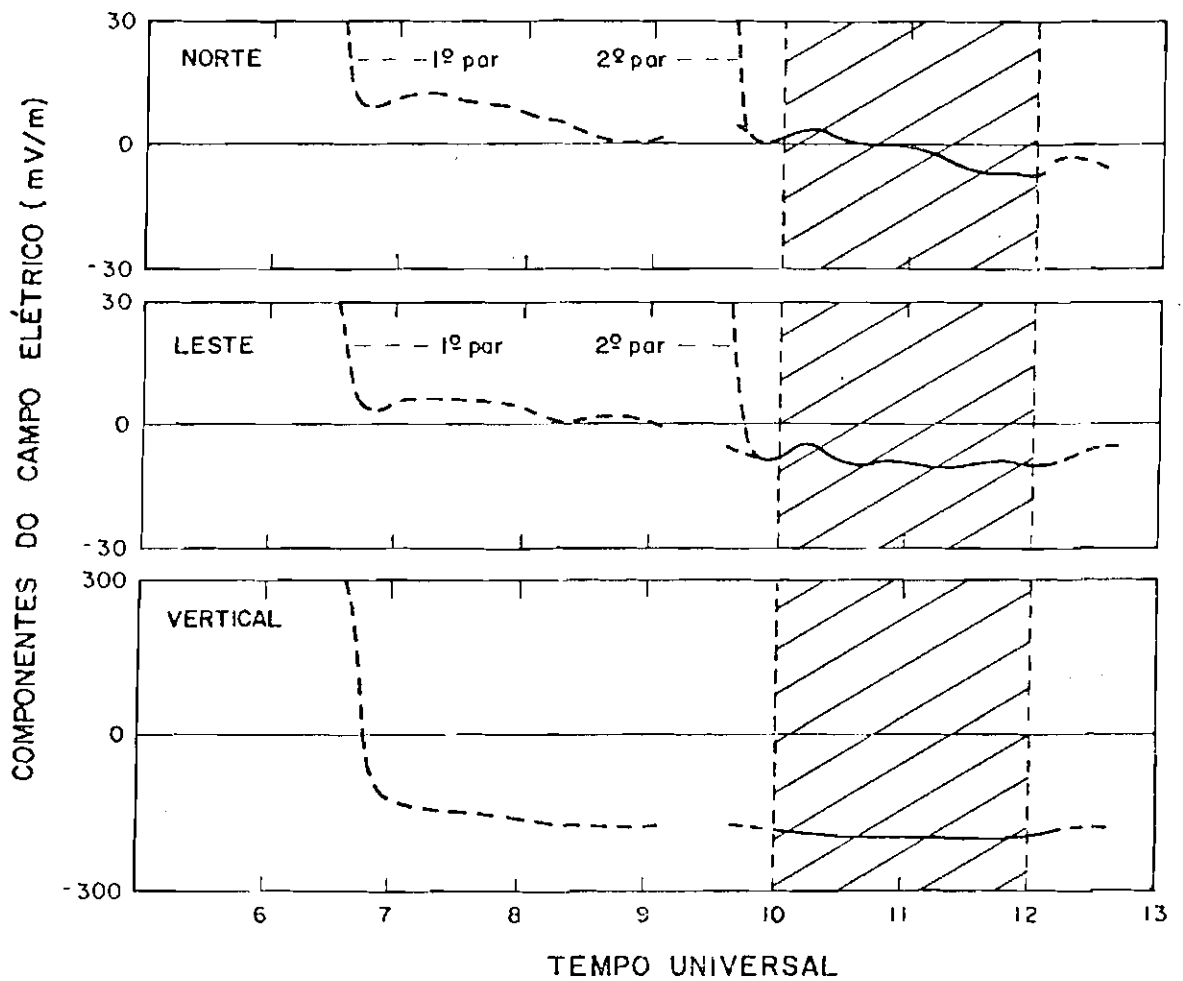


Fig. 3.7 - Campos elétricos medidos (mV/m) em 09/04/1980.

Na parte superior, a componente na direção norte; no meio, a componente na direção leste; e na parte inferior, a componente vertical de tempo bom.

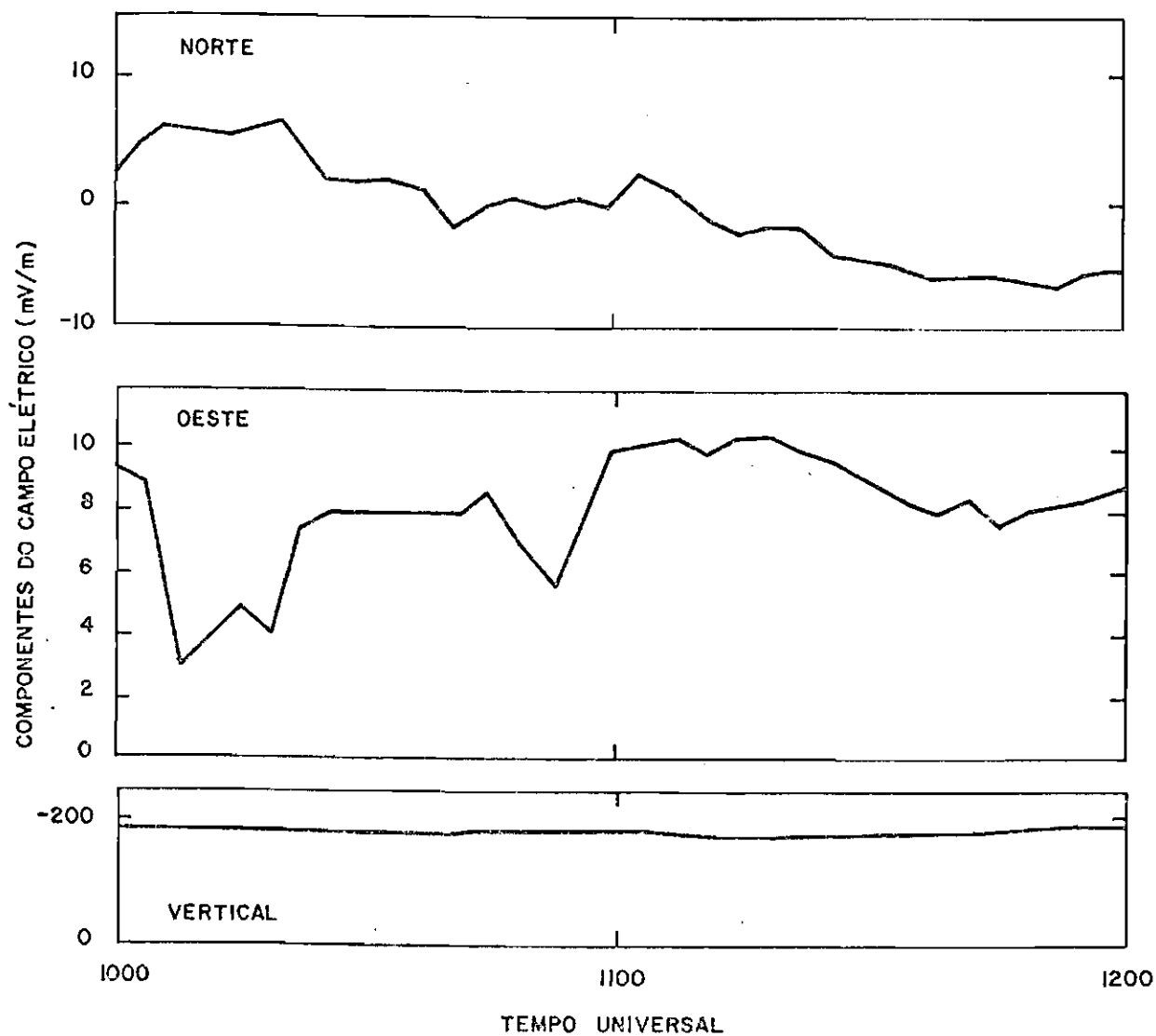


Fig. 3.8 - Detalhe dos campos elétricos medidos (mV/m) em 09/04/1980.

Na parte superior, a componente na direção norte; no meio, a componente na direção oeste; e na parte inferior, a componente vertical de tempo bom. Os campos horizontais são médias daqueles medidos por ambos os pares (não-saturados).

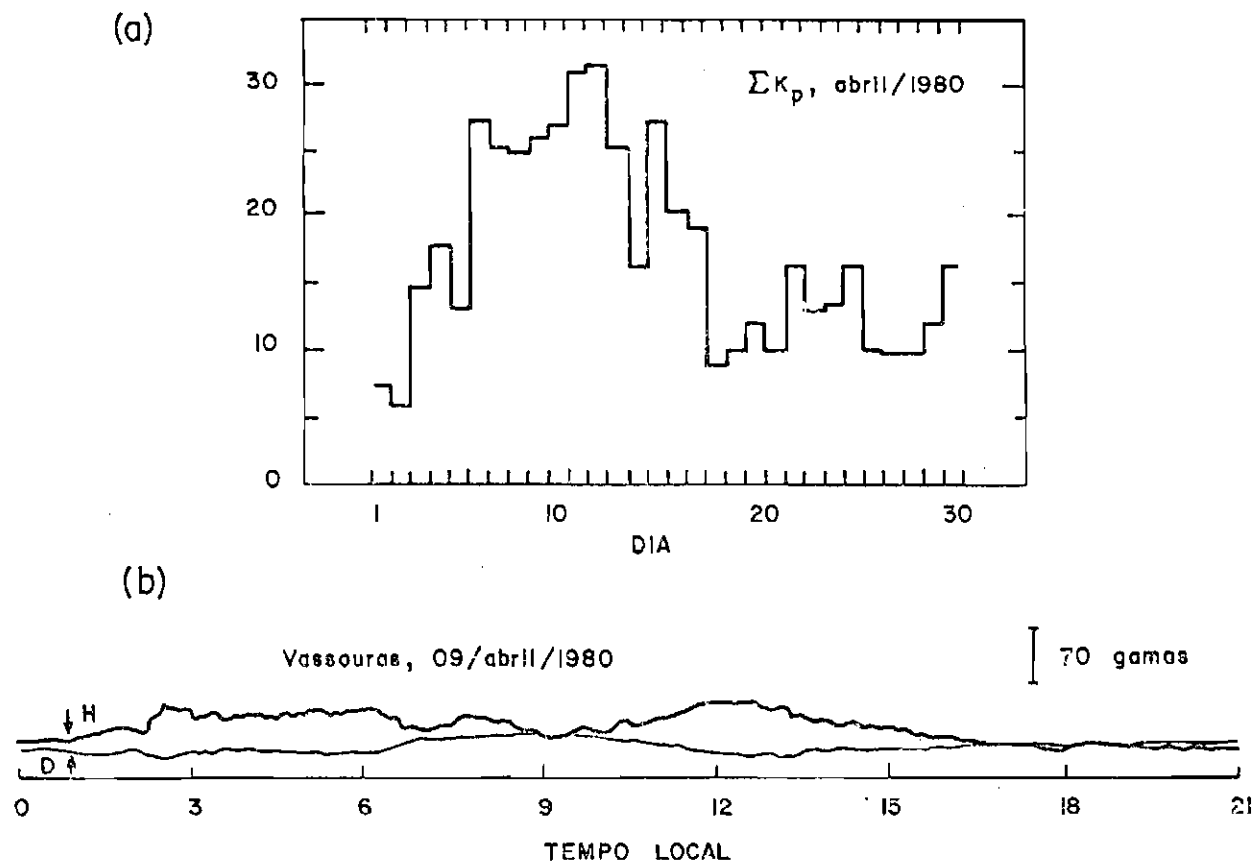


Fig. 3.9 - Índice ΣK_p para o mês de abril de 1980 (a) e magnetograma registrado em Vassouras no dia 09/04/1980 (b).

A curva mais escura é a componente horizontal (H) e a mais clara é a declinação (D) do campo geomagnético.

A Figura 3.10 mostra o comportamento da magnitude do campo elétrico horizontal observado durante tempestades atmosféricas e de tempo bom, quando detectados por balões em altitudes estratosféricas. A linha tracejada representa a magnitude do campo elétrico observado durante o primeiro voo, obtida por uma análise preliminar dos dados nos intervalos 1000-1200TU e 1340-1430TU. A linha contínua corresponde ao campo elétrico do segundo voo no intervalo 1000-1200TU. Os erros médios desses resultados são da ordem de ± 4 e $\pm 1,3$ mV/m para o primeiro e segundo voos, respectivamente.

Dois fatos importantes podem ser apreciados: o campo elétrico do primeiro voo apresenta uma grande diferença no seu valor em relação ao do segundo, e o comportamento do campo elétrico é completamente diferente entre um voo e o outro. Ou seja, o campo elétrico varia rapidamente no primeiro voo entre 0 e valores acima de 32 mV/m, enquanto no segundo voo quase não apresenta variações. Um estudo de campos elétricos de tempestades em altas latitudes pode ser visto em Burke (1975). Os resultados do segundo voo serão ainda discutidos no Capítulo 5, onde se verá que os valores observados podem ser relacionados ao fenômeno de precipitação de partículas na atmosfera, que parece ocorrer na região da Anomalia Magnética do Atlântico Sul.

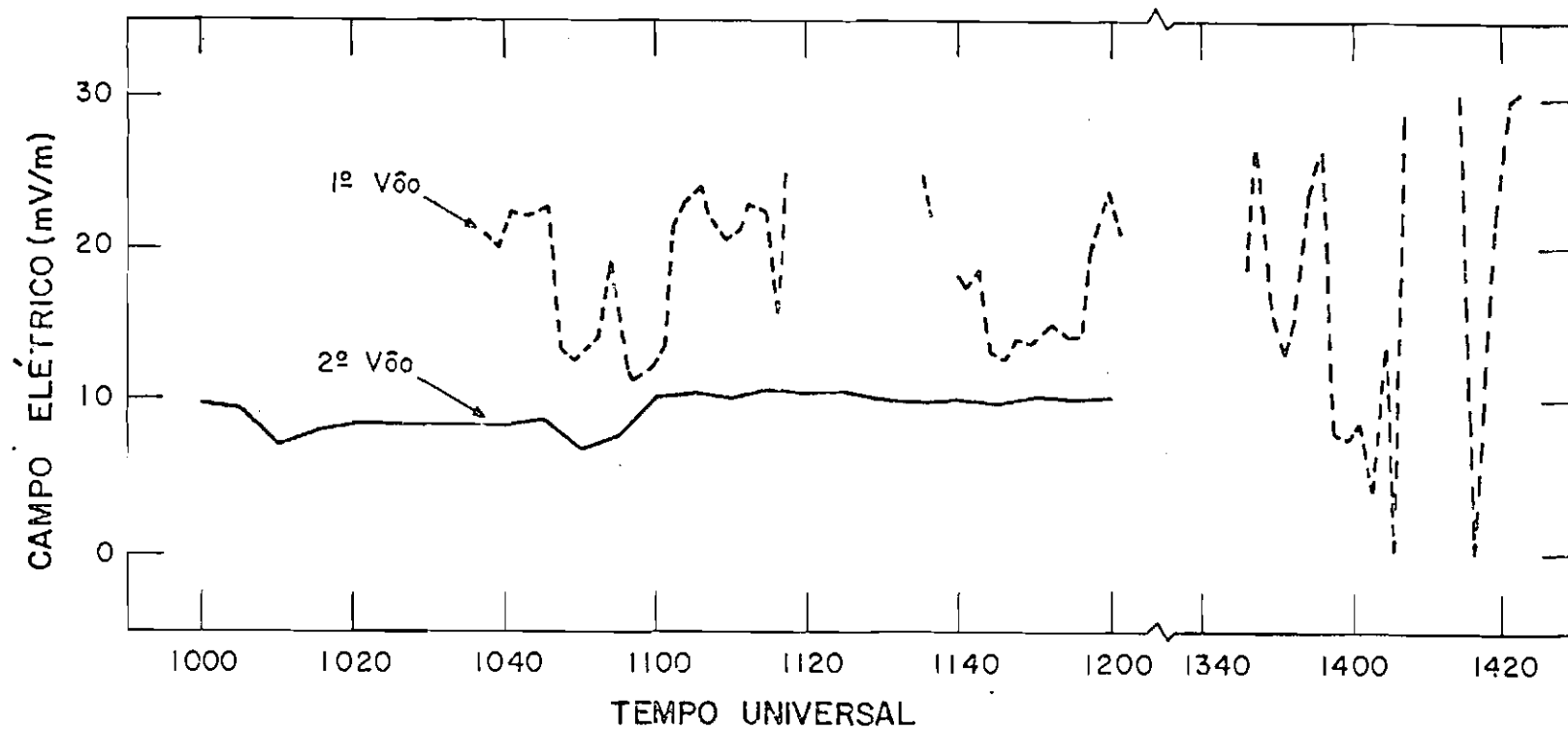


Fig. 3.10 - Magnitudes do campo elétrico horizontal medidas em 03/04/1980 (primeiro vôo, nos intervalos 1000-1200TU e 1340-1430TU) e em 09/04/1980 (segundo vôo, no intervalo 1000-1200TU).

CAPÍTULO 4

MÉTODOS NUMÉRICOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Nos estudos da eletricidade atmosférica um dos fatos que mais caracteriza um certo fenômeno é o sistema de distribuição de *correntes elétricas*, \underline{J} , existente na região onde esse fenômeno ocorre. Associado a ele, encontra-se a configuração de um campo de forças elétricas (um *campo elétrico*), \underline{E} , ou mesmo um campo de *potencial elétrico*, ϕ . No caso em apreço, se na simulação de um modelo para um certo fenômeno elétrico atmosférico se conhecem as *condições de contorno* da região onde se supõe que esse fenômeno exista, a simulação estará completa se se puder encontrar a solução da equação

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{J}(\underline{x}) = G(\underline{x}) \quad (4.1a)$$

com

$$\underline{J}(\underline{x}) := \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{E}(\underline{x}), \quad (4.1b)$$

$$\underline{E}(\underline{x}) := -\underline{\nabla}\phi(\underline{x}), \quad (4.1c)$$

sujeita às condições de contorno especificadas. O vetor \underline{x} representa a posição de um ponto da região em um sistema de coordenadas genéricas. Na forma acima considerou-se o sistema em estado estacionário. O tensor $\underline{\sigma}(\underline{x})$ representa a *condutividade elétrica* do meio.

Tal procedimento é normalmente seguido na simulação de fenômenos, entre outros, como:

- a) eletricidade atmosférica global (Dolezalek, 1972; Hays and Roble, 1979) onde o termo $G(\underline{x})$ aparece devido à ocorrência estatística extremamente significativa das tempestades atmosféricas constantemente existentes e espalhadas pelo globo terrestre;

- b) eletricidade atmosférica local (Park and Dejnakarindra, 1973; Dejnakarindra, 1974; Burke, 1975) onde campos elétricos associados a nuvens de tempestades (com raios ou não) podem se propagar por todas as alturas da atmosfera chegando, devido aos seus grandes valores, à ionosfera ou mesmo à magnetosfera;
- c) dínamo ionosférico (Untiedt, 1967; Schieldge et alii, 1973; Heelis et alii, 1974; Matuura, 1974; Petersons, 1974; Forbes and Lindzen, 1976a, 1976b; Volland, 1976; Richmond et alii, 1976; Forbes and Lindzen, 1977; Möhlmann, 1977; Richmond, 1979b; Walton and Bowhill, 1979; Takeda and Maeda, 1980; e revisões de Richmond, 1979a; Forbes, 1981) onde ventos neutros e diferenças na mobilidade dos íons e elétrons existentes na região ionosférica (principalmente na camada E) produzem correntes nesta região; e
- d) propagação de campos elétricos magnetosféricos para regiões ionosféricas ou da ionosfera para alturas menores da atmosfera (Kellogg and Weed, 1969; Mozer and Serlin, 1969; Volland, 1972; Chiu, 1974; Dejnakarindra, 1974; Park, 1976, 1979).

A Equação 4.1 representa assim uma ferramenta largamente utilizada nesses estudos. Desafortunadamente, seu emprego na atmosfera terrestre é uma tarefa não muito fácil devido principalmente ao meio anisotrópico e às grandezas que interagem na configuração de um determinado fenômeno. Assim para se ter uma solução sua, na quase totalidade dos casos ela é simplificada (seja na sua forma ou seja nas hipóteses ad hoc empregadas), o que torna a análise estritamente auto-inconsistente. Isto acontece comumente nos casos onde o termo $G(x)$ da Equação 4.1 é determinado por um outro sistema de equações, onde o $J(x)$ aparece como termo forçante.

Este fato por si só não representa nenhuma anormalidade, pois muitas vezes essa solução simplificada fornece importantes diretrizes (ou mesmo conclusões) completamente significativas. Por outro lado, certas situações exigem uma análise mais profunda do problema

que se tem em mãos. Com o advento de computadores mais poderosos e rápidos e técnicas matemáticas mais elaboradas, tal análise pode ser tratada numericamente.

Pode-se pensar que abordagens auto-inconsistentes podem produzir: (a) soluções analíticas, que implicam consideráveis simplificações no fenômeno em estudo; e (b) soluções obtidas com métodos numéricos conhecidos (ou apropriados às circunstâncias), que geram um melhor detalhamento do fenômeno, às custas da não-necessidade de simplificações. Para abordagens auto-consistentes, soluções analíticas simples são raramente obtidas. Nestes casos, o que se têm são: (a) métodos numéricos conhecidos (apropriados); ou (b) métodos numéricos desconhecidos (ou inapropriados).

Seja o problema auto-consistente ou não, os parágrafos a seguir trazem uma pequena (porém dirigida) discussão dos vários métodos numéricos atualmente disponíveis, tendo em vista a Equação 4.1. O objetivo específico dessa discussão será o de tentar apontar singelas diretrizes para a abordagem desses problemas. Aplicações desses métodos serão vistas no Capítulo 5, onde serão enfocados os resultados mostrados no Capítulo anterior. Sob estes aspectos, espera-se que essa discussão seja uma útil ferramenta para a solução desses problemas.

4.2 - MÉTODOS EMPREGADOS

A Equação 4.1 pode ser escrita, muitas vezes, na forma:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \quad (4.2)$$

onde A, B, C, D, E, F e G podem ser funções das variáveis independentes x e y e da variável dependente u(x,y) dentro da região de interesse R, delimitada pela curva C. Equações deste tipo são discutidas em livros que tratam de soluções numéricas de equações diferenciais parciais (e.g. Berezin and Zhidkov, 1965; Ames, 1977). Sua solução é obtida tanto com as condições de contorno de Dirichlet (1ª categoria) quan

to com as de Neumann (2ª categoria) ou de Cauchy-Robbins (3ª categoria). A seguir serão discutidos três métodos numéricos: o de *Diferença Finita* (ilustrado através do SOR e do BTM), o de *Integração Direta* (Varredura) e o de *Elementos Finitos* (com resíduos ponderados de Galerkin).

Atualmente o método de Diferença Finita é largamente utilizado em todos os ramos da Ciência. É o mais conhecido e o mais antigo. O de Elementos Finitos, originalmente desenvolvido em problemas de Engenharia (um pouco da história do método pode ser encontrada em Huebner, 1975), só recentemente teve suas aplicações em problemas de Geofísica, constituindo a presente discussão uma das primeiras; é bastante flexível e poderoso. Quanto ao método de Integração Direta, este trabalho contém aparentemente a sua primeira discussão.

4.3 - DIFERENÇA FINITA

Considere-se um problema de Dirichlet. O método de Diferença Finita consiste em substituir a região R por um conjunto finito de pontos (Figura 4.1). Nestes pontos, P, encontra-se uma relação linear que envolve o valor de u em P e em outros pontos seus vizinhos. Repetindo esse raciocínio para um outro ponto vizinho, esse inter-relacionamento se propaga até os pontos situados no contorno C, onde supostamente se conhece o valor de u, o que possibilita assim uma aproximação para a solução na região de interesse R.

Então, seja a Equação 4.2 na forma

$$Lu(\underline{x}) = G(\underline{x}), \quad (4.3a)$$

onde

$$L := A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F. \quad (4.3b)$$

Uma expressão algébrica pode ser construída para representar a equação diferencial nos pontos de grade P:

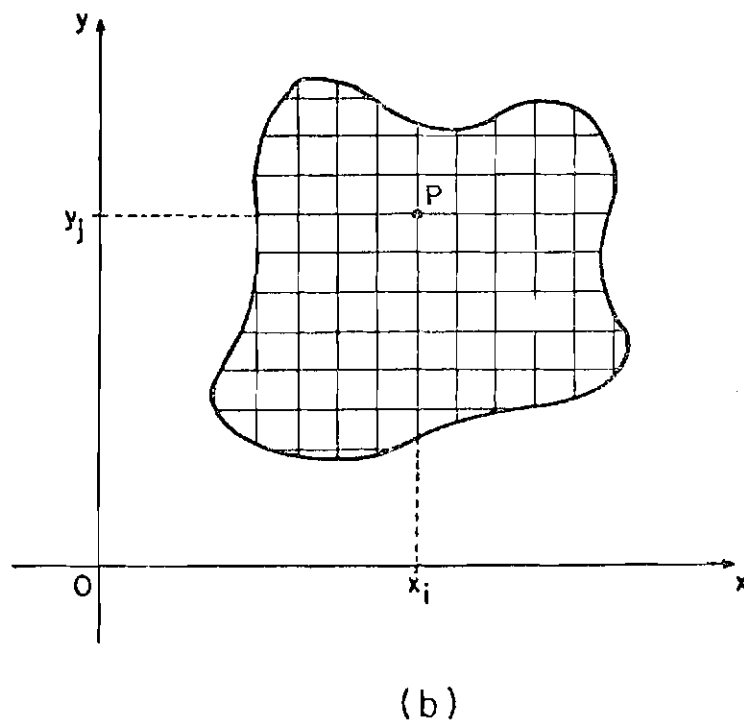
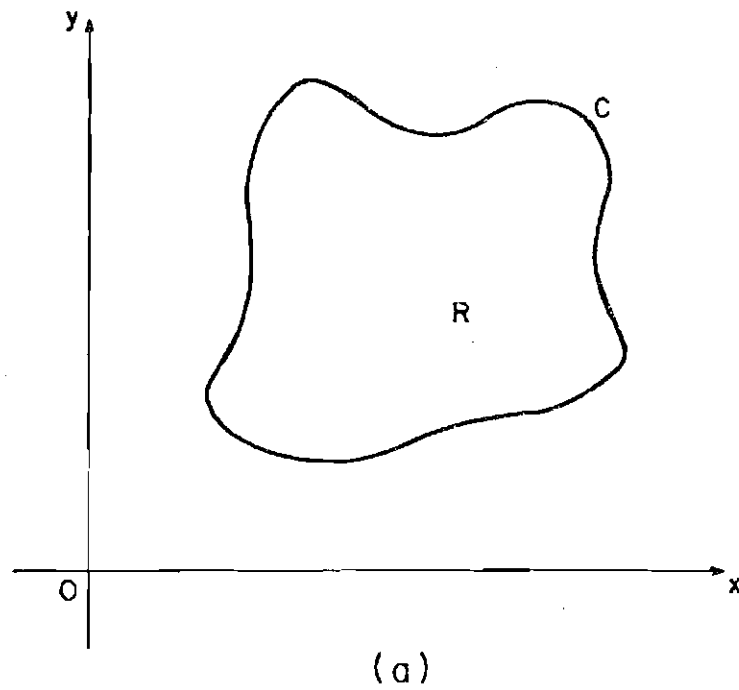


Fig. 4.1 - Regiões contínua e discretizada da soluço.

- (a) Região contínua - a soluço existe nos infinitos pontos da região R , com condi es especificadas em C .
- (b) Região discretizada (grade) - a soluço   encontrada num número finito de pontos de grade P .

$$L_h u = \alpha_c u_P - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i u_{Q_i} = G_P, \quad (4.4)$$

onde Q_i são os ℓ pontos de grade vizinhos de P , e u_P e u_{Q_i} são valores de u em P e Q_i . Numa grade irregular, $\alpha_i = \alpha_i(P)$, isto é, varia com \underline{ca} da ponto de grade considerado.

O método de discretização, descrito em Mitchell e Griffiths (1980), consiste em expandir u_{Q_i} em série de Taylor em torno do ponto P . Para fixar idéias, sejam os pontos $P(0,0)$ e $Q_i(\xi_i h, \eta_i h)$, $i = 1, 2, \dots, \ell$, onde h é o parâmetro geral de discretização da grade. Com a expansão de Taylor,

$$\begin{aligned} u_{Q_i} := u(\xi_i h, \eta_i h) &= u_P + \xi_i h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_P + \eta_i h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_P \\ &+ \frac{1}{2} \xi_i^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_P + \xi_i \eta_i h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_P \\ &+ \frac{1}{2} \eta_i^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_P + \dots \end{aligned}$$

e considerando a Equação 4.4, tem-se:

$$\begin{aligned} u_P (\sum \alpha_i - \alpha_c) + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_P \sum \xi_i \alpha_i + h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_P \sum \eta_i \alpha_i \\ + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_P \sum \xi_i^2 \alpha_i + h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_P \sum \xi_i \eta_i \alpha_i \\ + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_P \sum \eta_i^2 \alpha_i = -G_P \end{aligned} \quad (4.5)$$

A comparação da Equação 4.3 com a 4.5 fornece os valores de α_i . Conhecidos esses α_i tem-se a aproximação L_h para L , dada pela Equação 4.4.

4.3.1 - SOLUÇÃO ENCONTRADA ITERATIVAMENTE (SOR)

Usando-se uma grade como a da Figura 4.2, numerando-a consistentemente para esquemas iterativos de ponto (e.g. Nakamura, 1977) e encontrando os valores de α_i , obtêm-se a seguinte aproximação para $L_h u = G$, onde, sem perda de generalidade (Young and Gregory, 1973), considerou-se $B(x,y) = 0$:

$$a_{ij}u_{i+1,j} + c_{ij}u_{i,j+1} + d_{ij}u_{i-1,j} + e_{ij}u_{i,j-1} - f_{ij}u_{ij} = G_{ij}, \quad (4.6a)$$

onde

$$a_{ij} := A_{ij}/h^2 + D_{ij}/(2h), \quad (4.6b)$$

$$c_{ij} := C_{ij}/k^2 + E_{ij}/(2k), \quad (4.6c)$$

$$d_{ij} := A_{ij}/h^2 - D_{ij}/(2h), \quad (4.6d)$$

$$e_{ij} := C_{ij}/k^2 - E_{ij}/(2k), \quad (4.6e)$$

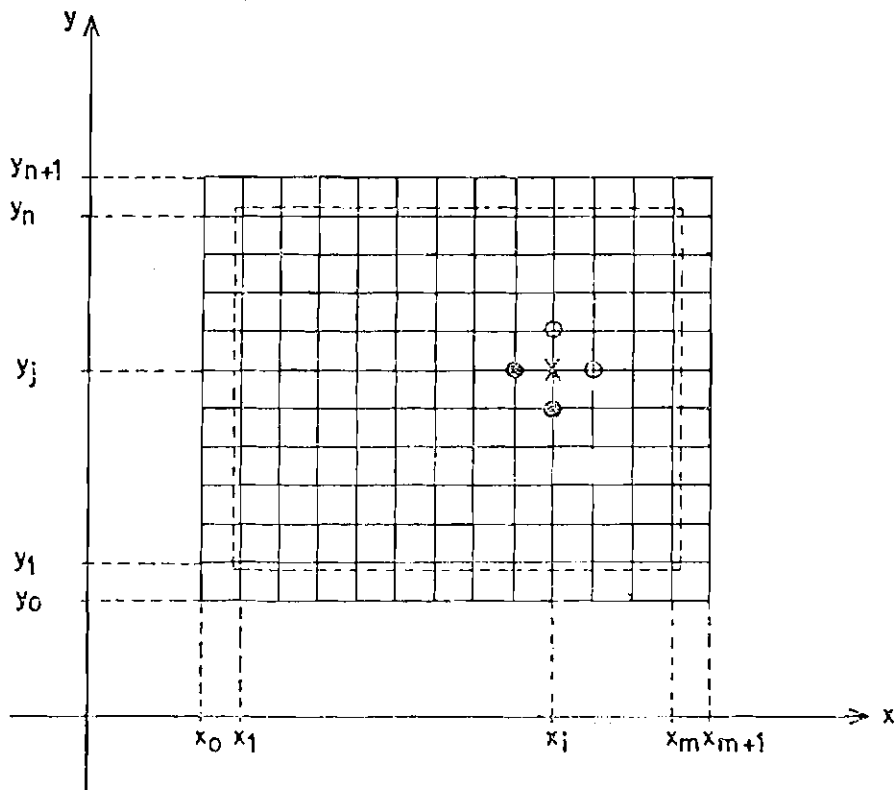
$$f_{ij} := 2 A_{ij}/h^2 + 2 C_{ij}/k^2 - F_{ij}, \quad (4.6f)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$; $h := x_{i+1} - x_i$, $k := y_{j+1} - y_j$ são os espaçamentos de grade nas direções x e y , respectivamente. A notação A_{ij} , por exemplo, significa $A(x_i, y_j)$. Os pontos $x = x_0$, $x = x_{m+1}$, $y = y_0$ e $y = y_{n+1}$ representam o contorno.

Esse sistema de equações lineares pode ser escrito compactamente na forma:

$$\underline{A} \underline{u} = \underline{b}, \quad (4.7)$$

onde \underline{A} é a matriz-coeficiente; o vetor \underline{u} contém os valores u_{ij} que se desejam encontrar; e o vetor \underline{b} contém os valores G_{ij} , exceto nos pontos vizinhos do contorno.



Vizinhança de $P(x_j, y_j)$:

- ⊙ valores conhecidos na iteração $w+1$;
- ⊗ valor a ser encontrado na iteração $w+1$;
- valores desconhecidos ainda. Usa os valores da iteração w .

Fig. 4.2 - Grade ilustrativa do método SOR.

Notar a inter-relação existente na vizinhança do ponto $P(x_j, y_j)$.

A matriz A pode ser colocada na forma $A = D - L - S$, onde D é uma matriz diagonal, L é uma matriz triangular inferior e S é uma matriz triangular superior. Smith (1978) mostra que este sistema de equações pode ser resolvido usando o esquema iterativo SOR ("Successive Over-relaxation"):

$$\underline{u}^{(w+1)} = (\underline{I} - \omega \underline{D}^{-1} \underline{L})^{-1} \{ (1-\omega) \underline{I} + \omega \underline{D}^{-1} \underline{S} \} \underline{u}^{(w)} + (\underline{I} - \omega \underline{D}^{-1} \underline{L})^{-1} \omega \underline{D}^{-1} \underline{b}. \quad (4.8)$$

Na referência supra-citada há uma discussão das condições necessárias e suficientes para a convergência do método. Notar que \underline{I} é a matriz identidade.

O parâmetro de relaxação ω pertence ao intervalo $[1,2)$. Quando $\omega = 1$ tem-se o método iterativo de Gauss-Seidel. A iteração acaba quando for satisfeito

$$\text{MAX}_{i,j} \left| u_{ij}^{(w+1)} - u_{ij}^{(w)} \right| \leq \delta \quad (\text{critério absoluto}), \quad \text{ou} \quad (4.9a)$$

$$\text{MAX}_{i,j} \left| \frac{u_{ij}^{(w+1)} - u_{ij}^{(w)}}{u_{ij}^{(w+1)}} \right| \leq \varepsilon \quad (\text{critério relativo}), \quad (4.9b)$$

ou ainda o primeiro que ocorrer, onde δ e ε são especificados de antemão.

4.3.2 - SOLUÇÃO ENCONTRADA DIRETAMENTE (BTM)

Se no cálculo de L_h em vez de se usar de uma numeração consistente para esquemas iterativos de ponto, usar-se de uma numeração para esquemas iterativos de linha, obtêm-se o sistema linear (com $B(x,y) = 0$):

$$P_i u_{i-1} + Q_i u_i + T_i u_{i+1} = r_i \quad (4.10a)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$, onde \underline{P}_i e \underline{T}_i são matrizes diagonais (de ordem $n \times n$), e \underline{Q}_i é uma matriz tridiagonal (de mesma ordem) da forma:

$$\underline{P}_i := \underline{I}/h^2 - \underline{p}_i/(2h), \quad (4.10b)$$

$$\underline{Q}_i := \underline{q}_i - 2 \underline{I}/h^2, \quad (4.10c)$$

$$\underline{T}_i := \underline{I}/h^2 + \underline{p}_i/(2h), \quad (4.10d)$$

onde \underline{I} é a matriz identidade (de ordem $n \times n$), e \underline{u}_i e \underline{r}_i são vetores com n elementos cada:

$$\underline{u}_i := \begin{bmatrix} u(x_i, y_1) \\ u(x_i, y_2) \\ \vdots \\ u(x_i, y_n) \end{bmatrix}, \quad (4.10e)$$

$$\underline{r}_i := \begin{bmatrix} G_{i1}/A_{i1} - C_{i1}u_{i0} \\ G_{i2}/A_{i2} \\ \vdots \\ G_{i,n-1}/A_{i,n-1} \\ G_{in}/A_{in} - E_{in}u_{i,n+1} \end{bmatrix}, \quad (4.10f)$$

e ainda,

$$\underline{p}_i := \begin{bmatrix} D_{i1}/A_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{i2}/A_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{in}/A_{in} \end{bmatrix}, \quad (4.10g)$$

$$\underline{q}_i := \begin{bmatrix} F_{i1} & E_{i1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_{i2} & F_{i2} & E_{i2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{in} & F_{in} \end{bmatrix}, \quad (4.10h)$$

com

$$C_{ij} := \frac{1}{A_{ij}} \left(\frac{C_{ij}}{k^2} - \frac{E_{ij}}{2k} \right), \quad (4.10i)$$

$$F_{ij} := \frac{1}{A_{ij}} \left(F_{ij} - \frac{2}{k^2} C_{ij} \right), \quad (4.10j)$$

$$E_{ij} := \frac{1}{A_{ij}} \left(\frac{C_{ij}}{k^2} + \frac{E_{ij}}{2k} \right). \quad (4.10k)$$

Os vetores \underline{u}_0 e \underline{u}_{m+1} contêm os n valores da função nos pontos do contorno $x = x_0$ e $x = x_{m+1}$, respectivamente. A Equação 4.10 representa um sistema de equações lineares da forma $\underline{Z} \underline{U} = \underline{R}$, onde \underline{Z} é uma matriz-blocada tridiagonal ("Block Tridiagonal Matrix" - BTM) de ordem $m \times m$, e \underline{U} e \underline{R} são vetores-blocados com m elementos cada, sendo

$$\underline{Z} := \begin{bmatrix} \underline{Q}_1 & \underline{I}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \underline{P}_2 & \underline{Q}_2 & \underline{I}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{P}_3 & \underline{Q}_3 & \underline{I}_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{P}_{m-1} & \underline{Q}_{m-1} & \underline{I}_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \underline{P}_m & \underline{Q}_m \end{bmatrix}, \quad (4.11a)$$

$$\underline{R} := \begin{bmatrix} \underline{r}_1 - \underline{P}_1 \underline{u}_0 \\ \underline{r}_2 \\ \vdots \\ \underline{r}_{m-1} \\ \underline{r}_m - \underline{T}_m \underline{u}_{m+1} \end{bmatrix}, \quad (4.11b)$$

$$\underline{U} := \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \vdots \\ \underline{u}_m \end{bmatrix}. \quad (4.11c)$$

A solução é encontrada diretamente (com a eliminação de Gauss, por exemplo) ou por

$$\underline{U} = \underline{Z}^{-1} \underline{R}. \quad (4.11d)$$

4.4 - SOLUÇÃO ENCONTRADA POR INTEGRAÇÃO DIRETA (VARREDURA)

A obtenção da Equação 4.4 para a direção y , discretizada nos níveis $y = y_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, fornece

$$\underline{u}'' + \underline{p} \underline{u}' + \underline{q} \underline{u} = \underline{r}, \quad (4.12)$$

onde os vetores \underline{u} e \underline{r} e as matrizes \underline{p} e \underline{q} são como na Equação 4.10, são que definidos em um ponto x qualquer, $\alpha \leq x \leq \beta$ (Figura 4.3). Os vetores \underline{u}' e \underline{u}'' representam a primeira e a segunda derivadas de \underline{u} .

A solução da Equação 4.12 representa um problema de contorno para um sistema de equações diferenciais ordinárias. A literatura existente é bastante escassa sob o ponto de vista de integração direta. Usualmente se encontra material relativamente farto para proble

mas de condição inicial. Tenta-se fornecer uma nova abordagem para a resolução da Equação 4.12.

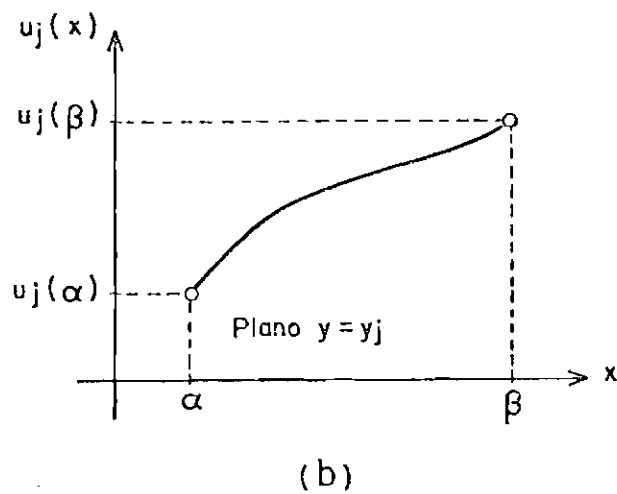
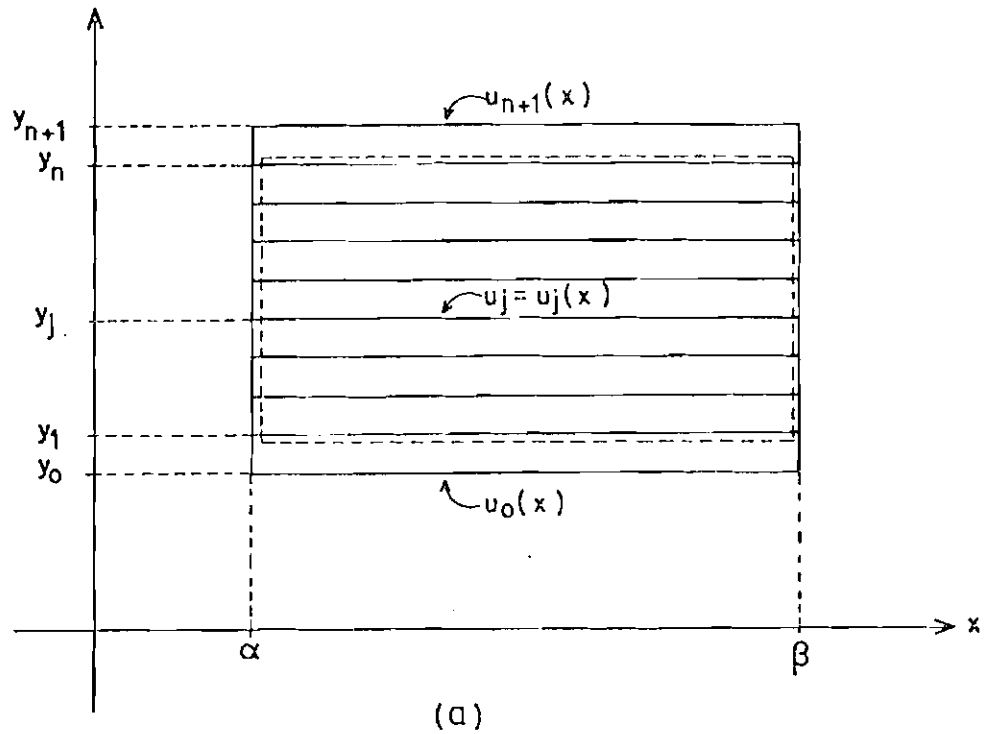


Fig. 4.3 - Grade ilustrativa do método de Varredura.

(a) Os níveis $y = y_0$ e $y = y_{n+1}$ representam os contornos inferior e superior de Dirichlet, respectivamente. (b) Variação da função u em um plano genérico $y = y_j$.

Na forma mais completa, a Equação 4.12 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \underline{u}'' + \underline{p} \underline{u}' + \underline{q} \underline{u} &= \underline{r}, \\ \underline{u}(\alpha) &= \underline{\gamma}_1, \\ \underline{u}(\beta) &= \underline{\gamma}_2, \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde os vetores $\underline{\gamma}_1$ e $\underline{\gamma}_2$ (com n elementos cada) representam as condições de contorno em $x = \alpha$ e $x = \beta$.

Com a mudança de variável $\underline{u}' = \underline{v}$, a Equação 4.13 torna-se um sistema de equações diferenciais da forma:

$$\begin{aligned} \underline{u}' &= \underline{v}, \\ \underline{v}' &= -\underline{q} \underline{u} - \underline{p} \underline{v} + \underline{r}, \\ \underline{u}(\alpha) &= \underline{\gamma}_1, \\ \underline{u}(\beta) &= \underline{\gamma}_2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Considere-se o sistema (esquecendo-se por um momento a segunda condição de contorno):

$$\begin{aligned} \underline{u}' &= \underline{v}, \\ \underline{v}' &= -\underline{q} \underline{u} - \underline{p} \underline{v} + \underline{r}, \\ \underline{u}(\alpha) &= \underline{\gamma}_1, \\ \underline{v}(\alpha) &= \underline{\lambda}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde $\underline{\lambda}$ é um vetor (n elementos) ainda desconhecido. Dado o vetor $\underline{\lambda}$, este sistema pode ser resolvido por métodos numéricos usuais, visto ser um problema de condição inicial comum. Com sua solução $\underline{u}(x; \underline{\lambda})$, parametrizada em $\underline{\lambda}$, define-se o vetor

$$\underline{f}(x;\underline{\lambda}) := \underline{u}(x;\underline{\lambda}) - \underline{y}_2. \quad (4.16)$$

Se $\underline{f}(\beta;\underline{\lambda})$ se anular, a solução $\underline{u}(x;\underline{\lambda})$ do Sistema 4.15 será também a solução do Sistema 4.14 e, por conseguinte, da Equação 4.13, a proposição inicial. Pode-se mostrar que

$$\underline{f}(x;\underline{\lambda}) = \underline{E}(x,\alpha) \underline{\lambda} + \underline{L}(x,\alpha), \quad (4.17)$$

onde $\underline{E}(x,\alpha)$ é uma matriz de ordem $n \times n$ e $\underline{L}(x,\alpha)$, um vetor com n elementos. Tanto \underline{E} como \underline{L} independem de $\underline{\lambda}$.

Portanto, o vetor $\underline{\lambda}_S$ que soluciona a Equação 4.13 deverá satisfazer $\underline{f}(\beta;\underline{\lambda}_S) = \underline{0}$, ou

$$\underline{\lambda}_S = - \underline{E}^{-1}(\beta,\alpha) \underline{L}(\beta,\alpha). \quad (4.18)$$

O vetor \underline{L} e a matriz \underline{E} podem ser encontrados por um algoritmo similar àquele usado para se encontrar a matriz de transição em sistemas lineares. Inicialmente resolve-se numericamente o Sistema 4.15 com $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}_0 = [0, 0, \dots, 0]^T$, e calcula-se $\underline{f}(\beta;\underline{\lambda}_0)$ com a Equação 4.16. É fácil ver que

$$\underline{L}(\beta,\alpha) = \underline{f}(\beta;\underline{\lambda}_0). \quad (4.19)$$

Em seguida resolve-se novamente o Sistema 4.15, com $\underline{\lambda}_1 = [\omega_1, 0, \dots, 0]^T$, ω_1 escalar não-nulo, e obtêm-se $\underline{f}(\beta;\underline{\lambda}_1)$. Consegue-se assim calcular a primeira coluna de $\underline{E}(\beta,\alpha)$:

$$\begin{bmatrix} E_{11}(\beta,\alpha) \\ E_{21}(\beta,\alpha) \\ \vdots \\ E_{n1}(\beta,\alpha) \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega_1} [\underline{f}(\beta;\underline{\lambda}_1) - \underline{L}(\beta,\alpha)]. \quad (4.20)$$

Resolvendo o Sistema 4.15 com $\underline{\lambda}_2 = [0, \omega_2, 0, \dots, 0]^T$, $\omega_2 \neq 0$, encontra-se a segunda coluna de $\underline{E}(\beta, \alpha)$, e assim sucessivamente até $\underline{\lambda}_n = [0, 0, \dots, 0, \omega_n]^T$, $\omega_n \neq 0$; a solução da Equação 4.13 será a solução do Sistema 4.15 com $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}_S$. Em geral, considera-se inicialmente $\omega_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Com uma escolha apropriada desses ω_j os erros numéricos (e sua propagação) podem ser minimizados. Tal seleção pode ser feita iterativamente.

O Sistema 4.15 pode ser resolvido com um algoritmo RK ou com um algoritmo $\rho - \sigma$. Embora o número de equações para integração possa ser muito grande, o número de operações para calcular o segundo membro da segunda equação desse sistema não o é, pois as matrizes \underline{p} e \underline{q} são diagonal e tridiagonal, respectivamente. A porção ocupada da memória de um computador é pequena, comparada com aquela necessária nos métodos de Diferença Finita.

4.5 - ELEMENTOS FINITOS

Seja uma equação diferencial linear dada pelo operador L , na forma:

$$Lu(\underline{x}) = G(\underline{x}). \quad (4.21)$$

Pode-se tentar uma solução aproximada da Equação 4.21 do tipo:

$$\psi(\underline{x}) = \sum_{j=1}^M a_j f_j(\underline{x}), \quad (4.22)$$

onde a_j são coeficientes ainda indeterminados e f_j são funções previamente estabelecidas. Em geral, $\psi(\underline{x})$ não satisfará exatamente a Equação 4.21, o que origina um resíduo local

$$r(\underline{x}) = L\psi(\underline{x}) - G(\underline{x}), \quad (4.23)$$

que não é nulo em toda região de interesse R. O objetivo é então encontrar os coeficientes a_j que anulem o resíduo total, isto é, a soma dos resíduos locais ponderados por um peso $w(\underline{x})$, dado por:

$$\int_R w(\underline{x}) r(\underline{x}) dV = 0. \quad (4.24)$$

Tomando-se M pesos independentes w_i , $i = 1, 2, \dots, M$, a Equação 4.24 pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^M \left[\int_R w_i(\underline{x}) Lf_j(\underline{x}) dV \right] a_j = \int_R w_i(\underline{x}) G(\underline{x}) dV, \quad (4.25)$$

o que torna possível o cálculo de a_j pela resolução do Sistema 4.25 de equações lineares.

O peso $w(\underline{x})$ pode ser escolhido de várias maneiras (e.g. Huebner, 1975; Nakamura, 1977; Connor and Brebbia, 1978; Norrie and De Vries, 1978; Jones, 1979), que representam vários métodos, dos quais os mais significativos são:

a) Método de amostragem - a equação diferencial é satisfeita exatamente em M pontos:

$$w_i(\underline{x}) = \delta(\underline{x} - \underline{x}_i). \quad (4.26)$$

b) Método de balanceamento global - a região R é dividida em M sub-regiões disjuntas R_i :

$$w_i(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \underline{x} \in R_i; \text{ e} \\ 0, & \text{se } \underline{x} \notin R_i. \end{cases} \quad (4.27)$$

c) Método dos mínimos quadrados - onde:

$$w_i(\underline{x}) = Lf_i(\underline{x}). \quad (4.28)$$

d) Método de Galerkin - as funções aproximadoras $f_i(\underline{x})$ são usadas como o peso:

$$w_i(\underline{x}) = f_i(\underline{x}). \quad (4.29)$$

Similarmente, existem várias opções para a função $f_j(\underline{x})$. Todas elas constituem o método dos *Resíduos Ponderados*. A principal dificuldade desses métodos é a escolha da função global, Equação 4.22 (e.g. Connor and Brebbia, 1978). Com o advento de computadores velocíssimos, a região de interesse pode ser dividida em inúmeras sub-regiões, e o método pode ser aplicado individualmente em cada uma delas, o que permite assim eliminar parte das dificuldades inerentes a uma aproximação global.

O método de Elementos Finitos consiste em subdividir a região R em sub-regiões, e , denominadas elementos finitos (Figura 4.4, no caso bidimensional). Os vértices de cada elemento são denominados *nós*, que são numerados globalmente em toda região (na figura têm-se 14 nós). Os nós são também numerados localmente (em cada elemento). Considera-se a escolha de Galerkin para os pesos e as funções polinomiais para f_j , o que caracteriza o EFG.

Para o caso de um campo elétrico irrotacional, a Equação 4.1 pode ser escrita como:

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u) = -G, \quad (4.30)$$

onde $\underline{\sigma}$ representa o tensor condutividade do meio anisotrópico, e u é o potencial elétrico. A Equação 4.30 é similar à Equação 4.21, com $L \equiv \underline{\nabla} \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla})$.

Considerando um elemento genérico e e que dentro desse elemento $u(\underline{x})$ varie aproximadamente (análogo à Equação 4.22) como

$$u(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{\ell} u_{k(j)}^e N_j^e(\underline{x}), \quad (4.31)$$

onde l é o número de nós do elemento, $u_k^e(j)$ é o valor aproximado de u no nó j do elemento e (correspondente à numeração global k), e $N_j^e(\underline{x})$ é a função interpoladora do nó j (que tem valor 1 nesse nó e se anula nos outros nós do elemento ou fora dele), o resíduo existente nesse elemento devido à Aproximação 4.31 pode ser calculado por

$$r^e = \int_e N_i^e \underline{\nabla} \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u) dV + \int_e N_i^e G dV, \quad (4.32)$$

e o resíduo total em toda região R , para todos os elementos, deve se anular:

$$\sum_e r^e = 0. \quad (4.33)$$

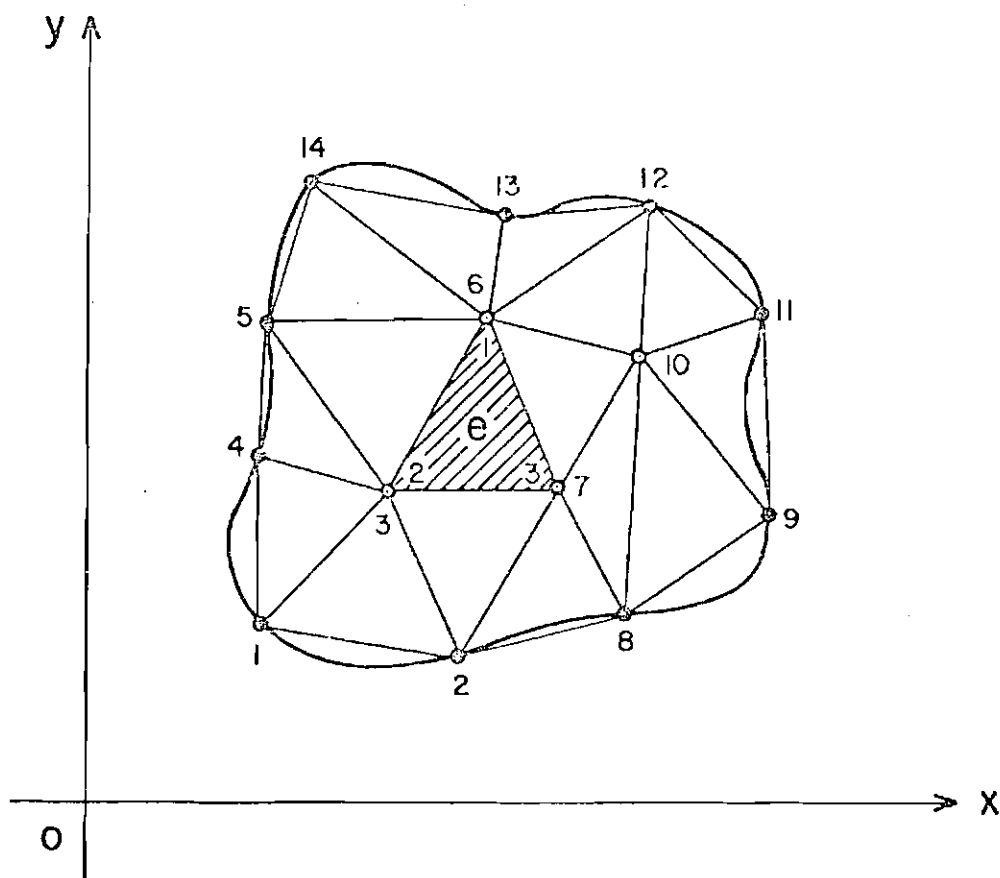


Fig. 4.4 - Grade ilustrativa do método de Elementos Finitos.

O elemento finito e (hachurado) é definido pelos três nós globais 6, 3 e 7, correspondentes à numeração local 1, 2 e 3, respectivamente.

Resolvendo a Equação 4.32 por partes tem-se

$$r^e = \int_{\Gamma} N_i^e (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u) \cdot \underline{n} \, dS - \int_{e^-} \underline{\nabla} N_i^e \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u) \, dV - D + \int_e N_i^e G \, dV, \quad (4.34)$$

onde Γ é o contorno do elemento finito, \underline{n} é um versor normal a Γ , D é a contribuição da descontinuidade de $\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u$ na separação entre o elemento e seus vizinhos, e e^- é o elemento sem uma faixa vizinha ao seu contorno. A parcela da descontinuidade D pode ser calculada aplicando-se o teorema de Gauss-Green a

$$\lim_{e^+, e^- \rightarrow e} \left[\int_{e^+} N_i^e \underline{\nabla} \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u) \, dV - \int_{e^-} N_i^e \underline{\nabla} \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u) \, dV \right] = D, \quad (4.35)$$

onde e^+ é o elemento acrescido de uma faixa externa vizinha ao seu contorno.

Pode-se mostrar que, considerando-se as Equações 4.34 e 4.35 na Equação 4.33, a parcela D e $\int_{\Gamma} N_i^e (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} u) \cdot \underline{n} \, dS$ se cancelam, exceto no contorno da região R . No contorno, entretanto, N_i^e se anula para todo elemento e . Então, da Equação 4.33 tem-se:

$$\sum_e \sum_{j=1}^{\ell} \int \underline{\nabla} N_i^e \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} N_j^e) u_{k(j)}^e \, dV = \sum_e \int_e N_i^e G \, dV \quad (4.36)$$

ou

$$\sum_e \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} u_{k(j)}^e = \sum_e \int_e N_i^e G \, dV, \quad (4.37a)$$

onde

$$a_{ij} = \int \underline{\nabla} N_i^e \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} N_j^e) dV \quad (4.37b)$$

pode ser calculado usando a teoria de elementos isoparamétricos (Zienkiewicz, 1977). Combinando a dupla somatória da Equação 4.37 com uma somatória única para todo o k, obtêm-se:

$$\sum_k b_{ik} u_k = c_i. \quad (4.38)$$

Com as condições de contorno (Huebner, 1975; Norrie and De Vries, 1978) este sistema torna-se finalmente:

$$\sum_k \underline{B}_{ik} u_k = C_i, \quad (4.39)$$

onde \underline{B} é uma matriz do tipo banda, com largura dependente da numeração dos nós, e de ordem dada pelo número total de nós.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

5.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, aplicações dos métodos numéricos são discutidas, modelando-se vários fenômenos apresentados anteriormente, sem perder de vista, contudo, as medidas obtidas com o detector a bordo de balões estratosféricos. Em que razão os campos medidos com balão representam campos elétricos ionosféricos, em períodos magneticamente calmos ou perturbados, é uma questão inicial que pode ou não invalidar tal tipo de medida.

Em altas latitudes, estudos anteriores (Kellogg and Weed, 1969; Mozer, 1971a; Dejnakarindra, 1974; Park, 1976) mostram que os campos elétricos ionosféricos podem ser mapear para baixo eficientemente. Os estudos de Park (1976), que são bastante completos e utilizam técnicas numéricas usuais (SOR), mostram que campos elétricos ionosféricos com escala de variação, L , da ordem de 100km ou maiores podem atingir 10km de altura com pouca atenuação (Figura 5.1), o que indica que esses campos podem ser observados com detectores a bordo de balões estratosféricos. Em baixas latitudes ou na região equatorial, onde o importante fato de o campo geomagnético não estar mais na direção vertical introduz novo comportamento, muito pouco foi realizado até agora. Notar que da literatura existente sobre campos elétricos em latitudes baixas e equatoriais (Fejer et alii, 1979a; Gonzales et alii, 1979; Blanc and Richmond, 1980), pode-se esperar em latitudes da Anomalia Magnética do Atlântico Sul a presença de campos ionosféricos na direção leste-oeste, com valores da ordem de 3mV/m ou menores. Essa nova situação, baixas latitudes e campo geomagnético horizontal, é simulada adiante. Como se verá, o mapeamento dos campos elétricos ionosféricos para alturas de balão é menos eficiente que em latitudes altas.

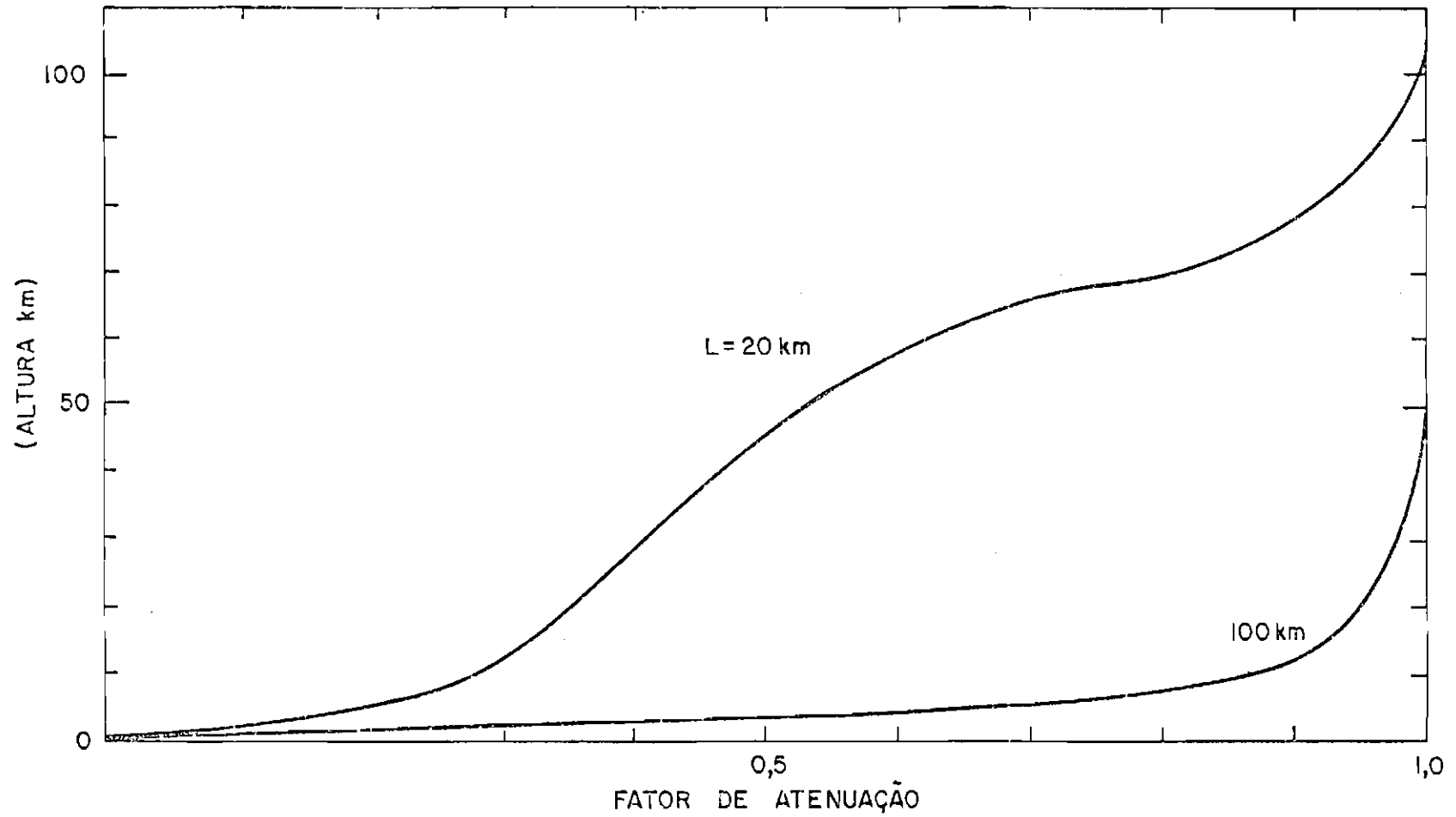


Fig. 5.1 - Atenuação do campo elétrico ionosférico (altas latitudes).

FONTE: Park (1976), p. 170.

Devido ao relevo terrestre, campos elétricos orográficos também podem participar dos valores medidos em balão. Sua influência será também simulada, o que mostrará que, no caso, ela é desprezível.

Os grandes e inesperados valores do campo elétrico horizontal, até 10mV/m, mostrados na Figura 3.8, foram medidos durante um intervalo de tempo no qual o satélite geoestacionário SMS-2 mostrou céu limpo abaixo da região de observação, sem nenhuma nuvem em alturas elevadas dentro de uma distância radial de pelo menos 150km dos pontos sub-balão. O trabalho de Burke (1975) indica que nuvens de tempestades podem dar campos elétricos horizontais em alturas de balão estratosférico maiores que 1mV/m, para distâncias radiais a partir da nuvem da ordem de 80km ou menores.

Por último, outra provável influência é simulada; constitui a distorção do campo elétrico de tempo bom por uma irregularidade presente na condutividade atmosférica. Sua importância em relação às medidas obtidas em vôo de balão estratosférico será realçada.

Essas possíveis influências podem ser formuladas, em geral, mediante o uso da Equação 4.1. Para um sistema de correntes solenoidal e campo elétrico irrotacional, tem-se

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{J} = 0, \quad (5.1a)$$

com

$$\underline{J} := \underline{\sigma} \cdot \underline{E}, \quad (5.1b)$$

$$\underline{E} := - \underline{\nabla} \phi, \quad (5.1c)$$

onde \underline{J} é a densidade de corrente elétrica; \underline{E} , o campo elétrico; $\underline{\sigma}$, o tensor condutividade elétrica; e ϕ , o potencial elétrico.

Com um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) - x na direção sul, y na direção leste, e z para cima - a Equação 5.1 pode ser escrita da seguinte forma, expandida:

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_0 C^2 + \sigma_1 S^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sigma_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + (\sigma_0 S^2 + \sigma_1 C^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2(\sigma_0 - \sigma_1) SC \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \\
 & + \left[\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} C^2 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} S^2 - \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} S + \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} \right) SC \right] \frac{\partial \phi}{\partial x} + \\
 & \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} S + \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} C \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \\
 & + \left[\left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \right) SC + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial z} S^2 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} C^2 \right] \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

com o tensor condutividade $\underline{\underline{\sigma}}$ dado por

$$\underline{\underline{\sigma}} := \begin{bmatrix} \sigma_1 S^2 + \sigma_0 C^2 & \sigma_2 S & (\sigma_0 - \sigma_1) SC \\ -\sigma_2 S & \sigma_1 & \sigma_2 C \\ (\sigma_0 - \sigma_1) SC & -\sigma_2 C & \sigma_1 C^2 + \sigma_0 S^2 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

onde $S = \sin I$, $C = \cos I$, e I é o ângulo de inclinação ("dip angle") do campo geomagnético. As condutividades σ_0 , σ_1 e σ_2 são as condutividades direta, Pedersen e Hall, respectivamente.

Pode-se mostrar que em regiões onde não existam gradientes horizontais a Equação 5.2 fornece:

$$\phi(z) = \phi(z_m) \left(\int_0^z \frac{dz}{\sigma_0 S^2 + \sigma_1 C^2} \right) \left(\int_0^{z_m} \frac{dz}{\sigma_0 S^2 + \sigma_1 C^2} \right)^{-1}, \quad (5.4)$$

onde z_m é uma altura de referência (usualmente no nível da ionosfera). Notar que $\phi(0) = 0$ e que, no caso de altas latitudes, o comportamento de $\phi(z)$, $0 \leq z \leq z_m$ é dado pela condutividade direta e no de baixas latitudes, pela condutividade Pedersen (como indicado explicitamente pelos fatores S^2 e C^2). Indo das regiões de latitudes altas para o equador, a condutividade Pedersen vai se tornando mais importante no cálculo de $\phi(z)$, em detrimento da condutividade direta. A variação de $\phi(z)$ com a altura é associada ao campo elétrico de tempo bom. O crescimento quase exponencial da condutividade com a altura provoca uma variação do potencial $\phi(z)$ bem mais rápida na baixa atmosfera do que na média, o que indica que a queda do potencial $\phi(z_m)$ se verifica basicamente na camada inferior da atmosfera (Figura 2.34). Notar que dois perfis diferentes de condutividade com, entretanto, uma mesma escala de altura $H(z)$ (definida por $1/H := (1/\sigma)d\sigma/dz$ ou $1/H := d(\ln \sigma)/dz$), apresentam a mesma variação para $\phi(z)$ com z , ou seja, o mesmo campo elétrico vertical. Neste caso, os perfis se diferenciam um do outro apenas por um fator multiplicativo, independente da altura. Para a região isotrópica da atmosfera, o comportamento de $\phi(z)$ em relação ao ângulo de inclinação, dado pela Equação 5.4, depende unicamente da variação intrínseca das condutividades direta e Pedersen com a latitude (pois $S^2 + C^2 = 1$).

5.2 - MODELOS PARA OS CAMPOS ELÉTRICOS

Em parte devido à lacuna existente sobre a região equatorial de alguns tópicos discutidos anteriormente, os modelos serão aplicados antes de tudo para o equador. Nessa região e em baixas latitudes ($I \approx 0$), a direção quase horizontal do campo geomagnético introduz alguma dificuldade na resolução da Equação 5.1 (ou 5.2), como discutido em Burke (1975). A presente discussão constitui assim uma extensão de trabalhos em regiões de altas latitudes (e.g. Burke, 1975; Dejnakarindra, 1974; Park, 1976).

5.2.1 - ABORDAGEM BIDIMENSIONAL

Como um caminho natural para uma simulação mais completa, inicialmente considerou-se uma modelagem bidimensional.

5.2.1.1 - MAPEAMENTO DO CAMPO ELÉTRICO IONOSFÉRICO

Para a região equatorial, a Equação 5.2 fica:

$$\sigma_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \sigma_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (5:5)$$

cuja solução pode ser obtida considerando-se as condições de contorno apropriadas. No contorno inferior, no chão, $\phi = 0$; no superior, deve ser especificada a variação de $\phi_m(y) := \phi(y, z_m)$, onde z_m representa a altura desse contorno na ionosfera (Park, 1976). No presente estudo adotou-se $z_m = 110\text{km}$ (região E). Em pontos muito afastados da origem $y = 0$, a solução dessa equação deve reproduzir o sistema de correntes de tempo bom, representado pela Equação 5.4. Assim, para os contornos laterais,

$$\phi(y \rightarrow \pm \infty, z) = \phi(y \rightarrow \pm \infty, z_m) \left(\int_0^z \frac{dz}{\sigma_1} \right) \left(\int_0^{z_m} \frac{dz}{\sigma_1} \right)^{-1}. \quad (5.6)$$

Introduzindo a variável $p = \text{arc tg}(\alpha y)$, a Equação 5.5 torna-se:

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial p} + E \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (5.7a)$$

onde

$$A := \alpha^2 \sigma_1 (1 + \alpha^2 y^2)^{-2}, \quad (5.7b)$$

$$C := \sigma_1, \quad (5.7c)$$

$$D := \alpha \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} \right) (1 + \alpha^2 y^2)^{-1} - 2\alpha^3 y \sigma_1 (1 + \alpha^2 y^2)^{-2}, \quad (5.7d)$$

$$E := \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}. \quad (5.7e)$$

Uma característica desta equação, não existente em altas latitudes, é a influência da condutividade Hall, σ_2 , em troca do desaparecimento da condutividade direta, σ_0 .

Na solução da Equação 5.7 foram utilizados os métodos SOR, Varredura e BTM. O SOR, bastante usado em outros estudos, mostrou-se lento ou mesmo inapropriado (não-convergente); o método de Varredura é sensível às variações bruscas dos parâmetros do problema (lembrar que a condutividade Hall na região isotrópica é nula, subindo bruscamente de valor na altura de transição entre as regiões isotrópica e anisotrópica), e não converge para a solução desejada, pois em última análise é um simples integrador (isto indica a necessidade de um integrador mais robusto para o método); o BTM, por outro lado, mostrou-se à altura do problema.

Na Figura 5.2 tem-se o modelo de condutividade adotado, apropriado para o meio-dia e regiões equatoriais e de baixas latitudes (Webb, 1974; Forbes and Lindzen, 1976a), comparado com vários outros perfis. Os perfis de Cole e Pierce (1965), Mozer e Serlin (1969) e Paltridge (1965) referem-se à condutividade direta σ_0 . O crescimento exponencial da condutividade com a altura torna o mapeamento de cima para baixo mais eficiente que de baixo para cima (Park, 1976). Considerando um campo elétrico ionosférico, $E_{y_0} := -d\phi_m(y)/dy$, que existe na altura $z = z_m$, desde $y = -L/2$ até $+L/2$ (Figura 5.3a), com um potencial ionosférico de $\phi_0 = 300\text{kV}$ (levemente maior que 291kV, como discu

tido no Capítulo 2), a variação horizontal do campo elétrico horizontal normalizado em relação ao campo elétrico ionosférico E_{y_0} , em alturas de balão estratosférico ($z = 31\text{km}$), é dada na Figura 5.3b, mostrando uma forte influência do valor de L . Em geral, quanto mais próximo do centro estiver o balão, menor será a atenuação de E_{y_0} detectada por ele. Os parâmetros L e $\Delta\phi$ caracterizam o campo elétrico ionosférico.

A Figura 5.4, análoga à Figura 5.1, mostra novos resultados referentes à atenuação (em $y = 0$) de E_{y_0} no seu mapeamento para baixo, para os valores de $L = 10, 20, 50, 100, 200$ e 1000km ; isto é, o que acontece com a componente leste-oeste do campo elétrico ionosférico quando se consideram algumas distâncias características de variação desse campo. Pode-se ver que para $L \geq 100\text{km}$, em alturas de balão, o campo elétrico ionosférico sofre pouca atenuação. Próximo ao chão, independentemente do L considerado, a atenuação é quase completa. As curvas tracejadas da Figura 5.4 mostram a atenuação que ocorre na região equatorial da componente norte-sul do campo elétrico ionosférico para $L = 50$ e 200km , obtida de maneira análoga à componente leste-oeste. Valores de L maiores que 200km já não estariam bem representados nessa aproximação equatorial. Notar que agora se considera o mapeamento para baixas alturas em um plano meridional xz (em lugar de um plano zonal yz). A componente norte-sul porventura existente na ionosfera (pois as linhas de força altamente condutoras do campo geomagnético são horizontais, isto é, na direção dessa componente) sofre uma atenuação maior que a leste-oeste, o que indica que em alturas de balão ela é também bem menor que essa componente.

A Figura 5.5 é um exemplo da configuração das isolinhas do campo elétrico horizontal existente entre o solo e 110km de altura. No caso, $E_{y_0} = 1\text{mV/m}$ e $L = 50\text{km}$.

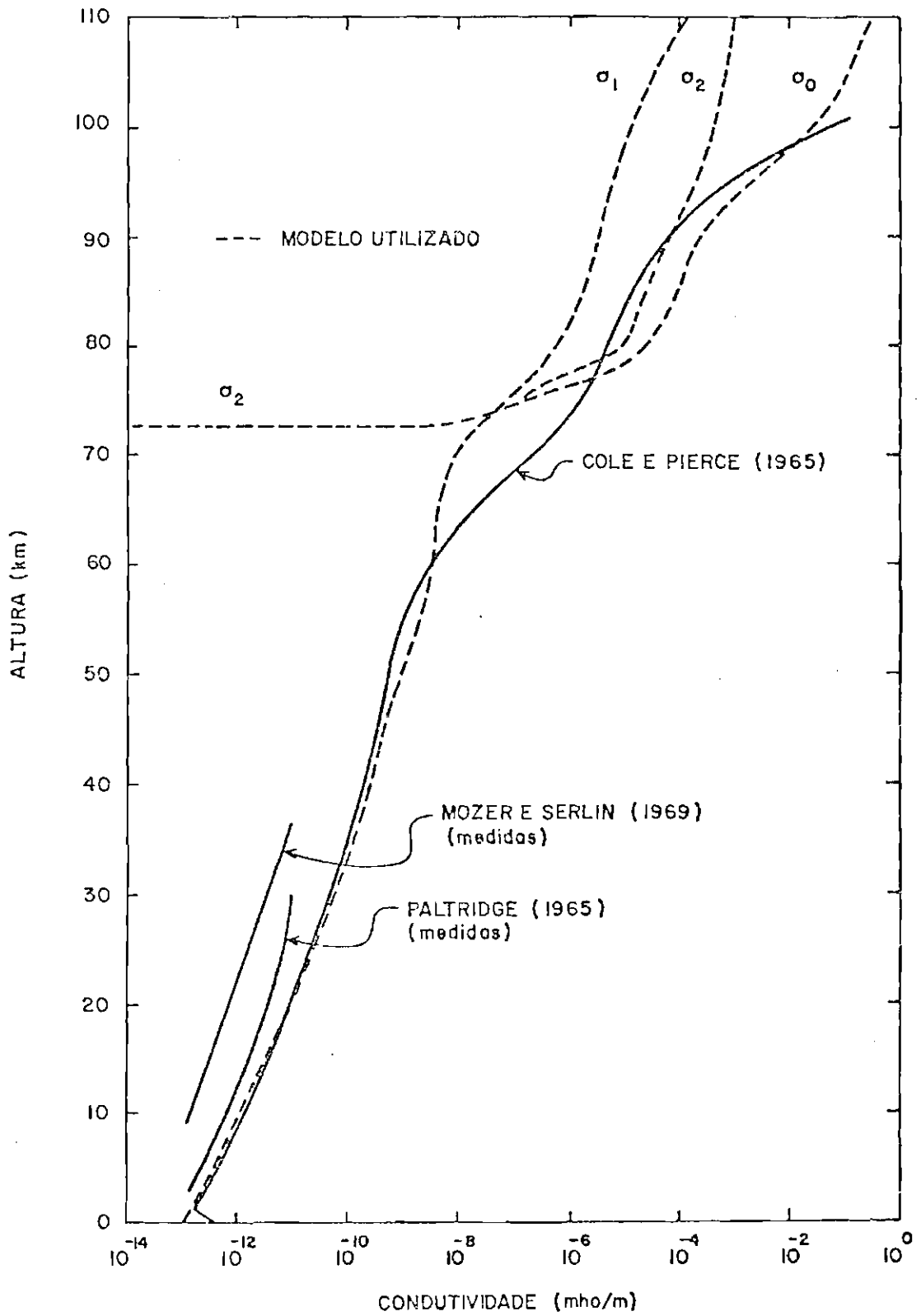


Fig. 5.2 - Modelo de condutividade.

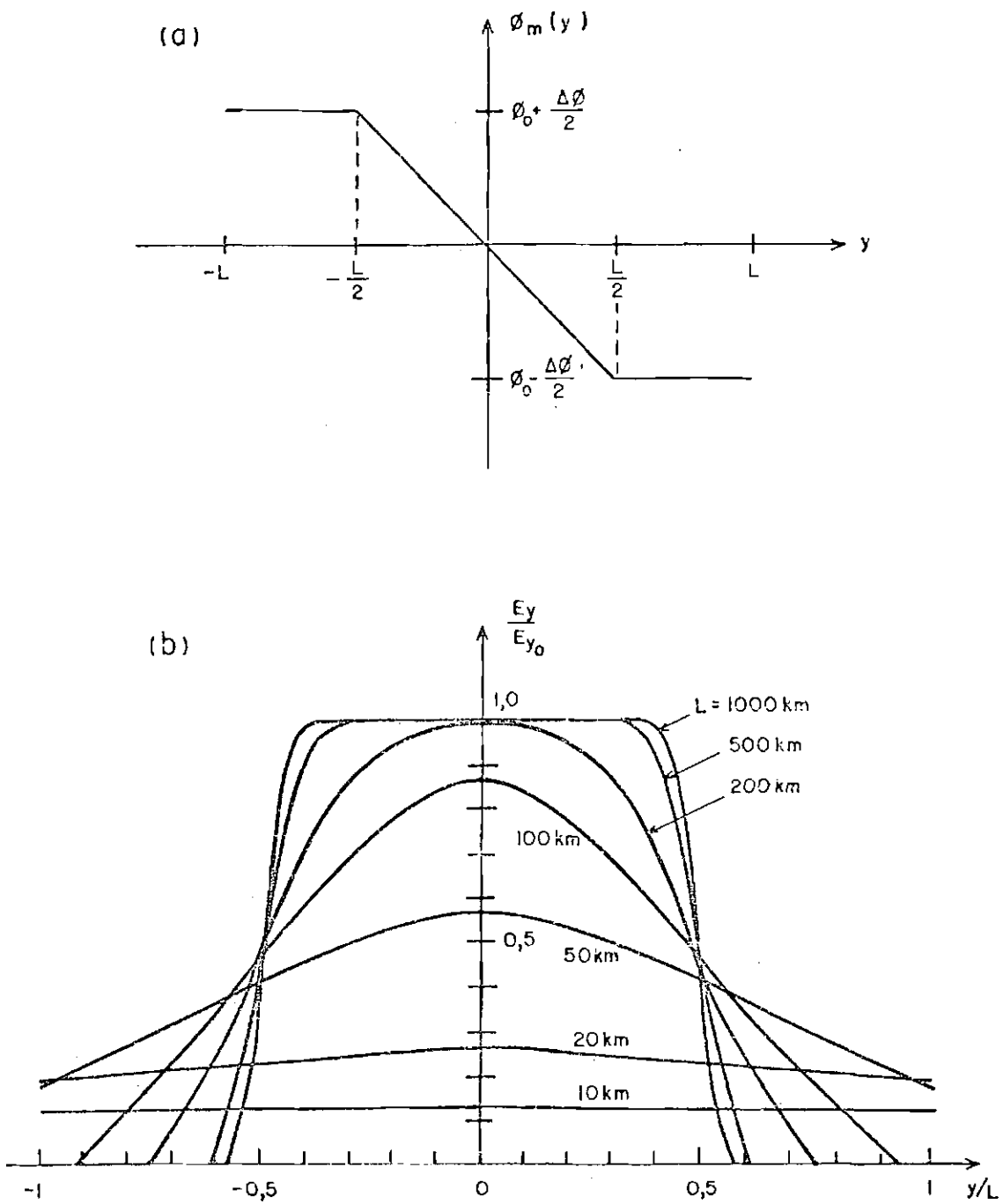


Fig. 5.3 - Mapeamento do campo el̄trico ionosf̄rico.

(a) Distribuīo horizontal do potencial ionosf̄rico em $z = z_m$. (b) Variāo do campo el̄trico horizontal (normalizado em relāo ao ionosf̄rico) com a dist̄ncia horizontal normalizada em $z = 31\text{km}$.

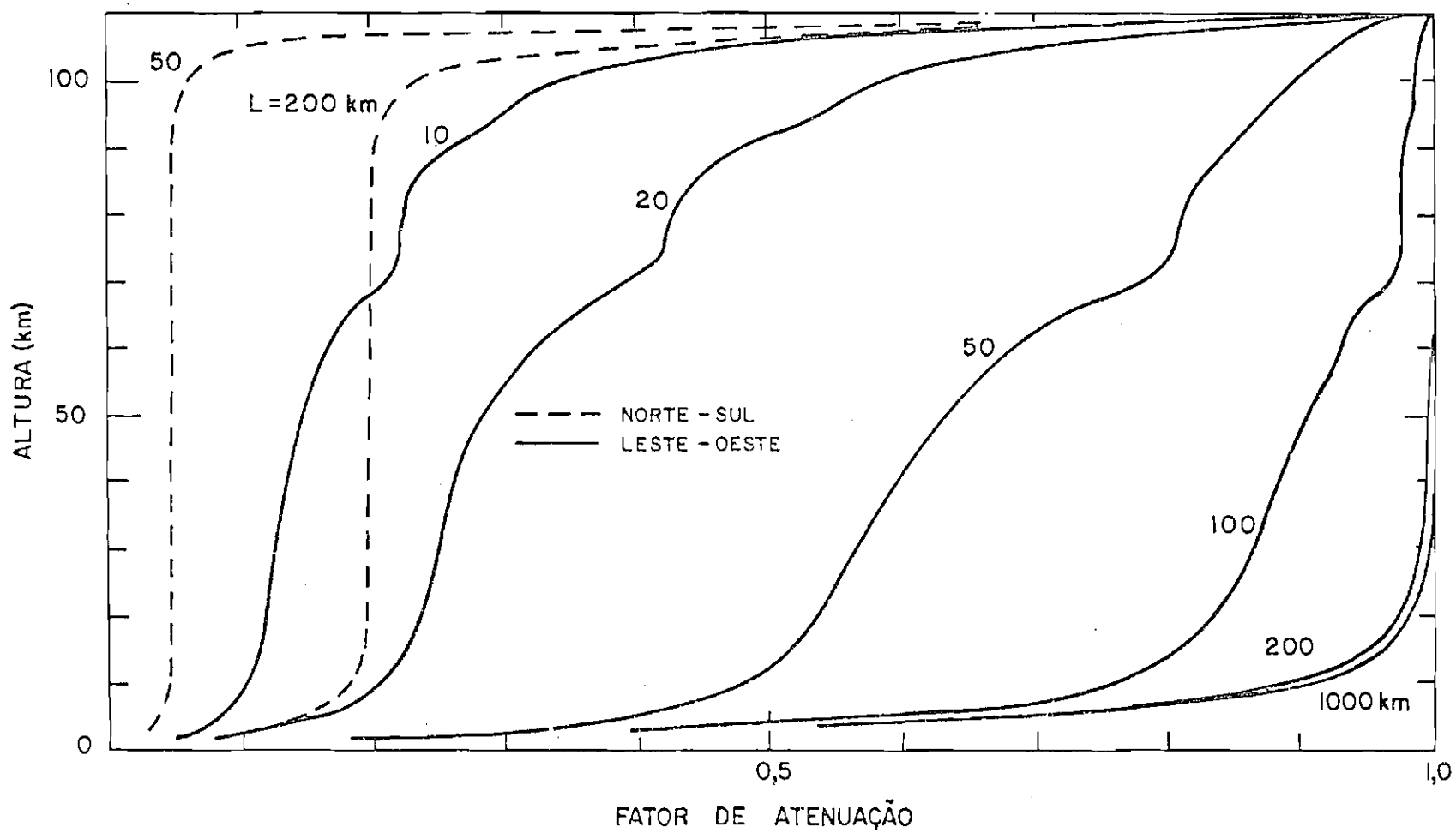


Fig. 5.4 - Atenuação do campo elétrico ionosférico (região equatorial).

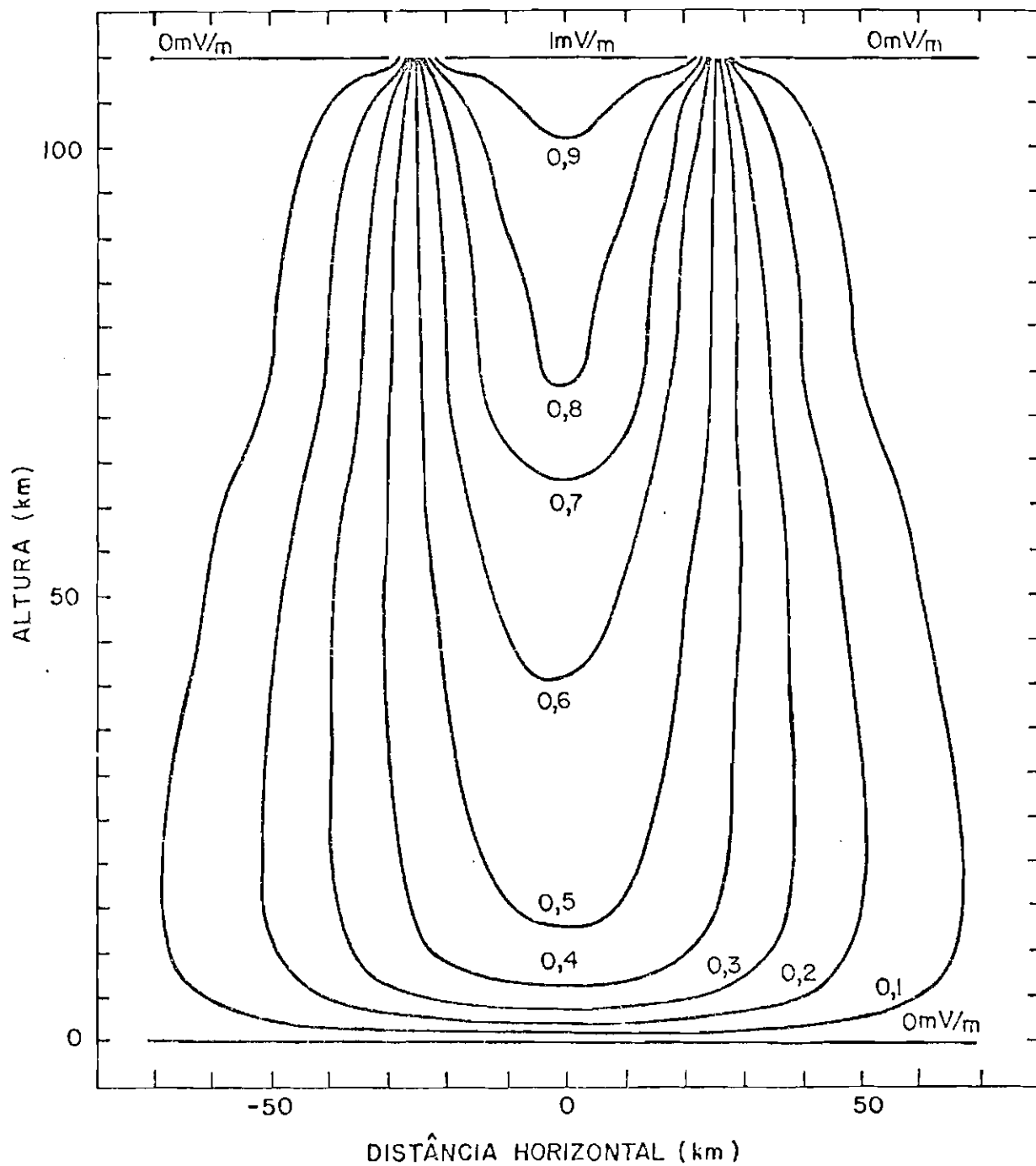


Fig. 5.5 - Mapeamento do campo elétrico ionosférico $E_{y_0} = 1\text{mV/m}$ ($L = 50\text{km}$) entre 0 e 110km de altura.

5.2.1.2 - CAMPOS ELÉTRICOS OROGRÁFICOS

Medidas do campo elétrico com balões estratosféricos em regiões onde o relevo terrestre é acidentado podem apresentar influências devido à orografia (Ogawa et alii, 1975). Normalmente o solo é um bom condutor, o que faz as linhas de força do campo elétrico vertical de tempo bom lhe serem perpendiculares. Em regiões planas as linhas de força são verticais e em relevos acidentados elas são distorcidas; essa distorção pode atingir alturas de balões, introduzindo uma parcela de natureza orográfica na componente horizontal que se está medindo.

A simulação dos campos elétricos orográficos foi abordada com o método de EFG, com os elementos finitos segundo a grade mostrada na Figura 5.6, montada automaticamente pelo computador. Os parâmetros h e b definem a altura e a base da montanha; os parâmetros c e t definem a região de transição dos elementos finitos de retangular para retangular distorcido. Os elementos restantes da simulação são os mesmos discutidos na Seção 5.2.1.1 (condições de contorno). Para analisar isoladamente os efeitos das montanhas, adota-se $\Delta\phi = 0$.

A Figura 5.7 mostra as isolinhas do campo elétrico horizontal, traçadas automaticamente por um "plotter" (traçador), para dois casos: $h = 5\text{km}$, $b = 52\text{km}$ e $h = 1\text{km}$, $b = 10\text{km}$. A Figura 5.8 mostra a variação do campo elétrico orográfico em altura de balão ($z = 31\text{km}$) para diversas montanhas. Pode-se ver que montanhas estreitas e altas (com $h = 5\text{km}$ e $b = 10\text{km}$, por exemplo) levam maior influência à altura de 31km que aquelas largas e baixas ($h = 0,5\text{km}$ e $b = 50\text{km}$). Como é de se esperar, uma certa faixa de equivalência pode existir.

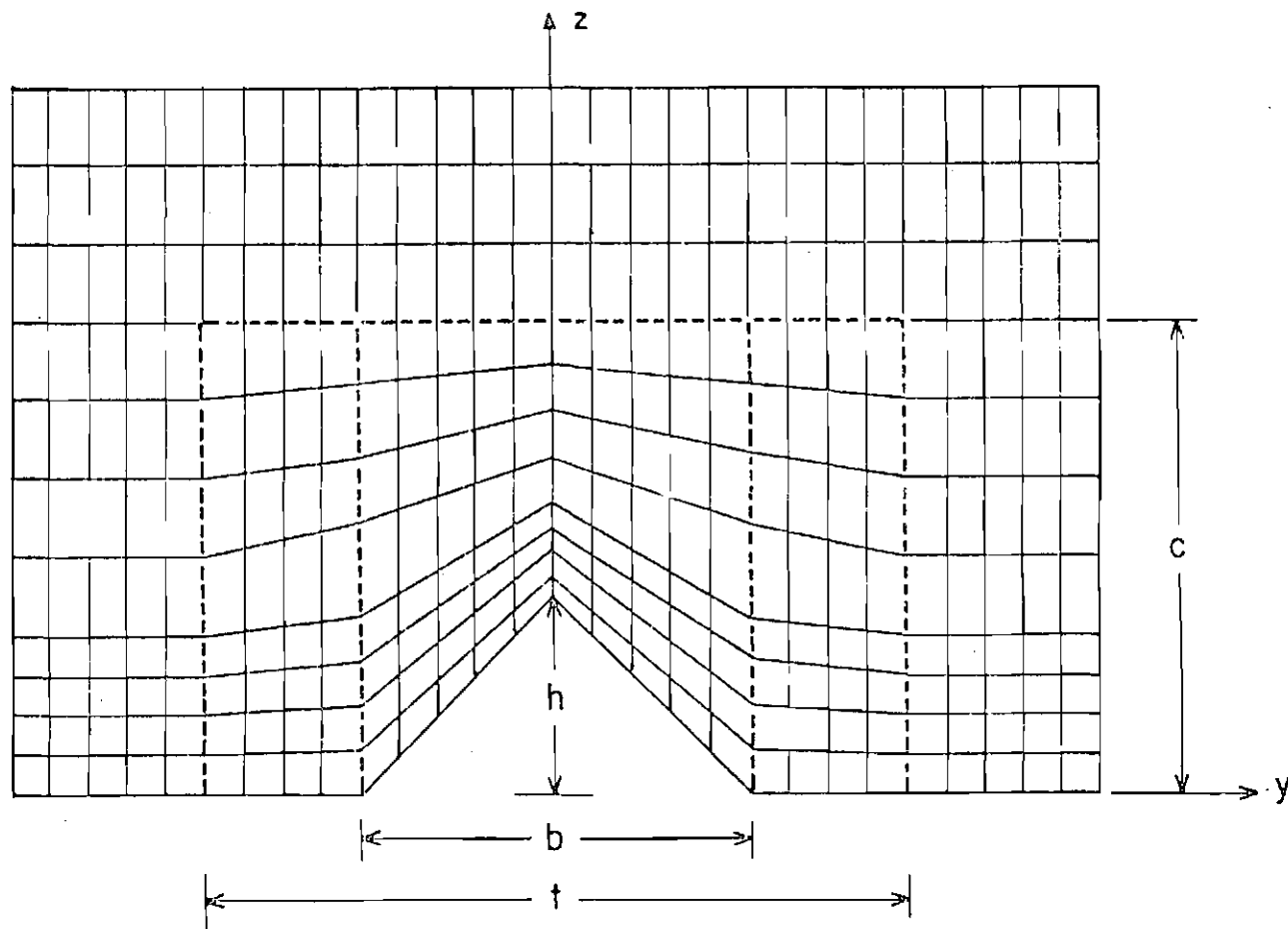


Fig. 5.6 - Grade usada na simulação dos campos orográficos, com o método de Elementos Finitos (Galerkin).
 Os parâmetros h e b representam a altura e a base da montanha; os parâmetros c e t definem a região de transição dos elementos finitos da forma retangular para retangular distorcida.

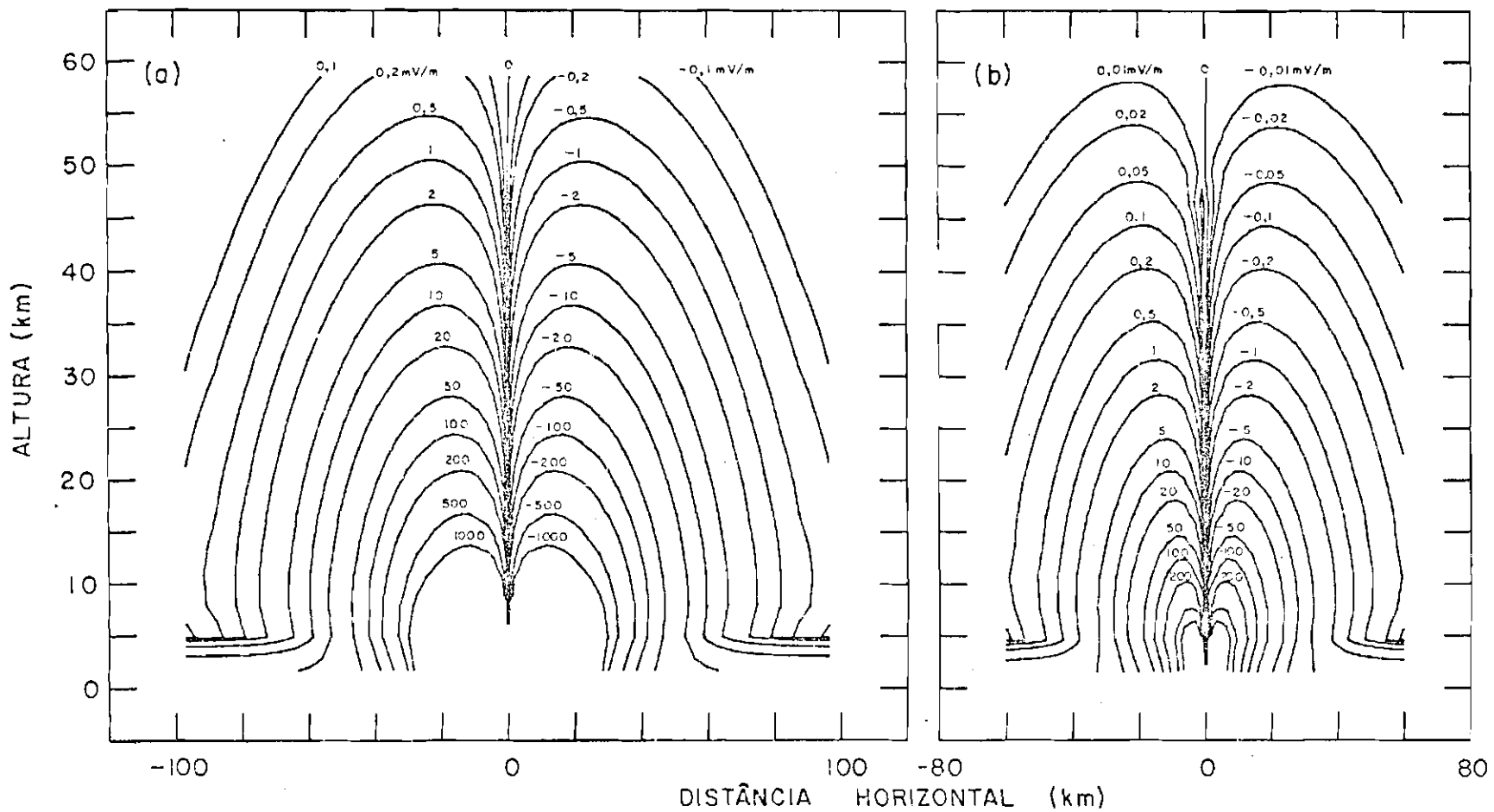


Fig. 5.7 - Campo elétrico horizontal orográfico para uma montanha.

(a) Altura de 5km e base de 52km; (b) altura de 1km e base de 10km; ambos os casos com $\phi_0 = 300\text{kV}$.

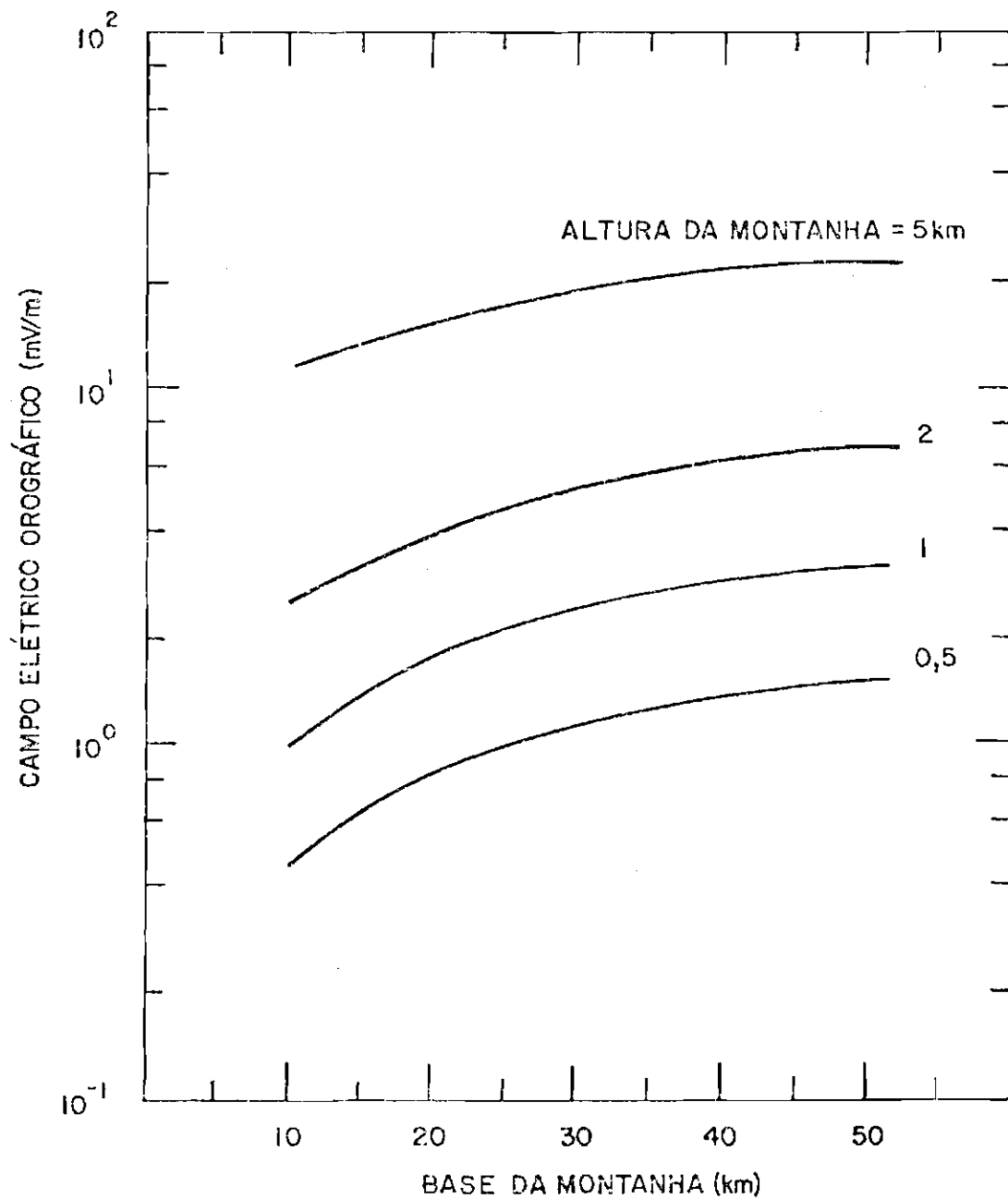


Fig. 5.8 - Variação do campo elétrico orográfico em altura de base (31km) com a base da montanha para várias alturas da montanha, com $\phi_0 = 300\text{kV}$.

Como as montanhas que existem na região de observação dos vãos de balão do presente trabalho têm alturas menores que 900m e larguras entre 5 e 10km, qualquer influência nas medidas de origem orográfica parece ser desprezível. Essa região de observação está situada em distâncias maiores que 500km da costa, enquanto a região continental está em torno de 500 a 700m de altura em relação ao nível do mar. Além do mais, o balão estava no teto de aproximadamente 32km durante o período de observação. Levando em conta essas considerações, a orografia local forneceu distorções horizontais do campo vertical de menos de 1mV/m. Para montanhas altas, esta simulação mostrou valores para as distorções em bom acordo com os trabalhos de Atkinson et alii (1971) e Hoppe (1971).

5.2.1.3 - IRREGULARIDADE NA CONDUTIVIDADE

Embora existam poucas evidências de precipitação de partículas energéticas na Anomalia (Paulikas, 1975), pode-se esperar que uma precipitação de partículas com energias da ordem de 1MeV ou maiores possa aumentar a condutividade da atmosfera média local. Este efeito originaria um tipo de irregularidade na condutividade basicamente importante em alturas onde outras fontes de ionização são menos efetivas, mesmo durante o dia. O modelo desenvolvido na simulação desse fenômeno considera a existência de tal tipo de irregularidade centrada na atmosfera média. O método de simulação é similar ao trabalho de Park (1976), sobre irregularidades ionosféricas em altas latitudes.

A irregularidade na condutividade é caracterizada por um fator de aumento, que pode ser representado por uma função Gaussiana de y e z. A queda de potencial elétrico dentro da irregularidade, onde a condutividade é maior, é menor do que se essa irregularidade não existisse. Ou seja, as linhas equipotenciais são expulsas de dentro da irregularidade. Isto origina campos elétricos dirigidos para fora do seu centro, os quais distorcem as linhas de força verticais do campo elêtrico de tempo bom, que passa a ter uma componente horizontal não-nula.

Para uma irregularidade desse tipo, centrada em $y = 0$ e $z = z_j$, o fator de aumento \bar{e} é dado por:

$$f(y, z) := 1 + (\Lambda - 1) \exp \left[- \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] \exp \left[- \left(\frac{z - z_j}{z_0} \right)^2 \right]. \quad (5.8)$$

O parâmetro Λ representa a amplitude do fator de aumento. Notar que $f(0, z_j) = \Lambda$ e $f(y \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty) = 1$. Quanto a y_0 e z_0 , indicam as distâncias de atenuação horizontal e vertical, respectivamente, para a variação do fator de aumento $f(y, z)$.

Os resultados de campo elétrico horizontal máximo em alturas de balão são mostrados na Tabela 5.1, para diferentes conjuntos dos parâmetros (Λ, y_0, z_0, z_j) e para uma faixa de valores relacionados àqueles discutidos na Seção 5.3. O método numérico utilizado foi o BTM. Para examinar unicamente os efeitos da irregularidade considera-se novamente $\Delta\phi = 0$, com $\phi_0 = 300\text{kV}$. Com os subsídios fornecidos no Capítulo 2, a Seção 5.3 continua a discussão desse modelo de irregularidade na condutividade para os valores esperados dos parâmetros na Anomalia Magnética do Atlântico Sul que concordam efetivamente bem com as medidas obtidas no Capítulo 3. Na Seção referida acima, a definição do conjunto dos parâmetros (Λ, y_0, z_0, z_j) mais plausível na caracterização da irregularidade pode ser apreciada.

A Figura 5.9 mostra as isolinhas do campo elétrico horizontal, traçadas com a ajuda do computador, para a superposição de um campo elétrico ionosférico $E_{y_0} = -2\text{mV/m}$, $L = 2000\text{km}$ e uma irregularidade a $\Lambda = 10$, $y_0 = 100\text{km}$, $z_0 = 20\text{km}$ e $z_j = 60\text{km}$. Os pontos angulosos em alguns trechos dessas isolinhas referem-se basicamente à resolução da grade. Em relação aos valores medidos, considerar que provavelmente o balão está a oeste da irregularidade (na região $y < 0$), na região de máxima distorção, como no ponto B da figura. A área tracejada, alongada verticalmente (devido à escala dos eixos), indica os pontos da irregularidade distantes um comprimento de atenuação do seu centro, isto é,

aqueles pontos onde o fator de aumento é $1 + (\Lambda - 1)/e^2 \cong 2,218$ ($e = 2,718281828\dots$, a base dos logaritmos neperianos). A ação do campo elétrico ionosférico de grande escala ($L = 2000\text{km}$) provoca uma assimetria nos campos elétricos horizontais decorrentes da irregularidade na condutividade (essencialmente simétricos).

É importante perceber que os resultados apresentados na Tabela 5.1 mostram ser possível existirem campos elétricos daquela magnitude observada por balão, para um conjunto dos parâmetros (Λ, y_0, z_0, z_j) envolvidos na simulação da irregularidade na condutividade. A forma exata que teria tal irregularidade (e, portanto, o seu efeito precisamente definido), devido à precipitação de partículas energéticas, é um tópico completamente em aberto e não constitui o ponto central da presente simulação. Entretanto, além da representação gaussiana da irregularidade dada pela Equação 5.8, podem-se analisar resumidamente outras formas.

TABELA 5.1

CAMPO ELÉTRICO HORIZONTAL MÁXIMO (mV/m) EM $z = 31\text{km}$

y_0 (km)	z_0 (km)	z_j (km)	Λ				
			5	10	20	50	100
100	20	60	3,33	4,46	5,41	6,46	7,16
50	20	60	6,09	8,21	9,96	11,71	12,99
200	20	60	1,71	2,28	2,77	3,32	3,67
100	10	60	0,75	1,02	1,28	1,62	1,88
100	40	60	3,99	4,87	5,58	6,29	6,81
100	20	65	2,46	3,50	4,44	5,53	6,30
100	20	55	4,11	5,24	6,15	7,12	7,81

A Figura 5.10a traz a variação horizontal e vertical do fator de aumento já discutido (Equação 5.8), com as isolinhas esquematicamente caracterizadas por uma forma elipsoidal e com uma queda gaussiana em y e z . A variação com y está mostrada no nível $z = z_j$, do centro da irregularidade. Analogamente para a variação em z tem-se, no ponto central, $y = 0$.

Dos estudos de precipitação de partículas na Anomalia Magnética do Atlântico Sul, espera-se que a extensão longitudinal da irregularidade na condutividade seja bem maior que em altura. Tenta-se reproduzir este fato através de um fator de aumento dado por:

$$f(y,z) := \begin{cases} 1 + g(z;\Lambda, z_0, z_j), & \text{se } |y| \leq Y_0; \text{ e} \\ 1 + \exp\left[-\left(\frac{y - sY_0}{y_0}\right)^2\right] g(z;\Lambda, z_0, z_j), & \text{se } |y| > Y_0, \end{cases} \quad (5.9a)$$

onde

$$g(z;\Lambda, z_0, z_j) := (\Lambda - 1) \exp\left[-\left(\frac{z - z_j}{z_0}\right)^2\right] \quad (5.9b)$$

e s é o sinal de y (-1, se $y < 0$; 0, se $y = 0$; e +1, se $y > 0$), que está representado na Figura 5.10b. Se $Y_0 = 0$, a Equação 5.9 confunde-se com a Equação 5.8.

Esta forma do fator de aumento procura indicar que existe uma região (com extensão $2Y_0$) onde a sua variação horizontal é pequena e o seu valor aproxima-se da amplitude máxima. Na Equação 5.9, em particular, a variação é nula e o seu valor é o máximo, isto é, $f(y, z_j) = \Lambda$, se $|y| \leq Y_0$. A queda gaussiana se verifica agora na região onde $|y| > Y_0$. Como a Tabela 5.1 deixa antever, quanto maior o valor de Y_0 menor a distorção do campo elétrico vertical observada em nível de balão estratosférico.

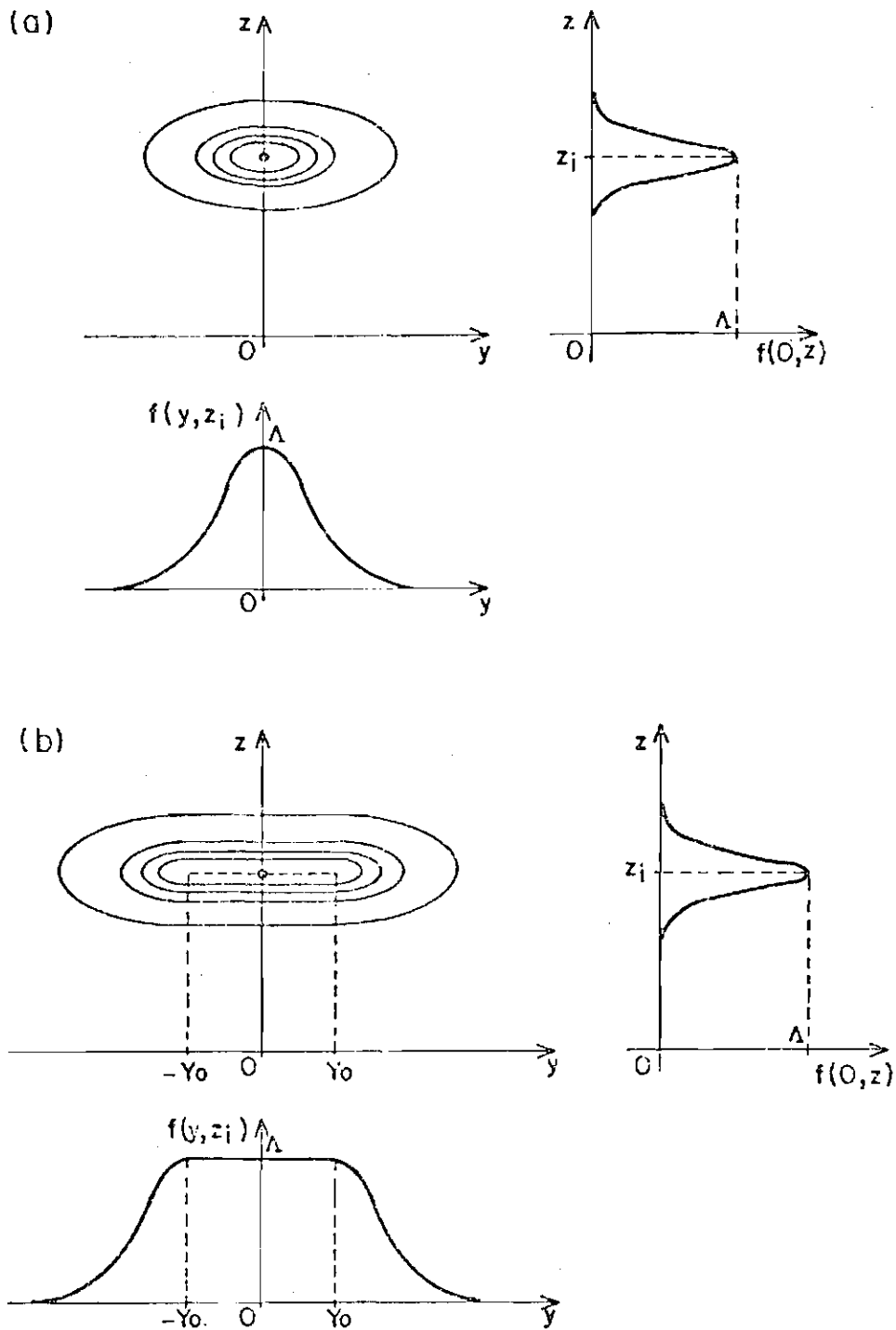


Fig. 5.10 - Isolinhas do fator de aumento e sua variaçã $f(0, z)$ com a altura (no ponto $y = 0$) e $f(y, z_i)$ com a distância horizontal (no ponto $z = z_i$), para os dois casos discutidos no texto.

Com o conjunto de valores $\Lambda = 10$, $y_0 = 100\text{km}$, $z_0 = 20\text{km}$ e $z_i = 60\text{km}$, a magnitude máxima do campo elétrico horizontal em $z = 31\text{km}$ para $Y_0 = 200, 400, 600$ e 800km é dada por 4,35, 4,07, 3,62 e 2,84mV/m, respectivamente.

Naturalmente, a variação real de $f(y, z_i)$ com a distância horizontal y pode ser diferente daquelas representadas pelas Equações 5.8 e 5.9. Uma modulação de forma senoidal pode ser significativa ou, provavelmente, alguma modulação estocástica, modificando levemente a magnitude máxima do campo elétrico horizontal encontrado.

5.2.2 - ABORDAGEM TRIDIMENSIONAL

Os modelos anteriormente discutidos podem ser facilmente estendidos para uma análise tridimensional (3D). Neste caso, a região de interesse é uma "caixa" (Figura 5.11a) centrada em um ponto associado a uma latitude e longitude especificadas. O tamanho dessa caixa é definido através de $-X \leq x \leq X$, $-Y \leq y \leq Y$ e $0 \leq z \leq z_m$.

A simulação 3D permite maior grau de flexibilidade. Assim, escolhendo-se $Y \ll X$, tem-se fundamentalmente a simulação em um plano meridional caracterizado pela longitude mencionada acima que define o centro da caixa; analogamente, para $X \ll Y$. Variações com o ângulo de inclinação do campo geomagnético são facilmente simuladas.

A presença de uma irregularidade na condutividade é caracterizada pela Equação 5.8 (ou 5.9), introduzindo-se um novo termo, $\exp[-(x/x_0)^2]$, na segunda parcela do fator de aumento (Figura 5.11b).

O método numérico indicado é o de Elementos Finitos (Galerkin). Na construção da grade usam-se paralelepípedos regulares ou irregulares. A Figura 5.12 ilustra a aplicação da simulação 3D para uma caixa tridimensional pequena (estreita em latitude) de uma irregularidade na condutividade, em baixas latitudes. A influência do ângulo de inclinação nessa região mostrou-se desprezível. Os parâmetros da si

mutação são: $\phi_0 = 300\text{kV}$, $\Delta\phi = 0$, $\Lambda = 10$, $y_0 = 100\text{km}$, $z_0 = 20\text{km}$ e $z_j = 60\text{km}$.
As linhas equipotenciais são também mostradas. Notar a expulsão das equipotenciais de dentro da irregularidade.

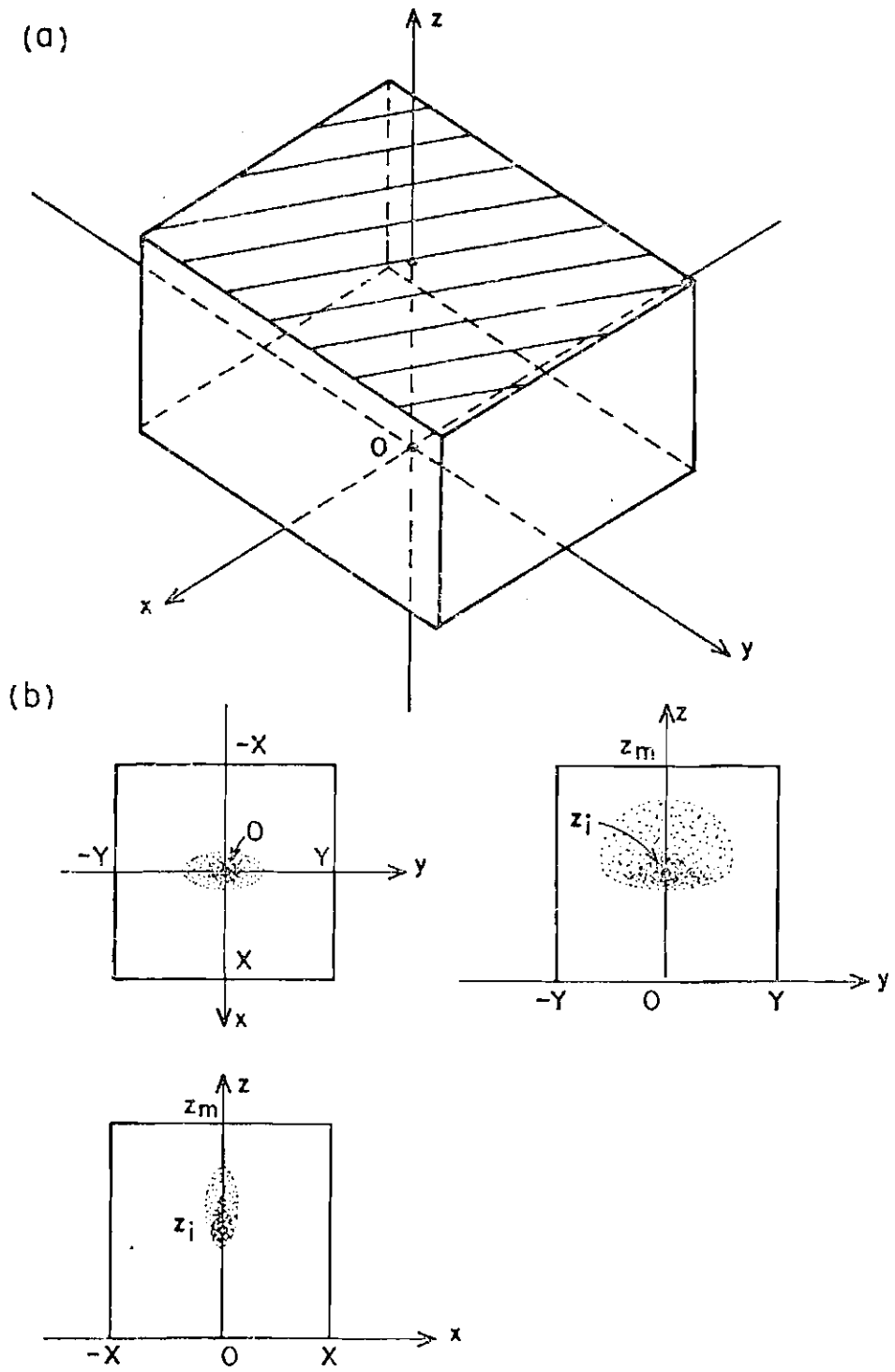


Fig. 5.11 - Croqui ilustrativo da caixa tridimensional.

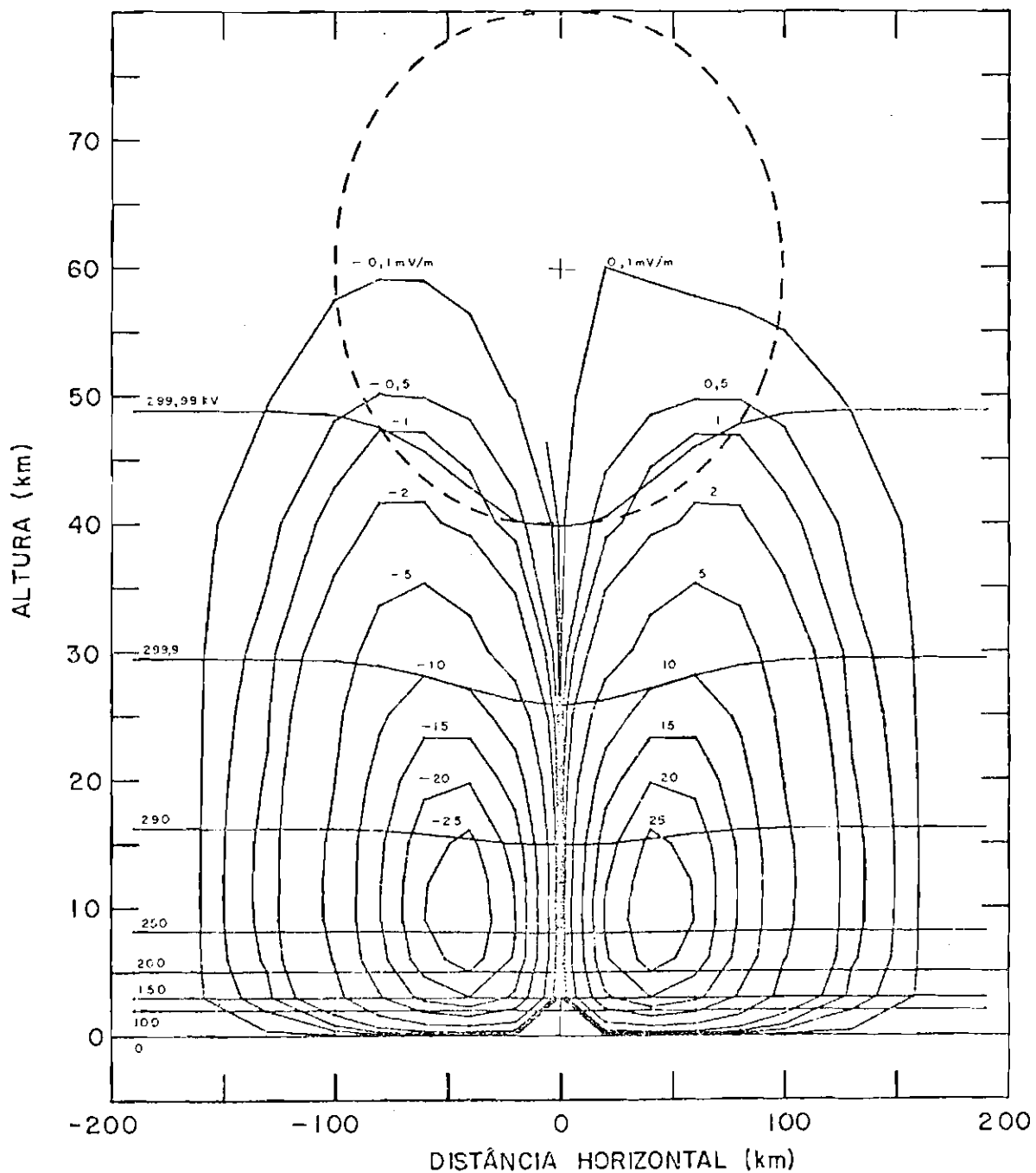


Fig. 5.12 - Isolinas do campo elétrico horizontal devido a uma irregularidade na condutividade.

Parâmetros da irregularidade: $\Lambda = 10$, $y_0 = 100\text{km}$, $z_0 = 20\text{km}$ e $z_i = 60\text{km}$.

5.3 - DISCUSSÃO

Os campos elétricos horizontais medidos e descritos na Seção 3.4 não parecem ser de origem ionosférica, orográfica ou troposférica (de tempestades). Normalmente de magnitudes pequenas, mesmo em períodos magneticamente perturbados, os campos elétricos ionosféricos mostram-se incapazes de indicar a origem das medidas, sobretudo se se considerar o horário em que eles aparecem mais influentes e o horário em que foram realizadas essas medidas, conforme discussão nos Capítulos 2 e 3. A simulação do seu mapeamento para alturas de balão mostra ainda pequenas atenuações. A simulação dos campos elétricos orográficos apresenta resultados similares. E os resultados de Burke (1975) afastam uma possível influência troposférica.

O tipo de campo elétrico horizontal mostrado na Figura 3.8, por outro lado, pode ser associado a uma distorção do campo elétrico vertical, quando uma precipitação de partículas energéticas ocorre na Anomalia, introduzida por uma irregularidade na condutividade causada por essa precipitação. Sua simulação, discutida e modelada na Seção 5.2.1.3, estará completa se se dispuser de uma indicação das magnitudes prováveis dos parâmetros nela envolvidos.

Uma ordem de grandeza para o fator de aumento, Λ , pode ser obtida dos estudos de Larsen et alii (1976) e Montbriand e Belrose (1976). Esse estudo foi um esforço coordenado com o objetivo de investigar a importância de uma precipitação de elétrons energéticos, em período magneticamente perturbado, na região ionosférica D, em latitudes médias (Ottawa, Canadá), em 22/12/71. Medidas do espectro de elétrons de precipitação e do perfil de densidade eletrônica foram simultaneamente realizadas. Pela primeira vez foi mostrado, conclusivamente, que elétrons de precipitação vindos dos cinturões de radiação são a causa principal das condições pós-tempestade magnética na região D em latitudes médias.

Nesses estudos, durante condições de quase-equilíbrio,

$$\frac{Q_T}{N^2} = (1 + \lambda)(\alpha_D + \lambda\alpha_i) = \psi, \quad (5.10)$$

onde Q_T é a produção total de pares íon-elétron; N é a densidade eletrônica; λ é a razão entre as densidades de íons negativos e elétrons; α_D é o coeficiente de recombinação dissociativa; α_i é o coeficiente de recombinação íon-íon; e ψ é o coeficiente efetivo de perda de elétrons (Montbriand and Belrose, 1976).

Ou ainda

$$\psi(z) = \frac{1}{N^2(z)} [Q_{PP}(z) + Q_{PB}(z) + Q_{OF}(z)], \quad (5.11)$$

onde Q_{PP} é a produção total originada pelas partículas em precipitação; Q_{PB} é a produção total resultante da radiação de bremsstrahlung produzida pela precipitação das partículas; e Q_{OF} refere-se a outras fontes, normalmente existentes na atmosfera, como discutido anteriormente (Q_{PP} e Q_{PB} variam, fundamentalmente, com o espectro de elétrons de precipitação).

Com um espectro de elétrons diferencial em energia na forma

$$\frac{dn}{dE} := J \exp(-E/E_0), \quad (5.12)$$

onde E_0 é a energia "e-folding" do espectro, a produção total devida às partículas Q_P , em uma altura z , é dada por (Montbriand and Belrose, 1976):

$$Q_P(z) = J F(z; E_0). \quad (5.13)$$

A variação de $F(z; E_0)$ com a altura, para vários valores da energia E_0 , está mostrada na Figura 5.13. A Equação 5.13 sumaria o método utilizado em Montbriand e Belrose (1976). Dois fatos são facilmente identificáveis: (1) a taxa de produção Q_p é diretamente proporcional à amplitude de J do espectro diferencial de elétrons; (2) a altura correspondente ao pico da taxa de produção ocorre em alturas menores para aqueles espectros com energia "e-folding" maiores (mais elétrons energéticos em relação aos menos energéticos).

Usando dois métodos independentes, Larsen et alii (1976) calcularam a taxa de produção de pares de íons devida aos elétrons de precipitação (Figura 5.14). Nesse período perturbado, a produção total é da ordem de 10^3 vezes maior que a produção normal, $Q_T' = 10^3 Q_T$, por volta de 70km de altura. O fluxo de elétrons de precipitação (com energias acima de 200keV) é da ordem de $8,7 \times 10^3$ elétrons \cdot cm $^{-2}$ \cdot s $^{-1}$. Em latitudes altas, que evidenciam uma modificação direta do campo elétrico estratosférico associado à forte erupção solar de agosto de 1972, Holzworth e Mozer (1979) mostram uma razão da ordem de 10^5 vezes maior, em torno de 45km.

Daí,

$$(N'/N)^2 = f_Q(z) f_\psi(z), \quad (5.14)$$

onde $f_Q(70\text{km}) \approx 10^3$, $f_\psi = \psi/\psi'$ e N' e ψ' referem-se ao período perturbado. Com $f_\psi(70\text{km}) = 1$ e pelo fato de a condutividade ser proporcional à densidade eletrônica, encontra-se com a Equação 5.14 um fator de aumento Λ da ordem de 32. O conhecimento de f_ψ em períodos onde ocorre precipitação mostra-se ainda incompleto. Podem existir variações de uma ordem de grandeza ou mais. Entretanto, densidades eletrônicas muito altas nessas altitudes podem ser explicadas em termos de uma precipitação de partículas energéticas, sem precisar considerar efeitos associados a mudanças químicas (Larsen et alii, 1976). Em alturas onde λ diminui, devido à precipitação (Reid, 1979), tem-se no final que f_ψ aumenta. Pode-se pensar então em um aumento de Λ , de talvez até 100, nessas latitudes.

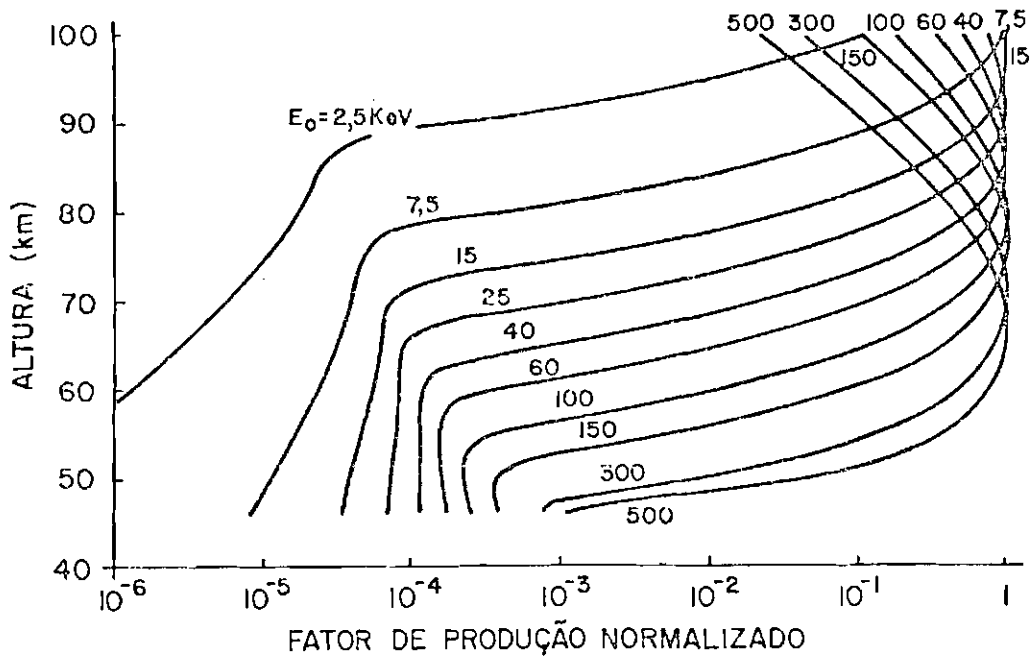


Fig. 5.13 - Perfis verticais normalizados de $F(z; E_0)$ para valores selecionados de E_0 .

FONTE: Montbriand and Belrose (1976), p. 2215.

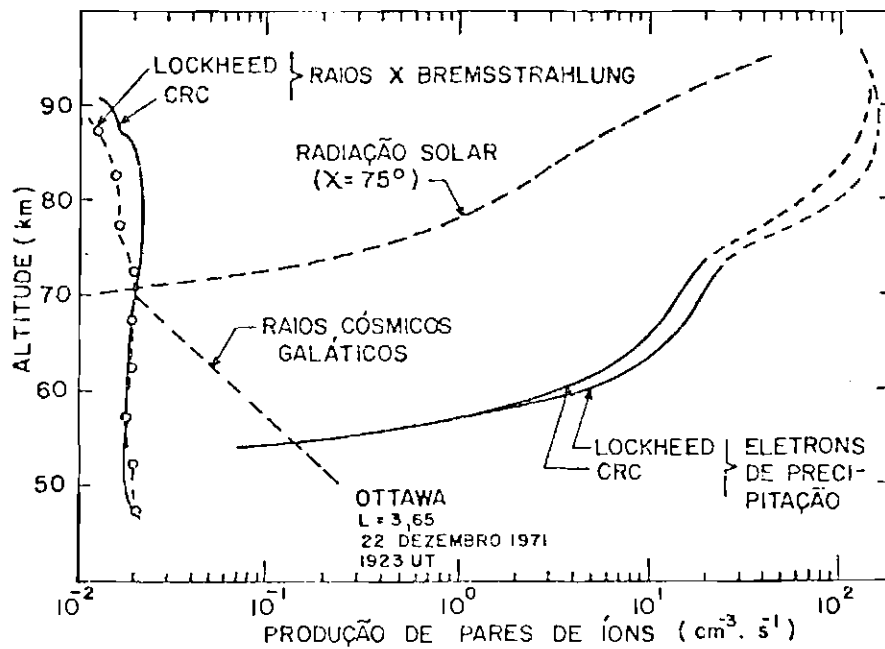


Fig. 5.14 - Dependência em altura das taxas de ionização devidas a elétrons de precipitação e aos raios X de bremsstrahlung associados.

FONTE: Larsen et alii (1976), p. 2205.

Na região da Anomalia Magnética do Atlântico Sul, medidas que possibilitem um conhecimento direto do fator de aumento Λ são in-existent. Entretanto, com os resultados de Larsen et alii (1976) e Montbriand e Belrose (1976) discutidos anteriormente, pode-se ter uma idéia do seu valor.

Medidas de Imhof e Smith (1966) sugerem que na Anomalia ($L = 1,186$) a amplitude do espectro diferencial de elétrons de precipitação seja 10 a 30 vezes menor que a do espectro observado por Larsen et alii (1976), com um fluxo da ordem de $5,7 \times 10^3$ elétrons $\cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ (para elétrons acima de 200keV). Através das Equações 5.13 e 5.14 tem-se inicialmente um máximo valor para $f_0 = 33$ a 100, o que resulta em $\Lambda = 6$ a 10. Com $f_\psi \approx 10$, encontra-se $\Lambda = 18$ a 32. Qualitativamente, pode-se creditar a Λ um valor da ordem de 15, mormente se se considerar que a energia "e-folding" do espectro de elétrons na Anomalia (Imhof and Smith, 1966) é maior que a observada por Larsen et alii (1976) e que a presença de picos no espectro diferencial de elétrons de precipitação (Seção 2.5.2) representa elétrons monoenergéticos adicionais que podem realçar mais ainda a irregularidade na condutividade.

Em resumo, para médias e altas latitudes pode-se esperar magnitudes para o fator de aumento na faixa de 10 a 100 ou mais (últimas colunas da Tabela 5.1); para baixas, tem-se um fator da ordem de 10 ou menos (primeiras colunas da tabela). Notar que durante a noite a precipitação de partículas energéticas pode levar à irregularidade na condutividade, com valores de Λ mais elevados.

Como discutido no Capítulo 2, a transição entre a região de ionização predominante devida à radiação cósmica galática e aquela devida à radiação H Ly- α , sugere que se adote $z_i = 60\text{km}$ (durante o dia), que representa a altura onde a irregularidade está centrada. A Tabela 5.1 contém duas variações dessa altura, $z_i = 55$ e 65km . Com o estudo de Larsen et alii (1976), tem-se para o parâmetro de atenuação vertical, z_0 , uma magnitude da ordem de 20km.

A extensão longitudinal da irregularidade é um parâmetro ainda não muito bem quantificado. Considerando todas as possíveis influências dos diversos tipos de campo elétrico nos valores medidos, em condições calmas ou não, a participação nessas medidas do campo elétrico originado pela presença da irregularidade na Anomalia Magnética do Atlântico Sul, tem um valor que se estima ser da ordem de 6mV/m. A Tabela 5.1 indica que a caracterização longitudinal da irregularidade está representada por $y_0 = 100\text{km}$. Tomando um nível mínimo de 1% no fator de aumento como delimitante do contorno externo da irregularidade (isto é, a partir de onde a irregularidade poderia ser considerada inexistente), ela se estende longitudinalmente, de ambos os lados por aproximadamente 270km. Daí, pode-se caracterizar tal irregularidade por uma extensão "efetiva" da ordem de 500km, o que indica uma precipitação localizada, como discutido e sugerido anteriormente.

Assim, em relação a uma precipitação mais extensa longitudinalmente, aquela precipitação menos energética (Roederer, 1970; Torr et alii, 1975; Gledhill, 1976), essa escala efetiva poderia sugerir a presença de uma precipitação não-uniforme em longitude, onde as não-uniformidades teriam uma escala de variação da ordem da extensão efetiva. Por outro lado, notar que a inclusão do parâmetro Y_0 na descrição da irregularidade na condutividade (Equação 5.9) pode levar a uma escala efetiva mais representativa dessa irregularidade, com magnitude da ordem de 10^3km .

Os campos medidos na direção oeste, com um valor médio em torno de 8mV/m, sugerem que o balão (que se deslocava neste ínterim sobre o continente) estava a oeste em relação ao centro da irregularidade na condutividade, por todo intervalo de tempo da observação. Neste caso, espera-se que a distorção do campo vertical de tempo bom (dirigido para baixo) origine uma componente horizontal na direção oeste, de dentro para fora da irregularidade. Esta situação é consistente com as características gerais de uma precipitação de partículas na Anomalia, que se supõe estender-se na direção leste em relação à região de observação com o balão (Gledhill, 1979). Tal precipitação poderia ser

relacionada ao mecanismo já clássico de difusão de ângulo de passo por espalhamento coulombiano das partículas energéticas com os constituintes atmosféricos, que ocorre em uma região relativamente extensa na Anomalia Magnética do Atlântico Sul, intensificando-se em períodos magneticamente perturbados. Entretanto, pode-se pensar também na precipitação devida à difusão de ângulo de passo por interação ressonante onda-partícula, que é um mecanismo que atua em regiões mais localizadas, precipitando partículas mais energéticas durante períodos magneticamente ativos, como exemplificado na discussão do "hiss" e do PC5 no Capítulo 2.

A componente norte-sul medida mostra campos elétricos da ordem de 6mV/m na direção norte (para o equador), entre 1000TU e 1030TU, e campos da mesma ordem na direção sul (para o pólo) depois de aproximadamente 1130TU. Dentro desses instantes, o valor médio desta componente foi zero. Este comportamento sugere a presença de uma irregularidade com uma escala de comprimento estreita na direção norte-sul, que, combinada com as características gerais de uma precipitação na Anomalia, pode implicar a existência de uma precipitação de partículas energéticas do tipo "banda". Paulikas e Freden (1964) sugerem tal característica em L levemente maior ($L = 1,2$) que na região da Anomalia. Além disso, a mudança dessa componente do norte para o sul sugere que a "banda" de precipitação move-se para o equador em relação ao balão. Este movimento poderia ser parcialmente relacionado com o fato de que uma súbita atividade auroral começou às 0900TU (K_p variando de 1⁻ para 5⁻) e, como um efeito de acoplamento entre latitudes altas e baixas, a precipitação pode ter sido iniciada ou ampliada na direção de baixos valores do parâmetro magnético L.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

A simulação e as medidas de campos elétricos na atmosfera foram discutidas neste trabalho. As medidas, que representam as primeiras observações efetuadas na região da Anomalia Magnética do Atlântico Sul, foram realizadas com um detector que utiliza a técnica de sonda dupla, a bordo de balões estratosféricos. A presença do campo elétrico ionosférico em alturas de balão estratosférico, ou seja, o seu mapeamento desde a ionosfera até alturas menores na atmosfera, foi simulada bem como as influências nos campos elétricos observados em alturas de balão estratosférico devidas à proximidade de montanhas e à distorção das linhas verticais do campo elétrico de tempo bom provocada por uma irregularidade na condutividade elétrica atmosférica.

O mapeamento mostra que campos elétricos ionosféricos de grande escala, da ordem de 100km ou mais, e na direção leste-oeste podem atingir alturas de balão estratosférico com pouca atenuação. Um cálculo similar (porém em princípio mais simplificado) para a direção norte-sul mostra uma atenuação acentuada. Esses resultados constituem uma extensão àqueles estudos similares nas regiões de altas latitudes.

A simulação da participação nas medidas do campo elétrico orográfico forneceu uma parcela negligível, menor que 1mV/m, para a orografia associada à região da observação.

As medidas realizadas apresentaram resultados não esperados, com grandes valores dos campos elétricos horizontais. A participação minoritária dos campos elétricos ionosférico, orográfico e troposférico (de tempestades) nos valores medidos em período magneticamente perturbado, com uma magnitude total máxima da ordem de 2mV/m, leva a crer em uma outra possível influência nesses valores medidos. Os resultados sugerem que uma "banda" de precipitação de partículas energéticas que se move na direção do equador poderia produzir um aumento na

condutividade elétrica da média atmosfera, distorcendo o campo elétrico vertical de tempo bom e dando origem a um tipo de campo elétrico horizontal similar ao observado. Tal irregularidade na condutividade foi simulada e discutida semiquantitativamente. Os resultados da simulação parecem confirmar tais evidências.

Como sugestão para futuras pesquisas, dados similares aos aqui discutidos poderiam ser obtidos pelo lançamento simultâneo (ou quase simultâneo) de mais de um detector (a bordo de balões) em pontos afastados um do outro por algumas dezenas, ou mesmo centenas, de quilômetros. Assim, a estrutura espacial da irregularidade existente na condutividade poderia se tornar mais evidenciada que com apenas um detector. Considerando a provável extensão longitudinal dessa irregularidade na região da Anomalia Magnética do Atlântico Sul, um desses lançamentos deveria ser afastado do continente, sobre o mar.

Dados mais diretos e complementares poderiam ser conseguidos com detectores a bordo de foguetes. Neste caso, medidas da condutividade elétrica, da densidade eletrônica, etc. poderiam estar incluídas. Novamente, um ou mais foguetes seriam utilizados em vários pontos de lançamento (ou não). Esse tipo de experimento, apesar da curta duração que representa um voo de foguete, apresenta a importância fundamental das observações realizadas "in loco". Outros dados complementares incluiriam o monitoramento contínuo da parte superior da média atmosfera através do radar de reflexão parcial. A irregularidade na condutividade elétrica, bem como a densidade eletrônica, poderia ser diretamente detectada em altitudes de 50 a 90km.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDU, M.A.; ANANTHAKRISHNAN, S.; COUTINHO, E.F.; KRISHNAN, B.A.; REIS, E.M. da S. Azimuthal drift and precipitation of electrons into the South Atlantic Geomagnetic Anomaly during an SC magnetic storm. *Journal of Geophysical Research*, 78(25):5830-5836, Sep. 1973.
- AKASOFU, S.-I. The aurora. *American Scientist*, 69(5):492-499, Sep./Oct. 1981.
- AKHRAS, G.; DHATT, G. An automatic node relabelling scheme for minimizing a matrix or network bandwidth. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(4):787-797, 1976.
- AKYUZ, F.A. Reply by author to J. Barlow and C.G. Marples. *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 7(4):381-382, Feb. 1969.
- AKYUZ, F.A.; UTKU, S. An automatic node-relabelling scheme for bandwidth minimization of stiffness matrices. *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 6(4):728-730, Apr. 1968.
- ALWAY, G.G.; MARTIN, S.W. An algorithm for reducing the bandwidth of a matrix of symmetrical configuration. *The Computer Journal*, 8(sf):264-272, 1965.
- AMES, W.F. *Numerical methods for partial differential equations*. 2. ed. New York, Academic Press, 1977. (Computer Science and Applied Mathematics).
- ATKINSON, W.; LUNDQUIST, S.; FAHLESON, U. The electric field existing at stratospheric elevations as determined by tropospheric and ionospheric boundary conditions. *Pure and Applied Geophysics*, 84(1):46-56, Jan. 1971.
- AXFORD, W.I.; HINES, C.O. A unifying theory of high-latitude geophysical phenomena and geomagnetic storms. *Canadian Journal of Physics*, 39(10):1433-1464, Oct. 1961.

- BARLOW, J.; MARPLES, C.G. Comment on an automatic node-relabelling scheme for bandwidth minimization of stiffness matrices. *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 7(4): 380-381, Feb. 1969.
- BEREZIN, I.S.; ZHIDKOV, N.P. *Computing methods*. Oxford, Pergamon Press, 1965. v. 2.
- BLANC, M. Midlatitude convection electric fields and their relation to ring current development. *Geophysical Research Letters*, 5(3): 203-206, Mar. 1978.
- BLANC, M.; RICHMOND, A.D. The ionospheric disturbance dynamo. *Journal of Geophysical Research*, 85(A4):1669-1686, Apr. 1980.
- BURKE, H.K. *Large scale atmospheric electric fields: comparisons with balloon data*. Ph.D. Thesis. Huston, Rice University, Nov. 1975.
- BYKAT, A. A note on an element ordering scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(1):194-198, 1976.
- CARPENTER, L.A.; KIRCHHOFF, V.W.J.H. Comparison of high-latitude and mid-latitude ionospheric electric fields. *Journal of Geophysical Research*, 80(13):1810-1814, May 1975.
- Daytime three-dimensional drifts at Millstone Hill observatory. *Radio Science*, 9(2):217-222, Feb. 1974.
- CHIU, Y.T. Self-consistent electrostatic field mapping in the high-latitude ionosphere. *Journal of Geophysical Research*, 79(19): 2790-2802, July 1974.
- COLE, R.K., Jr.; PIERCE, E.T. Electrification in the Earth's atmosphere for altitudes between 0 and 100 kilometers. *Journal of Geophysical Research*, 70(12):2735-2749, June 1965.
- COLLINS, R.J. Bandwidth reduction by automatic renumbering. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 6(3): 345-356, 1973.
- CONNOR, J.J.; BREBBIA, C.A. *Finite element techniques for fluid flow*. London, Newnes-Butterworths, 1978.

- CUTHILL, E.; MCKEE, J. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. In: ACM NATIONAL CONFERENCE, 24., San Francisco, CA, 1969. *Proceedings*. New York, ACM, 1969, p. 157-172.
- DAHLQUIST, G.; BJÖRCK, A. *Numerical methods*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1974.
- DEJNAKARINTRA, M. *A theoretical study of electrical coupling between the troposphere, ionosphere, and magnetosphere*. Stanford, Stanford Electronics Laboratories, 1974. (Technical Report n° 3454-3).
- DESSLER, A.J. Solar wind interactions and the magnetosphere. In: CAROVILLANO, R.L.; MACCLAY, J.F.; RADOSKI, H.R., ed. *Physics of the Magnetosphere*; Proceedings of the Conference held at Boston, June 19-28, 1967. Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1968, p. 65-105. (Astrophysics and Space Science Library, 10).
- DOLEZALEK, H. Discussion of the fundamental problem of atmospheric electricity. *Pure and Applied Geophysics*, 100(1):8-43, Jan. 1972.
- DUNGEY, J.W. Interplanetary magnetic field and the auroral zones. *Physical Review Letters*, 6(2):47-48, Jan. 1961.
- EVANS, J.V. Ionospheric movements measured by incoherent scatter: a review. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 34(2): 175-209, Feb. 1972.
- Theory and practice of ionospheric study by Thomson scatter radar. *Proceedings of IEEE*, 57(4):496-529, Apr. 1969.
- FAHLESON, U. Theory of electric field measurements conducted in the magnetosphere with electric probes. *Space Science Reviews*, 7(2-3): 238-262, 1967.
- FEJER, B.G.; FARLEY, D.T.; WOODMAN, R.F.; CALDERON, C. Dependence of equatorial F region vertical drifts on season and solar cycle. *Journal of Geophysical Research*, 84(A10):5792-5796, Oct. 1979a.
- FEJER, B.G.; GONZALEZ, C.A.; FARLEY, D.T.; KELLEY, M.C.; WOODMAN, R.F. Equatorial electric fields during magnetically disturbed conditions. 1. The effect of the interplanetary magnetic field. *Journal of Geophysical Research*, 84(A10):5797-5802, Oct. 1979b.

- FORBES, J.M. The equatorial electrojet. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 19(3):469-504, Aug. 1981.
- FORBES, J.M.; LINDZEN, R.S. Atmospheric solar tides and their electrodynamic effects - I. The global S_q current system. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 38(9-10):897-910, Sep./Oct. 1976a.
- Atmospheric solar tides and their electrodynamic effects - II. The equatorial electrojet. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 38(9-10):911-920, Sep./Oct. 1976b.
- Atmospheric solar tides and their electrodynamic effects - III. The polarization electric field. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 39(11-12):1369-1377, Nov./Dec. 1977:
- GIRAUD, A.; PETIT, M. *Ionospheric techniques and phenomena*. Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1978.
- GLEDHILL, J.A. Aeronomic effects of the South Atlantic Anomaly. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 14(2):173-187, May 1976.
- Non-solar ionization in the South Atlantic Anomaly: a review. I.A.G.A. Meeting, Canberra, Dec. 1979.
- GONZALES, C.A.; KELLEY, M.C.; FEJER, B.G.; VICKREY, J.F.; WOODMAN, R.F. Equatorial electric fields during magnetically disturbed conditions. 2. Implications of simultaneous auroral and equatorial measurements. *Journal of Geophysical Research*, 84(A10):5803-5812, Oct. 1979.
- GONZALEZ, A.L.C.; GONZALEZ, W.D. The role of wave-particle interactions on the particle precipitation at the Brazilian Magnetic Anomaly. *EOS Transactions, American Geophysical Union*, 60(46):910, Nov. 1979.
- GONZALEZ, W.D.; PEREIRA, A.E.C.; GONZALEZ, A.L.C.; MARTIN, I.M.; DUTRA, S.L.G.; PINTO, O., Jr.; WYGANT, J.; MOZER, F. Large horizontal electric fields measured at balloon heights of the Brazilian Magnetic Anomaly and association to local energetic particle precipitation. *Geophysical Research Letters*, 9(5):567-570, May 1982.

- GROOMS, H.R. Algorithm for matrix bandwidth reduction. *Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers*, 98(ST1):203-214, Jan. 1972.
- HAERENDEL, G.; LÜST, R. Electric fields in the upper atmosphere. In: MCCORMAC, B.M., ed. *Earth's Particles and Fields*; Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at Freising, Germany, July 31 - Aug. 11, 1967. New York, Reinhold, 1968, p. 271-285.
- HAERENDEL, G.; LÜST, R.; RIEGER, E. Motion of artificial ion clouds in the upper atmosphere. *Planetary and Space Science*, 15(1):1-18, Jan. 1967.
- HAYS, P.B.; ROBLE, R.G. A quasi-static model of global atmospheric electricity. 1. The lower atmosphere. *Journal of Geophysical Research*, 84(A7):3291-3305, July 1979.
- HEELIS, R.A.; KENDALL, P.C.; MOFFETT, R.J.; WINDLE, D.W.; RISHBETH, H. Electrical coupling of the E- and F-regions and its effect on F-region drifts and winds. *Planetary and Space Science*, 22(5): 743-756, May 1974.
- HEIKKILA, W.J. Aurora. *EOS Transactions, American Geophysical Union*, 54(8):764-768, Aug. 1973.
- HEPPNER, J.P. Empirical models of high-latitude electric fields. *Journal of Geophysical Research*, 82(7):1115-1125, Mar. 1977.
- HERMAN, J.R.; GOLDBERG, R.A. Initiation of non-tropical thunderstorms by solar activity. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 40(2):121-134, Feb. 1978.
- HESS, W.N. *The radiation belt and magnetosphere*. Waltham, MA, Blaisdell, 1968.
- HOLZWORTH, R.H. *Large scale DC electric fields in the Earth's environment*. Ph.D. Thesis. Berkeley, University of California, 1980.
- HOLZWORTH, R.H.; MOZER, F.S. Direct evidence of solar flare modification of stratospheric electric fields. *Journal of Geophysical Research*, 84(C1):363-367, Jan. 1979.

- HOPPEL, W.A. Altitude variations in the electrical potential resulting from orographic features. *Pure and Applied Geophysics*, 84(1):57-63, Jan. 1971.
- HUEBNER, K.H. *The finite element method for engineers*. New York, John Wiley, 1975.
- IMHOF, W.L.; SMITH, R.V. The behavior of trapped electrons and protons at the lower edge of the inner radiation belt. *Journal of Geophysical Research*, 71(17):4157-4171, Sep. 1966.
- IMHOF, W.L.; GAINES, E.E.; REAGAN, J.B. Dynamic variations in intensity and energy spectra of electrons in the inner radiation belt. *Journal of Geophysical Research*, 78(22):4568-4577, Aug. 1973.
- Evidence for the resonance precipitation of energetic electrons from the slot region of the radiation belts. *Journal of Geophysical Research*, 79(22):3141-3146, Aug. 1974.
- Observations of multiple, narrow energy peaks in electrons precipitating from the inner radiation belt and their implications for wave-particle interactions. *Journal of Geophysical Research*, 86(A3):1591-1595, Mar. 1981.
- IMHOF, W.L.; REAGAN, J.B.; GAINES, E.E. The energy selective precipitation of inner zone electrons. *Journal of Geophysical Research*, 83(A9):4245-4254, Sep. 1978.
- JENNINGS, A. *Matrix computation for engineers and scientists*. Chichester, John Wiley, 1977.
- JOHNSON, F.S. The gross character of the geomagnetic field in the solar wind. *Journal of Geophysical Research*, 65(10):3049-3051, Oct. 1960.
- JONES, D.S. *Methods in electromagnetic wave propagation*. Oxford, Clarendon Press, 1979.
- KATO, S. *Dynamics of the upper atmosphere*. Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1980.

- KAVADAS, A.; JOHNSON, D.W. Electron densities and electric fields in the aurora. In: COSPAR INTERNATIONAL SPACE SCIENCE SYMPOSIUM, 4., Warsaw, 1963. *Proceedings*. Amsterdam, North-Holland, 1964. p. 365-370. (COSPAR Space Research, 4).
- KELLEY, M.C.; FEJER, B.G.; GONZALES, C.A. An explanation for anomalous equatorial ionospheric electric fields associated with a northward turning of the interplanetary magnetic field. *Geophysical Research Letters*, 6(4):301-304, Apr. 1979.
- KELLOGG, P.J.; WEED, M. Balloon measurements of ionospheric electric fields. In: CORONITI, S.C.; HUGHES, J., ed. *Planetary electrodynamics*, New York, Gordon and Breach, 1969. v. 2, p. 431-436.
- KING, I.P. An automatic reordering scheme for simultaneous equations derived from network systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(4):523-533, Oct./Dec. 1970.
- KNUTH, D.E. *The art of computer programming*. Fundamental algorithms. 2. ed. Reading, MA, Addison-Wesley, 1973. v. 1. (Computer Science and Information Processing).
- LARSEN, T.R.; REAGAN, J.B.; IMHOF, W.L.; MONTBRIAND, L.E.; BELROSE, J.S. A coordinated study of energetic electron precipitation and D region electron concentrations over Ottawa during disturbed conditions. *Journal of Geophysical Research*, 81(13):2200-2212, May 1976.
- LEVY, R.H.; PETSCHKE, H.E.; SISCOE, G.L. Aerodynamic aspects of the magnetospheric flow. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 2(12):2065-2076, Dec. 1964.
- LIEBELT, P.B. *An introduction to optimal estimation*. Reading, MA, Addison-Wesley, 1967.
- MÄRCZ, F. Links between atmospheric electricity and ionospheric absorption due to extraterrestrial influences. *Journal of Geophysical Research*, 81(25):4566-4570, Sep. 1976.

- MARKSON, R. Solar modulation of atmospheric electrification and possible implications for the Sun-weather relationship. *Nature*, 273(5658):103-109, May 1978.
- MARKSON, R.; MUIR, M. Solar wind control of the Earth's electric field. *Science*, 208(4447):979-990, May 1980.
- MARTIN, I.M.; RAI, D.B.; DA COSTA, J.M.; PALMEIRA, R.A.R.; TRIVEDI, N.B. Enhanced electron precipitation in Brazilian Magnetic Anomaly in association with sudden commencement. *Nature, Physical Science*, 240(100):84-86, Nov. 1972.
- MARTIN, I.M.; RAI, D.B.; PALMEIRA, R.A.R.; TRIVEDI, N.B.; ABDU, M.A.; DA COSTA, J.M. Enhanced low-energy gamma rays at balloon altitude in the Brazilian Magnetic Anomaly. *Nature*, 252(5478):25-27, Nov. 1974.
- MASON, B.J. *The physics of clouds*. 2. ed. Oxford, Clarendon Press, 1971.
- MATSUSHITA, S. Global presentation of the external S_q and L current systems. *Journal of Geophysical Research*, 70(17):4395-4398, Sep. 1965.
- Interactions between the ionosphere and the magnetosphere for S_q and L variations. *Radio Science*, 6(2):279-294, Feb. 1971.
- Ionospheric F2 motions interacting with the S_q and L fields. In: COSPAR PLENARY MEETING, 14., Seattle, WA, 1971. *Proceedings of Open Meetings of Working Groups*. Berlin, Akademie-Verlag, 1972, p. 1087-1093. (COSPAR Space Research, 12).
- MATUURA, N. Electric fields deduced from the thermospheric model. *Journal of Geophysical Research*, 79(31):4679-4689, Nov. 1974.
- MAYNARD, N.C. Middle atmosphere electrodynamics. In: MAYNARD, N.C., ed. *Middle Atmosphere Electrodynamics*; Report of the Workshop on the Role of the Electrodynamics of the Middle Atmosphere on Solar Terrestrial Coupling, Reston, VA, Jan. 17-19, 1979. Greenbelt, MD, NASA. GSFC, 1979, p. 1-25. (NASA CP-2090).

- MCILWAIN, C.E. Coordinates for mapping the distribution of magnetically trapped particles. *Journal of Geophysical Research*, 66(11):3681-3691, Nov. 1961.
- Magnetic coordinates. *Space Science Reviews*, 5(5):585-598, 1966.
- MEIRA, L.G., Jr. Rocket measurements of upper atmospheric nitric oxide and their consequences to the lower ionosphere. *Journal of Geophysical Research*, 76(1):202-212, Jan. 1971.
- MITCHELL, A.R.; GRIFFITHS, D.F. *The difference method in partial differential equations*. New York, John Wiley, 1980.
- MÖHLMANN, D. Ionospheric electrostatic fields. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 39(11-12):1325-1332, Nov./Dec. 1977.
- MONTBRIAND, L.E.; BELROSE, J.S. Changes in electron precipitation inferred from spectra deduced from D region electron densities during a post-magnetic storm effect. *Journal of Geophysical Research*, 81(13):2213-2222, May 1976.
- MOTT-SMITH, H.M.; LANGMUIR, I. The theory of collectors in gaseous discharges. *Physical Review*, 28:727-763, Oct. 1926.
- MOZER, F.S. *Analyses of techniques for measuring DC and AC electric fields in the magnetosphere*. Berkeley, Physics Dept. and Space Sciences Laboratory, University of California, 1972.
- Balloon measurement of vertical and horizontal atmospheric electric fields. *Pure and Applied Geophysics*, 84(1):32-45, Jan. 1971a.
- *Electric fields*. Berkeley, Physics Dept. and Space Sciences Laboratory, University of California, 1971b.
- Electric field sensors. In: WOLFF, E.A.; MERCANTI, E.P., ed. *Geoscience instrumentation*, New York, John Wiley, 1974, p. 255-267.
- MOZER, F.S.; SERLIN, R. Magnetospheric electric field measurements with balloons. *Journal of Geophysical Research*, 74(19):4739-4754, Sep. 1969.

- MUZZIO, J.L.R.; ANGERAMI, J.J. Ogo 4 observations of extremely low frequency hiss. *Journal of Geophysical Research*, 77(7):1157-1173, Mar. 1972.
- NAKAMURA, S. *Computational methods in Engineering and Science*. With applications to Fluid Dynamics and Nuclear System. New York, John Wiley, 1977.
- NEUGEBAUER, M.; SNYDER, C.W. Mariner 2 observations of the solar wind. 1. Average properties. *Journal of Geophysical Research*, 71(19):4469-4484, Oct. 1966.
- The mission of Mariner 2. Preliminary observations, solar plasma experiment. *Science*, 38(3545):1095-1097, Dec. 1962.
- NISBET, J.S.; MILLER, M.J.; CARPENTER, L.A. Currents and electric fields in the ionosphere due to field-aligned auroral currents. *Journal of Geophysical Research*, 83(A6):2647-2657, June 1978.
- NISHIDA, A. Coherence of geomagnetic DP2 fluctuations with interplanetary magnetic variations. *Journal of Geophysical Research, Space Physics*, 73(17):5549-5559, Sep. 1968.
- NOPPER, R.W., Jr.; CAROVILLANO, R.L. Polar-equatorial coupling during magnetically active periods. *Geophysical Research Letters*, 5(8): 699-702, Aug. 1978.
- NORRIE, D.H.; DE VRIES, G. *An introduction to finite element analysis*. New York, Academic Press, 1978.
- OGAWA, T.; YASUHARA, M.; HUZITA, A. Stratospheric horizontal electric fields over mountains. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 37(5):841-844, May 1975.
- PALTRIDGE, G.W. Experimental measurements of the small-ion density and electrical conductivity of the stratosphere. *Journal of Geophysical Research*, 70(12):2751-2761, June 1965.
- PARK, C.G. Comparison of two-dimensional and three-dimensional mapping of ionospheric electric fields. *Journal of Geophysical Research*, 84(A3):960-964, Mar. 1979.

- PARK, C.G. Downward mapping of high-latitude ionospheric electric fields to the ground. *Journal of Geophysical Research*, 81(1): 168-174, Jan. 1976.
- PARK, C.G.; DEJNAKARINTRA, M. Penetration of thundercloud electric fields into the ionosphere and magnetosphere. 1. Middle and subauroral latitudes. *Journal of Geophysical Research*, 78(28): 6623-6633, Oct. 1973.
- PATEL, V.L. Interplanetary magnetic field variations and the electromagnetic state of the equatorial ionosphere. *Journal of Geophysical Research*, 83(A5):2137-2144, May 1978.
- PAULIKAS, G.A. Precipitation of particles at low and middle latitudes. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 13(5):709-734, Nov. 1975.
- PAULIKAS, G.A.; FREDEN, S.C. Precipitation of energetic electrons into the atmosphere. *Journal of Geophysical Research*, 69(7): 1239-1249, Apr. 1964.
- PETERSONS, H.F. Computation of winds and electrostatic field for the ionospheric dynamo. *Journal of Geophysical Research*, 79(31): 4805-4806, Nov. 1974.
- POMERANTZ, M.A.; DUGGAL, S.P. The Sun and cosmic rays. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 12(3):343-361, Aug. 1974.
- POTEMRA, T.A. Ionizing radiation affecting the lower ionosphere. In: HOLTET, J.A., ed. *ELF-VLF Radio Wave Propagation*, Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1974, p. 21-37.
- REID, G.C. The middle atmosphere. In: MAYNARD, N.C., ed. *Middle Atmosphere Electrodynamics*; Report of the Workshop on the Role of the Electrodynamics of the Middle Atmosphere on Solar Terrestrial Coupling, Reston, VA, Jan. 17-19, 1979. Greenbelt, MD, NASA. GSFC, 1979, p. 27-42. (NASA CP-2090).
- REID, J.K. Sparse matrices. In: JACOBS, D., ed. *The State of the Art in Numerical Analysis*; Proceedings of the Conference held at the University of York, Apr. 12-15, 1976. London, Academic Press, 1977, p. 85-146.

- REITER, R. Solar flares and their impact on potential gradient and air-earth current characteristics at high mountain stations. *Pure and Applied Geophysics*, 72(1):259-267, 1969.
- The electric potential of the ionosphere as controlled by the solar magnetic sector structure. Result of a study over the period of a solar cycle. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 39(1):95-99, Jan. 1977.
- RICHMOND, A.D. Ionospheric wind dynamo theory: a review. *Journal of Geomagnetism and Geolectricity*, 31(3):287-310, 1979a.
- Thermospheric heating in a magnetic storm: dynamic transport of energy from high to low latitudes. *Journal of Geophysical Research*, 84(A9):5259-5266, Sep. 1979b.
- RICHMOND, A.D.; MATSUSHITA, S.; TARPLEY, J.D. On the production mechanism of electric currents and fields in the ionosphere. *Journal of Geophysical Research*, 81(4):547-555, Feb. 1976.
- RISHBETH, H. The F-layer dynamo. *Planetary and Space Science*, 19(2): 263-267, Feb. 1971.
- Thermospheric winds and the F-region: a review. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 34(2):1-47, Jan. 1972.
- ROBERTS, W.O.; OLSON, R.H. New evidence for effects of variable solar corpuscular emission on the weather. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 11(3):731-740, Aug. 1973.
- ROBLE, R.G.; HAYS, P.B. Solar-terrestrial coupling through atmospheric electricity. In: MAYNARD, N.C., ed. *Middle Atmosphere Electrodynamics*; Report of the Workshop on the Role of the Electrodynamics of the Middle Atmosphere on Solar Terrestrial Coupling, Reston, VA, Jan. 17-19, 1979. Greenbelt, MD, NASA. GSFC, 1979, .p. 89-139. (NASA CP-2090).
- ROEDERER, J.G. *Dynamics of geomagnetically trapped radiation*. Berlin, Springer-Verlag, 1970.

- ROSEN, R. Matrix bandwidth minimization. In: ACM NATIONAL CONFERENCE, 23., Las Vegas, VN, 1968. *Proceedings*. New York, ACM, 1968, p. 585-595.
- ROSENBERG, T.J.; LANZEROTTI, L.J. Direct energy inputs to the middle atmosphere. In: MAYNARD, N.C., ed. *Middle Atmosphere Electrodynamics*; Report of the Workshop on the Role of the Electrodynamics of the Middle Atmosphere on Solar Terrestrial Coupling, Reston, VA, Jan. 17-19, 1979. Greenbelt, MD, NASA. GSFC, 1979, p. 43-70. (NASA CP-2090).
- SANDSTRÖM, A.E. Cosmic ray physics. Amsterdam, North-Holland, 1965.
- SCHIELDGE, J.P.; VENKATESWARAN, S.V.; RICHMOND, A.D. The ionospheric dynamo and equatorial magnetic variations. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 35(6):1045-1061, June 1973.
- SCHULZ, M.; LANZEROTTI, L.J. *Particle diffusion in the radiation belts*. New York, Springer-Verlag, 1974.
- SEWARD, F.D. *The geographical distribution of ~100 keV electrons above the Earth's atmosphere*. Livermore, Lawrence Livermore Laboratory, University of California, 1973. (UCRL-51456).
- SMITH, G.D. *Numerical solution of partial differential equations. Finite difference methods*. 2. ed. Oxford, Clarendon Press, 1978. (Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series).
- SMITH, E.V.P.; GOTTLIEB, D.M. Solar flux and its variations. *Space Science Reviews*, 16(5-6):771-802, Nov./Dec. 1974.
- SNYDER, C.W.; NEUGEBAUER, M.; RAO, U.R. The solar wind velocity and its correlation with cosmic-ray variations and with solar and geomagnetic activity. *Journal of Geophysical Research*, 68(24): 6361-6370, Dec. 1963.
- STROBEL, D.F. Nitric oxide in the D region. *Journal of Geophysical Research*, 77(7):1337-1339, Mar. 1972.
- TAKEDA, M.; MAEDA, H. Three-dimensional structure of ionospheric currents. 1. Currents caused by diurnal tidal winds. *Journal of Geophysical Research*, 85(A12):6895-6899, Dec. 1980.

- TEWARSON, R.P. Row column permutation of sparse matrices. *The Computer Journal*, 10(sf):300-305, 1967.
- THORNE, R.M.; SMITH, E.J.; BURTON, R.K.; HOLZER, R.E. Plasmaspheric hiss. *Journal of Geophysical Research*, 78(10):1581-1596, Apr. 1973.
- THURNAU, D.H. [Algorithm 195 - Bandsolve]. *Communications of the ACM*, 6(sf):441, Aug. 1963.
- TORR, D.G.; TORR, M.R.; WALKER, J.C.G.; HOFFMAN, R.A. Particle precipitation in the South Atlantic Geomagnetic Anomaly. *Planetary and Space Science*, 23(1):15-26, Jan. 1975.
- TRIVEDI, N.B.; RAI, D.B.; MARTIN, I.M.; DA COSTA, J.M. Particle precipitation in Brazilian Geomagnetic Anomaly during magnetic storms. *Planetary and Space Science*, 21(10):1699-1704, Oct. 1973.
- TSURUTANI, B.T.; SMITH, E.J.; THORNE, R.M. Electromagnetic hiss and relativistic electron losses in the inner zone. *Journal of Geophysical Research*, 80(4):600-607, Feb. 1975.
- UNTIEDT, J. A model of the equatorial electrojet involving meridional currents. *Journal of Geophysical Research*, 72(23):5799-5810, Dec. 1967.
- VAN ALLEN, J.A. Particle description of the magnetosphere. In: CAROVILLANO, R.L.; MCCLAY, J.F.; RADOSKI, H.R., ed. *Physics of the Magnetosphere*; Proceedings of the Conference held at Boston, June 19-28, 1967. Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1968, p. 147-217. (Astrophysics and Space Science Library, 10).
- VERNOV, S.N.; CHUDAKOV, A.E. Terrestrial corpuscular radiation and cosmic rays. In: COSPAR INTERNATIONAL SPACE SCIENCE SYMPOSIUM, 1., Nice, 1960. *Proceedings*. Amsterdam, North-Holland, 1960, p. 751-796. (COSPAR Space Research).
- VOLLAND, H. Coupling between the neutral tidal wind and the ionospheric dynamo current. *Journal of Geophysical Research*, 81(10):1621-1628, Apr. 1976.

- VOLLAND, H. Mapping of the electric field of the S_q current into the lower atmosphere. *Journal of Geophysical Research*, 77(10): 1961-1965, Apr. 1972.
- VONNEGUT, B. Tropospheric electrification. In: MAYNARD, N.C., ed. *Middle Atmosphere Electrodynamics*; Report of the Workshop on the Role of the Electrodynamics of the Middle Atmosphere on Solar Terrestrial Coupling, Reston, VA, Jan. 17-19, 1979. Greenbelt, MD, NASA. GSFC, 1979, p. 157-168. (NASA CP-2090).
- WAGNER, C.-U.; MÖHLMANN, D.; SCHÄFER, K.; MISHIN, V.M. *Large-scale electrostatic processes in the plasmasphere*. Nationalkomitee für Geodäsie und Geophysik bei der Akademie der Wissenschaften der Deutschen Demokratischen Republik, 1979. (Geodätische und Geophysikalische Veröffentlichungen, Reihe II, Heft 23).
- WAGNER, C.-U.; MÖHLMANN, D.; SCHÄFER, K.; MISHIN, V.M.; MATVEEV, M.I. Large-scale electric fields and currents and related geomagnetic variations in the quiet plasmasphere. *Space Science Reviews*, 26(4):391-446, Aug. 1980.
- WALTON, E.K.; BOWHILL, S.A. Seasonal variations in the low latitude dynamo current system near sunspot maximum. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, 41(9):937-949, Sep. 1979.
- WEBB, W.L. Electric structure of the lower ionosphere. In: VERNIANI, F., ed. *Structure and dynamics of the upper atmosphere*. Amsterdam, Elsevier, 1974, p. 89-130.
- WEST, H.I., Jr.; BUCK, R.M. Energetic electrons in the inner belt in 1968. *Planetary and Space Science*, 24(7):643-655, July 1976.
- WHITE, R.S. *Space Physics*. New York, Gordon and Breach, Science Publishers, 1970.
- WOODMAN, R.F. Vertical drift velocities and east-west electric fields at the magnetic equator. *Journal of Geophysical Research, Space Physics*, 75(31):6249-6259, Nov. 1970.

- WYGANT, J.R.; HOLZWORTH, R.H.; MOZER, F.S. *Balloon borne electric field experiments*. Berkeley, Physics Dept. and Space Sciences Laboratory, University of California, 1979.
- YOSHIDA, S.; LUDWIG, G.H.; VAN ALLEN, J.A. Distribution of trapped radiation in the geomagnetic field. *Journal of Geophysical Research*, 65(3):807-813, Mar. 1960.
- YOUNG, D.M. *Iterative solution of large linear systems*. New York, Academic Press, 1971.
- YOUNG, D.M.; GREGORY, R.T. *A survey of numerical mathematics*. Reading, MA, Addison-Wesley, 1973. v. 2.
- ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*. London, McGraw-Hill, 1977.
- ZMUDA, A.J. Ionization enhancement from Van Allen electrons in the South Atlantic Magnetic Anomaly. *Journal of Geophysical Research*, 71(7):1911-1917, Apr. 1966.

APÊNDICE A

NOTAS ADICIONAIS AO MÉTODO DE VARREDURA

Na teoria de Sistemas Lineares Dinâmicos (e.g. Liebelt, 1967) frequentemente se encontra o caso especial da equação diferencial de primeira ordem, denominado *sistema linear*, que tem a seguinte forma:

$$\underline{w}' = \underline{F}(x) \underline{w} + \underline{G}(x) \underline{h}(x), \quad (\text{A.1})$$

onde $\underline{w} = \underline{w}(x)$ é o vetor de estado do sistema (com k elementos); $\underline{h}(x)$ é um termo forçante (com ℓ elementos) que introduz influências em \underline{w} ; e $\underline{F}(x)$ (de ordem $k \times k$) e $\underline{G}(x)$ (de ordem $k \times \ell$) são matrizes que relacionam, respectivamente, o efeito do próprio \underline{w} e das funções forçantes na taxa de variação $\underline{w}' = d\underline{w}/dx$ do vetor de estado. Se $\underline{h}(x) = \underline{0}$ o sistema denomina-se *livre* ou *homogêneo*.

A solução formal do sistema linear *não-homogêneo*, A.1, é dada por:

$$\underline{w}(x) = \underline{S}(x, \alpha) \underline{w}(\alpha) + \int_{\alpha}^x \underline{S}(x, t) \underline{G}(t) \underline{h}(t) dt, \quad (\text{A.2})$$

onde $\underline{w}(\alpha)$ é o vetor de estado inicial (quando $x = \alpha$, que é ponto inicial) e \underline{S} é a *matriz de transição* (de ordem $k \times k$) do sistema, com

$$\underline{S}'(x, \alpha) = \underline{F}(x) \underline{S}(x, \alpha), \quad (\text{A.3a})$$

$$\underline{S}(\alpha, \alpha) = \underline{I}, \quad (\text{A.3b})$$

onde $\underline{S}' = d\underline{S}/dx$ é a taxa de variação de \underline{S} com x , e \underline{I} é a matriz identidade (de ordem $k \times k$).

É fácil ver que o Sistema 4.15, escrito na forma

$$\begin{bmatrix} \underline{u}' \\ \underline{v}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{q} & -\underline{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{r} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

é análogo ao Sistema A.1 (com $k = \ell = 2n$), definindo-se:

$$\underline{F}(x) := \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{q}(x) & -\underline{p}(x) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5a})$$

$$\underline{w}(x; \underline{\lambda}) := \begin{bmatrix} \underline{u}(x; \underline{\lambda}) \\ \underline{v}(x; \underline{\lambda}) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5b})$$

$$\underline{w}(\alpha; \underline{\lambda}) := \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5c})$$

$$\underline{h}(x) := \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{r}(x) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5d})$$

onde \underline{I} e $\underline{0}$ representam a matriz identidade e a matriz nula (de ordens $n \times n$), respectivamente; $\underline{0}$ é o vetor nulo com n elementos; e $\underline{g}(x)$ confunde-se com uma matriz identidade de ordem $2n \times 2n$.

Portanto a solução do Sistema A.4 pode ser escrita como:

$$\underline{w}(x; \underline{\lambda}) = \underline{S}(x, \alpha) \underline{w}(\alpha; \underline{\lambda}) + \underline{g}(x, \alpha), \quad (\text{A.6a})$$

onde $\underline{S}(x, \alpha)$ tem ordem $2n \times 2n$, e $\underline{g}(x, \alpha)$ é um vetor com $2n$ elementos dado por:

$$\underline{g}(x, \alpha) := \int_{\alpha}^x \underline{S}(x, t) \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{r}(t) \end{bmatrix} dt. \quad (\text{A.6b})$$

Definindo

$$\underline{S}(x, \alpha) := \begin{bmatrix} \underline{S}_{11}(x, \alpha) & \underline{S}_{12}(x, \alpha) \\ \underline{S}_{21}(x, \alpha) & \underline{S}_{22}(x, \alpha) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7a})$$

onde $\underline{S}_{ij}(x, \alpha)$, $1 \leq i, j \leq 2$, são matrizes de ordem $n \times n$, obtêm-se:

$$\underline{g}(x, \alpha) := \begin{bmatrix} \underline{g}_1(x, \alpha) \\ \underline{g}_2(x, \alpha) \end{bmatrix} := \int_{\alpha}^x \begin{bmatrix} \underline{S}_{12}(x, t) & \underline{r}(t) \\ \underline{S}_{22}(x, t) & \underline{r}(t) \end{bmatrix} dt. \quad (\text{A.7b})$$

Os vetores $\underline{g}_1(x, \alpha)$ e $\underline{g}_2(x, \alpha)$ contêm n elementos cada. Por outro lado, a Equação 4.16 pode ser colocada na forma

$$\underline{f}(x; \lambda) := [\underline{I}, \underline{0}] \underline{w}(x; \lambda) - \underline{Y}_2, \quad (\text{A.8})$$

que, através das Equações A.6 e A.7, fornece:

$$\underline{f}(x; \lambda) := \underline{S}_{12}(x, \alpha) \lambda + \underline{S}_{11}(x, \alpha) \underline{Y}_1 - \underline{Y}_2 + \underline{g}_1(x, \alpha), \quad (\text{A.9})$$

que é formalmente igual à Equação 4.17 se se fizer

$$\underline{E}(x, \alpha) := \underline{S}_{12}(x, \alpha), \quad (\text{A.10a})$$

$$\underline{L}(x, \alpha) := \underline{S}_{11}(x, \alpha) \underline{Y}_1 - \underline{Y}_2 + \underline{g}_1(x, \alpha). \quad (\text{A.10b})$$

Observar que, com a Equação 4.16, $\underline{f}(\alpha; \lambda) = \underline{Y}_1 - \underline{Y}_2$, identicamente para qualquer λ . Portanto (Equação 4.17), deve-se ter $\underline{E}(\alpha, \alpha) = \underline{0}$ e $\underline{L}(\alpha, \alpha) = \underline{Y}_1 - \underline{Y}_2$, quaisquer que sejam a matriz \underline{E} e o vetor \underline{L} . A Equação A.10 confirma este fato, pois $\underline{S}_{ij}(\alpha, \alpha) = \delta_{ij} \underline{I}$ (Equação A.3b) e $\underline{g}_1(\alpha, \alpha) = \underline{g}_2(\alpha, \alpha) = \underline{0}$ (Equação A.7b), onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Assim, formalmente e por extenso, a solução do Sistema 4.15 (ou A.4) é dada por:

$$\underline{u}(x;\underline{\lambda}) = \underline{S}_{12}(x,\alpha) \underline{\lambda} + \underline{S}_{11}(x,\alpha) \underline{\gamma}_1 + \underline{g}_1(x,\alpha), \quad (\text{A.11a})$$

$$\underline{v}(x;\underline{\lambda}) = \underline{S}_{22}(x,\alpha) \underline{\lambda} + \underline{S}_{21}(x,\alpha) \underline{\gamma}_1 + \underline{g}_2(x,\alpha). \quad (\text{A.11b})$$

A escolha do ponto $x = \alpha$ como ponto inicial e do ponto $x = \beta$ para o cálculo de $\underline{f}(x;\underline{\lambda})$, como ponto de verificação final, isto é, com a integração numérica no sentido crescente de x , apresenta-se muitas vezes de maneira arbitrária. O caso inverso, sentido decrescente de x , pode ser tratado igualmente.

O método adapta-se facilmente a diferentes condições de contorno, isto é, segundo se conheça $\underline{u}(x_B) = \underline{\gamma}$ (Dirichlet), $\underline{u}'(x_B) = \underline{\phi}$ (Neumann) ou $\underline{u}'(x_B) = \underline{\xi} \underline{u}(x_B) + \underline{\phi}$ (Cauchy-Robbins), onde $x = x_B$ representa um ponto de contorno. Têm-se com isto quatro possibilidades distintas para especificação dessas condições (Neumann é um caso particular de Cauchy-Robbins, com $\underline{\xi} = 0$):

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{u}(\alpha) &= \underline{\gamma}_1, \\ \underline{u}(\beta) &= \underline{\gamma}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.12a})$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \underline{u}(\alpha) &= \underline{\gamma}_1, \\ \underline{v}(\beta) &= \underline{\xi}_2 \underline{u}(\beta) + \underline{\phi}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.12b})$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \underline{v}(\alpha) &= \underline{\xi}_1 \underline{u}(\alpha) + \underline{\phi}_1, \\ \underline{u}(\beta) &= \underline{\gamma}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.12c})$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \underline{v}(\alpha) &= \underline{\xi}_1 \underline{u}(\alpha) + \underline{\phi}_1, \\ \underline{v}(\beta) &= \underline{\xi}_2 \underline{u}(\beta) + \underline{\phi}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.12d})$$

O vetor \underline{L} e a matriz \underline{E} podem ser encontrados em cada um desses casos pelo método discutido na Seção 4.4, considerando agora que:

$$\underline{f}(x;\underline{\lambda}) := \begin{cases} \underline{u}(x;\underline{\lambda}) - \underline{\gamma}_2, & \text{nos casos 1 e 3; e} \\ \underline{v}(x;\underline{\lambda}) - \underline{\xi}_2 \underline{u}(x;\underline{\lambda}) - \underline{\phi}_2, & \text{nos outros casos,} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

e com um vetor-condição inicial dado por:

$$\underline{w}(\alpha;\underline{\lambda}) := \begin{cases} \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_1 \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix}, & \text{nos casos 1 e 2; e} \\ \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{\xi}_1 \end{bmatrix} \underline{\lambda} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{\phi}_1 \end{bmatrix}, & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Em resumo, nos casos 1, 2, 3 e 4, respectivamente, tem-se formalmente que:

$$\underline{E}(x,\alpha) := \begin{cases} \underline{S}_{12}(x,\alpha) \\ \underline{S}_{22}(x,\alpha) - \underline{\xi}_2 \underline{S}_{12}(x,\alpha) \\ \underline{S}_{11}(x,\alpha) + \underline{S}_{12}(x,\alpha) \underline{\xi}_1 \\ \underline{S}_{21}(x,\alpha) + \underline{S}_{22}(x,\alpha) \underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_2 [\underline{S}_{11}(x,\alpha) + \underline{S}_{12}(x,\alpha) \underline{\xi}_1] \end{cases} \quad (\text{A.15a})$$

e

$$\underline{L}(x,\alpha) := \begin{cases} \underline{S}_{11}(x,\alpha) \underline{\gamma}_1 - \underline{\gamma}_2 + \underline{g}_1(x,\alpha) \\ [\underline{S}_{21}(x,\alpha) - \underline{\xi}_2 \underline{S}_{11}(x,\alpha)] \underline{\gamma}_1 - \underline{\phi}_2 - \underline{\xi}_2 \underline{g}_1(x,\alpha) + \underline{g}_2(x,\alpha) \\ \underline{S}_{12}(x,\alpha) \underline{\phi}_1 - \underline{\gamma}_2 + \underline{g}_1(x,\alpha) \\ [\underline{S}_{22}(x,\alpha) - \underline{\xi}_2 \underline{S}_{12}(x,\alpha)] \underline{\phi}_1 - \underline{\phi}_2 - \underline{\xi}_2 \underline{g}_1(x,\alpha) + \underline{g}_2(x,\alpha). \end{cases} \quad (\text{A.15b})$$

Com exceção do primeiro caso, a existência de $\underline{E}^{-1}(\beta, \alpha)$ (e, portanto, do vetor-solução $\underline{\lambda}_S$, Equação 4.18) está ligada diretamente à condição de contorno (através de $\underline{\xi}_1$ ou $\underline{\xi}_2$, ou de ambos); é uma característica da condição Cauchy-Robbins. Esse relacionamento desaparece para um contorno de Neumann.

APÊNDICE B

SISTEMAS ESPARSOS DE EQUAÇÕES LINEARES - RESOLUÇÃO

A maioria dos problemas científicos tem a sua solução diretamente relacionada com um sistema de equações lineares. A abordagem desses problemas por um método numérico semelhante àqueles discutidos no Capítulo 4 conduzem normalmente a grandes sistemas de equações lineares. A *resolução automática* desses sistemas envolve, muitas vezes, um cuidado especial em seu armazenamento na memória de um computador e posterior manuseio.

Considere-se, ilustrativamente, o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_8 - 3x_9 &= 1 \\x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_9 &= 2 \\x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 + 2x_9 &= 4 \\x_4 + 3x_5 - 2x_6 + 3x_9 &= 5 \\x_5 + 2x_6 + x_7 + x_8 + x_9 &= 6 \\x_6 + 7x_7 - x_8 &= 7 \\x_1 - x_6 + x_7 + 8x_8 - x_9 &= 8 \\x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 + x_6 + x_8 + x_9 &= 9.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Ou, escrito na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} . \quad (\text{B.2})$$

A sua *matriz-coeficiente* tem 81 elementos, dos quais 41 são diferentes de zero. O armazenamento dessa matriz na memória de um computador apresenta uma fração útil de posições de memória um pouco maior que 50%, isto é, quase a metade da área reservada de memória está desperdiçada com valores nulos dos coeficientes.

No entanto, o Sistema B.1 também pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_9 \\ x_5 \\ x_8 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 9 \\ 5 \\ 8 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} , \quad (\text{B.3})$$

obtido pelo simples artifício de permutar linhas e colunas na representação matricial B.2.

Nesta última forma, a matriz-coeficiente continua tão esparsa quanto antes. Entretanto, agora os elementos não-nulos se agruparam em torno da diagonal principal, na região situada entre as duas linhas tracejadas. Tem-se assim uma *matriz-banda* de ordem $N = 9$ e largura $L = 7$. Algoritmos eficientes podem ser usados na resolução de sistemas de equações lineares com a matriz dos coeficientes na forma de uma matriz-banda (e.g. Thurnau, 1963). Das $NL = 63$ posições reservadas para a matriz-banda, 41 continuam não-nulas, o que aumenta a fração útil de armazenamento de 50,6 para 65,1% (da ordem de 1,3 vezes). Em geral, o aumento é de N/L vezes.

Neste exemplo, em termos absolutos, a porção de memória desperdiçada é usualmente insignificante. Em grandes sistemas, entre tanto, com N da ordem de 10^3 - 10^5 , que resulta em L da ordem de 10 - 10^3 , tal artifício é realmente útil. Em todo o caso, mesmo assim o espaço disponível de *memória principal* (memória de acesso rápido) para um computador é atualmente da ordem de $NL \approx 10^5$ e 10^6 para computadores de médio e grande porte, respectivamente.

Na resolução de equações diferenciais parciais, a discretização de uma região (com a construção de uma grade) pelos métodos de diferença finita ou de elementos finitos resulta, quase sempre, em grandes e esparsos sistemas de equações lineares, com um custo proibitivo de armazenamento na memória dos seus N^2 elementos. A permutação de linhas e de colunas da matriz-coeficiente, com vistas a um armazenamento eficaz, equivale a uma *renumeração* dos nós da grade. A numeração/renumeração de uma grade (Alway and Martin, 1965; Tewarson, 1967; Akyuz and Utku, 1968; Rosen, 1968; Akyuz, 1969; Barlow and Marples, 1969; Cuthill and McKee, 1969; King, 1970; Grooms, 1972; Collins, 1973; Akhras and Dhatt, 1976; Bykat, 1976) desempenha um papel fundamental nesses métodos de discretização.

Pode-se perceber, entretanto, que mesmo estando a matriz-coeficiente reduzida a uma matriz-banda, elementos nulos podem normalmente existir dentro da área de armazenamento. Muitas vezes esses coe

ficientes nulos representam uma boa porção da memória. Nesses casos, uma estrutura de dados voltada para a não-representação desses elementos nulos deve ser considerada.

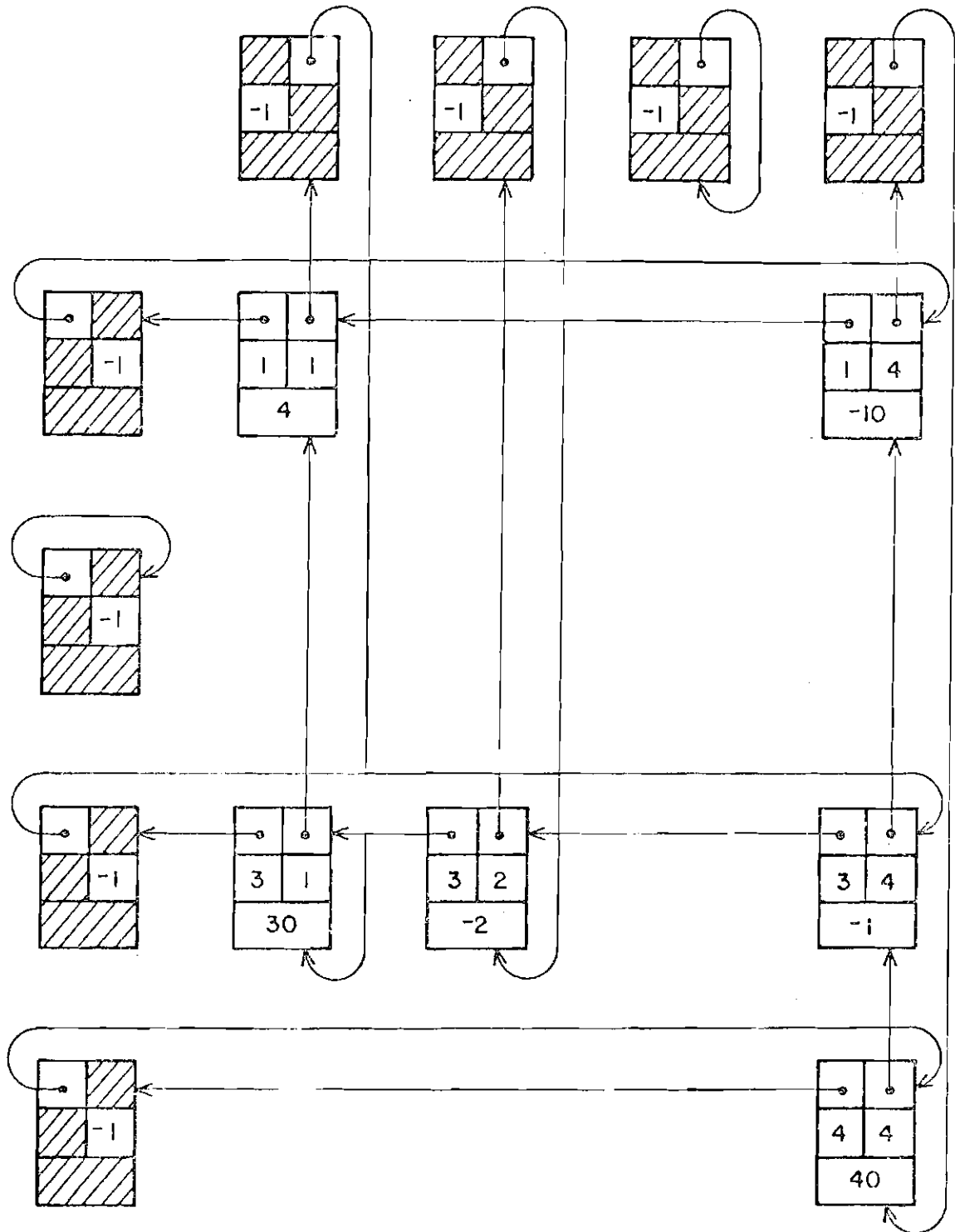
Assim, a matriz esparsa

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

pode ser representada pela *estrutura encadeada* da Figura B.1 (Knuth, 1973), onde sō os elementos nō-nulos sō considerados.

Cada linha ou cada coluna ē associada a uma *lista encadeada circular*, e cada elemento da matriz tem associado a si um nō com 5 campos, que sō: (1) o prōximo nō (coeficiente nō-nulo) ā esquerda, na mesma linha; (2) o prōximo nō acima, na mesma coluna; (3) a sua linha correspondente; (4) a sua coluna; e (5) o valor do coeficiente. Os nōs mais ā esquerda sō os "list heads" das linhas da matriz, caracterizados por um valor negativo, -1, para o campo de coluna. A ārea hachurada indica valores nō-significativos. Analogamente, na parte superior aparecem os "list heads" das colunas, com um valor -1 para o campo de linha.

Assim, ē fācil perceber, por exemplo, que a segunda coluna tem sō um elemento nō-nulo, de valor -2, que estā na terceira linha e que tem, como seu vizinho ā esquerda e na primeira coluna, o coeficiente de valor 30; ou que a segunda linha nō tem elementos; etc. Com essa estrutura, a matriz-coeficiente, tanto na forma do Sistema B.2 quanto na do Sistema B.3, usaria a mesma porção de memōria.



Notação:

PRÓXIMO A ESQUERDA	PRÓXIMO ACIMA
LINHA	COLUNA
COEFICIENTE	

Fig. B.1 - Representação de uma matriz esparsa.

Definido o modo de armazenamento interno (na memória do computador) da matriz-coeficiente de um grande e esparso sistema de equações lineares, a sua solução é realizada usualmente por *métodos iterativos* (e.g. Young, 1971; Young and Gregory, 1973; Dahlquist and Björck, 1974). Atualmente, entretanto, mesmo nesses casos já se faz uso mais intenso de *métodos diretos*. A conveniência entre um ou outro modo de resolução nem sempre é bem definida e depende principalmente das características (forma, sinal e magnitude dos elementos não-nulos, etc.) da matriz-coeficiente.

Entre os métodos diretos, a *eliminação de Gauss* é o mais conhecido e utilizado, com (ou sem) a *condensação pivotal parcial* ou *total*. Se o algoritmo empregado na solução do sistema usa condensação pivotal, uma renumeração dos nós (que leva a uma largura de banda menor) antes da representação encadeada pode reduzir substancialmente o esforço computacional. Em caso contrário, muitas vezes a renumeração é desnecessária.

Uma estrutura de representação interna semelhante à da Figura B.1, porém mais simplificada, pode ser vista na Figura B.2. Nesta forma, cada linha está associada a uma *lista encadeada linear*, e cada elemento corresponde a um nó com 3 campos. O campo de linha e o campo de próximo nó acima desapareceram, bem como os "list heads" das colunas. O campo de linha está implícito quando se percorre uma das listas.

O algoritmo G a seguir fornece uma solução para um sistema de equações lineares do tipo banda, mediante o método de eliminação de Gauss, com condensação pivotal parcial embutida. A estrutura de armazenamento é a da Figura B.2. Notar que a permutação de linhas durante a condensação é facilmente obtida com a modificação de apenas 2 "links" (ponteiros) dos "list heads".

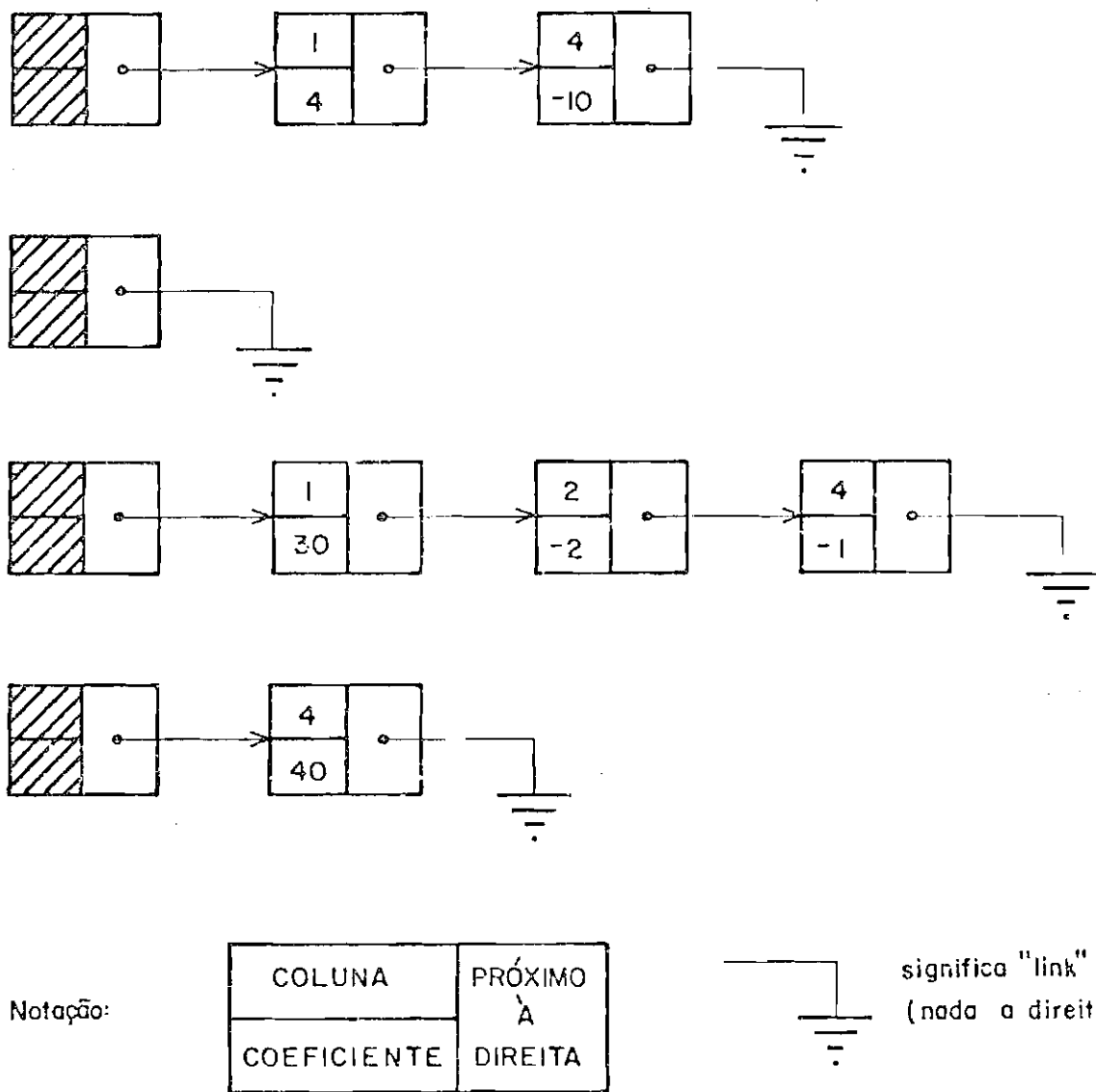


Fig. B.2 - Representação mais simplificada de uma matriz esparsa.

Algoritmo G (*eliminação de Gauss*). Resolve um sistema de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss, com condensação pivotai parcial incluída. A matriz-coeficiente está representada como na Figura B.2. Internamente isto corresponde a uma pilha ("stack"), com M posições disponíveis, onde cada posição contém os campos COLUNA, COEF e DIREITA (o campo de encadeamento da pilha). O topo da pilha é demarcado pelo ponteiro T . A posição inicial do primeiro elemento da linha i dentro da pilha é marcada pelo ponteiro $INICIO(i)$, equivalente ao "list head". A Figura B.3 mostra a pilha correspondente à Figura B.2. A pilha pode ser montada pelo algoritmo P (discutido adiante).

G1. [Inicialização]. De algum modo, não especificado aqui, as seguintes grandezas são inicializadas:

- N , número de equações (ordem do sistema);
- L , largura da matriz-banda dos coeficientes (número ímpar);
- TOL , tolerância permitida para perda de dígitos na subtração; e
- X , "array" com os N termos independentes. No final, conterá a solução do sistema.

Fazer $K \leftarrow 1$ (início da eliminação de Gauss com a primeira linha) e $L \leftarrow \lfloor L/2 \rfloor$ (o maior inteiro não maior do que $L/2$).

G2. [Sistema indeterminado?]. Para $I = 1, 2, \dots, N$, verificar se $INICIO(I) = \Lambda$ ("link" nulo) para algum I ; caso afirmativo, o algoritmo terminou (sistema indeterminado).

G3. [Delimitação]. Se $K + L > N$, fazer $MAXLIN \leftarrow N$; caso contrário, $MAXLIN \leftarrow K + L$ ($MAXLIN$ indica a última linha para procura do "pivot", na coluna K). Fazer $PIVOT \leftarrow 0$. Para $I = K, K + 1, \dots, MAXLIN$, executar o passo G4. Se $LIN > K$, ir para o passo G5; caso contrário, ir para o passo G6.

- G4.** [Procura do "pivot"]. Fazer $P \leftarrow \text{INICIO}(I)$ (P aponta para o primeiro elemento da linha I , se houver). Se $P = \Lambda$, o algoritmo terminou (sistema inconsistente, se $X(I) = 0$; ou sistema singular, se $X(I) = 0$); caso contrário, se $\text{COLUNA}(P) = K$ e $|\text{COEF}(P)| > |\text{PIVOT}|$, fazer $\text{LIN} \leftarrow I$ e $\text{PIVOT} \leftarrow \text{COEF}(P)$.
- G5.** [Permutação de linhas]. Fazer $P \leftarrow \text{INICIO}(K)$, $\text{INICIO}(K) \leftarrow \text{INICIO}(\text{LIN})$, $\text{INICIO}(\text{LIN}) \leftarrow P$ (troca dos coeficientes), $A \leftarrow X(K)$, $X(K) \leftarrow X(\text{LIN})$ e $X(\text{LIN}) \leftarrow A$ (troca dos termos independentes).
- G6.** [Devoíve "pivot"]. Fazer $R \leftarrow \text{INICIO}(K)$, $\text{INICIO}(K) \leftarrow \text{DIREITA}(R)$, $\text{DIREITA}(R) \leftarrow T$ e $T \leftarrow R$.
- G7.** [Processa linha do "pivot"]. Fazer $Q \leftarrow \text{INICIO}(K)$. Enquanto $Q \neq \Lambda$, fazer $\text{COEF}(Q) \leftarrow \text{COEF}(Q)/\text{PIVOT}$ e $Q \leftarrow \text{DIREITA}(Q)$ ($Q = \Lambda$ indica que toda linha foi percorrida). Fazer $X(K) \leftarrow X(K)/\text{PIVOT}$.
- G8.** [Eliminação de Gauss]. Se $K = N$, fazer $K \leftarrow N - 1$, $Q \leftarrow \text{INICIO}(K)$ e ir para o passo G13. Para $I = K + 1, K + 2, \dots, \text{MAXLIN}$ e se $\text{COLUNA}(\text{INICIO}(I)) = K$, executar o passo G9. Fazer $K \leftarrow K + 1$ e ir para o passo G3.
- G9.** [Posição relativa]. Fazer $S \leftarrow \text{INICIO}(I)$, $P \leftarrow \text{DIREITA}(S)$ (no percorrimento da linha I , o ponteiro P estará um passo na frente de S) e $Q \leftarrow \text{INICIO}(K)$. Enquanto $Q \neq \Lambda$, executar: o passo G10, se $P \neq \Lambda$ e $\text{COLUNA}(P) < \text{COLUNA}(Q)$; ou o passo G11, se $P \neq \Lambda$ e $\text{COLUNA}(P) = \text{COLUNA}(Q)$; ou o passo G12, se $P = \Lambda$ ou se $P \neq \Lambda$ e $\text{COLUNA}(P) > \text{COLUNA}(Q)$. Fazer $A \leftarrow \text{COEF}(\text{INICIO}(I)) \times X(K)$, $X(I) \leftarrow X(I) - A$. Se $|X(I)| < \text{TOL} \times |A|$, fazer $X(I) \leftarrow 0$ (muitos dígitos significativos perdidos na subtração). Fazer $R \leftarrow \text{INICIO}(I)$, $\text{INICIO}(I) \leftarrow \text{DIREITA}(R)$, $\text{DIREITA}(R) \leftarrow T$ e $T \leftarrow R$ (devolve o nó para o espaço disponível).
- G10.** [Próxima coluna]. Fazer $S \leftarrow P$ e $P \leftarrow \text{DIREITA}(P)$.

- G11.** [Mesma coluna]. Fazer $A \leftarrow \text{COEF}(Q) \times \text{COEF}(\text{INICIO}(I))$ e $\text{COEF}(P) \leftarrow \text{COEF}(P) - A$. Se $|\text{COEF}(P)| < \text{TOL} \times |A|$, fazer $\text{DIREITA}(S) \leftarrow \text{DIREITA}(P)$, $\text{DIREITA}(P) \leftarrow T$, $T \leftarrow P$, $P \leftarrow \text{DIREITA}(S)$ e $Q \leftarrow \text{DIREITA}(Q)$ (muitos dígitos significativos perdidos na subtração. O nó é devolvido para o espaço disponível); caso contrário, fazer $S \leftarrow P$, $P \leftarrow \text{DIREITA}(P)$ e $Q \leftarrow \text{DIREITA}(Q)$.
- G12.** [Insere novo elemento]. Se $T \neq \Lambda$, fazer $U \leftarrow T$, $T \leftarrow \text{DIREITA}(T)$, $A \leftarrow \text{COEF}(Q) \times \text{COEF}(\text{INICIO}(I))$, $\text{DIREITA}(S) \leftarrow U$, $\text{DIREITA}(U) \leftarrow P$, $S \leftarrow U$, $\text{COEF}(S) \leftarrow -A$, $\text{COLUNA}(S) \leftarrow \text{COLUNA}(Q)$ e $Q \leftarrow \text{DIREITA}(Q)$; caso contrário, o algoritmo terminou (o espaço disponível na pilha se esgotou, isto é, ocorreu "overflow").
- G13.** [Substituição regressiva]. Fazer $A \leftarrow 0$. Enquanto $Q \neq \Lambda$, fazer $A \leftarrow A + \text{COEF}(Q) \times X(\text{COLUNA}(Q))$ e $Q \leftarrow \text{DIREITA}(Q)$. Fazer $X(K) \leftarrow X(K) - A$ e $K \leftarrow K - 1$. Se $K > 0$, fazer $Q \leftarrow \text{INICIO}(K)$ e repetir o passo G13; caso contrário o algoritmo terminou.

Observar que na ocorrência de "overflow", no passo G12, pode-se pensar em um mecanismo que forneça novas posições para a pilha, baseado, por exemplo, na estatística sobre as mais recentes solicitações de posições de memória. Assim, só na existência de um "overflow" irrecurível é que o algoritmo deve terminar. Por outro lado, o algoritmo G devolve para o espaço disponível (tão logo que possível) aqueles nós que durante o processo de eliminação são anulados, ou que tenham perdido uma quantidade razoável de dígitos significativos ou que não sejam mais necessários. Isto minimiza a probabilidade de ocorrência de "overflow".

Para uma matriz-banda que tenha o número de elementos próximos próximo (ou menor) do número de elementos não-nulos e que seja razoavelmente equilibrada (número de elementos abaixo da diagonal próximo do número de elementos acima), o espaço máximo utilizado de posições de memória é praticamente igual ao inicialmente reservado. Isto quer mostrar que, nesses casos, "overflow" pode ser considerado um evento raro.

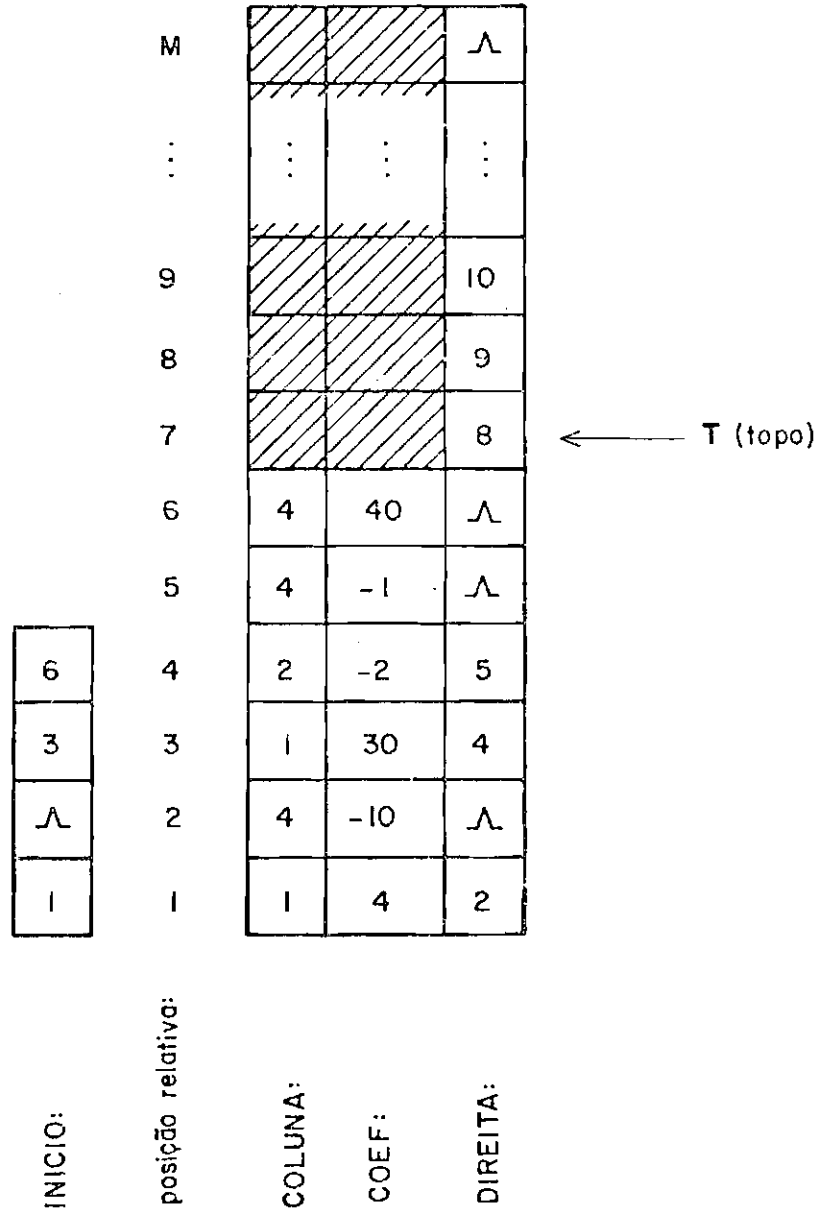


Fig. B.3 - Pilha de armazenamento da matriz da Figura B.2.

Notar que INICIO(2) = Λ ("link" nulo) indica que a segunda linha está vazia.

Em geral, a largura de uma matriz-banda A é dada por $L = p + q + 1$, onde p e q são os menores números inteiros tal que, quaisquer que sejam a linha i e a coluna j , $A_{ij} = 0$ se $i > j + p$ ou $j > i + q$. Em outros termos, p indica quantos elementos de uma linha estão à esquerda (ou abaixo) do elemento na diagonal nessa mesma linha (coluna); e q , os que estão à direita (ou acima) dele. O algoritmo G está particularizado para um sistema de equações lineares com uma matriz-banda para os coeficientes onde $p = q$. Quando $p \neq q$, trocar $L \leftarrow \lfloor L/2 \rfloor$ por $L \leftarrow p$ no passo G1.

Se se tem uma matriz qualquer pode-se ainda utilizar o algoritmo G, notando que agora $L = 2N + 1$. Outra solução implica leve modificação no passo G3: a grandeza MAXLIN terá sempre um valor igual a N . Assim, a primeira parte do passo G3 é desnecessária e agora tem-se que $I = K, K+1, \dots, N$.

Para um sistema com a matriz-coeficiente *simétrica positiva definida* ou *diagonalmente dominante*, a condensação pivotal é dispensável (e.g. Dahlquist and Björck, 1974). Neste caso, o passo G3 continua apenas com sua parte inicial (MAXLIN indica até onde será realizada a eliminação de Gauss) e os passos G4 e G5 são desnecessários; por fim, adiciona-se $PIVOT \leftarrow COEF(INICIO(K))$ ao início do passo G6. Outras modificações, como condensação pivotal total, *eliminação de Gauss-Jordan*, etc. podem ser facilmente implementadas.

Algoritmo P (montagem da pilha). Monta uma pilha correspondente a um sistema de equações lineares, na forma da Figura B.3. São fornecidos um a um os coeficientes matriciais com seus índices de linha e de coluna: $I, J, VALOR$ (respectivamente, a linha, a coluna e o valor do coeficiente), onde $1 \leq I, J \leq N$. Entretanto, o último trio fornecido tem valores fora da faixa de definição dos índices de linha e/ou coluna para indicar o término da montagem da pilha. A pilha tem no total M posições.

- P1. [Inicialização]. Para $K = 1, 2, \dots, N$, fazer $\text{INICIO}(K) \leftarrow \Lambda$. Para $K = 1, 2, \dots, M - 1$, fazer $\text{DIREITA}(K) \leftarrow K + 1$. Fazer $\text{DIREITA}(M) \leftarrow \Lambda$ e $T \leftarrow 1$.
- P2. [Entrada dos dados]. Fornecer os parâmetros de um elemento matricial: I, J, VALOR (a estrutura lógica final da pilha independe da ordem em que os elementos matriciais são fornecidos). Se $I < 1$ ou $I > N$ ou $J < 1$ ou $J > N$, o algoritmo terminou.
- P3. [Testes e localização]. Se $\text{VALOR} = 0$, ir para o passo P2. Se $T = \Lambda$, o algoritmo terminou ("overflow" na pilha; todas suas M posições estão ocupadas). Fazer $R \leftarrow Q \leftarrow P \leftarrow \text{INICIO}(I)$. Enquanto $R \neq \Lambda$, executar o passo P4. Ir para o passo P5.
- P4. [Percorre linha]. Se $\text{COLUNA}(P) \leq J$, fazer $Q \leftarrow P$ e $R \leftarrow P \leftarrow \text{DIREITA}(P)$; caso contrário $R \leftarrow \Lambda$ (os ponteiros P e Q delimitarão, no final, a posição de inserção do novo elemento I, J ; o ponteiro R é auxiliar).
- P5. [Armazenamento]. Se $Q = P$, fazer $R \leftarrow T, T \leftarrow \text{DIREITA}(T), \text{INICIO}(I) \leftarrow R, \text{DIREITA}(R) \leftarrow Q, \text{COLUNA}(R) \leftarrow J$ e $\text{COEF}(R) \leftarrow \text{VALOR}$ (insere elemento no início da linha); caso contrário, fazer: $\text{COEF}(Q) \leftarrow \text{VALOR}$, se $\text{COLUNA}(Q) = J$ (elemento repetido); ou $R \leftarrow T, T \leftarrow \text{DIREITA}(T), \text{DIREITA}(Q) \leftarrow R, \text{DIREITA}(R) \leftarrow P, \text{COLUNA}(R) \leftarrow J$ e $\text{COEF}(R) \leftarrow \text{VALOR}$, se $\text{COLUNA}(Q) < J$ (insere elemento no meio ou no fim da linha). Ir para o passo P2.

Considerando que a porção de memória necessária para a resolução de um dado sistema seja definida por M , o espaço total de armazenamento com o uso do algoritmo P é de $3M + N$ posições de memória (supondo que cada um dos campos $\text{COEF}, \text{COLUNA}$ e DIREITA ocupam posições distintas). Isto indica que pode existir aí uma desvantagem quando se compara esse método com outros métodos de armazenamento (por exemplo, com o simples armazenamento das NL posições da matriz-banda equivalente). Para grandes sistemas lineares, no entanto, a matriz-banda quase certamente conterá em seu corpo uma quantidade de elementos nulos bem maior que N e, provavelmente, maior que M .

Com o compartilhamento da mesma posição de memória por mais de uma grandeza, a situação se altera levemente. Neste caso, restrições de outro tipo podem começar a se tornar importantes. Por exemplo, se se têm DIREITA e COLUNA compartilhando uma palavra de memória, com b bits em cada palavra, aparece a condição de que $2^b \geq (M+1)(N+1)$. Para $b = 32, 48$ e 60 bits, proporcionalmente pode-se ter no máximo M da ordem de $2,621 \times 10^5$, $1,342 \times 10^8$ e $1,717 \times 10^{10}$ e N da ordem de $1,638 \times 10^4$, $2,097 \times 10^6$ e $6,710 \times 10^7$, respectivamente.

Em todo o caso o fato de, durante a resolução do sistema, só os elementos não-nulos demandarem atenção da máquina (com os algoritmos P e G) faz diminuir sensivelmente outro parâmetro importante: o tempo de processamento gasto. Atualmente não se tem ainda a forma definitiva e única de melhor armazenamento/processamento de um grande e esparsa sistema de equações lineares; outras formas podem ser consideradas (e.g. Jennings, 1977; Reid, 1977). A forte dependência com o problema que se quer resolver, com o método de resolução empregado, com o computador utilizado, etc. torna essa tarefa extremamente difícil.

A seguir é apresentada uma versão dos algoritmos G e P, implementados com o "B7000/B8000 Extended ALGOL Language", do Burroughs B6800. Pequenas modificações foram introduzidas em ambos os algoritmos.

A transferência de dados entre programas é realizada mediante o armazenamento em disco (memória auxiliar).

O programa MONTAPILHA lê o arquivo DISCO, onde estão armazenados os elementos da matriz-coeficiente bem como o vetor dos termos independentes, e grava o arquivo DADOS na forma equivalente à Figura B.2 (ou B.3). Se houver repetição de um elemento matricial, só o primeiro elemento fornecido será armazenado (em outras palavras, não permitirá a correção do valor de um coeficiente, como descrito no passo P5). O arquivo DADOS inclui o vetor dos termos independentes. Vários parâmetros são também calculados (número de elementos lidos, número de elementos lidos que são nulos, porção de memória disponível, etc.).

O arquivo DADOS é lido por BANDGELIM e a solução do sistema é deixada no arquivo RESULTADOS. O arquivo DISCOCTB, gravado em disco, apresenta a contabilidade da utilização do espaço na pilha, realizada através da variável CTB. A condição de retorno é dada pela variável RETORNO, que pode voltar com o valor 1 (retorno normal), 0 (sistema singular, indeterminado ou inconsistente) e < 0 (se houver "overflow"; neste caso, $|\text{RETORNO}|$ indica o estágio da eliminação de Gauss quando ocorre o "overflow"). O valor de RETORNO está no primeiro registro do arquivo DISCOCTB. No segundo registro está a ordem do sistema, N. Nos registros seguintes está a quantidade disponível de posições de memória na pilha no início de cada estágio K ($K = 1, 2, \dots, N$) da eliminação de Gauss (o último registro refere-se à quantidade que ficou depois de obtida a solução). A estrutura da pilha no final da resolução equivale à forma triangular superior (sem os elementos diagonais, de valor unitário) característica do método de eliminação de Gauss. A solução do Sistema B.1, obtida com os algoritmos P e G, é dada por $x_i = 1, i = 1, 2, \dots, 9$.

```

10010 PROCEDURE MONTAPILHAJ
10020 BEGIN
10030   FILE DISCO(KIND=DISK,FILETYPE=7))
10040   INTEGER ELONULO,L,M,M1,N,N1)
10050   RFAL TOL)
10060   RFAD(DISCO,**L,N,TOL))
10070   RFAD(DISCO,**M))
10080   ELONULO:=0)
10090   M1:=ENTIER(M/1023))
10100   N1:=ENTIER(N/1023))
10110   M:=1023*(M1+1)-1)
10120   BEGIN
10130     FILE DADOS(KIND=DISK,MAXRECSIZE=3,BLOCKSIZE=300),
10140     MONITOR(KIND=PRINTER))
10150     INTEGER T)
10160     INTEGER ARRAY FCOLUNA,FDIREITA(0:M1,0:1022),FINICIO(0:N1,0:1022))
10170     REAL ARRAY FCOEF(0:M1,0:1022),FX(0:N1,0:1022))
10180     DEFINE COEF (I) = FCOEF [(I DIV 1023, I MOD 1023) #,
10190       COLUNA (I) = FCOLUNA [(I DIV 1023, I MOD 1023) #,
10200       DIREITA(I) = FDIREITA[(I DIV 1023, I MOD 1023) #,
10210       INICIO (I) = FINICIO [(I DIV 1023, I MOD 1023) #,
10220       X (I) = FX [(I DIV 1023, I MOD 1023) #]
10230     PROCEDURE INICIALIZACAO)
10240     -----
10250     X
10260     X     INICIALIZACAO DOS "ARRAYS".
10270     X
10280     BEGIN
10290       INTEGER K)
10300       FOR K:=1 STEP 1 UNTIL N DO INICIO(K):=ELONULO)
10310       FOR K:=1 STEP 1 UNTIL M-1 DO DIREITA(K):=K+1)
10320       DIREITA(M):=ELONULO)
10330       T:=1)
10340     END DE INICIALIZACAO)
10350     PROCEDURE GUARDA(COEF(I,J),A,OVERFLOW,ENCONTROU))
10360     -----
10370     X
10380     X     ARMAZENA O COEFICIENTE A DA MATRIZ NA LINHA I
10390     X     E COLUNA J, SE NAO OCORREU "OVERFLOW", INDICANDO
10400     X     TAMBEEM SE O COEFICIENTE JA EXISTE.
10410     X
10420     VALUE I,J,A)
10430     INTEGER I,J)
10440     REAL A)
10450     BOOLEAN OVERFLOW,ENCONTROU)
10460     BEGIN
10470       INTEGER P,Q,R)
10480       DEFINE INSERE(K) = IF T NEQ ELONULO
10490         THEN BEGIN
10500           R:=T)
10510           T:=DIREITA(T))
10520           K:=R)
10530           DIREITA(R):=P)
10540           COLUNA(R):=J)
10550           COEF(R):=A)
10560         END
10570       ELSE OVERFLOW:=TRUE #)
10580     OVERFLOW:=ENCONTROU:=FALSE)
10590     P:=Q:=R:=INICIO(1))
10600     WHILE R NEQ ELONULO DO
10610       IF COLUNA(P) LEQ J
10620         THEN BEGIN
10630           Q:=P)
10640           R:=P:=DIREITA(P))
10650         END
10660       ELSE R:=ELONULO)
10670       IF P NEQ Q

```

```
10680         THEN IF COLUNA(Q) NEQ J
10690             THEN INSERE(DIREITA(Q))
10700             ELSE ENCONTROU:=TRUE
10710         ELSE INSERE(INICIO(I));
10720     END DE GUARDACOEFF;
10730 *
10740 *         ROTINA PRINCIPAL.
10750 *
10760     INTEGER I,J,LIDOS,NULOS;
10770     REAL VALDR;
10780     BOOLEAN ACABOU,OVERFLOW,TEMCOEF;
10790     INICIALIZACAO;
10800     ACABOU:=OVERFLOW:=FALSE;
10810     LIDOS:=NULOS:=0;
10820     WHILE NOT (ACABOU OR OVERFLOW) DO
10830     BEGIN
10840         READ(DISCO,**I,J,VALDR);
10850         LIDOS:=**+1;
10860         IF I<1 OR I>N OR J<1 OR J>N THEN ACABOU:=TRUE;
10870         IF NOT ACABOU THEN
10880             IF VALDR NEQ 0
10890                 THEN BEGIN
10900                     GUARDACOEFF(I,J,VALDR,OVERFLOW,TEMCOEF);
10910                     IF TEMCOEF THEN
10920                         WRITE(MONITOR,/" COEF. REPETIDO",I,J,VALDR);
10930                     END
10940                 ELSE NULOS:=**+1;
10950             END;
10960         IF OVERFLOW
10970             THEN BEGIN
10980             DADDS(AREASIZE=1,AREAS=1);
10990             WRITE(DADDS,**-1,);
11000             WRITE(MONITOR,/" OVERFLOW NA MONTAGEM DA PILHA.");
11010             END
11020         ELSE BEGIN
11030             LIDOS:=**+1;
11040             JI:=H+N+2;
11050             IF J>6000
11060                 THEN DADDS(AREASIZE=6000,AREAS=ENTIER(J/6000)+1);
11070             ELSE DADDS(AREASIZE=J,AREAS=1);
11080             WRITE(DADDS,**M,N,TOL);
11090             WRITE(DADDS,**L,T,M+1-T);
11100             FOR I1=1 STEP 1 UNTIL M DO
11110                 WRITE(DADDS,**COLUNA(I),DIREITA(I),COEF(I));
11120             FOR I1=1 STEP 1 UNTIL N DO READ(DISCO,**X(I));
11130             CLOSE(DISCO,PURGE);
11140             FOR I1=1 STEP 1 UNTIL N DO
11150                 WRITE(DADDS,**INICIO(I),X(I));
11160             END;
11170             LOCK(DADDS);
11180             WRITE(MONITOR,/"X1,J12," ELEMENTOS LIDOS,"",LIDOS);
11190             IF NULOS NEQ 0 THEN
11200                 WRITE(MONITOR,/"X1,J12," ELEMENTOS NULOS ("F6.3,"%),",
11210                     NULOS,NULOS/LIDOS*100);
11220             END;
11230     END.
```



```
10010 PROCEDURE BANDGELINT
10020 %-----%
10030 %
10040 % RESOLVE UM SISTEMA DE EQUACOES LINEARES PELO METODO
10050 % DE ELIMINACAO DE GAUSS, COM CONDENSACAO PIVOTAL
10060 % PARCIAL INCLUIDA.
10070 %
10080 BEGIN
10090 FILE DADOS(KIND=DISK,FILETYPE='?'),
10100 RESULTADOS(KIND=DISK,NEWFILE=TRUE,MAXRECSIZE=1,BLOCKSIZE=300);
10110 INTEGER ELONULO,M,M1,N,N1,RETORNO;
10120 REAL TOL;
10130 RETORNO:=0;
10140 ELONULO:=0;
10150 READ(DADOS,*,M,N,TOL);
10160 M1:=ENTIER(M/1023);
10170 N1:=ENTIER(N/1023);
10180 IF M>0 THEN
10190 BEGIN
10200 FILE DISCOCTB(KIND=DISK,NEWFILE=TRUE,MAXRECSIZE=1,BLOCKSIZE=300);
10210 INTEGER CTB,I,K,KK,L,LIN,MAXLIN,P,Q,R,S,T,U;
10220 REAL A1,A2,A3,PIVOT;
10230 BOOLEAN OK;
10240 INTEGER ARRAY FCOLUNA,FDIREITA(0:M1,0:1022),FINICIO(0:M1,0:1022);
10250 REAL ARRAY FCOEF(0:M1,0:1022),FX(0:M1,0:1022);
10260 DEFINE CGEF (I) = FCOEF (I DIV 1023, I MOD 1023) #,
10270 COLUNA (I) = FCOLUNA (I DIV 1023, I MOD 1023) #,
10280 DIREITA(I) = FDIREITA(I DIV 1023, I MOD 1023) #,
10290 INICIO (I) = FINICIO (I DIV 1023, I MOD 1023) #,
10300 X (I) = FX (I DIV 1023, I MOD 1023) #,
10310 DEVOLVENDH(P) = DIREITA(P)T;
10320 T:=P;
10330 CTB:=0;
10340 PEGANOH (P) = P:=T;
10350 T:=DIREITA(T);
10360 CTB:=0;
10370 READ(DADOS,*,L,T,CTB);
10380 LI:=ENTIER(L/2);
10390 I:=N+3;
10400 IF I>18000
10410 THEN DISCOCTB(AREASIZE=18000,AREAS=ENTIER(I/18000)+1)
10420 ELSE DISCOCTB(AREASIZE=I,AREAS=1);
10430 WRITE(DISCOCTB);
10440 WRITE(DISCOCTB,*,N);
10450 FOR I:=1 STEP 1 UNTIL M DO
10460 READ(DADOS,*,COLUNA(I),DIREITA(I),CGEF(I));
10470 FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
10480 READ(DADOS,*,INICIO(I),X(I));
10490 CLOSE(DADOS,PURGE);
10500 OK:=TRUE;
10510 K:=RETORNO:=1;
10520 FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
10530 IF INICIO(I)=ELONULO THEN
10540 BEGIN
10550 RETORNO:=0;
10560 I:=N;
10570 END;
10580 WHILE K LEQ N AND RETORNO NEQ 0 DO
10590 BEGIN
10600 WRITE(DISCOCTB,*,CTB);
10610 MAXLIN:=K+L;
10620 IF MAXLIN>N THEN MAXLIN:=N;
10630 PIVOT:=0;
10640 FOR I:=K STEP 1 UNTIL MAXLIN DO
10650 BEGIN
10660 P:=INICIO(I);
10670 IF P=ELONULO
```

```
10680 THEN BEGIN
10690     I:=MAXLINJ
10700     LIN:=KJ
10710     PIVOT:=0J
10720     END
10730 ELSE IF COLUNA(P)=K THEN
10740     BEGIN
10750         A1:=COEF(P)J
10760         IF ABS(A1)>ABS(PIVOT) THEN
10770             BEGIN
10780                 LIN:=IJ
10790                 PIVOT:=A1J
10800             ENDJ
10810         ENDJ
10820     ENDJ
10830 IF LIN>K THEN
10840     BEGIN
10850         P:=INICIO(K)J
10860         INICIO(K):=INICIO(LIN)J
10870         INICIO(LIN):=PJ
10880         A1:=X(K)J
10890         X(K):=X(LIN)J
10900         X(LIN):=A1J
10910     ENDJ
10920 IF PIVOT=0
10930 THEN RETURN 0J
10940 ELSE BEGIN
10950     K:=K+1J
10960     R:=INICIO(K)J
10970     INICIO(K):=DIREITA(R)J
10980     DEVOLVENOM(R)J
10990     Q:=INICIO(K)J
11000     WHILE Q NEQ ELGNULO DO
11010     BEGIN
11020         COEF(Q):=**/PIVOTJ
11030         Q:=DIREITA(Q)J
11040     ENDJ
11050     X(K):=**/PIVOTJ
11060     FOR J:=KK STEP 1 UNTIL MAXLIN DO
11070     BEGIN
11080         R:=INICIO(J)J
11090         IF COLUNA(R)=K THEN
11100         BEGIN
11110             A1:=COEF(R)J
11120             S:=R)
11130             P:=DIREITA(S)J
11140             Q:=INICIO(K)J
11150             WHILE Q NEQ ELGNULO AND OK DO
11160             CASE IF P NEQ ELGNULO
11170                 THEN IF COLUNA(P)<COLUNA(Q)
11180                     THEN 0
11190                     ELSE IF COLUNA(P)=COLUNA(Q)
11200                         THEN 1
11210                         ELSE 2
11220             ELSE 2
11230         OF BEGIN
11240             BEGIN
11250                 S:=P)
11260                 P:=DIREITA(P)J
11270             ENDJ
11280             BEGIN
11290                 A2:=COEF(Q)*A1J
11300                 A3:=COEF(P)**-A2J
11310                 IF ABS(A3)<TOL*ABS(A2) THEN
11320                 BEGIN
11330                     DIREITA(S):=DIREITA(P)J
11340                     DEVOLVENOM(P)J
```

```

11350         P:=S;
11360         END;
11370         S:=P;
11380         P:=DIREITA(P);
11390         Q:=DIREITA(Q);
11400     END;
11410     IF T NEQ ELDONULO
11420     THEN BEGIN
11430         PEGANDI(U);
11440         DIREITA(S):=U;
11450         DIREITA(U):=P;
11460         S:=U;
11470         COEF(S):=-COEF(Q)+A1;
11480         COLUNA(S):=COLUNA(Q);
11490         Q:=DIREITA(Q);
11500     END
11510     ELSE BEGIN
11520         OK:=FALSE;
11530         I:=MAXLIN;
11540     END;
11550     END;
11560     IF OK THEN
11570     BEGIN
11580         A2:=X(K)+A1;
11590         A3:=X(1):=-A2;
11600         IF ABS(A3)<TOL*ABS(A2) THEN X(1):=0;
11610         INICIO(1):=DIREITA(R);
11620         DEVOLVENOM(R);
11630     END;
11640     END;
11650     END;
11660     N:=IF OK THEN KM ELSE N+1;
11670     END;
11680     END;
11690     IF NOT OK
11700     THEN RETURN(1-KK)
11710     ELSE IF RETURN(NEQ 0) THEN
11720     BEGIN
11730         FOR K:=N-1 STEP -1 UNTIL 1 DO
11740         BEGIN
11750             Q:=INICIO(K);
11760             IF Q NEQ ELDONULO THEN
11770             BEGIN
11780                 A1:=0;
11790                 WHILE Q NEQ ELDONULO DO
11800                 BEGIN
11810                     P:=COLUNA(Q);
11820                     A1:=+COEF(Q)*X(P);
11830                     Q:=DIREITA(Q);
11840                 END;
11850                 Y(K):=-A1;
11860             END;
11870         END;
11880         IF N>18000
11890         THEN RESULTADDS(CAREASIZE=18000,AREAS=ENTIER(N/18000)+1);
11900         ELSE RESULTADDS(CAREASIZE=N,AREAS=1);
11910         FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO WRITE(RESULTADDS,*,X(I));
11920         LUCK(RESULTADDS);
11930     END;
11940     WRITE(DISCOCTB,*,CTB);
11950     *WRITE(DISCOCTB(0),*,RETURN);
11960     LOCK(DISCOCTB);
11970     END;
11980     END.

```