

FUNÇÕES DE HOUGH: TEORIA E UTILIZAÇÃO'

JOSE PAULO BONATTI
PEDRO LEITE SILVA DIAS²
ANTONIO DIVINO MOURA

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico -
12200 - São José dos Campos - SP

RESUMO

Utilizando um modelo de equações primitivas, separa-se a dependência vertical da dependência horizontal do sistema de equações linearizado sobre um estado básico em repouso, cuja temperatura é função apenas da vertical. Tal separação é feita coerente com o esquema numérico usado na parte vertical e resulta em dois problemas de autovalor-autofunção. A equação para a estrutura vertical fornece os modos verticais e a associada altura equivalente. A estrutura vertical revela apenas a existência de um modo externo; os demais são internos. A parte horizontal é idêntica às equações da água-rasa linearizadas que têm como solução as funções de Hough para uma dada altura equivalente. Há uma separação de frequências que mostra uma classe de modos lentos (ondas de Rossby) e outra de modos rápidos (ondas de gravidade). É também discutida a dispersão de energia dessas ondas e o efeito do reforço na propagação de energia devido à utilização de números de onda zonais discretos. Conhecendo as propriedades de dispersão desses modos e o espectro inicial de energia, pode-se antecipar e melhor entender o papel dessas ondas na evolução temporal do campo inicial dado. Discute-se a utilização das funções de Hough como base para modelos espectrais, bem como sua aplicação no problema das marés atmosféricas e na análise dos dados observados.

1. INTRODUÇÃO

Os métodos espectrais de solução das equações de previsão atmosférica consistem na expansão das variáveis dependentes em uma série de funções, de modo que as derivadas espaciais possam ser calculadas analiticamente. Ao usar as próprias autofunções do modelo linearizado como base, a parte linear pode ser tratada exatamente.

Flattery (1971) sugeriu que as funções de Hough, as autofunções da equação de marés de Laplace na esfera (Longuet-Higgins, 1968), fossem utilizadas como base em modelos espectrais globais e na filtragem das equações primitivas. Kasahara (1976 e 1977) efetivou este procedimento em um modelo barotrópico não linear sobre a esfera. Os termos não-lineares são obtidos pelo método da transformada de Eliassen et alii (1970), que elimina o armazenamento de um número muito grande de coeficientes de expansão, aumentando assim a eficiência da computação.

¹ Este trabalho é um resumo de uma publicação do INPE com o mesmo título (no prelo)

² Universidade de São Paulo - USP, Instituto Astronômico e Geofísico - IAG, São Paulo - SP.

2. EQUAÇÕES BÁSICAS E AUTOFUNÇÕES

Serão consideradas nesta análise as equações primitivas em coordenadas esféricas na horizontal e em coordenadas sigma ($\sigma = p/p_s$, onde p é a pressão do nível considerado e p_s é a correspondente pressão de superfície) na vertical.

Após proceder à linearização das equações sobre um estado básico em repouso, com temperatura dependente apenas da vertical, o sistema torna-se separável em suas partes vertical e horizontal, dadas respectivamente por Kasahara e Puri (1981):

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\sigma g}{R\Gamma_0} \frac{d\psi_n}{d\sigma} \right) + \frac{1}{D_n} \psi_n = 0, \quad (1)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\frac{d\psi_n}{d\sigma} + \frac{\Gamma_\infty}{T_\infty} \psi_n = 0 \quad \text{em } \sigma = 1, \quad (2)$$

$$\frac{d\psi_n}{d\sigma} = 0 \quad \text{em } \sigma = 0, \quad (3)$$

e

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - \text{sen } \phi v_n + \frac{\gamma_n}{\cos \phi} \frac{\partial h_n}{\partial \lambda} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + \sin \phi u_n + \gamma_n \frac{\partial h_n}{\partial \phi} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial t} + \frac{\gamma_n}{\cos \phi} \frac{\partial u_n}{\partial \lambda} + \frac{\gamma_n}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v_n \cos \phi) = 0, \quad (6)$$

onde g é a aceleração da gravidade; R é a constante do gás para o ar seco; $T_0 = (RT_0/C_p \sigma) - (dT_0/d\sigma)$; C_p é o calor específico do ar seco a pressão constante; $T_0(\sigma)$ é a temperatura do estado básico; T_∞ e T_∞ são os valores de T_0 de T_0 na superfície ($\sigma=1$); D_n é a profundidade equivalente correspondente ao n -ésimo modo vertical e ψ_n representa a sua estrutura vertical; λ é a longitude; ϕ é a latitude; t é o tempo (escalado por 2Ω); Ω é a velocidade de rotação de Terra; $\gamma_n = g D_n / 2 \Omega a = \epsilon_n^{-1/2}$; a é o raio médio da Terra; u_n e v_n são as estruturas horizontais do vento zonal e do meridional, respectivamente, correspondentes ao n -ésimo modo vertical escalados por $(g D_n)^{1/2}$; $h_n = z_n + RT_0(\sigma) \ln p_s / g D_n$; z_n é a estrutura horizontal da altura geopotencial correspondente ao n -ésimo modo vertical (escalado por D_n).

A estrutura horizontal tem condições de contorno de regularidade da solução nos polos e ciclicidade zonal.

A Equação 1, juntamente com as Condições de Contorno 2 e 3, formam um problema de Sturm-Liouville (Kasahara and Puri, 1981). Esta equação será resolvida numericamente utilizando o esquema C' de Tokioka (1978), que tem a vantagem de não apresentar modos computacionais no campo de temperatura. O exemplo mostrado na Figura 1 utiliza o perfil vertical de temperatura sobre Manaus (média de setembro de 1968 a 1976) com dez níveis na vertical.

O modo externo ($D_1 = 9458$ m) mostrado na Figura 1 varia muito pouco com a vertical; é, portanto, denominado modo-barotrópico divergente (Kasahara, 1976). Os modos internos ($D_{n>1}$) têm estrutura muito variável com a vertical e são confinados até os níveis médios.

Deduzindo a equação da divergência e a da vorticidade a partir das Equações 4 e 5 e utilizando o teorema de Helmholtz (o qual dá a separação do vento em uma parte divergente e outra rotacional) nestas equações e na Equação 6, obtêm-se outras três novas equações. As variáveis dessas equações (linha de corrente, velocidade potencial e altura geopotencial) são, então, expandidas em série de funções associadas de Legendre. O sistema de equações para os coeficientes de expansão forma um problema de autovalor-autofunção, cuja solução permite o conhecimento da frequência e das associadas funções de Hough para um dado D_n .

Na Figura 2 é apresentada a dependência da frequência de oscilação no tempo (ν) em função do número de onda zonal (s) e do índice meridional (λ) para $\epsilon_n = 10$ e $\epsilon_n = 1000$; s negativo significa propagação para oeste.

Nota-se pela Figura 2 uma separação em ν : modos com frequência alta (gravidade), que se deslocam para este (OGE) e para oeste (OGO), e modos com frequência baixa (Rossby/Haurwitz), que se deslocam para oeste (ORH). Existe um modo que acopla os regimes de alta ($s > 0$) e baixa ($s < 0$) frequência, que é a onda mista Rossby-Gravidade (MRG). Além disso, há um modo com velocidade meridional quase nula que é a onda de Kelvin (KEL).

Quanto à propagação de energia, só há velocidade de grupo nula no lado associado às ondas que se deslocam para oeste; na região das ondas de gravidade, as diferenças na velocidade de grupo para oeste e para leste são maiores para s pequeno; as ondas de Rossby com s pequeno propagam energia para oeste e as com s grande propagam energia para leste. Quando ϵ_n aumenta (Figura 2.b), a separação das frequências diminui em amplitude, e a velocidade de grupo das ondas de Rossby aumenta para s pequeno e diminui para as ondas de gravidade.

Nas Figuras 3 a 10 são apresentados alguns exemplos da estrutura bidimensional horizontal do vento e do geopotencial associados às funções de Hough.

Nos modos de Rossby o vento meridional está em aproximado balanço geostrófico com o geopotencial para as ondas longas (Figuras 3 e 4), enquanto o mesmo ocorre para o vento zonal em ondas curtas (Figuras 5 e 6). Portanto, a tendência local é grande para o vento zonal em ondas longas e para o vento meridional em ondas curtas. Para λ grande (Figuras 4 e 6) o gradiente de geopotencial na região equatorial é menor que para λ pequeno (Figuras 3 e 5); porém, devido à tendência à geostrofia, o vento é forte nessa região (o parâmetro de Coriolis é pequeno). Os máximos em geopotencial têm um caráter extratropical para λ grande (Figuras 4 e 6) e são mais confinados nas regiões tropicais para λ pequeno (Figuras 3 e 5). Para ϵ_n grande (Figura 7), as características gerais se mantêm; porém as estruturas são mais confinadas na região tropical.

Na Figura 8 tem-se um modo de gravidade cujo vento escoava para a alta em geopotencial e tem sentido contrário ao do geostrófico. Logo, as acelerações locais são altas para satisfazer a equação do movimento e há uma grande divergência horizontal.

A onda mista Rossby-gravidade (Figura 9) possui dois vórtices centrados no equador, com uma tendência ao balanço geostrófico em latitudes médias e com o vento cruzando as isolinhas de geopotencial na região equatorial. Note-se que este modo é anti

simétrico (vento zonal e geopotencial antissimétrico e vento meridional simétrico em relação ao equador).

A Figura 10 mostra uma onda de Kelvin, que apresenta um balanço entre a velocidade zonal e o gradiente meridional de geopotencial, com velocidade meridional quase-nula.

É conveniente notar que, no caso das ondas rápidas, o sentido de deslocamento é facilmente identificado através da divergência do campo de vento. Na Figura 8, em $s\lambda = 90^\circ$, ocorre uma forte divergência que acarreta um abaixamento local de geopotencial no tempo, deslocando a configuração da onda para oeste. O mesmo raciocínio é válido em $s\lambda = 270^\circ$ para as demais ondas rápidas (Figuras 9 e 10). No caso das ondas de Rossby o efeito é menos evidente, visto que estas são quase-geostróficas.

3. DISPERSÃO DE ENERGIA

O conceito básico para o entendimento do processo de dispersão de energia é a velocidade de grupo. Em um sistema dispersivo, a velocidade de propagação de energia é, em geral, diferente da velocidade de fase das ondas; a energia propaga-se com a velocidade de grupo (Lamb, 1952; Rossby, 1945). A velocidade de grupo na direção este-oeste é dada por $\partial v / \partial s$, para o caso contínuo em s . Quando os números de ondas zonais são discretos, devido à condição de ciclicidade zonal, a velocidade de grupo deve ser analisada de acordo com a análise feita por Hoskins et alii (1977).

Assumem-se duas ondas da forma $\exp [i(s_1\lambda - v_1t)]$ (onda I) e $\exp [i(s_2\lambda - v_2t)]$ (onda II). Seja $2\pi j$ a diferença de fase entre a onda I e a onda II, então:

$$\lambda = \frac{2\pi j + (v_1 - v_2)t}{s_1 - s_2}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7)$$

que representa os pontos onde as ondas I e II têm a mesma fase, exceto por um fator de 2π .

Se em $t = 0$ há uma crista de uma das ondas em $\lambda = 0$, a posição das cristas é inicialmente $\lambda_m = 2\pi m/s$. Mas as cristas deslocam-se no tempo com velocidade de fase v/s , então:

$$\lambda = \frac{2\pi m + vt}{s}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

define as posições das cristas no tempo.

A intersecção entre as retas definidas nas Equações 7 e 8 determinam os pontos no plano (λ, t) onde as ondas reforçam-se entre si, isto é, a diferença de fase entre as ondas I e II é zero e ambas estão com a crista no ponto de intersecção. Os pontos de intersecção para j e m arbitrários têm coordenadas:

$$\lambda_{1,2}(j,m) = 2\pi \left[\frac{(j-m)v_1 + mv_2}{s_1v_2 - s_2v_1} \right] \quad (9)$$

e

$$t_{1,2}(j,m) = 2\pi \left[\frac{(j-m)s_1 + ms_2}{s_1v_2 - s_2v_1} \right] \quad (10)$$

Na Figura 11 são mostradas as linhas de diferença de fase ($j = -2, -1, 0$, linhas contínuas) para a onda mista Rossby-gravidade na esfera, com $\epsilon_n = 8,75$ ($D \approx 10$ Km), $s_1 = 3$ (onda I) e $s_2 = 1$ (onda II). As linhas de fase no tempo (Equação 8) com $m = -1, 0, 1, 2$ (linhas tracejadas) são para a onda I e as com $m = 0, 1, 2, 3$ (linhas tracejadas-pontilhadas), para a onda II. O trem dos pontos de reforço propaga-se no tempo ao longo das linhas de diferença de fase constante (linhas contínuas) com velocidade de grupo $C_{1,2}$, dada por:

$$C_{1,2} = \frac{v_1 - v_2}{s_1 - s_2} \quad (11)$$

A Figura 11 mostra que em $t = 0$ tem-se um ponto de reforço em $\lambda = 0$. Ao seguir este ponto ao longo da linha de diferença de fase constante, ocorrerão novos reforços em intervalos de tempo $\Delta t_{1,2}$ dados por:

$$\Delta t_{1,2} = 2\pi \left| \frac{s_1 - s_2}{s_1v_2 - s_2v_1} \right| \quad (12)$$

e as sucessivas distâncias entre esses pontos de reforço serão:

$$\Delta \lambda_{1,2} = 2\pi \left| \frac{v_1 - v_2}{s_1v_2 - s_2v_1} \right| \quad (13)$$

A direção de propagação do trem de reforço depende da inclinação da linha de diferença de fase constante ($C_{1,2}$). No caso da Figura 11, tem-se $\Delta t_{1,2} = 23,4$ horas, $\Delta \lambda_{1,2} = 63,80$ e $= 659/\text{dia}$. Se $C_{1,2} > 0$ a propagação é para leste.

A Tabela 1 ($\epsilon_n = 10$) mostra que o trem associado às ondas de Rossby com l pequeno propaga-se para oeste se s é pequeno e para leste se s é grande. Para l maiores o intervalo do espectro no qual a energia é propagada para oeste é mais amplo, mas $C_{1,2}$ é menor. A energia associada com as ondas mais curtas tende a se propagar como uma configuração rígida, desde que as frequências estão associadas com linhas quase retas (Figura 2).

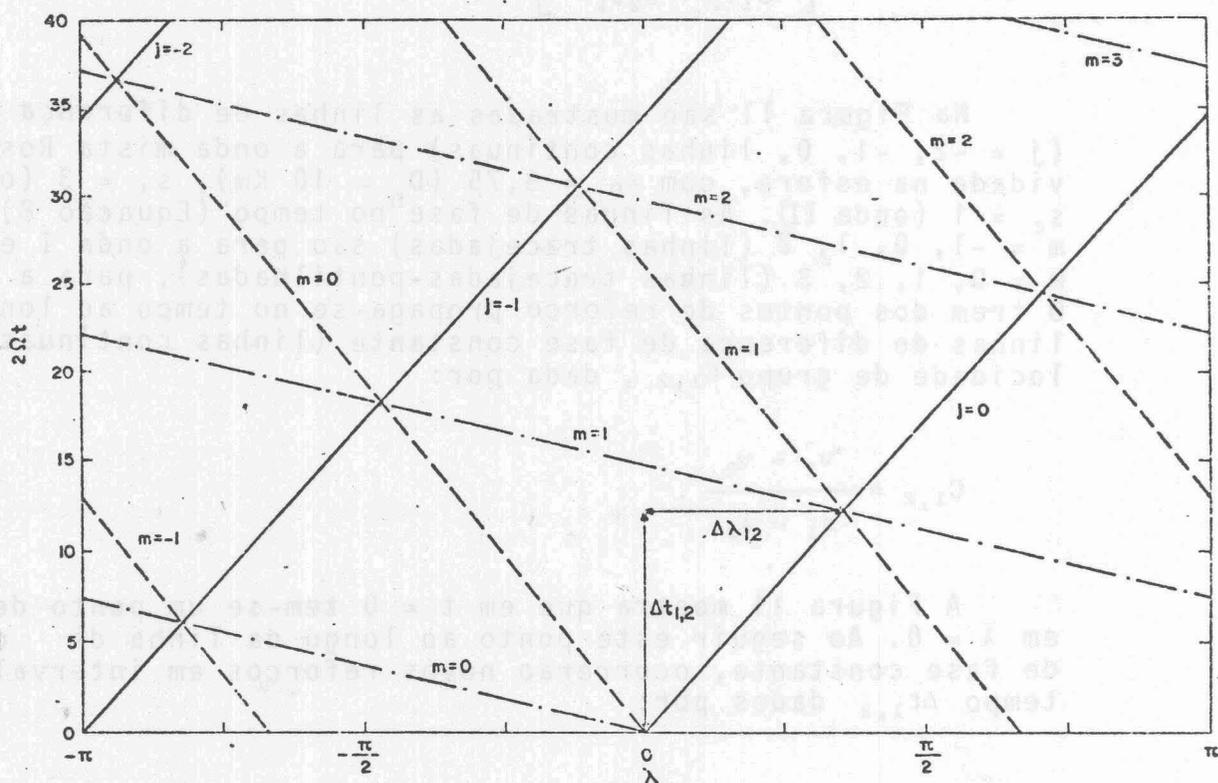


Fig. 11 - Pontos de reforço entre as ondas mistas Rossby-gravidade: ($l=0$): $s_1=3$, $v_1=-0,20056$ (onda I) e $s_2=1$, $v_2=-0,421472$ (onda II) para $\epsilon_n=8,75$.

Se a perturbação inicial tiver a maior parte da energia nos modos de Rossby com $\ell=1$, $1 \leq s \leq 3$, os pontos de reforço ocorrem aproximadamente 90° para oeste após cerca de 6,5 dias. Se a energia estiver nas ondas curtas para $\ell=1$, o reforço ocorrerá a 20° para este após 3,2 dias. O tempo entre reforços para os modos com ℓ elevado é muito grande, e tem pouco significado meteorológico. Para ondas curtas o tempo entre reforços é da ordem de 20 dias para o modo rotacional com $\ell=8$; $C_{1,2}$ é quase nula refletindo, assim, o caráter estacionário da perturbação.

A Tabela 2 ($\epsilon_n = 500$) mostra que o $\Delta t_{1,2}$ é muito grande até mesmo para os modos meridionais de baixa ordem, exceto para a onda mista Rossby-gravidade. A velocidade de grupo é de este para $\ell \geq 1$ e de oeste para a onda mista Rossby-gravidade.

Há duas diferenças básicas entre as características dispersivas dos modos rotacionais internos ($\epsilon_n = 500$) e externos ($\epsilon_n = 10$):

- a) os modos internos dispersam energia para oeste, mesmo para escalas zonais menores ($s \geq 5$);
- b) embora a velocidade de grupo das ondas internas com escalas zonais longas ($s \leq 3$) não seja muito menor que a dos modos externos, o tempo entre reforços é muito maior.

A Tabela 3 mostra que a velocidade de grupo para as ondas de gravidade é da ordem de 140°/dia a 220°/dia, em módulo, para $\epsilon_n = 10$, enquanto para os modos de Rossby é de -13°/dia a 7°/dia. Para as ondas curtas $\Delta t_{1,2}$, $\Delta \lambda_{1,2}$ e $C_{1,2}$ são quase independentes de s_1 e de s_2 , isto é, a configuração move-se como um todo a cerca de 220°/dia, que é aproximadamente a velocidade da onda de gravidade pura. Modos meridionais mais altos para $\epsilon_n = 10$ são quase não-dispersivos. O reforço para ondas de gravidade ocorre em geral em menor de um dia e de leste (oeste) para OGO (OGE). Se a condição inicial contém mais energia nestes modos, a dispersão devida aos modos rotacionais é inibida pela rapidez da dispersão dos modos de gravidade, pois estas propagam-se em redor do globo em uma escala de tempo menor que o tempo de reforço típico das ondas de Rossby.

Para os modos internos (Tabela 3), $C_{1,2}$ dos modos de gravidade para oeste e $C_{1,2}$ das ondas rotacionais (Tabela 2) são comparáveis pelo menos para ondas longas. Entretanto, $\Delta t_{1,2}$ e $\Delta \lambda_{1,2}$ são muito menores.

Embora a Tabela 3 ($\epsilon_n = 500$) não mostre claramente, $|C_{1,2}|$ tende para $\gamma_n (\sqrt{g D n})$, em termos dimensionais), para as ondas de gravidade quando s cresce.

4. DISCUSSÃO

A importância dos conceitos apresentados neste estudo é nítida quando se resolve um problema de valor inicial pela técnica dos modos normais, pois é conveniente conhecer as características da base que expandirá a condição inicial e o forçante. Uma condição inicial próxima do balanço geostrofico é principalmente descrita pelos modos de Rossby, enquanto uma condição apenas no geopotencial na região equatorial não é precisamente descrita por esses modos, pois os gradientes de geopotencial são suavizados pela geostrofia perto do equador.

Algumas características da solução podem ser inferidas, a priori, apenas pelo conhecimento da estrutura da base de funções inerentes ao modelo. Por outro lado, o conhecimento da frequência e das características dispersivas das ondas livres ajudam a entender o comportamento da solução no tempo. Dependendo da distribuição espectral inicial relativa de energia nos diversos modos zonais e meridionais, podem-se observar diferentes comportamentos no tempo. Se a energia inicial estiver principalmente em ondas de gravidade, a configuração inicial será rapidamente dispersada; se a energia inicial estiver em ondas de Rossby, a dispersão de energia seguirá as características dessas ondas.

O conceito de reforço introduzido por Hoskins et alii (1977) é baseado na frequência, mas depende também da estrutura meridional das ondas. O reforço ocorre quando as cristas ou os cavos das ondas se sobrepõem; porém, se as ondas têm máximos, mínimos e zeros em diferentes latitudes, o reforço pode não ter significado. Entretanto, para uma grande parte dos modos, a estrutura meridional das ondas livres não é altamente dependente do número de onda zonal (Figuras de 3 a 6).

Além de as funções de Hough terem aplicações como base de modelos espectrais, estas podem ser usadas no problema de iniciação de modelos numéricos (Flattery, 1971; Kasahara, 1977). As mais recentes versões deste tipo de aplicação visam a obtenção de um campo inicial o mais próximo possível do campo observado, evitando o desenvolvimento de ondas espúrias de alta frequência (Daley, 1981).

A aplicação da decomposição de dados observados em série de Funções de Hough (Flattery, 1971) visa uma representação compacta do campo do vento e da pressão. Para esta expansão tomam-se inicialmente os valores climatológicos para as regiões onde não há dados. A seguir, uma combinação entre os desvios dos campos analisado e observado é minimizada iterativamente pela técnica dos mínimos quadrados. Este procedimento resulta em um estado final no qual o campo de massa está dinamicamente coerente com o campo de vento.

O uso das funções de Hough na determinação da resposta da atmosfera aos forçantes externos tem sido explorado para o caso das marés atmosféricas (Chapman and Lindzen, 1970). Neste caso, a frequência e a escala dos forçantes são conhecidas e a altura equivalente é o autovalor da equação da estrutura horizontal. Um fenômeno que se enquadra nesta categoria e que não foi bem explorado refere-se ao efeito da liberação de calor latente como forçante de oscilações periódicas (diurna e semi-diurna) na atmosfera (Lindzen, 1978).

AGRADECIMENTOS

Este estudo foi parcialmente financiado pelos convênios FINEP/CNPq B/28/79/002 e FINEP/CNPq/INPE B/54/81/042/00/00.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CHAPMAN, S.; LINDZEN, R.S. Atmospheric tides. New York, Gordon and Breach Science, 1970.
- DALEY, R. Normal mode initialization. Reviews of Geophysics and Space Physics, 19(3): 450-468, aug., 1981.
- ELIASSEN, E.; MACHENHAUER, B.; RASMUSSEN, E. On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields. Copenhagen, Copenhagen University, Institute of Theoretical Meteorology, 1970. 35 p. (Report nº 2).
- FLATTERY, T.W. Spectral models for global analysis and forecasting. In: AIR WEATHER SERVICE TECHNICAL EXCHANGE CONFERENCE, G., Annapolis, MA., US Naval Academy, 1971. Washington, DC, Air Weather Service, 1971, p. 42-54. (AWS Technical Report nº 242).
- HOSKINS, B.J.; SIMMONS, A.J.; ANDREWS, D.G. Energy dispersion in a barotropic atmosphere. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 103 (438): 553-567, oct., 1977.
- KASAHARA, A. Normal modes of ultralong waves in the atmosphere. Monthly Weather Review, 104(6): 669-690, june, 1976.

- . Numerical integration of the global barotropic primitive equations with Hough harmonic expansion. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 34(5): 687-701, may, 1977.
- KASAHARA, A.; PURI, K, Spectral representation of three-dimensional global data by expansion in normal mode functions. *Monthly Weather Review*, 109(1): 37-51, jan., 1981.
- LAMB, H. *Hydrodynamics*. 6. ed., New York, Dover, 1952.
- LINDZEN, R. Effect of daily variation of cumulonimbus activity on the atmospheric semi-diurnal tide. *Monthly Weather Review*, 106(4): 526-533, apr., 1978.
- LONGUET-HIGGINS, M.S: The eigenfunctions of Laplace's tidal equations over a sphere. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 262 (A1132): 511-607, feb., 1968.
- ROSSBY, C.G. On the propagation of frequencies and energy in certain types of oceanic and atmospheric waves. *Journal of Meteorology*, 2(4): 187-204, dec., 1945.
- TOKIOKA, T. Some considerations on vertical differencing. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, 56(2): 98 - 111, apr., 1978.

ABSTRACT

HOUGH FUNCTIONS: THEORY AND UTILIZATION

The horizontal and vertical dependencies of the linearized system of equations over a basic state at rest and with temperature varying only in the vertical are obtained for a primitive equations model. This separation takes into account the numerical scheme used in the vertical and leads to two eigenvalue-eigenfunction problems. The vertical structure equation gives the vertical modes and the associated equivalent depth. This vertical structure shows only one external mode; the others are internal. The horizontal equations are identical to the linearized shallow water equations. Their solutions are the Hough functions for a given (real number) equivalent depth. There is a dispersion relation showing a class of slow modes (Rossby waves) and another of fast modes (gravity waves). The energy dispersion of these waves and the reinforcement effect in the energy propagation due to the utilization of discrete zonal wave numbers are discussed. Knowing the dispersion properties of these modes and the initial energy spectrum, one is able to predict and understand better the role of the waves in the temporal evolution of a given initial field. The utilization of Hough functions as a basis to spectral models as well as their application in the atmospheric tidal problem and the analysis of observed data are discussed.

C.D.U. - 551.513

TABELA 1

DISTÂNCIA ENTRE OS PONTOS DE REFORÇO $\Delta\lambda_{1,2}$ (GRAUS DE LONGITUDE), INTERVALO DE TEMPO NO QUAL OCORREM $\Delta t_{1,2}$ (DIAS) E RESPECTIVA VELOCIDADE DE GRUPO $c_{1,2}$

(GRAUS DE LONGITUDE POR DIAS) PARA A ONDA MISTA ROSSBY-GRAVIDADE ($\ell=0$)

E ALGUMAS ONDAS DE ROSSBY/HAURWITZ ($\ell=1,2$ E 8), NA ESFERA PARA

$$\epsilon_n = 10 (D_n \approx 8811 \text{m})$$

| s_1 | s_2 | | | | | | | | | | | |
|---------------------|-------------------------|------|------|------|---|-----|-----|-----|------------------------------------|----|----|----|
| | 3 | 5 | 7 | 9 | 3 | 5 | 7 | 9 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| MRG ($\ell=0$) | 1,0 | 1,0 | 1,1 | 1,1 | 62 | 47 | 37 | 31 | 62 | 45 | 34 | 28 |
| | | 1,4 | 1,5 | 1,6 | | 38 | 31 | 27 | | 27 | 20 | 17 |
| | | | 1,9 | 2,1 | | | 27 | 23 | | | 14 | 11 |
| | | | | 2,4 | | | | 21 | | | | 9 |
| ORH ($\ell=1$) | 6,6 | 5,5 | 5,3 | 5,2 | 88 | 19 | 0 | 6 | -13 | -3 | 0 | -1 |
| | | 3,1 | 3,1 | 3,2 | | 21 | 21 | 19 | | 7 | 7 | 6 |
| | | | 3,1 | 3,2 | | | 21 | 19 | | | 7 | 6 |
| | | | | 3,4 | | | | 18 | | | | 5 |
| ORH ($\ell=2$) | 11,8 | 9,8 | 9,1 | 8,8 | 132 | 47 | 19 | 7 | -11 | -5 | -2 | -1 |
| | | 5,2 | 5,0 | 5,0 | | 8 | 12 | 13 | | 2 | 2 | 3 |
| | | | 4,6 | 4,6 | | | 15 | 15 | | | 3 | 3 |
| | | | | 4,7 | | | | 15 | | | | 3 |
| ORH ($\ell=8$) | 104,1 | 77,7 | 66,8 | 61,0 | 424 | 226 | 114 | 101 | -4 | -3 | -2 | -2 |
| | | 34,3 | 29,6 | 27,2 | | 60 | 36 | 23 | | -2 | -1 | -1 |
| | | | 22,6 | 20,8 | | | 15 | 8 | | | -1 | 0 |
| | | | | 18,3 | | | | 2 | | | | 0 |
| $\epsilon_n = 10$ | $\Delta t_{1,2}$ (dias) | | | | $\Delta\lambda_{1,2}$ ($^\circ$ Longitude) | | | | $c_{1,2}$ ($^\circ$ dia $^{-1}$) | | | |

TABELA 2

DISTÂNCIA ENTRE OS PONTOS DE REFORÇO $\Delta\lambda_{1,2}$ (GRAUS DE LONGITUDE), INTERVALO DE TEMPO NO QUAL OCORREM $\Delta t_{1,2}$ (DIAS) E RESPECTIVA VELOCIDADE DE GRUPO $C_{1,2}$ (GRAUS DE LONGITUDE POR DIAS) PARA A ONDA MISTA ROSSBY-GRAVIDADE ($\ell=0$) E ALGUMAS ONDAS DE ROSSBY/HAURWITZ ($\ell=1, 2$ E 8), NA ESFERA PARA $\epsilon_n = 500$ ($D_n \approx 176m$)

| $\epsilon_n = 500$ | MRG $\ell=0$ | | ORH $\ell=1$ | | ORH $\ell=2$ | | ORH $\ell=3$ | |
|----------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| | $1 \leq s \leq 3$ | $5 \leq s \leq 7$ | $1 \leq s \leq 3$ | $5 \leq s \leq 7$ | $1 \leq s \leq 3$ | $5 \leq s \leq 7$ | $1 \leq s \leq 3$ | $5 \leq s \leq 7$ |
| $\Delta t_{1,2}$ (dias) | 2,4 | 2,8 | 216 | 12 | 500 | 24 | 2720 | 116 |
| $\Delta\lambda_{1,2}$ (graus) | 31 | 13 | 133 | 23 | 3 | 53 | 281 | 143 |
| $C_{1,2}$ ($^\circ$ /dia) | 13 | 8 | -9 | -2 | -6 | -2 | -2 | -1 |

TABELA 3

DISTÂNCIA ENTRE OS PONTOS DE REFORÇO $\Delta\lambda_{1,2}$ (EM GRAUS DE LONGITUDE), INTERVALO DE TEMPO NO QUAL OCORREM $\Delta t_{1,2}$ (DIAS) E RESPECTIVA VELOCIDADE DE GRUPO $C_{1,2}$ (GRAUS DE LONGITUDE POR DIA) PARA AS ONDAS DE GRAVIDADE PARA OESTE ($\ell = 0, 1$ E 7) E PARA LESTE ($\ell = 1, 3$ E 9), PARA $\epsilon_n = 10$ $\epsilon_n = 500$

| | | $\epsilon_n = 10$ | | | $\epsilon_n = 500$ | | |
|-----|-------------------|----------------------------|--|-------------------------------|----------------------------|--|-------------------------------|
| | | $\Delta t_{1,2}$ (dias) | $\Delta\lambda_{1,2}$ ($^\circ$ long.) | $C_{1,2}$ ($^\circ$ /dia) | $\Delta t_{1,2}$ (dias) | $\Delta\lambda_{1,2}$ ($^\circ$ long.) | $C_{1,2}$ ($^\circ$ /dia) |
| OGO | $1 \leq s \leq 3$ | 0,7 | 102 | -140 | 1,4 | 3 | -2 |
| | $5 \leq s \leq 7$ | 1,5 | 324 | -215 | 1,9 | 34 | -18 |
| OGO | $1 \leq s \leq 3$ | 0,6 | 96 | -169 | 1,1 | 3 | -3 |
| | $5 \leq s \leq 7$ | 0,8 | 116 | -215 | 1,3 | 20 | -16 |
| OGO | $1 \leq s \leq 3$ | 0,2 | 45 | -220 | 0,6 | 2 | -4 |
| | $5 \leq s \leq 7$ | 0,2 | 45 | -222 | 0,7 | 9 | -14 |
| OGE | $1 \leq s \leq 3$ | 0,9 | 182 | 204 | 2,4 | 48 | 20 |
| | $5 \leq s \leq 7$ | 1,1 | 242 | 224 | 2,8 | 71 | 25 |
| OGE | $1 \leq s \leq 3$ | 0,4 | 80 | 201 | 1,1 | 11 | 10 |
| | $5 \leq s \leq 7$ | 0,4 | 95 | 221 | 1,2 | 24 | 19 |
| OGE | $1 \leq s \leq 3$ | 0,2 | 36 | 219 | 0,6 | 5 | 9 |
| | $5 \leq s \leq 7$ | 0,2 | 36 | 222 | 0,7 | 11 | 18 |

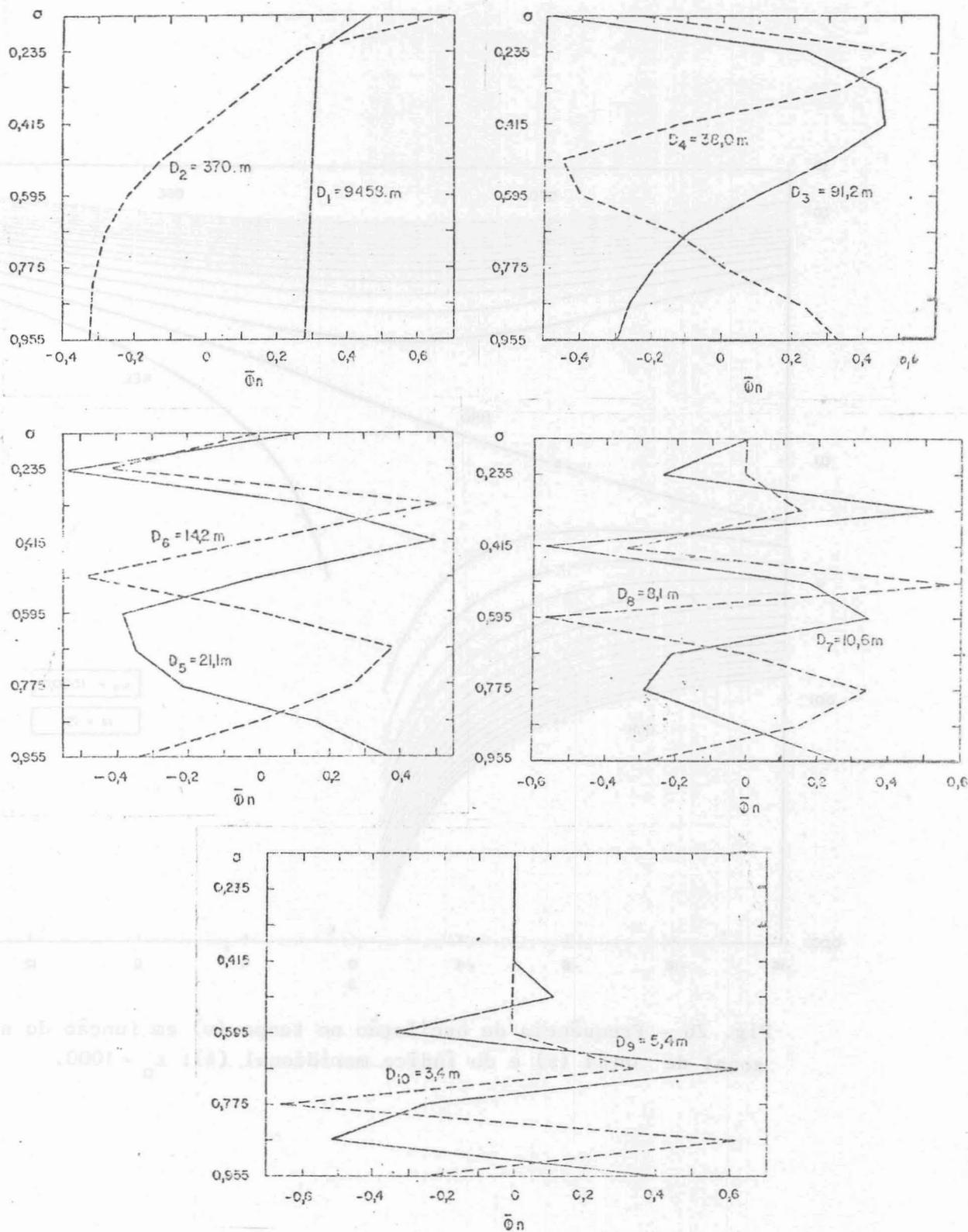


Fig. 1 - Perfis das autofunções da estrutura vertical.

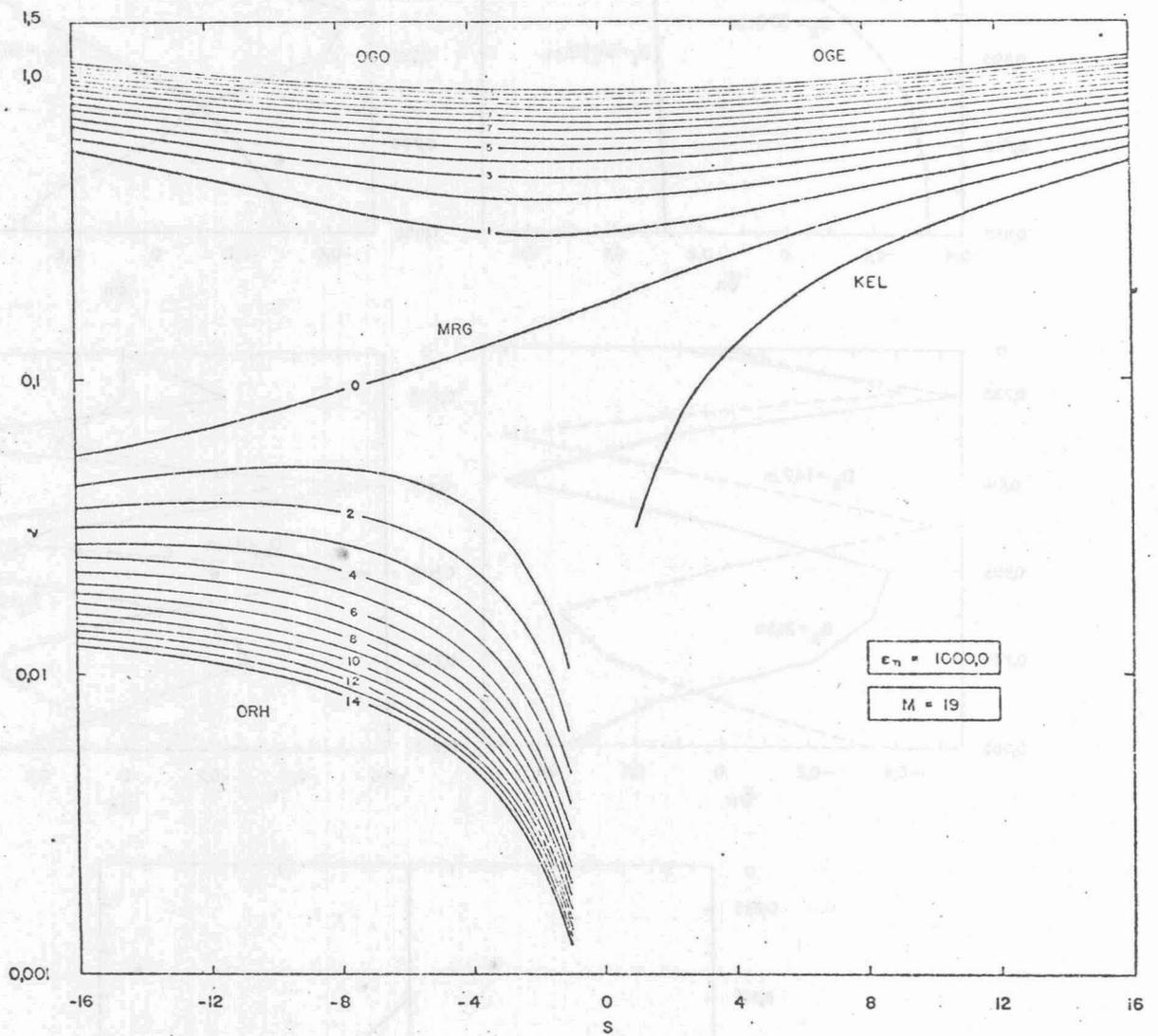


Fig. 2b - Frequência de oscilação no tempo (ν) em função do número zonal de onda (s) e do índice meridional (ℓ): $\epsilon_n = 1000$.

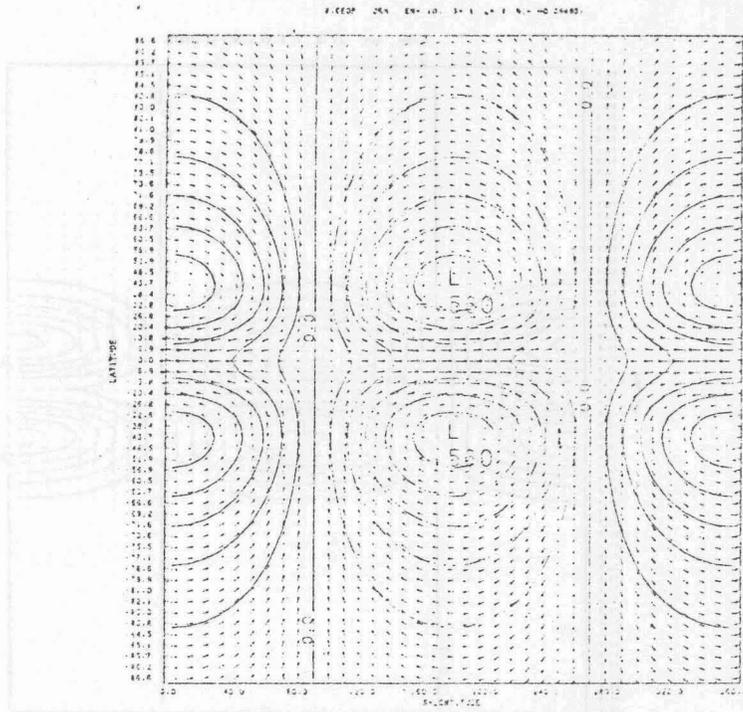


Fig. 3 - Onda de Rossby para $s=1$, $l=1$ e $\epsilon_n=10$.

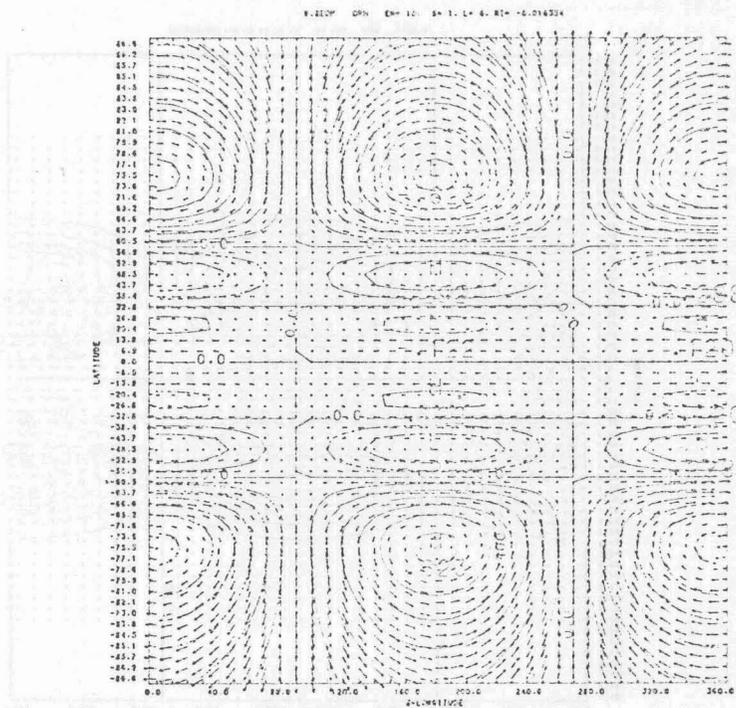


Fig. 4 - Onda de Rossby para $s=1$, $l=6$ e $\epsilon_n=10$.

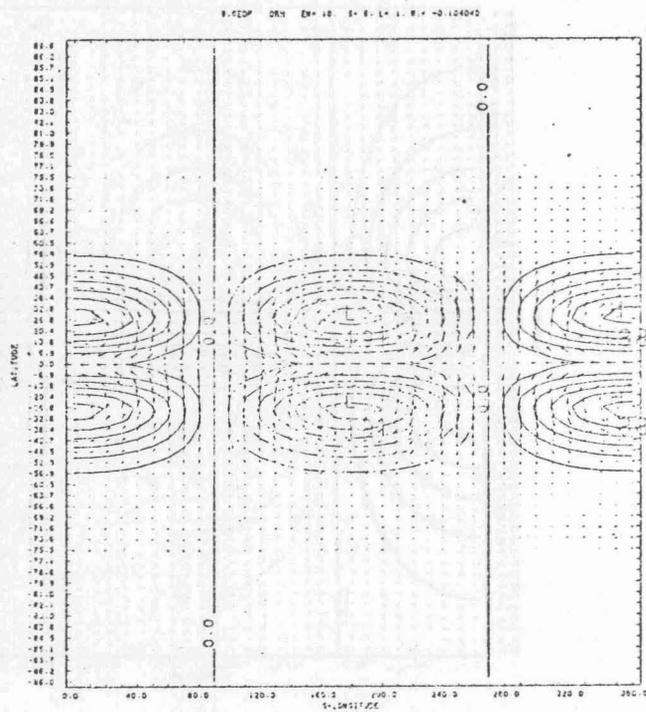


Fig. 5 - Onda de Rossby para $s=6$, $l=1$ e $\epsilon_n=10$.

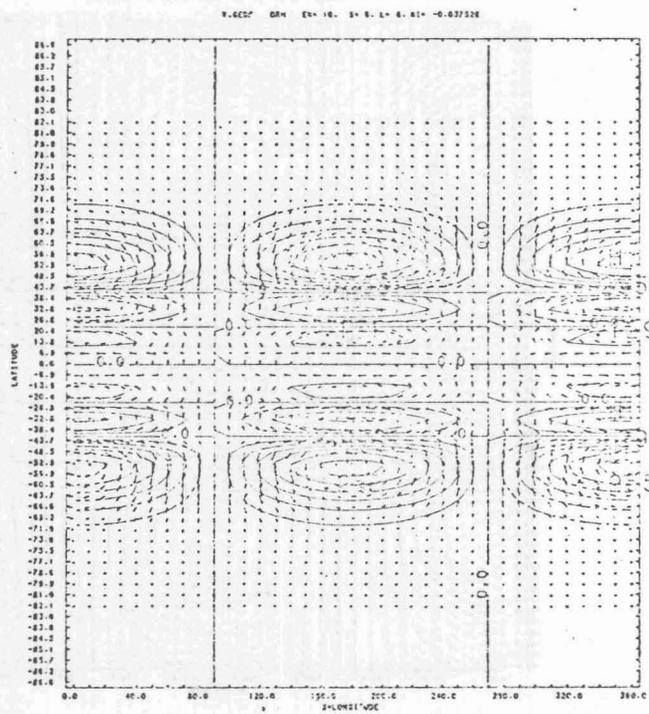


Fig. 6 - Onda de Rossby para $s=6$, $l=6$ e $\epsilon_n=10$.

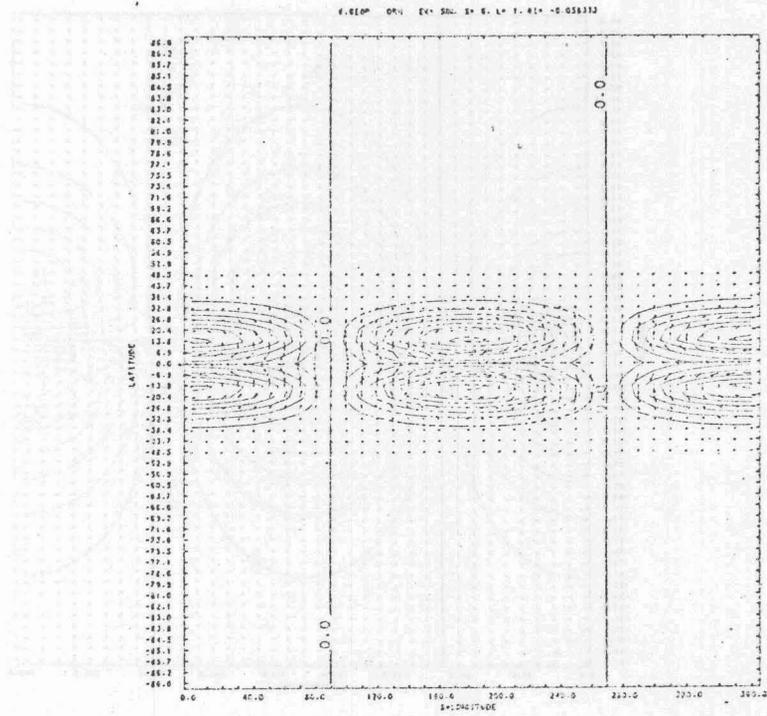


Fig. 7 - Onda de Rossby para $s=6$, $\lambda=1$ e $\epsilon_n=500$.

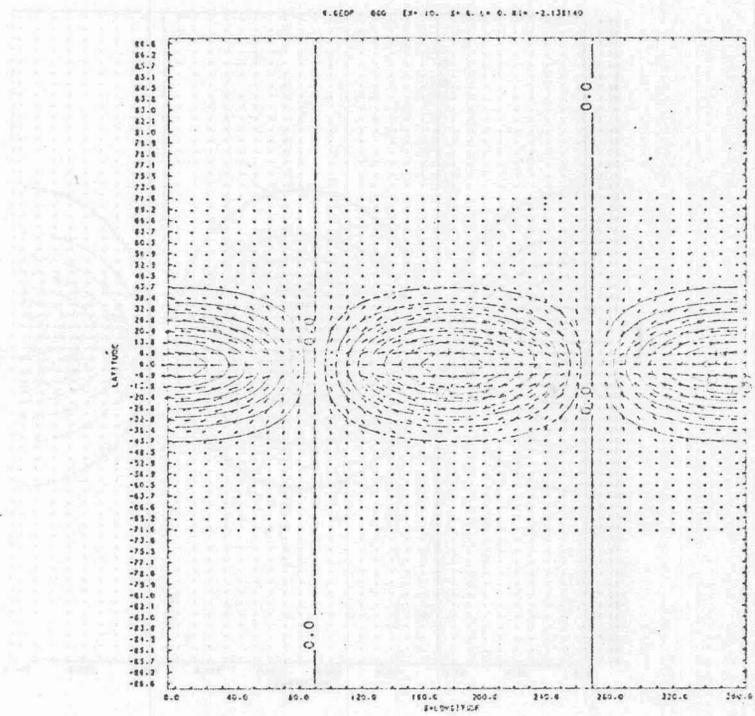


Fig. 8 - Onda de gravidade para oeste para $s=6$, $\lambda=0$ e $\epsilon_n=10$.

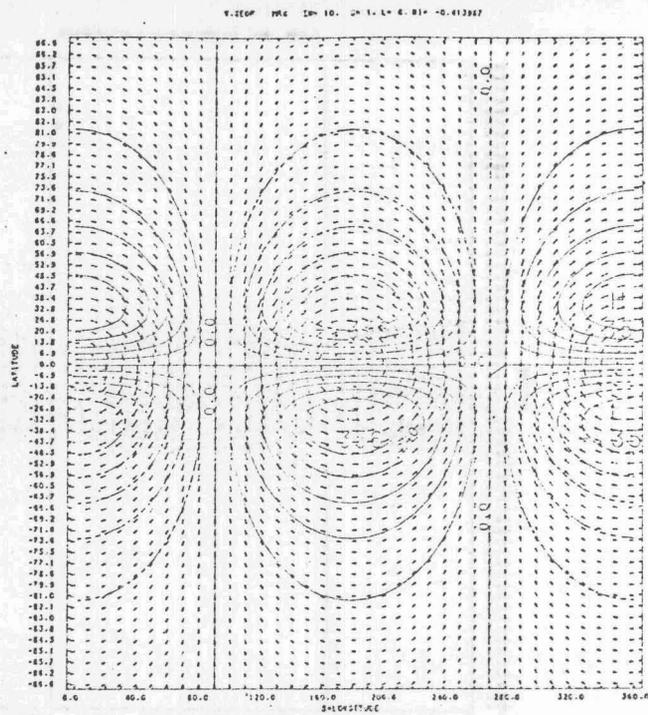


Fig. 9 - Onda mista Rossby-gravidade para $s = 1$, $\ell = 0$ e $\varepsilon_n = 10$.

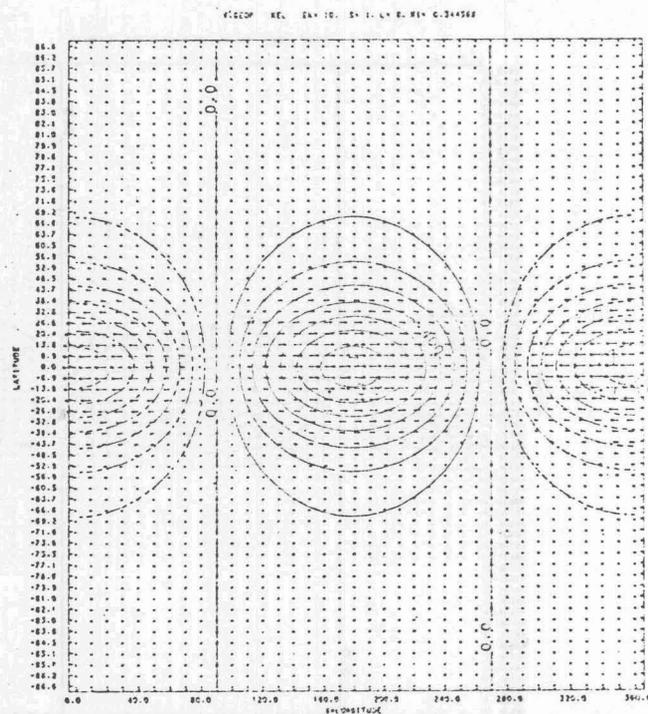


Fig. 10 - Onda de Kelvin para $s = 1$, $\ell = 0$ e $\varepsilon_n = 10$.