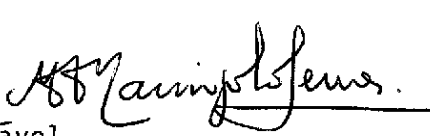


1. Publicação nº <i>INPE-2839-PRE/386</i>	2. Versão	3. Data <i>Agosto, 1983</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DME/DPM</i>	Programa <i>PNTE/PMBA</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>METEOROLOGIA DINÂMICA</i>			
7. C.D.U.: <i>551.511</i>			
8. Título <i>APLICAÇÕES DA MECÂNICA DE FLUIDOS À METEOROLOGIA</i>		10. Páginas: <i>21</i>	
		11. Última página: <i>20</i>	
		12. Revisada por <i>Yoshihiro Yamazaki</i>	
9. Autoria <i>Marco Antonio Maringolo Lemes</i>		13. Autorizada por <i>Nelson de Jesus Parada</i>	
Assinatura responsável 		<i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor Geral	
14. Resumo/Notas  <i>Esse trabalho apresenta alguns conceitos básicos necessários para o entendimento da dinâmica dos sistemas atmosféricos de grande escala. As equações básicas são derivadas e suas aproximações mais clássicas são discutidas através de algumas aplicações meteorológicas. O problema de coordenadas verticais também é considerado como requisito ao estudo da previsão numérica de tempo.</i>			
15. Observações <i>Este trabalho será apresentado no 6º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional no Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA, em São José dos Campos, SP, de 26 a 30 de setembro de 1983.</i>			

## APLICAÇÕES DA MECÂNICA DE FLUIDOS À METEOROLOGIA

Marco Antonio Maringolo Lemes  
Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq  
12200 - São José dos Campos - SP

## RESUMO

Esse trabalho apresenta alguns conceitos básicos necessários para o entendimento da dinâmica dos sistemas atmosféricos de grande escala. As equações básicas são derivadas e suas aproximações mais clássicas são discutidas através de algumas aplicações meteorológicas. O problema de coordenadas verticais também é considerado como requisito ao estudo da previsão numérica de tempo.

## ABSTRACT

This work presents some of the fundamental concepts necessary for the full understanding of the dynamics of large scale atmospheric motions. The basic equations are derived and their classical approximations are discussed in some important meteorological applications. The problem of vertical coordinates is also considered as a prerequisite to numerical weather prediction.

## PREFÁCIO

Este trabalho apresenta uma série de tópicos geralmente considerados em um curso introdutório de Dinâmica da Atmosfera, dado pelo autor no Programa de Graduação do Departamento de Meteorologia do INPE/CNPq. A sequência de tópicos assim organizada atende ao convite feito pelo Dr. Luiz Alberto Vieira Dias, Presidente da Comissão Organizadora do 6º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional a acontecer na dependência do ITA, São José dos Campos de 26 a 30 de setembro de 1983, para que o autor ministrasse um minicurso sobre os fundamentos da Meteorologia Dinâmica à luz de teorias da Mecânica de Fluidos e Termodinâmica. Essas notas de aula tem por finalidade servir de guia de referência quanto ao desenvolvimento dos tópicos, não os apresentando a níveis de detalhes, o que deverá ser feito em classe.

## 1. OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é abordar os fundamentos teóricos da Meteorologia contemporânea, dando ênfase especial à área que trata dos chamados sistemas de escala sinótica. Esses sistemas, com escala típica de espaço e tempo da ordem de  $10^3$  km e  $10^5$  s, estão diretamente relacionados com a sequência fenomenológica do tempo, e seu entendimento é indispensável para o estabelecimento de técnicas de previsão meteorológica.

A breve revisão geral das leis fundamentais que regem o comportamento dos fluidos será seguida de adaptações que as tornam aplicáveis ao caso específico da atmosfera. Dentro do contexto de Meteorologia como uma área rica em termos de aplicação das teorias de Mecânica dos Fluidos e Termodinâmica, será explorada a área de previsão numérica.

## 2. A ATMOSFERA TERRESTRE

A atmosfera da Terra é, pelo menos abaixo de 100 km, constituída por uma mistura de gases, composta essencialmente, em proporções aproximadamente constantes, de oxigênio e nitrogênio. Não obstante, os outros constituintes, tais como o CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O e O<sub>3</sub> que aparecendo em proporções bem menores (e até variáveis), desempenham um papel ativo na dinâmica e na energética da atmosfera.

Essa mistura de gases encontra-se permanentemente em movimento forçado pela energia ra diante do sol que penetra no sistema atmosfera-terra-oceano. O espectro desses movimentos es tende-se desde os movimentos turbulentos de escala milimétrica até aqueles de dimensões compã ráveis às do planeta, como soberbamente exemplificado pela circulação geral da atmosfera.

O estudo dos movimentos atmosféricos reveste-se de grande complexidade devido à grande variedade de processos físicos e dinâmicos que atuam simultaneamente na atmosfera. A intera ção não-linear de movimentos de diferentes escalas, as mudanças de estado da substância água, as interações do tipo ar-mar e ar-solo e a não-homogeneidade da superfície representam algu mas ilustrações do complexo sistema que é a atmosfera.

## 3. A EQUAÇÃO DE ESTADO PARA A ATMOSFERA

A equação de estado, uma relação constitutiva entre as variáveis termodinâmica, é para o caso de uma atmosfera seca a equação do gás perfeito:

$$p = \rho RT, \quad (1)$$

onde  $p$  é a pressão,  $\rho$  a densidade,  $T$  a temperatura (em °K) e  $R=287 \text{ J Kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$ , a constante específica do ar seco.

Mesmo na presença de vapor d'água, sabe-se experimentalmente que o erro cometido em usar a Equação 1 não excede 1% nos intervalos de temperatura e pressão típicos da atmosfera. Os efeitos da umidade são considerados quando há mudança de fase.

## 4. PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

Essa lei, expressando o princípio de conservação de energia, é formulada matematicamen te por:

$$\delta H = c_v dT + p da, \quad (2)$$

onde  $\delta H$  é o aquecimento (ou resfriamento) específico (o símbolo  $\delta$  indica uma diferencial não-exata),  $c_v$  o calor específico sob volume constante para o ar ( $c_v = 716 \text{ J K}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$ ) e  $a$  o vo lume específico. Essa equação, fisicamente, expressa que toda quantidade de calor fornecida a um sistema fluido é usada para alterar sua energia interna ( $c_v dT$ ) e realizar um trabalho mecânico ( $p da$ ) através da superfície limitante desse sistema.

Usando a Equação 1 pode-se chegar a formas alternativas para a primeira lei como:

$$\delta H = c_p dT - adp, \quad (3)$$

ou

$$ds = c_p d(\ln \theta), \quad (4)$$

onde  $c_p$  é o calor específico à pressão constante ( $c_p = R + c_v$ ) e  $\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}$  a chamada tempera tura potencial,  $p_0$  uma pressão de referência, geralmente 1000 mb ou 100 KPa. Apesar de, como mencionado,  $\delta H$  não ser uma diferencial exata,  $\delta H/T$  o é. Essa quantidade é chamada entro pia e comumente designada por  $ds$ .

Nota-se que em  $\delta H$  estão representados todos os processos de troca diabática de calor, notadamente aqueles que envolvem mudanças de fase da substância água e ganhos ou perdas radiativas.

5. EQUAÇÃO NA CONTINUIDADE

Uma outra lei fundamental é aquela da conservação de massa. Dentre as várias maneiras de derivar sua expressão matemática, será apresentada a versão que se utiliza do teorema de Transporte de Reynolds.

Seja  $(x_1, x_2, x_3)$  um sistema de coordenadas espaciais do tipo euleriano. Em um certo instante de tempo,  $t=0$ , fixam-se "rótulos" às parcelas individuais de fluidos,  $\vec{x}(t)$ .

Essas coordenadas  $(X_1, X_2, X_3)$  são as coordenadas lagrangeanas e descrevem equivalentemente o escoamento do fluido através do acompanhamento individual das parcelas constituintes. A identificação das parcelas é feita pela suas posições para  $t=0$  (Figura 1); assim:

$$\vec{X}(t=0) = \vec{x}(t=0) = \vec{x}_0 \tag{5}$$

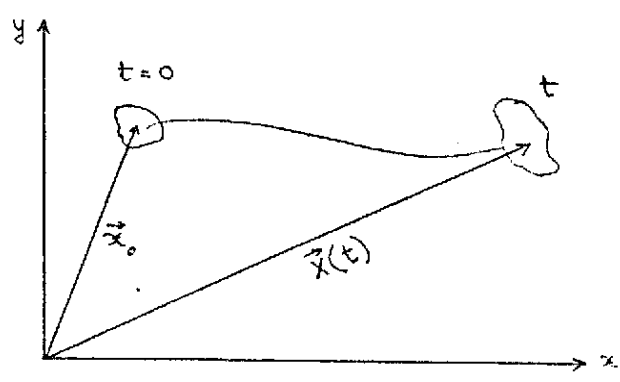


Fig. 1 - Representações da esquemática das descrições eulerianas e lagrangiana.

Considera-se agora uma função escalar  $f(\vec{x}, t)$ . Sua taxa de variação total pode ser facilmente obtida usando a "regra da cadeia", ou seja:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{6}$$

onde  $u_j = dx/dt$ ,  $j=1,2,3$  representam as componentes do vetor velocidade. (Em Meteorologia, é prática usar  $u, v, w$  em lugar de  $u_1, u_2, u_3$  para designar as componentes leste-oeste, norte-sul e vertical, respectivamente).

Seja  $R(t)$  um certo volume de controle, limitado por uma superfície material, que se desloca dentro do fluido e  $F(t)$  uma propriedade dada por:

$$F(t) = \int_{R(t)} \rho f(\vec{x}, t) d^3x \tag{7}$$

onde  $f$  é a variável específica (referenciada por unidade de massa) associada a  $F(t)$ .

O cálculo da taxa de variação de  $F(t)$ , ie:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{R(t)} \rho f d^3x \tag{8}$$

constitui a essência do teorema de Reynolds.

Introduzindo coordenadas lagrangianas, tem-se na Equação (8):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{R(t=0)} \rho f J d^3 X, \tag{9}$$

onde J é o jacobiano da transformação entre os dois sistemas de coordenadas. Nota-se que agora o volume de integração é fixo com respeito ao tempo. Daí tem-se que:

$$\frac{dF}{dt} = \int_{R(t=0)} \frac{d}{dt} (\rho f J) d^3 X. \tag{10}$$

Fazendo f=1, F(t) representará a massa total constante contida no volume considerado. Então, segue-se que:

$$\frac{d}{dt} (\rho J) = 0, \tag{11}$$

ou  $\rho J = \text{constante}$ .

Com esse resultado na Equação 10, tem-se a expressão final do teorema de Reynolds, i.e.:

$$\frac{dF}{dt} = \int_{R(t)} \rho \frac{df}{dt} d^3 x. \tag{12}$$

A Equação 11 é a equação da continuidade ou equação de conservação de massa. Entretanto, uma forma mais apropriada em Meteorologia (onde é adotada uma descrição euleriana do movimento) é obtida usando a propriedade da transformação:

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \nabla \cdot \vec{V},$$

onde  $\nabla \cdot \vec{V}$  é o divergente tridimensional da velocidade. Assim, chega-se facilmente à:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0. \tag{13}$$

Diz-se que um fluido é incompressível quando a densidade de suas parcelas constituintes permanece constante ao longo do movimento, i.e.,  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ . Daí decorre que a expressão da equação da continuidade para um fluido incompressível  $\frac{d\rho}{dt}$  reduz-se à:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{14}$$

Ainda é bastante útil uma outra expressão da equação acima quando o fluido é barotrópico. No capítulo seguinte, ver-se-a que um fluido é barotrópico quando a pressão é função somente de uma outra variável termodinâmica. Pode-se por outro lado mostrar que se a pressão for função apesar da densidade, ou seja  $p = p(\rho)$ , o vento horizontal,  $\vec{V}_H = (u, v)$ , não depende da altura. Um fluido homogêneo,  $\nabla \rho = 0$ , é um caso de fluido barotrópico.

Considera-se um fluido barotrópico, de espessura  $H(x, y, t)$ , sobre uma topografia de fundo  $h_B(x, y)$ , como mostrado na Figura 2.

Integrando Equação (14) de  $z=h_B$  a  $z=h$  e usando a hipótese dessas superfícies serem materiais chega-se à:

$$\frac{dH}{dt} + H \nabla_H \cdot \vec{V}_H = 0 \tag{15}$$

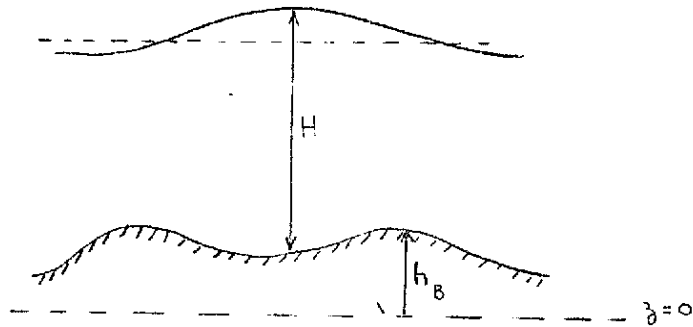


Fig. 2 - Modelo para um sistema de fluido barotrópico e incompressível com uma topografia de fundo.

## 6. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO EM UM SISTEMA EM ROTAÇÃO

A segunda lei de Newton, estritamente válida para um sistema absoluto ou inercial, é expressa por:

$$\frac{d_a \vec{v}_a}{dt} = \vec{F} \quad (16)$$

onde o subíndice refere-se a um sistema fixo de coordenadas, e  $\vec{F}$  é a somatória de todas as forças reais por unidade de massa que atuam sobre as parcelas. Entretanto, em Meteorologia é mais prático expressar a Equação 15 em termos de variáveis medidas em relação à Terra e, devido à rotação do planeta, algumas modificações devem ser introduzidas.

Seja  $\vec{\Omega}$  o vetor velocidade angular da Terra. A velocidade absoluta,  $\vec{v}_a$ , pode ser escrita como a soma da velocidade relativa,  $\vec{v}_r$ , e a velocidade tangencial devido à rotação do planeta, ou seja:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad (17)$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição com origem no centro da Terra.

Pode-se mostrar que para um vetor arbitrário  $\vec{A}$ , tem-se:

$$\frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d_r \vec{A}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}, \quad (18)$$

relacionando assim as taxas de variação total do vetor  $\vec{A}$  nos dois sistemas de coordenadas. Em particular, fazendo  $\vec{A} = \vec{v}_a$ , tem-se:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{\Omega} \times \vec{v} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{F} \quad (19)$$

onde todos os termos são referenciados a um sistema relativo, não-inercial, que gira com a velocidade angular  $\vec{\Omega}$ . Note-se que a segunda lei de Newton foi modificada pela inclusão de duas forças fictícias (assim chamadas pois anulam-se quando  $\vec{\Omega}=0$ ). A primeira,  $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}$ , é a *força de Coriolis* e desempenha um papel fundamental na descrição dos movimentos atmosféricos. A outra,  $-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ , é a *força centrífuga*.

A Equação 19 com as forças reais explícitas constitui a equação do movimento.

## 7. SOBRE AS FORÇAS REAIS

São consideradas aqui como forças reais, a força de gravidade newtoniana, a força de gradiente de pressão e a força de atrito. Uma breve discussão dessas forças será apresentada a seguir.

A lei de Newton da gravitação universal afirma que quaisquer dois elementos de massa atraem-se com uma força proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa. No caso da Terra ser esférica, essa força teria a direção da vertical local, passando pelo centro do planeta (Figura 3). Pode-se combinar a força de gravidade de atração com a força centrífuga obtendo a força de gravidade efetiva  $\vec{g}_e$ . Essa é uma função principalmente da altura e da latitude e tem a direção da vertical local, não passando entretanto pelo centro da Terra.

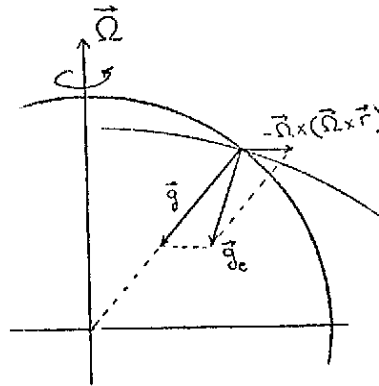


Fig. 3 - Representação vetorial das acelerações da gravidade, efetiva e centrífuga.

A força de gradiente de pressão é simplesmente escrita como  $-\alpha \nabla p$ ; sua derivação é encontrada na maioria dos livros textos de Meteorologia Dinâmica, exemplo Holton (1979).

Uma derivação formal da força de atrito envolve o conceito do tensor de cisalhamento  $\tau_{ij}$ , (ver Batchelor, 1970), mas para fins de aplicação em Meteorologia é comumente apresentado sob a forma:

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z}$$

onde  $\vec{\tau}$  é o cisalhamento do vento, proporcional à derivada vertical da velocidade. O coeficiente dessa proporcionalidade é o coeficiente de viscosidade. Nota-se que a priori supõe-se que as maiores variações ocorrem na vertical.

A força de atrito é de maior importância nas proximidades de superfícies sólidas (baixos níveis na atmosfera) e nas regiões de grande cisalhamento, como nas bordas de uma corrente de jato. O coeficiente  $\mu$  pode representar condições laminares e turbulentas de escoamento, e na maioria das aplicações é considerado (questionavelmente) constante.

Explicitando as forças reais na Equação 19, tem-se finalmente:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \alpha \nabla p + \vec{g}_e + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} \quad (22)$$

## 8. DECOMPOSIÇÃO DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

Os movimentos atmosféricos de grande escala são predominantemente horizontais, com uma razão de aspecto  $\delta = \frac{D}{L}$  da ordem de  $10^{-2}$  ( $D=10$  km e  $L=1000$  km são, respectivamente, as escalas típicas de espaço na vertical e horizontal). Assim sendo, para propósitos de análise teórica e mesmo de previsão numérica, torna-se aconselhável considerar a equação do movimento

separadamente em suas componentes horizontal e vertical.

Definindo:

$$\vec{V}_H = u \hat{i} + v \hat{j}, \quad (23)$$

a componente horizontal da equação do movimento é:

$$\frac{D\vec{V}_H}{Dt} + f \hat{k} \times \vec{V}_H = -\frac{1}{\rho} \nabla_H p + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \vec{V}_H}{\partial z}, \quad (24)$$

onde:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_H \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial z}, \quad e$$

$$f = 2\Omega \sin \psi$$

é o parâmetro de Coriolis. O operador  $D/Dt$  foi também separado em três partes, a saber: a taxa de variação local (ou tendência), a taxa de variação horizontal advectiva e a taxa de variação vertical advectiva, e

$$\vec{V}_H = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \hat{j} \right)$$

é a componente horizontal do vetor cisalhamento.

A componente vertical da equação do movimento é:

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g_e - \hat{k} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{V}_H}{\partial z} \quad (25)$$

Termos esféricos não foram aqui incluídos por serem comparativamente pequenos e, portanto, desprezíveis para fenômenos meteorológicos de escala sinótica.

Deve-se ainda notar a não-inclusão de termos que envolvem a componente horizontal do vetor rotação  $\hat{\Omega}$  na Equação 24, como decorrência da pequena razão de aspecto, e na Equação 25 por considerações de energia.

### 9. O NÚMERO DE ROSSBY E A APROXIMAÇÃO GEOSTRÓFICA

Em Meteorologia Dinâmica adota-se uma escala de tempo do tipo advectiva, i.e.  $T=L/V$ , onde  $V$  é uma velocidade típica. Supondo-se que  $W=\delta V$  como fornecido pela equação da continuidade; na realidade este valor é menor visto que existe a tendência de cancelamento entre os dois termos em  $\vec{V}_H \cdot \vec{V}$ . Assim:

$$\begin{aligned} 0 \left( \frac{D\vec{V}_H}{Dt} \right) &\sim \frac{U^2}{L}, \\ 0 (f\hat{k} \times \vec{V}_H) &\sim fU, \\ 0 \left( \frac{1}{\rho} \nabla_H p \right) &\sim \frac{P}{\rho}. \end{aligned}$$

A razão entre os termos de inércia,  $U^2/L$ , e a aceleração de Coriolis,  $fU$ , é por definição o número de Rossby,  $R_o$ , i.e:

$$R_o = \frac{U^2/L}{fU} = \frac{U}{fL} \quad (26)$$



é uma maneira conveniente de avaliar o termo de aceleração. Para  $R_0 \ll 1$ , existe portanto o balanço aproximado entre as forças de Coriolis e a de gradiente de pressão (a força de atrito foi omitida, por hipótese), ou seja:

$$f\vec{k} \times \vec{V}_H \approx -\frac{1}{\rho} \nabla_H p. \quad (27)$$

Ao vento horizontal  $\vec{V}_H$  que satisfaz a Equação 27 dá-se o nome de vento geostrófico. Assim, dado um campo de pressão sempre é possível construir um campo de vento geostrófico como aproximação do vento real. Contudo, nem sempre o vento geostrófico constitui boa aproximação para o vento observado, sobretudo em casos onde os efeitos de curvatura do escoamento são grandes.

Tomando o produto vetorial  $\vec{k} \times$  da Equação 27, tem-se explicitamente:

$$\vec{V}_g = \frac{\vec{k} \times \nabla_H p}{\rho f}. \quad (28)$$

Pode-se então ver que o vento geostrófico é um vetor que é paralelo às linhas de pressão constante (isóbaras). Ainda, se  $\rho$  e  $f$  forem tratados como constante, pode-se mostrar que o vento geostrófico deriva de uma função de corrente  $\psi$ :

$$\vec{V}_g = \vec{k} \times \nabla \psi \quad (29)$$

com

$$\psi = \frac{p}{\rho f} \quad (30)$$

A dificuldade de ser ter  $\rho$  constante pode ser facilmente removida fazendo uso de outras coordenadas verticais que não a da altura  $z$ . Examinando a Equação 28, pode-se ver que o vento geostrófico sopra de modo a ter regiões de alta pressão à sua direita quando no Hemisfério Norte, e à sua esquerda quando no Hemisfério Sul, como ilustrado na Figura 4.

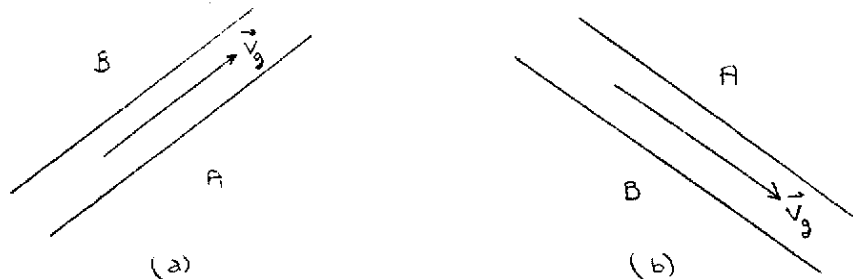


Fig. 4 - Representação vetorial do vento geostrófico para: a) o Hemisfério Norte e b) Hemisfério Sul.

#### 10. A APROXIMAÇÃO HIDROSTÁTICA

Uma grande simplificação pode ser feita na Equação 25, visto que as acelerações verticais, no caso de movimentos de escala sinótica, são pequenas quando comparadas com a gravidade, por exemplo. Nota-se, de fato, o balanço aproximado entre a força de gravidade e a de gradiente de pressão, ou seja:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0. \quad (31)$$

Esse tipo de balanço denomina-se aproximação hidrostática, e a Equação 31 tem a seguinte interpretação física: a pressão em um ponto nada mais é que o peso de uma coluna de área horizontal unitária que se estende do ponto em questão até o topo da atmosfera.

A aproximação hidrostática encontra importantíssimas aplicações em Meteorologia (Hess, 1959). Uma delas é seu uso no cálculo de alturas de superfícies isobáricas a partir dos dados de pressão, temperaturas e umidade de uma radiossondagem. Outra é que, pelo fato de manter uma correspondência unívoca entre a pressão e a altura, permite o uso da pressão como coordenada vertical (independente). Nesse caso, a altura  $z$  passa a ser variável dependente.

Essas duas aplicações são consideradas nas duas próximas seções.

11. A EQUAÇÃO HIPSONÔMICA

A equação hidrostática pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{g}{RT} \tag{32}$$

usando a equação de gás perfeito.

Integrando a Equação 32 entre dois níveis,  $p_1$  (inferior) ao qual corresponde a altura  $z_1$  e  $p_2$  (superior) ao qual corresponde a altura  $z_2$ , tem-se:

$$\int_{p_1}^{p_2} T \partial(\ln p) = - \frac{g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \partial z$$

Introduzindo  $\bar{T}$ , a temperatura média da camada entre as superfícies de pressão  $p_1$  e  $p_2$ , obtêm-se na equação acima, a equação hipométrica:

$$\Delta z = z_2 - z_1 = \frac{RT}{g} \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \tag{33}$$

Essa equação assegura que a espessura entre duas superfícies isobáricas,  $p_1$  e  $p_2$ , é diretamente proporcional à temperatura (virtual, para inclusão da unidade) média. Nota-se que  $\bar{T}$  é uma função das coordenadas horizontais  $x$  e  $y$ .

A determinação da altura de uma superfície isobárica faz-se na prática com o uso sucessivo da Equação 32 para intervalos de pressão que cobrem a distância entre a estação e o nível considerado.

12. COORDENADAS VERTICAIS

Várias coordenadas verticais, outras que não a altura geométrica (ou geopotencial, para ser mais exato), podem ser usadas em Meteorologia Dinâmica; todas elas apresentam, obviamente, suas vantagens e desvantagens.

A análise das equações da termohidrodinâmica, quando escritas nessas coordenadas, é indispensável para a construção de modelos numéricos. Esta análise é uma metodologia altamente eficiente para estudar os sistemas de escalas sinóticas, que receberá maior atenção nas seções seguintes. Sabe-se, através de uma análise de escalas, que para esses sistemas a aproximação hidrostática é válida e isso justifica o uso de outras coordenadas verticais nas equações governantes.

De fato, é necessário que uma função qualquer  $s(x,y,z,t)$ , chamada *coordenada vertical generalizada*, seja uma função monotônica de  $z$ , estabelecendo uma relação unívoca entre  $s$  e  $z$ . A aproximação hidrostática garante tal relação, por exemplo, quando  $s$  coincide ser a pressão  $p$ ; isto é igualmente verdade para outras coordenadas.

Na seção seguinte as equações fundamentais, em coordenadas  $z$ , são reescritas e tomadas como referência no que tange ao uso de coordenadas verticais generalizadas. São elas:

Equação do movimento

$$\frac{d\vec{V}_H}{dt} + f \hat{k} \times \vec{V}_H = -\frac{1}{\rho} \nabla_H p. \quad (34)$$

Equação da hidrostática

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (35)$$

Equação da continuidade

$$\frac{d}{dt} \ln \rho + \nabla_H \cdot \vec{V}_H + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (36)$$

Equação da termodinâmica (adiabática)

$$\frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (37)$$

### 13. AS RELAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO

A coordenada vertical generalizada  $s$  é uma função das coordenadas espaciais  $x$ ,  $y$  e  $z$  e do tempo  $t$ , i.e.:

$$s = s(x, y, z, t) \quad (38)$$

monotônica com  $z$  e satisfazendo uma relação de univocidade, o que permite portanto escrever equação 7 como:

$$z = z(x, y, s, t). \quad (39)$$

A Figura 5 ilustra geometricamente a obtenção das relações de transformação entre as coordenadas  $z$  e  $s$ . Representando por  $a$  qualquer uma das coordenadas  $x$ ,  $y$  ou  $t$ , tem-se, para uma função escalar  $f$  qualquer:

$$\frac{f_C - f_A}{\Delta a} = \frac{f_C - f_B}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta a} + \frac{f_B - f_A}{\Delta a}$$

que, no limite para  $\Delta a \rightarrow 0$ , resulta:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_s = \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_s + \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_z. \quad (40)$$

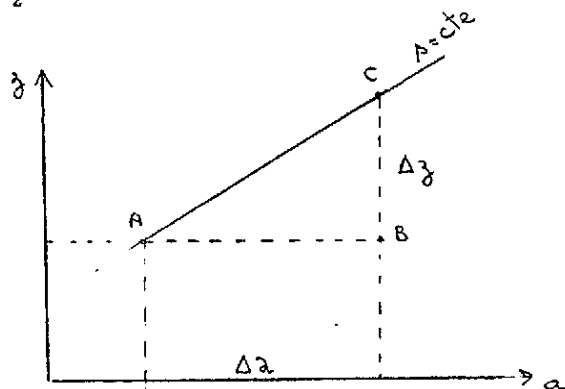


Fig. 5 - Diagrama esquemático usado na conversão de coordenadas verticais.

Com referência às coordenadas horizontais  $x$  e  $y$ , a Equação 40 pode ser escrita compactadamente em sua forma vetorial, i.e:

$$\nabla_s f = \nabla_H f + (\nabla_s z) \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (41)$$

Sem maiores dificuldades, tem-se para um campo vetorial qualquer  $\vec{F}$ :

$$\nabla_s \cdot \vec{F} = \nabla_H \cdot \vec{F} + (\nabla_s z) \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}. \quad (42)$$

Finalmente, com respeito à coordenada vertical tem-se simplesmente:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial z}. \quad (43)$$

Com referência a um sistema  $(x, y, z, t)$ , a taxa de variação total, um conceito lagrangiano, de um campo escalar  $f$  é dada explicitamente por:

$$\frac{Df}{Dt}_z = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_z + \vec{V}_H \cdot \nabla_H f + w \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (44)$$

Já com referência a um sistema  $(x, y, s, t)$ , quando  $f=f(x, y, s, t)$ , pode-se facilmente mostrar, usando expansão em série de Taylor, que:

$$\frac{Df}{Dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_s + \vec{V}_H \cdot \nabla_s f + \dot{s} \frac{\partial f}{\partial s}, \quad (45)$$

onde  $\dot{s}$ , definido por:

$$\dot{s} \equiv \frac{Ds}{Dt} = \frac{s}{t} + \vec{V}_H \cdot \nabla_H s + w \frac{\partial s}{\partial z}, \quad (46)$$

faz o papel da componente vertical de velocidade (não necessariamente com dimensão de velocidade) no sistema de coordenadas generalizadas.

É oportuno fazer aqui duas observações. Primeiro, a taxa de variação total, devido ao seu significado físico, independente do sistema de coordenadas usado na descrição matemática. Assim,

$$\left( \frac{Df}{Dt} \right)_z = \left( \frac{Df}{Dt} \right)_s = \frac{Df}{Dt}, \text{ simplesmente.}$$

Segundo, o conceito de diferenciação parcial faz com que, por exemplo as derivadas temporais que aparecem nas Equações 44 e 45 sejam diferentes e relacionadas entre si pela Equação 40 fazendo  $a=t$ .

Uma relação bastante útil entre  $w$  e  $\dot{s}$ , as componentes verticais nos dois sistemas, pode ser obtida aplicando as relações da transformação nos termos individuais (taxas local e advectiva horizontal e advectiva vertical) da taxa de variação total dada pela Equação 44. Assim:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_z = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_s - \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_s \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (47a)$$

$$\vec{V}_H \cdot \nabla_H f = \vec{V}_H \cdot \nabla_s f - (\vec{V}_H \cdot \nabla_s z) \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (47b)$$

$$w \frac{\partial f}{\partial z} = w \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial z}. \quad (47c)$$

Somando essas três equações, tem-se que:

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s + \vec{V}_H \cdot \nabla_s f + \left[ w - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s - \vec{V}_H \cdot \nabla_s z \right] \frac{\partial s}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \quad (48)$$

Comparando as Equações 48 e 46, chega-se à:

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial z} \left[ w - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s - \vec{V}_H \cdot \nabla_s z \right] \quad (49)$$

A Equação 34 quando transformada para um sistema  $(x, y, s, t)$  será modificada especialmente quanto ao termo da força de gradiente de pressão. Fazendo  $f=p$  e usando a Equação 41, tem-se:

$$\frac{1}{\rho} \nabla_H p = \frac{1}{\rho} \nabla_s p - (\nabla_s z) \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho} \quad ,$$

ou, usando a equação hidrostática:

$$\frac{1}{\rho} \nabla_H p = \frac{1}{\rho} \nabla_s p + \nabla_s \phi \quad ,$$

onde  $\phi = g z$  é a função geopotencial.

Deve-se notar que a forma dos outros termos não se altera, e atenção é dada à força de gradiente de pressão, pois em coordenada generalizada é agora representado por dois termos, com importantes implicações quando se pensa em modelá-lo numericamente. Essas considerações estão fora do escopo desse trabalho. Assim, em uma forma completa, a equação do movimento é:

$$\frac{D\vec{V}_H}{Dt} + f \vec{k} \times \vec{V}_H = - \frac{1}{\rho} \nabla_s p - \nabla_s \phi \quad (50)$$

Considera-se agora a equação da continuidade (Equação 35) escrita com a coordenada vertical generalizada. Assim, por termos, tem-se:

$$\nabla_H \cdot \vec{V}_H = \nabla_s \cdot \vec{V}_H - \nabla_s z \cdot \frac{\partial \vec{V}_H}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z} \quad ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial z}$$

A equação 36 pode ser reescrita:

$$\frac{D}{Dt} \ln \rho + \nabla_s \cdot \vec{V}_H + \frac{\partial s}{\partial z} \left[ \frac{\partial w}{\partial s} - \nabla_s z \cdot \frac{\partial \vec{V}_H}{\partial s} \right] = 0,$$

ou:

$$\frac{D}{Dt} \ln \rho + \nabla_s \cdot \vec{V}_H + \frac{\partial s}{\partial z} \left[ \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} (\nabla_s z \cdot \vec{V}_H) + \vec{V}_H \cdot \frac{\partial \nabla_s z}{\partial s} \right] = 0,$$

ou:

$$\frac{D}{Dt} \ln \rho + \nabla_s \cdot \vec{V}_H + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial s} \left[ w - \nabla_s z \cdot \vec{V}_H \right] + \frac{\partial s}{\partial z} \vec{V}_H \cdot \nabla_s \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \quad .$$

Para "completar" a expressão de  $s$  (ver Equação 49, usa-se o artifício de somar e subtrair  $\frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_s$  na expressão acima, o que resulta em:

$$\frac{D}{Dt} \ln \rho + \nabla_s \cdot \vec{V}_H + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial s} \left[ w - (\nabla_s z) \cdot \vec{V}_H - \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_s \right] + \frac{\partial s}{\partial z} \vec{V}_H \cdot \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_s,$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \ln \rho + \nabla_s \cdot \vec{V}_H + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left[ w - \nabla_s z \cdot \vec{V}_H - \frac{\partial s}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_s \right] \frac{\partial s}{\partial z} \right\} - \left[ w - \nabla_s z \cdot \vec{V}_H - \frac{\partial z}{\partial t} \right] \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_s + \\ + \frac{\partial s}{\partial z} \vec{V}_H \cdot \nabla_s \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_s = 0, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{D}{Dt} \ln \rho + \nabla_s \cdot \vec{V}_H + \frac{\partial s}{\partial z} - \frac{1}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_s + \frac{\partial s}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_s + \vec{V}_H \cdot \nabla_s \frac{\partial z}{\partial s} \right] = 0,$$

ou

$$\frac{D}{Dt} \ln \rho + \nabla_s \cdot \vec{V}_H + \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right) + \vec{V}_H \cdot \nabla_s \ln \frac{\partial z}{\partial s} + s \frac{\partial}{\partial s} \ln \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right) = 0,$$

ou

$$\frac{D}{Dt} \ln \rho + \frac{D}{Dt} \ln \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right) + \nabla_s \cdot \vec{V}_H + \frac{\partial s}{\partial s} = 0,$$

ou, finalmente,

$$\frac{D}{Dt} \ln \left( \rho \frac{\partial z}{\partial s} \right) + \nabla_s \cdot \vec{V}_H + \frac{\partial s}{\partial s} = 0.$$

Nota-se que  $\frac{D}{Dt}$  refere-se ao sistema  $(x, y, s, t)$ . A equação da termodinâmica e a do estado tem sua forma conservada.

#### 14. O VENTO GEOSTRÓFICO EM DIFERENTES COORDENADAS

O vento geostrófico, como foi visto, é um vento horizontal que resulta do balanço entre a força de Coriolis  $(-f\hat{k} \times \vec{V})$  e a força (horizontal) de gradiente de pressão. Referindo-se à Equação 50, este balanço é:

$$0 = f \hat{k} \times \vec{V}_g - \frac{1}{\rho} \nabla_s p - \nabla_s \phi,$$

ou

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f} \hat{k} \times \left( \frac{\nabla_s p}{\rho} + \nabla_s \phi \right).$$

(52)

Agora, considera-se os seguintes casos:

a)  $s=z$ ,  $\dot{s}=\dot{z}=\omega$

$$\vec{v}_g = \frac{1}{f} \hat{k} \times \left( \frac{\nabla_{HP}}{\rho} + H \vec{g}z \right) = \frac{\hat{k} \times \nabla_{HP}}{\rho f} \quad (53)$$

b)  $s=p$ ;  $\dot{s}=\dot{p}=\omega$

$$\vec{v}_g = \frac{1}{f} \hat{k} \times \left\{ \frac{\nabla_p P}{\rho} + \nabla_p g z \right\} = \frac{g}{f} \hat{k} \times \nabla_p z, \quad (54)$$

c)  $s=\theta$ ;  $\dot{s}=\dot{\theta}$

$$\vec{v}_g = \frac{1}{f} \hat{k} \times \left\{ \frac{\nabla_{\theta} P}{\rho} + \nabla_{\theta} g z \right\}. \quad (55)$$

Pode-se mostrar ainda que em coordenadas isentrópicas

$$\vec{v}_g = \frac{1}{f} \hat{k} \times \nabla_{\theta} \psi; \quad \psi = c_p T + g z,$$

e  $\psi$  é chamada função de Montgomery.

### 15. VENTO TÉRMICO

O conceito de vento térmico é muito importante em Meteorologia. Ele fornece a taxa de variação vertical ou o cisalhamento vertical do vento geostrófico compatível com a existência de um gradiente horizontal de temperatura.

Usando um sistema de coordenados  $p$ , a diferença  $\Delta \vec{v}_g = \vec{v}_T = \vec{v}_{g1} - \vec{v}_{g2}$  entre os ventos geostróficos de dois níveis, 2 (superior) e 1 (inferior), pode ser escrita como:

$$\vec{v}_T = \frac{g}{f} \hat{k} \times \nabla (z_2 - z_1). \quad (56)$$

Usando a Equação 33 para substituir a espessura  $\Delta_z = z_2 - z_1$ , tem-se:

$$\vec{v}_T = \frac{R}{f} \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \hat{k} \times \nabla_p T, \quad (57)$$

ou ainda

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = \frac{g}{f} \frac{1}{T} \hat{k} \times \nabla_p T. \quad (58)$$

Desse modo o vento térmico é um vento que "sopra" de modo a ter regiões quente à sua direita no Hemisfério Norte, ou regiões frias à sua direita no Hemisfério Sul.

O conceito de vento térmico é muito útil e permite interpretar certas configurações características da circulação atmosférica, que decorrem do gradiente meridional de temperatura, entre os pólos e o equador. Ainda, ele pode ser usado na obtenção de uma expressão que forneça a advecção térmica, i.e.:

$$A_T = - \vec{v}_g \cdot \nabla_p T. \quad (59)$$

Na expressão acima, supondo  $\vec{v}_g$  a média aritmética dos ventos geostróficos  $\vec{v}_{g1}$  e  $\vec{v}_{g2}$  e usando a Equação 58, chega-se a uma expressão explícita de  $A_T$ , ou seja:

$$A_T = \frac{f}{R \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right)} |\vec{V}_{g1}| |\vec{V}_{g2}| \sin \alpha, \quad (60)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo positivo definido a partir da direção de  $\vec{V}_{g1}$  para a direção  $\vec{V}_{g2}$ .

16. VORTICIDADE E CIRCULAÇÃO

Vorticidade de um vetor  $\vec{A}$  é um campo vetorial, i.e., definido para cada ponto do fluido, cuja componente em uma direção genérica dada pelo versor  $\hat{n}$ , como mostrado na Figura 6, é:

$$\hat{n} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (61)$$

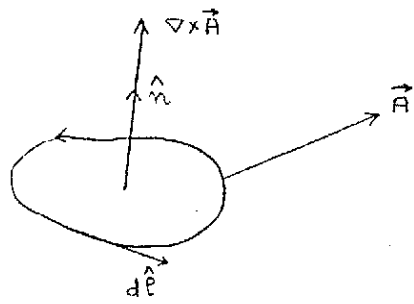


Fig. 6 - Ilustração do vetor vorticidade ( $\nabla \times \vec{V}$ ).

Em meteorologia de grande escala, a componente vertical da vorticidade (que mede por tanto a rotação em um plano horizontal) é mais importante que as componentes horizontais e recebe imprópriamente o nome de vorticidade. Essa componente é usualmente designada por  $\zeta$  e dá-se por:

$$\hat{k} \cdot (\nabla \times \vec{V}) \equiv \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (62)$$

O teorema de Stokes é fundamental, pois relaciona o vetor vorticidade com uma integral de linha, i.e.:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l}. \quad (63)$$

Essa integral de linha, chamada *circulação*, é uma medida macroscópica da rotação para área  $S$ . Definindo uma vorticidade média para a área  $S$ , ela relacionar-se-á com a circulação através de:

vorticidade média x área = circulação.

A conceituação física de vorticidade pode ser obtida com um exemplo bastante simples como a da rotação sólida, onde um vórtice é dado por:

$$\vec{V} \cdot \hat{e} = V_{\text{tangencial}} = \omega r; \omega = \text{constante.}$$

Nesse caso, chega-se a  $\nabla \times \vec{V} = 2\omega \hat{k}$  mostrando que a vorticidade em um ponto é duas vezes a sua velocidade angular de rotação.



17. TEOREMA DE HELMHOLTZ

Algumas definições são necessárias. A primeira, de *linha ou filamento de vórtice*, é uma linha que em cada ponto é paralela ao vetor vorticidade local. Um tubo de vórtice é uma superfície cilíndrica no espaço ocupado pelo fluido, cujas geratrizes são linhas de vorticidade que passam por uma curva fechada.

O teorema de Helmholtz, em 1858, diz que a intensidade de um tubo de vórtice (ou seja, a circulação calculada ao longo de uma curva fechada pertencente à superfície do tubo) é constante ao longo de sua extensão. Como consequência, um tubo de vórtice não pode terminar dentro do fluido.

18. TEOREMAS DE BJERKNES E KELVIN

Uma vez definida a vorticidade, deve-se fazer a distinção entre a vorticidade absoluta (em relação a um sistema inercial) e a vorticidade relativa (em relação a um sistema que gire com a Terra).

Aplicando o operador  $\nabla \times$  à Equação 17, chega-se a:

$$\nabla \times \vec{V}_a = \nabla \times \vec{V}_r + 2\vec{\Omega} \quad (64)$$

cuja componente vertical é:

$$\zeta_a = \zeta_r + f \quad (65)$$

com  $f = 2\vec{\Omega} \cdot \vec{k} = 2\Omega \sin\psi$  é o parâmetro de Coriolis definido anteriormente.

De uma maneira bastante similar:

$$C_a = C_r + 2 \iint \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} \quad (66)$$

onde  $C_a$  e  $C_r$  são as circulações absoluta e relativa, respectivamente.

Um teorema de fundamental importância é o denominado primeiro teorema de Bjerknes. Ele mostra que para um fluido ideal (sem viscosidade), a taxa de variação total da circulação absoluta é dada por:

$$\frac{dC_a}{dt} = - \oint \frac{dp}{\rho} \quad (67)$$

(supondo-se também que todas as forças de volume derivam de um potencial, ou, em outras palavras, sejam conservativas).

Se em adição às hipóteses acima for considerado um fluido *barotrópico*, i.e., onde  $p=p(\rho)$ , então:

$$\frac{dC_a}{dt} = 0 \quad (68)$$

Essa é a expressão matemática do teorema de Kelvin, em 1869.

Uma nova expressão para o teorema de Bjerknes pode ser obtida combinando as Equações 66 e 67, o que resultará em:

$$\frac{dC_r}{dt} = - \oint \left\{ \frac{dp}{\rho} - 2 \frac{d}{dt} \right\} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S}, \quad (69)$$

ou considerando uma área horizontal S, em:

$$\frac{dC_r}{dt} = \oint \left\{ \frac{dp}{\rho} - \frac{d}{dt} \right\} (fS). \quad (70)$$

### 19. EQUAÇÃO VETORIAL DA VORTICIDADE

A equação do movimento em coordenadas (x,y,z,t) é dada por:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} = - \frac{1}{\rho} \nabla p - g\vec{k} + \vec{F}. \quad (71)$$

Substituindo o termo de advecção por:

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = (\nabla_x \vec{V}) \times \vec{V} + \nabla \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2}$$

e tomando o rotacional da expressão obtida, chega-se à equação vetorial da vorticidade. Assim, definindo

$$(\nabla_x \vec{V}) + 2\vec{\Omega} = \vec{Q}_a,$$

tem-se:

$$\frac{\partial \vec{Q}_a}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{Q}_a = - Q_a (\nabla \cdot \vec{V}) + (Q_a \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla_x \vec{F}. \quad (72)$$

Na derivação da Equação 72 é usada a seguinte identidade vetorial:

$$\nabla_x (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}).$$

Assim, vê-se pela Equação 72 que localmente o vetor vorticidade absoluta  $\vec{Q}_a$  pode variar devido a cinco mecanismos físicos, diferentes, a saber (na ordem em que aparecem na Equação 72): devido à advecção de vorticidade absoluta, ao termo da divergência, ao termo de esticamento e torção de tubos de vortices, a efeitos baroclínicos e a processos de dissipação viscosa.

Devido ao fato dos movimentos sinóticos serem predominantemente horizontais, a componente vertical da Equação 72 é de importância mais imediata em aplicações meteorológicas. Assim, tomando o produto escalar com  $\vec{k}$ , tem-se:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + V_H \cdot \nabla (\zeta + f) + w \frac{\partial}{\partial z} = - (\zeta + f) (\nabla \cdot V_H) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (73)$$

### 20. ANÁLISE DE ESCALA DA EQUAÇÃO DA VORTICIDADE

Nem todos os termos da Equação 73 têm igual importância. Uma análise de escala permite fazer simplificações consistentes para o caso de movimentos de escala sinótica. Assim adotando valores típicos para:

- $u \sim 10 \text{ ms}^{-1}$  (velocidade horizontal),
- $w \sim 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$  (velocidade vertical),
- $L \sim 10^6 \text{ m}$  (distância horizontal),
- $D \sim 10^4 \text{ m}$  (distância vertical),
- $\delta p \sim 10^3 \text{ N/m}^2$  (flutuações horizontais na pressão),
- $\frac{\delta \rho}{\rho} \sim 10^{-2}$  (flutuações percentuais na densidade),
- $f \sim 10^{-4}$  (parâmetro de Coriolis, para latitudes médias),
- $\beta = \frac{df}{dy} \sim 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  (parâmetro de Rossby),
- $\rho = \frac{U}{L} \sim 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  (vorticidade).

as magnitudes dos vários termos na equação da vorticidade são:

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \vec{V} \cdot \nabla S \sim \frac{u}{L} = 10^{-10} \text{ s}^{-2} ,$$

$$w \frac{\partial \zeta}{\partial y} \sim \frac{wu}{LH} = 10^{-11} \text{ s}^{-2} ,$$

$$v \frac{df}{dy} \sim u\beta = 10^{-11} \text{ s}^{-2} ,$$

$$f \nabla \cdot \vec{V}_H \lesssim \frac{fu}{L} \lesssim 10^{-9} \text{ s}^{-2} ,$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \lesssim \frac{wu}{HL} \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2} ,$$

$$\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\delta \rho \delta p}{\rho^2 L^2} \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2} .$$

O símbolo  $\lesssim$  usado nos últimos três termos indica que em cada caso é possível que as duas partes da expressão podem cancelar-se parcialmente resultando em magnitudes ainda menores. Em especial, o termo da divergência deve dar uma ordem de magnitude menor para poder satisfazer a equação da vorticidade.

Assim, retendo somente os termos da ordem de  $10^{-10} \text{ s}^{-2}$ , tem-se a equação simplificada da vorticidade:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V}_H \cdot \nabla (\zeta + f) = - (\zeta + f) \nabla \cdot \vec{V}_H . \tag{74}$$

### 21. VORTICIDADE POTENCIAL PARA UM FLUIDO BAROTRÓPICO

Considere-se o mesmo sistema fluido mostrado na Figura 2.

Eliminando  $\nabla \cdot \vec{V}_H$  entre as Equações 15 e 74, pode-se chegar a uma lei de conservação para a quantidade

$$\eta = \frac{\zeta + f}{H} , \tag{75}$$

i.e.:

$$\frac{D\pi}{Dt} = 0. \quad (76)$$

A quantidade  $\pi$  é denominada vorticidade potencial absoluta. Fisicamente contém todos os mecanismos (nesse caso, o único devido à divergência para mudar a vorticidade relativa de uma parcela ao longo de seu movimento. A conservação da vorticidade potencial absoluta como definida pela Equação 75 é estritamente válida no caso de um fluido barotrópico em divergência horizontal. No caso de  $\nabla \cdot \mathbf{V}_H = 0$ , a expressão coincide com a vorticidade absoluta. No caso de fluidos baroclínicos, sua expressão é outra e novas leis de conservação devem ser derivadas (ver Teorema de Ertel em Pedlosky, 1979).

A conservação de  $\pi$  é uma restrição sobre o movimento do fluido e representa um mecanismo restaurador que, uma vez perturbado, dá origem às ondas de vorticidade, das quais as ondas de Rossby barotrópicas sem divergência é o exemplo mais conhecido.

## 22. A ONDA DE ROSSBY

O tipo de onda de maior importância no estudo dos movimentos atmosféricos de grande escala é a onda de Rossby. Neste trabalho, só será apresentado o protótipo da onda de Rossby, onde não se consideram os efeitos da divergência e da estratificação.

A onda de Rossby surge devido às variações do parâmetro de Coriolis, ou seja, o chamado efeito  $\beta$ . Ela pode ser isolada (i.e., já separada de outros tipos) considerando a equação da vorticidade (Equação 74) com o termo da divergência nulo. Expandindo-a, chega-se à:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_H \cdot \nabla (\zeta + f) = 0. \quad (77)$$

Supondo que o movimento consiste em um estado básico zonal constante mais uma perturbação horizontal, i.e.:

$$\mathbf{u} = \bar{U} + \mathbf{u}'; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}'; \quad \zeta = \zeta'$$

e definindo uma função de corrente  $\psi$ , tal que:

$$\mathbf{u}' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y} \quad \mathbf{v}' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \quad (78)$$

chega-se à equação linearizada:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \quad (79)$$

Agora, supondo soluções do tipo

$$\psi(x, y, t) = R_e \left\{ \hat{\psi} e^{i(k \cdot x + ly - \sigma t)} \right\} \quad (80)$$

tem-se, pela Equação 79, que

$$c = \bar{U} - \frac{\beta}{k^2 + l^2}, \quad (81)$$

onde  $c$  é a velocidade de fase na direção  $x$ , e  $k$  e  $l$  os números de onda nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $\beta = \frac{df}{dy}$  o parâmetro de Rossby.

Pode-se ver pela Equação 81 que a onda de Rossby propaga-se sempre para o oeste com relação ao estado básico.

### 23. SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA VORTICIDADE BAROTRÓFICA

No caso de uma atmosfera barotrófica sem divergência, a Equação 74 pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = - J(\psi, \nabla^2 \psi + F) . \quad (82)$$

Suponha-se que em algum instante  $t_0$  conheça-se o campo de função de corrente como função da latitude  $\psi$  e da longitude  $\lambda$ . Deve-se mencionar que na prática o problema de cobertura observacional não é de modo algum trivial. Condições de contorno devem ser apropriadamente estabelecidas.

A equação anterior é em primeiro lugar escrita em forma adequada para ser resolvida em computadores digitais. Em Meteorologia, técnicas de diferenças finitas são as mais populares.

Executando problemas peculiares existentes no início da integração, a sequência de procedimentos para resolver a Equação 82 pode ser resumida a (Roltiner and Willians, 1980) da seguinte maneira:

- a) calcula-se o jacobiano usando valores correspondentes a um nível  $n \Delta t$  de tempo (supõe-se que os valores de  $\psi$  para todos níveis anteriores são conhecidos;  $\Delta t$  é o incremento em tempo);
- b) usando diferenças finitas em tempo, centradas, por exemplo, calculam-se os valores de  $\Delta^2 \psi$  referente ao nível  $(n+1) \Delta t$  de tempo;
- c) obtendo  $\Delta^2 \psi$  então por um processo de relaxação (ou qualquer outro), resolve-se a equação de Poisson acima, conseguindo assim o campo futuro de  $\psi$  propriamente dito;
- d) repete-se o processo do item (a) até que todo o intervalo da previsão seja coberto.

### 24. BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

BATCHELOR, G.K. "An introduction to fluid dynamics", Cambridge University Press, 615 pp., 1970.

HALTINER, G.J.; WILLIAMS, R.T. "Numerical prediction and dynamic Meteorology". 2a. ed. John Wiley & Sons, 477 pp., 1980.

HESS, S.L. "Introduction to theoretical Meteorology, Holt, Rinehart and Wiston, NY. 363 pp., 1959.

HOLTON, J.R. "An introduction to dynamic meteorology". 2a. ed. Academic Press, 391 pp., 1979.

PEDLOSKY, J. "Geophysical fluid dynamics". Springer-Verlag, NY., 625 pp., 1979.