

1. Publicação nº <i>INPE-2746-PRE/322</i>	2. Versão	3. Data <i>Maio, 1983</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DMC/DDO</i>	Programa <i>ORBAT</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>CONTRAÇÃO DE ÓRBITAS</i> <i>MÉTODOS ANALÍTICOS</i> <i>PERTURBAÇÕES NÃO-GRAVITACIONAIS</i>			
7. C.D.U.: <i>629.7.076.6:629.783</i>			
8. Título <i>INPE-2746-PRE/322</i>		10. Páginas: <i>11</i>	
COMPARAÇÃO ENTRE TEORIAS ANALÍTICAS PARA O ESTUDO DE CONTRAÇÃO DE ÓRBITAS DE SATÉLITES ARTIFICIAIS		11. Última página: <i>10</i>	
		12. Revisada por  <i>Roberto Vieira Martins</i>	
9. Autoria <i>Maureen Teresa Rose Fitzgibbon</i> <i>Rodolpho Vilhena de Moraes</i> <i>Diomar Cesar Lobão</i>		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor	
Assinatura responsável <i>Maureen Fitzgibbon</i>			
14. Resumo/Notas  <i>Com base no método da Variação dos Parâmetros, propõe-se uma solução analítica do sistema não-canônico de equações diferenciais referente ao movimento de um satélite artificial perturbado pelos efeitos do arrasto atmosférico e do geopotencial. Esta solução é comparada com a solução clássica proposta por Brouwer e Hori em 1961. Apresentam-se resultados numéricos para o caso de um satélite do tipo balão.</i>			
15. Observações <i>Este trabalho será apresentado no VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM 83 - Uberlândia, MG, de 13 a 16 de dezembro de 1983.</i>			

ANAIS



**COBEM 83**

VII CONGRESSO BRASILEIRO DE  
ENGENHARIA MECÂNICA

UBERLÂNDIA, 13 - 16 de dezembro de 1983

TRABALHO  
PAPER

Nº

P.P.

PROCEEDINGS



UFU

COMPARAÇÃO ENTRE TEORIAS ANALÍTICAS PARA O ESTUDO DE  
CONTRAÇÃO DE ÓRBITAS DE SATÉLITES ARTIFICIAIS

MAUREEN TEREZA ROSE FITZGIBBON

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

RODOLPHO VILHENA DE MORAES

DIOMAR CESAR LOBÃO

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA  
Centro Técnico Aeroespacial - CTA

SUMÁRIO

Com base no método da Variação dos Parâmetros, propõe-se uma solução analítica do sistema não-canônico de equações diferenciais referente ao movimento de um satélite artificial perturbado pelos efeitos do arrasto atmosférico e do geopotencial. Esta solução é comparada com a solução clássica proposta por Brouwer e Hori em 1961. Apresentam-se resultados numéricos para o caso de um satélite de tipo balão.

SUMMARY

An analytical solution of the noncanonical system of differential equations concerned the motion of an artificial earth satellite disturbed by the effects of air drag and geopotential is proposed, based on the method of Variation of Parameters. This solution is compared with the classical one proposed by Brouwer and Hori in 1961 for the same problem. Numerical results for a balloon type satellite are presented.

## 1. Introdução

O estudo analítico do movimento de satélites artificiais sujeito a forças não-gravitacionais torna-se bastante complexo, quando se para aproximar da realidade, tentam-se modelos sofisticados para as forças atuantes. No caso específico de a força considerada ser o arrasto atmosférico, a principal dificuldade provém do modelamento da densidade atmosférica.

É um fato bem conhecido que, a grandes alturas, o ar é extremamente rarefeito; por exemplo, a 800 km de altura a densidade é da ordem de  $4 \times 10^{-17}$  g/cm<sup>3</sup> [1]. Contudo, o efeito do arrasto aerodinâmico, embora de pequena magnitude em um intervalo de tempo consideravelmente grande, pode produzir substanciais mudanças nos principais parâmetros do movimento de um veículo espacial. A aceleração de arrasto é maior quando o satélite está próximo do perigeu. A redução na velocidade do satélite próximo ao perigeu resulta numa redução da altura do apogeu subsequente. Contudo, a altura do perigeu permanece substancialmente inalterada. Este abaixamento do apogeu é contínuo e a elipse vai, gradualmente, degenerando-se em um círculo. Os efeitos do geopotencial, acoplados ao arrasto, poderão alterar este processo, uma vez que se a órbita precessionar numa atmosfera achatada, sob o efeito do geopotencial, o perigeu ingressará em camadas de diferentes densidades, alterando o arrasto atmosférico.

Apesar de vários trabalhos a este respeito terem sido publicados nos últimos trinta anos, alguns antes mesmo do lançamento do primeiro satélite artificial [2 e 3], poucas comparações entre eles têm sido feitas, apesar de algumas excelentes resenhas [3] discutirem a natureza e o alcance das teorias existentes.

Tratar-se-á aqui da comparação entre a clássica teoria de Brouwer e Hori [1] e a teoria proposta por Fitzgibbon [5]. Uma comparação destas teorias por inspeção dos termos destas soluções torna-se bastante difícil, pois no trabalho de Brouwer e Hori são usadas expansões em série de Taylor nas potências de  $\alpha a e$  (onde  $\alpha$  é o inverso da altura de escala, e  $a$  e  $e$  são, respectivamente, o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita) para a densidade atmosférica; ao passo que

Fitzgibbon utiliza para o arrasto desenvolvimento em funções de Bessel. As duas teorias apresentam singularidades para excentricidade e inclinação nulas e não são válidas para inclinação crítica.

Os exemplos serão aplicados ao satélite Vanguard I (1958 $\beta_2$ ), que possui altura do perigeu próxima de 650 km, excentricidade 0,19 e razão entre a área da secção transversal pela massa 0,248 cm<sup>2</sup>/g.

É importante observar que, devido às características da órbita do satélite Vanguard I, cuja altura varia aproximadamente de 650 a 3500 km, o modelo exponencial representa bem o efeito do arrasto atmosférico, embora para o estudo real da trajetória outros fatores (principalmente a pressão de radiação solar) devam ser levados em conta.

Visto que um dos principais efeitos do arrasto atmosférico sobre órbitas de satélites artificiais é sua contração, os elementos a serem aqui analisados serão o semi-eixo maior e a excentricidade.

## 2. As Equações do Movimento

Utilizando as variáveis de Delaunay  $L_i$  e  $\ell_i$  ( $i=1,2,3$ ), as equações que descrevem o movimento de um satélite sujeito ao geopotencial e ao arrasto atmosférico podem ser assim apresentadas:

$$\dot{L}_i = \frac{\partial F}{\partial \ell_i} + P_i; \quad \dot{\ell}_i = -\frac{\partial F}{\partial L_i} - Q_i,$$

onde  $F$  é a hamiltoniana associada ao problema com forças gravitacionais, e  $Q_i$  e  $P_i$  são as componentes da aceleração do arrasto dadas por:

$$P_1 = - Av \exp(-\alpha r) L_1 \left( \frac{2a}{r} - 1 \right); \quad P_2 = - Av \exp(-\alpha r) L_2;$$

$$P_3 = - Av \exp(-\alpha r) L_3;$$

$$Q_1 = - A_V \exp(-\alpha r) \left[ 2e \operatorname{sen} E + \frac{2}{e} \frac{L_2}{L_1} \operatorname{sen} f \right]; \quad (2)$$

$$Q_2 = \frac{2}{e} Av \exp(-\alpha r) \sin f; \quad Q_3 = 0;$$

onde a anomalia excêntrica  $E$ , a anomalia verdadeira  $f$ , assim como o semi-eixo maior  $a$ , a excentricidade  $e$ , o raio vetor  $r$  e a velocidade  $v$  do satélite em relação à atmosfera, são funções das variáveis de Delaunay. A quantidade  $A$  é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \frac{S}{m} C_D \rho_p \exp\left(\frac{r_p}{H_p}\right), \quad (3)$$

onde  $S$  é a área da secção transversal;  $C_D$ , o coeficiente de arrasto;  $\rho_p$ , a densidade atmosférica no perigeu;  $H_p$ , a altura de escala; e  $r_p$ , a distância do perigeu. O modelo adotado para a atmosfera foi exponencial, esférico, sem rotação.

### 3. Teoria de Brouwer-Hori

Considerando o efeito do arrasto atmosférico, Brouwer e Hori [1] apresentaram em 1961 uma solução analítica para o movimento de um satélite artificial no campo gravitacional terrestre.

A teoria em si compreende o desenvolvimento das equações do movimento em variáveis de Delaunay, expressando-as depois, com auxílio de propriedades de transformações canônicas, em termos da solução do problema sem arrasto. Foi feito, também, o desenvolvimento da aceleração do arrasto em função das variáveis de Delaunay e através de séries de potências na excentricidade e múltiplos da anomalia média. A integração das equações desenvolvidas nas variáveis canônicas deu-se pelo Método de Aproximações Sucessivas.

Esta teoria contém termos de Poisson espúrios [5]. Para utilizá-la devem-se negligenciar todos estes termos [6], além de efetuar, como os próprios autores sugeriram, uma transformação conveniente [7] para não comprometer a convergência do desenvolvimento em série da função  $\exp(-\alpha ae)$ .

### 4. Eliminação dos Termos Espúrios

A solução do problema pode ser obtida aplicando convenientemente às equações do movimento o método de Lagrange

da Variação dos Parâmetros. Como solução não-perturbada toma-se a solução de Brouwer [8] para o problema sem o arrasto. Aqui a integração das equações também é feita pelo método de Aproximações Sucessivas. Devido ao grande volume de cálculos envolvidos, as operações com séries trigonométricas devem ser efetuadas com o auxílio de um manipulador algébrico.

No desenvolvimento do modelo atmosférico exponencial, utilizando funções modificadas de Bessel, tem-se:

$$\exp[-\alpha(r - r_p)] = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}(\alpha, a, e, r_p) \cos nE, \quad (4)$$

onde:

$$f_{2n} = \exp[-\alpha(a - r_p)] \cdot F_n(\alpha ae), \quad (5)$$

com

$$F_n(\alpha ae) = \begin{cases} I_0(\alpha ae) & , \quad n = 0, \\ 2I_n(\alpha ae) & , \quad n \neq 0, \end{cases} \quad (6)$$

onde  $I_n(\alpha ae)$  é a função modificada de Bessel de ordem  $n$ , dada por:

$$F_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp[\alpha ae \cos E] \cos nE \, dE. \quad (7)$$

Para o cálculo das funções modificadas de Bessel devem-se considerar os casos em que  $ae$  é grande ou pequeno.

A solução, que não contém termos de Poisson, pode assim ser obtida até a ordem da teoria de Brouwer-Hori.

##### 5. Aplicação ao Satélite Vanguard I

Foram calculadas as perturbações seculares (devidas ao arrasto) e as de longo período (devidas ao geopotencial incluindo termos de acoplamento com arrasto) para as variáveis  $L_1$  e  $L_2$ , as quais são relacionadas com o semi-eixo maior e com a excentricidade da órbita do satélite do tipo balão VANGUARD I, para o período 36340-36540 DJM (Dias Julianos Mo

dificados).

Na teoria de Brouwer e Hori existe, além dos termos seculares espúrios, o problema advindo do truncamento da expansão em série de Taylor da função  $e^{-\theta}$  com  $\theta > 1$ , devendo-se computar [7]:

$$e^{-\theta} = C_0 + C_1\theta + C_2\theta^2 + C_3\theta^3 + C_4\theta^4 + C_5\theta^5.$$

Porém, segundo as sugestões dos autores [7], não é possível ter a precisão desejada, ficando assim prejudicada a comparação desta teoria com os resultados numéricos de qualquer outra teoria. Outros processos de aproximação que podem contornar o problema, podem ser propostos (por exemplo, utilizando polinômios de Chebyshev).

Funções analíticas foram ajustadas por mínimos quadrados para cada um dos elementos orbitais, a partir dos elementos orbitais do VANGUARD I, computadas pelo programa DOI do Smithsonian Astrophysical Observatory por Jacchia e Slowey [9]. Estas funções foram utilizadas para o cálculo do semi-eixo maior para serem comparadas com a teoria de Fitzgibbon. Deve-se observar que o programa DOI calcula elementos médios, nos quais os efeitos de curto período (devido ao geopotencial) foram removidos, mas não as perturbações de longo período.

Comparando os resultados obtidos com estes trabalhos, verifica-se que existe uma excelente concordância nos valores do semi-eixo maior se for admitida na teoria de Fitzgibbon [5], uma densidade no perigeu (653 km) cinco vezes maior do que a dada na tabela CIRA ( $1,84 \times 10^{-16}$  g/cm<sup>3</sup>). Observa-se que alterações na atividade solar e o fato de o perigeu estar ou não na sombra, entre outros fatores, podem causar variações na densidade atmosférica às vezes superiores a apontada. A diferença, neste caso, não ultrapassa a ordem de 50m durante os 200 dias. Os decaimentos durante 200 dias são, nestes casos, 6,52 km e 6,44 km, (Figuras 1 e 2, respectivamente).

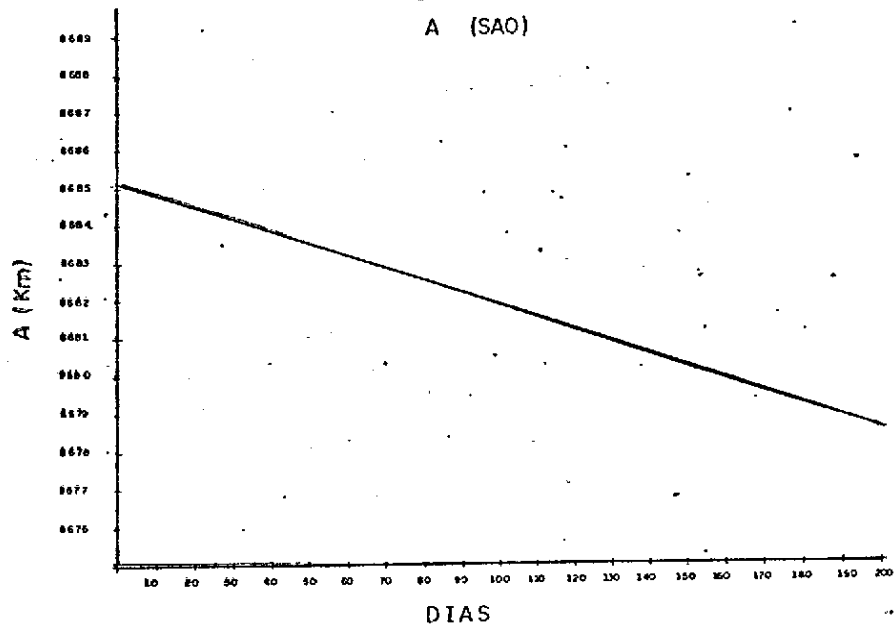


Fig. 1. Decaimento do semi-eixo maior do satélite Vanguard I utilizando processo dos mínimos quadrados de Jacchia e Slowey.

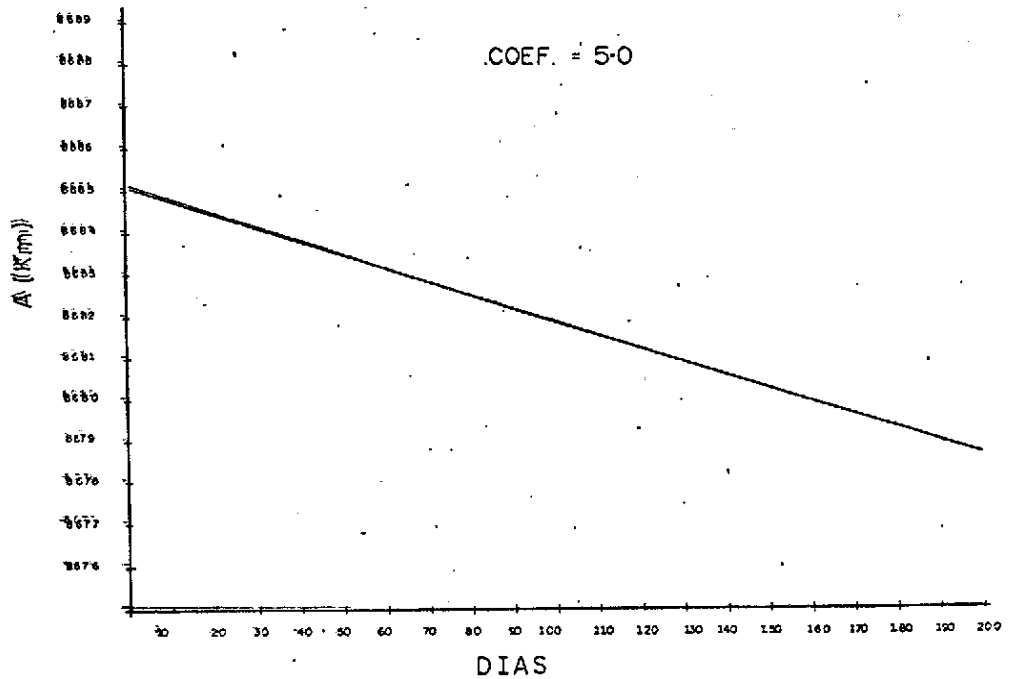


Fig. 2. Decaimento do semi-eixo maior calculado por Fitzgibbon, com coeficiente de arrasto cinco vezes maior.



Utilizando a densidade tabelada, as discrepâncias (em relação à Figura 1) chegam a 5 km (Figura 3).

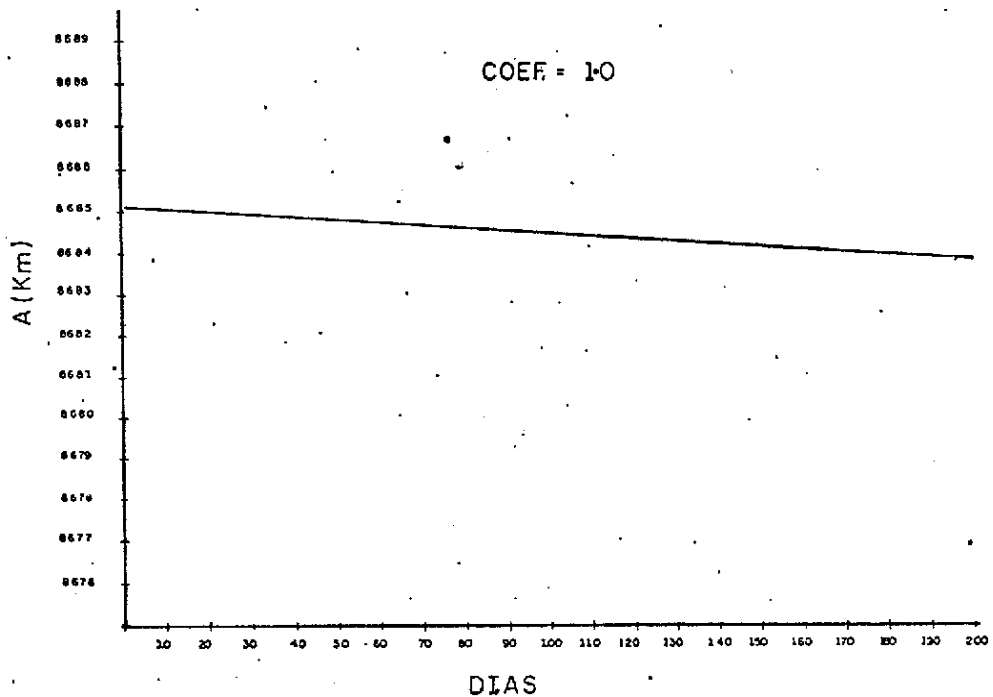


Fig. 3. Decaimento do semi-eixo maior calculado por Fitzgibbon, com coeficiente de arrasto no perigeu dado pelo CIRA.

A Figura 4 mostra o comportamento da variável  $L_2$ , que se relaciona com a excentricidade por meio da relação:

$$L_2 = L_1 \sqrt{1 - e^2},$$

cujos resultados foram obtidos por Fitzgibbon.

Não se pode, entretanto, concluir que a densidade a ser adotada deve ser cinco vezes maior, uma vez que para este satélite a pressão de radiação solar não pode ser desprezada, pois quando acoplada ao arrasto atmosférico pode produzir consideráveis variações de longo período no semi-eixo maior. Essas variações podem ser da ordem das variações observadas no exemplo acima [10].

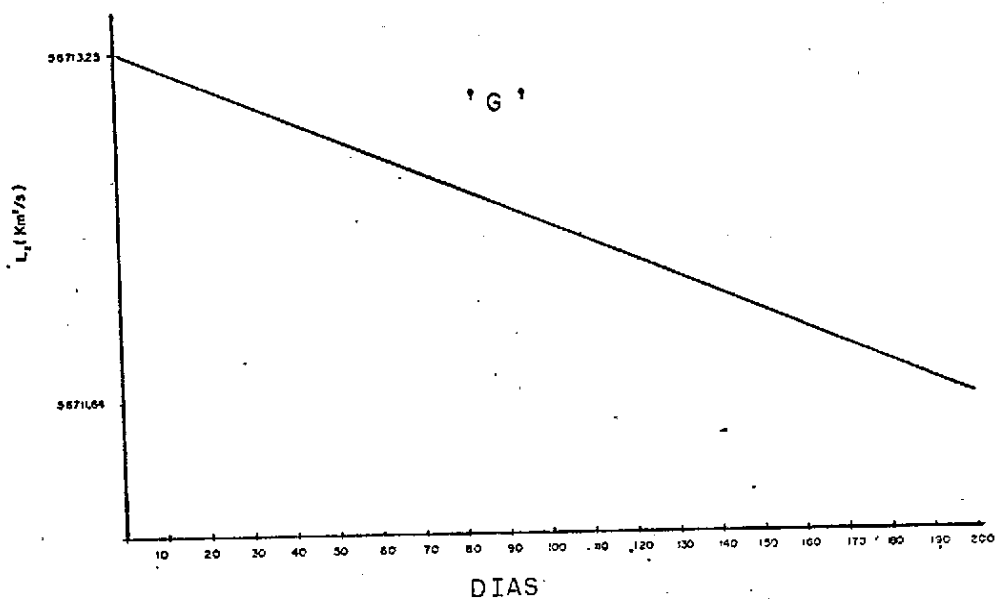


Fig. 4. Variação de  $L_2 = L_1(e - e^2)^{1/2}$ .

#### 6. Conclusões

O modelo proposto representa bem o comportamento do semi-eixo maior e da excentricidade da órbita de um satélite tipo balão, de moderada excentricidade, com perigeu próximo de 600 km. Para tais satélites, a pressão de radiação solar sempre deve ser levada em consideração no cálculo da evolução orbital.

#### 7. Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e do Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE.

#### REFERÊNCIAS

- [ 1 ] CIRA 1965, "COSPAR International Reference Atmosphere 1965", Amsterdam, North-Holland Publ. Co. (1965).
- [ 2 ] Singer, S.F., "Orbits and lifetimes of satellites vehicles", ARS Space Flight Symposium, 1954, ou Astronautics Acta, vol. II, Fasc. 3, 125 (1956).

- [ 3 ] Peterson, N.V., "Estimated lifetimes of satellite vehicles from near-circularity", *Jet Propulsion*, 26, nº 5 (1956).
- [ 4 ] Brouwer, D. & Hori, G., "Theoretical evaluation of atmospheric drag effects in the motion of an artificial satellite", *Astron. Journal*, 66, pp. 193 (1961).
- [ 5 ] Fitzgibbon, M.T.R., "Teoria do movimento de um satélite artificial sujeito à ação do geopotencial e do arrasto atmosférico", Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, SP, (1982).
- [ 6 ] Vilhena de Moraes, R., "Combined solar radiation pressure and drag effects on the orbits of artificial satellites", *Celestial Mechanics*, nº 25, p. 281 (1981).
- [ 7 ] Brouwer, D. & Hori, G., "Appendix to theoretical evaluation of atmospheric drag effects in the motion of an artificial satellite", *Astron. Journal*, 66, nº 6, p. 264 (1961).
- [ 8 ] Brouwer, D., "Solution of the problem of artificial satellite theory without drag", *Astron. Journal*, 64, nº 1274, p. 378 (1959).
- [ 9 ] Jacchia, L.G. & Slowey, J., "Accurate drag determination for eight artificial satellite, atmospheric densities and temperatures", *Smithsonian Astrophys. Obs.*, Special Report nº 100 (1963).
- [ 10 ] Vilhena de Moraes, R., "Coupling terms on the theory of motion of an artificial earth satellite in the presence of air drag and solar radiation pressure", *Natural and Artificial Satellite Motion*, ed. by Nacozy, P.E. and Ferraz-Mello, S., Univ. Texas Press, Austin, p. 405 (1979).