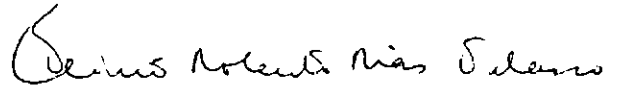


1. Publicação nº <i>INPE-2909-TDL/148</i>	2. Versão	3. Data <i>Out., 1983</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa  <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DRH-DMC</i>	Programa <i>FRH/CEA</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>PRE-PROCESSAMENTO</i> <i>FILTRO DE KALMAN</i> <i>SUAVIZAÇÃO DE DADOS</i> <i>ESTIMAÇÃO DE ESTADO</i> <i>CONTROLE ESTOCÁSTICAS</i> <i>COMPRESSÃO DE DADOS</i>			
7. C.D.U.: <i>681.5.015.42:621.398:629.7.087</i>			
8. Título  <i>TÉCNICAS ESTOCÁSTICAS APLICADAS À SUAUIZAÇÃO, TRATAMENTO DE TENDENCIOSIDADES E COMPRESSÃO DE DADOS DE RASTREAMENTO OU TELEMETRIA DE SATÉLITES ARTIFICIAIS</i>		10. Páginas: <i>150</i>	
9. Autoria <i>Valcir Orlando</i>		11. Última página: <i>A.5</i>	
		12. Revisada por  <i>Atair Rios Neto</i>	
		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor Geral</i>	
Assinatura responsável <i>Valcir Orlando</i>			
14. Resumo/Notas  <i>São apresentados três procedimentos relacionados com a fase de pré-processamento de dados de rastreamento e telemetria de satélites artificiais, desenvolvidos com o auxílio de técnicas estocásticas. O primeiro deles é um procedimento de suavização de dados, por ajuste de curvas, desenvolvido através da aplicação do filtro de Kalman combinado com técnica adaptativa de dosagem do ruído no estado. O segundo procedimento, desenvolvido de modo a permitir um tratamento automático de tendências existentes em dados de observação do estado de sistemas dinâmicos, torna possível o emprego direto de observações afetadas por erros tendenciosos em estimação de estado via filtro de Kalman. Para isso é utilizado um esquema de compensação dinâmica. Finalmente, o terceiro procedimento, classificado como procedimento de compressão de dados, tem o objetivo de obter, dentro de certas condições, um ganho em termos de velocidade de processamento na aplicação do filtro de Kalman à estimação de estado de sistemas dinâmicos não-lineares. Testes de validação dos procedimentos foram feitos por simulações via computador digital usando dados relacionados à órbita de um satélite artificial de baixa altitude.</i>			
15. Observações <i>Tese de Doutorado em Ciência Espacial, aprovada em 29 de agosto de 1983.</i>			

Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento a requisito exigido  
para a obtenção do Título de Doutor  
em Ciência Espacial

Dr. Flávio Roberto Dias Velasco



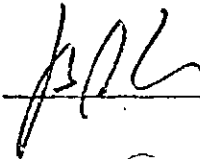
Presidente

Dr. Atair Rios Neto



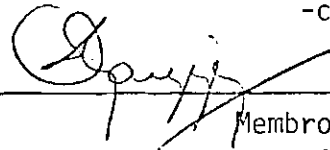
Orientador

Dr. Jocelyn Freitas Bennaton



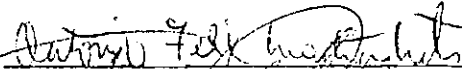
Membro da Banca  
-convidado-

Dr. Octavio Maizza Neto



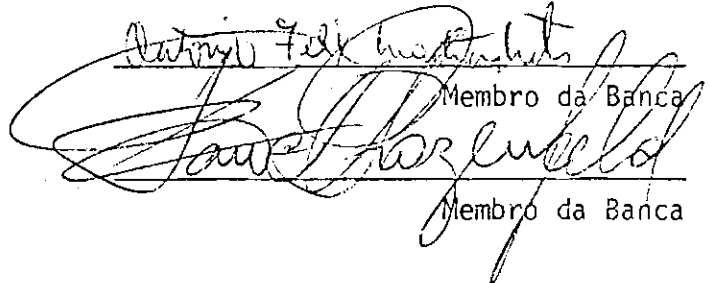
Membro da Banca  
-convidado-

Dr. Antonio Felix Martins Neto



Membro da Banca

Dr. Pawel Rozenfeld



Membro da Banca

Candidato: Valcir Orlando

São José dos Campos, 29 de agosto de 1983

À minha esposa, Telma, e  
à minha filha, Gláucia.

## AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais pelo suporte fornecido à realização deste trabalho.

Ao Dr. Atair Rios Neto pela orientação do trabalho e incentivos à sua realização.

À minha esposa, Telma, pelo seu apoio e incentivo.

Ao colega HÉlio Koiti Kuga pelo fornecimento de importantes rotinas computacionais utilizadas nos testes dos procedimentos desenvolvidos.

Às srtas. Marília Prado de Carvalho pela minuciosa revisão linguística do texto e Maria de Fátima Ito pelos seus trabalhos de datilografia e montagem final, e a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

### ABSTRACT

*Three procedures related with preprocessing of artificial satellite tracking and telemetry data, develop with the aid of stochastic techniques are presented. The first of them consists of a data smoothing procedure by curve fitting develop by the application of the Kalman filter combined with an adaptive technique of state noise evaluation. The second procedure, developed in order to allow an automatic treatment of bias errors in dynamics systems observation data, makes Kalman filter state estimation possible by direct processing of the bias errors corrupted observations. For this, a dynamic compensation scheme is used. Finally, the third procedure, classified as a data compression procedure, has the objective of obtaining, in certain conditions, a processing speed gain in Kalman filter applications to nonlinear dynamic systems state estimation. Validation tests of the procedures were made by digital computer simulation using simulated data related with a low altitude artificial satellite orbit.*

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS .....	<i>xi</i>
LISTA DE TABELAS .....	<i>xiii</i>
LISTA DE SÍMBOLOS .....	<i>xv</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u> .....	1
<u>CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS</u> .....	7
2.1 - Introdução .....	7
2.2 - Filtro de Kalman .....	7
2.3 - Filtro estendido de Kalman .....	11
2.4 - Processamento sequencial do vetor de observações .....	17
2.5 - Técnica de estimação do ruído dinâmico pro processo adapta tivo .....	19
<u>CAPÍTULO 3 - APLICAÇÃO DE TÉCNICA DE RUÍDO ADAPTATIVO EM ESTIMAÇÃO DE ESTADO À SUAVIZAÇÃO DE DADOS</u> .....	27
3.1 - Introdução .....	27
3.2 - Descrição do método desenvolvido .....	29
3.3 - Adaptação do procedimento desenvolvido para permitir ajuste de curva em tempo real .....	40
3.4 - Apresentação dos resultados obtidos .....	47
3.4.1 - Resultados obtidos com a aplicação do procedimento de ajus te com processamento dos dados em lote .....	47
3.4.2 - Resultados obtidos com a aplicação do procedimento de ajus te com processamento sequencial dos dados .....	56
<u>CAPÍTULO 4 - TRATAMENTO AUTOMÁTICO DE TENDENCIOSIDADES EM OBSERVA ÇÕES</u> .....	67
4.1 - Introdução .....	67
4.2 - Descrição do método .....	69
4.3 - Aplicação simulada do método em estimação de órbita de satē lites artificiais .....	76
4.4 - Definições de parâmetros a serem usados para análise dos re sultados na aplicação do procedimento .....	79
4.5 - Apresentação dos resultados obtidos .....	83

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO 5 - PROCEDIMENTO PARA AUMENTAR A VELOCIDADE DE PROCESSAMENTO EM ESTIMAÇÃO DE ESTADO VIA FILTRO DE KALMAN ..</u>	93
5.1 - Introdução .....	93
5.2 - Descrição do método .....	93
5.3 - Apresentação dos resultados obtidos .....	107
<u>CAPÍTULO 6 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES .....</u>	115
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	119
APÊNDICE A - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS	

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Resultados obtidos no ajuste de curva a vinte pontos de dados, com processamento em lotes .....	48
3.2 - Resultados obtidos no ajuste de curva a quarenta pontos de dados, com processamento em lotes .....	51
3.3 - Resultados obtidos no ajuste de curva a sessenta pontos de dados, com processamento em lotes .....	53
3.4 - Resultados obtidos no ajuste de curva a oitenta pontos de dados, com processamento em lotes .....	54
3.5 - Resultados obtidos no ajuste de curva a cem pontos de dados, com processamento em lotes .....	55
3.6 - Resultados obtidos no ajuste de curva a vinte pontos de dados, com processamento sequencial .....	57
3.7 - Resultados obtidos no ajuste de curva a quarenta pontos de dados, com processamento sequencial .....	60
3.8 - Resultados obtidos no ajuste de curva a sessenta pontos de dados, com processamento sequencial .....	61
3.9 - Resultados obtidos no ajuste de curva a oitenta pontos de dados, com processamento sequencial .....	63
3.10 - Resultados obtidos no ajuste de curva a cem pontos de dados, com processamento sequencial .....	64
4.1 - Erros devidos ao efeito de refração atmosférica .....	85
4.2 - Curvas sobrepostas dos erros estimado e real, em posição e velocidade, obtidas com a aplicação do filtro de Kalman na forma original, com observações contaminadas por erros tendenciosos .....	86
4.3 - Curvas dos resíduos normalizados em observações, obtidas com a aplicação do filtro de Kalman na forma original, com observações contaminadas por erros tendenciosos .....	87
4.4 - Curvas sobrepostas dos erros estimado e real, obtidas com a aplicação do procedimento de estimação conjunta de tendências nas observações e estado do sistema .....	89
4.5 - Curvas dos resíduos normalizados, obtidas com a aplicação do procedimento para estimação conjunta das tendências presentes nas observações com o estado do sistema .....	90
5.1 - Esquematização do procedimento de compressão .....	103
5.2 - Resultados obtidos com a aplicação do filtro de Kalman à estimação de órbita de satélite artificial sem emprego do procedimento de compressão .....	109



5.3 - Resultados obtidos com a aplicação do procedimento de pressão de dados com matriz de transição de estado conside rada variável de período a período de amostragem .....	111
5.4 - Resultados obtidos com a aplicação do procedimento de pressão de dados, com matriz de transição considerada cons tante por cada N períodos de amostragem .....	112

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Variâncias do erro nos pontos de dados estimados pela curva ajustada a 20 pontos, com processamento em lote .....	49
3.2 - Variâncias do erro nos pontos de dados estimados pela curva ajustada a 20 pontos, com processamento sequencial .....	58
5.1 - Resultados em termos de tempo de processamento para N variando de 2 a 10 .....	113

## LISTA DE SÍMBOLOS

$B(t)$	- Matriz diagonal $m \times m$ , cujos elementos são funções contínuas do tempo.
$b(t)$	- Vetor de dimensão $m$ , cujos elementos são parâmetros desconhecidos do modelo dinâmico adotados para os erros tendenciosos de observação.
$\dot{b}(t)$	- Derivada em relação ao tempo do vetor $b(t)$ .
$b_{(i)}$	- $i$ -ésima componente do vetor $b(t)$ .
$\hat{b}_0$	- Estimativa do vetor $b(t)$ no instante inicial $t_0$ .
$C(t_{k+1})$	- Partição da matriz $M(t_{k+1})$ .
$\text{cov}(\cdot, \cdot)$	- Operador covariância.
$D(t_{k+1})$	- Matriz definida no Capítulo 5.
$E[\cdot]$	- Operador valor esperado.
$E(t_{k+1})$	- Matriz definida no Capítulo 5.
$e(t)$	- Vetor formado pelos erros tendenciosos nas observações.
$\dot{e}(t)$	- Derivada do vetor $e(t)$ em relação ao tempo.
$\hat{e}_0$	- Estimativa do vetor $e(t)$ no instante inicial $t_0$ .
$e_{(i)}$	- $i$ -ésima componente do vetor $e(t)$ .
$F(t)$	- Matriz $n \times n$ de funções contínuas do tempo.
$F[t, \bar{x}(t)]$	- Matriz de derivadas parciais da função $f[x(t), t]$ em relação ao estado, avaliada ao longo da trajetória de referência $\bar{x}(t)$ .
$f[x(t), t]$	- Função não-linear vetorial do estado e do tempo.
$f_A[x_A(t), t]$	- Função não-linear vetorial do estado aumentado e do tempo.
$f_{(i)}$	- $i$ -ésimo elemento da função vetorial $f[x(t), t]$ .

$f_{A(i)}$	- $i$ -ésimo elemento da função vetorial $f_A[x_A(t), t]$ .
$G(t_{k+1})$	- Matriz definida no Capítulo 5.
$G(t)$	- Matriz $n \times r$ , cujos elementos são funções contínuas do tempo.
$G_A(t)$	- Matriz $(n+2m) \times (r+2m)$ , cujos elementos são funções contínuas do tempo.
$g_i$	- $i$ -ésima função do tempo da combinação linear de funções a ser ajustada aos dados no processo de suavização.
$H_{k+1}$	- Vetor de dimensão $m$ do modelo das pseudo-observações (transposto).
$h[x(k+1), k+1]$	- Função vetorial não-linear do estado e do tempo no modelo das observações, avaliada no instante $t_{k+1}$ .
$h_A[x_A(k+1), k+1]$	- Função vetorial não-linear do estado aumentado no modelo das observações, avaliada no instante $t_{k+1}$ .
$I_{i \times i}$	- Matriz identidade de dimensão $i \times i$ .
$I_{m \times 1}$	- Vetor unitário de dimensão $m$ .
$J_2$	- Coeficiente do 2º harmônico zonal.
$K_k$	- Ganho de Kalman relativo à observação correspondente ao instante $t_k$ .
$K_{k+1}^q$	- Ganho de Kalman relativo à observação correspondente ao instante $t_k$ na técnica de ruído adaptativo.
$k$	- Representação simplificada do instante $t_k$ .
$M[t_k, \bar{x}(t_k)]$	- Matriz de derivadas parciais da função $h$ no modelo das observações.

$M_1$	- Matriz formada pelas funções $g_j$ avaliadas nos instantes de amostragem de observações no procedimento de ajuste de curvas em lotes, ou vetor de dimensão $m$ na aplicação da técnica de ruído adaptativo.
$M_1(i)$	- $i$ -ésimo elemento do vetor $M_1$ .
$M'_{k+1}$	- Matriz $1 \times n$ , cujos elementos são as funções $g_j$ avaliadas no instante $t_{k+1}$ no procedimento sequencial de ajuste de curvas.
$m$	- Dimensão do vetor de observações.
$N$	- Número determinado de intervalos de amostragem no procedimento de compressão de dados.
$N[\cdot, \cdot]$	- Distribuição normal.
$n$	- Dimensão do vetor de estado.
$O_{i \times j}$	- Matriz $i \times j$ de elementos nulos.
$P$	- Matriz de covariância do erro na estimativa do vetor de estado.
$P_{ii}$	- Elemento da $i$ -ésima linha e $i$ -ésima coluna da matriz $P$ .
$P(t_k/t_j), P(k/j), P_{k/j}$	- Matriz de covariância do erro na estimativa do vetor de estado relativo ao instante $t_k$ calculada a partir de observações até o instante $t_j$ .
$p^q$	- Matriz de covariância do erro na estimativa do vetor $q$ .
$P^q(k/j), P^q_{k/j}$	- Matriz de covariância do erro na estimativa do vetor $q$ relativo ao instante $t_k$ calculada a partir de observações até o instante $t_j$ .
$P_b(t_0)$	- Matriz de covariância do erro na estimativa a priori do vetor $b(t)$ .

$P_e(t_0)$	- Matriz de covariância do erro na estimativa a priori do vetor $e(t)$ .
$P_{\hat{y}}$	- Matriz de covariância do erro em $\hat{y}$ .
$P_{\hat{y}_{k+1}}$	- Variância do erro em $\hat{y}_{k+1}$ .
$u u^T P$	- Partição de dimensão $u \times u$ da matriz $P$ .
$u v^T P$	- Partição de dimensão $u \times v$ da matriz $P$ .
$v v^T P$	- Partição de dimensão $v \times v$ da matriz $P$ .
$u u^T P^*(.)$	- Valor aproximado da matriz $P$ no instante considerado.
$p(./. )$	- Função densidade de probabilidade condicionada.
$Q(t)$	- Matriz $r \times r$ positiva semidefinida de densidade espectral do ruído no estado.
$Q_A(t)$	- Matriz $r+2m \times r+2m$ positiva semidefinida de densidade espectral do ruído no estado <u>au</u> menta <u>do</u> .
$Q_b(t)$	- Matriz $m \times m$ positiva semidefinida de densidade espectral do ruído no modelo adotado para os <u>pa</u> râ <u>me</u> tros desconhecidos.
$Q_e(t)$	- Matriz $m \times m$ positiva semidefinida de densidade espectral do ruído no modelo adotado para os <u>er</u> ros <u>te</u> ndenciosos nas <u>ob</u> servações.
$q(t)$	- Vetor de dimensão $r$ formado pelos elementos da diagonal principal da matriz $Q(t)$ .
$\hat{q}(k/j)$	- Estimativa do vetor $q(t_k)$ a partir de observações até o instante $t_j$ .
$q_0$	- Valor inicial do vetor $q(t)$ .
$q(i)$	- $i$ -ésimo elemento do vetor $q$ .
$Res_{i+1}$	- Vetor de resíduos.

$R_{ii}$	- Elemento da $i$ -ésima linha e $i$ -ésima coluna da matriz $R$ .
$R_k$	- Matriz $m \times m$ de densidade espectral do ruído nas observações.
$r(k+1)$	- Resíduo observado.
$r_{k+1}$	- Variância do ruído em observação escalar correspondente ao instante $t_{k+1}$ .
$r_{0k+1}$	- Resíduo observado.
$r_v(k+1)$	- Resíduo verdadeiro.
$[r_v(k+1)]_{oc}$	- Valor ocorrido do resíduo verdadeiro.
$r_\rho$	- Resíduo normalizado das observações da distância estação de rastreamento-satélite.
$r_\dot{\rho}$	- Resíduo normalizado das observações da variação temporal da distância estação de rastreamento-satélite.
$T$	- Intervalo de amostragem de observações.
$t$	- Tempo.
$t_i$	- $i$ -ésimo instante de amostragem de observações.
$t_0$	- Instante inicial.
$u$	- Representa um número inteiro, dimensão da partição do estado diretamente observada no procedimento de compressão.
$v_{i+1}$	- Vetor de ruído nas observações.
$v$	- Representa um número inteiro, dimensão da partição do estado não-observada diretamente no procedimento de compressão.
$x(t)$	- Vetor $n$ dimensional de estado do sistema.

- $\bar{x}(t_i/t_j), \bar{x}(i/j), \bar{x}_{i/j}$  - Estimativa do vetor de estado no instante  $t_i$  calculada a partir de observações até o instante  $t_j$ .
- $\bar{x}(t)$  - Vetor de estado correspondente à trajetória nominal.
- $x_{(i)}(t)$  -  $i$ -ésima componente do vetor de estado.
- $x_A(t)$  - Vetor de estado aumentado.
- $\bar{x}_A(i/j)$  - Estimativa do vetor de estado aumentado no instante  $t_i$  calculada a partir de observações até o instante  $t_j$ .
- $x_{A(i)}$  -  $i$ -ésima componente do vetor de estado aumentado.
- $\bar{x}_A(i)$  -  $i$ -ésima componente da estimativa do vetor de estado aumentado.
- $x_e$  - Vetor de estado da estação de rastreamento.
- $x_{e(i)}$  -  $i$ -ésima componente do vetor de estado da estação de rastreamento.
- $x_t$  - Processo estocástico de parâmetro contínuo.
- $x_{t_i}$  - Processo estocástico de parâmetro discreto.
- $u_x$  - Partição de dimensão  $u$  do vetor de estado diretamente observada.
- $v_x$  - Partição de dimensão  $v$  do vetor de estado não-observada diretamente.
- $Y_1$  - Vetor  $m$  dimensional de observações definido no Capítulo 3.
- $\bar{Y}$  - Estimativa do Vetor  $Y_1$  calculada a partir da curva ajustada aos dados.
- $y(t_k), y(k), y_k$  - Vetor  $m$  dimensional formado pelas observações de estado relativas ao instante  $t_k$ .



$y(k+1)$	- Observação escalar no procedimento de ajuste de curvas.
$y(i)$	- $i$ -ésima componente do vetor de observações.
$\bar{y}(t_k)$	- Vetor de observações nominal.
$y_R(k+1)$	- Valor real da observação $y(k+1)$ .
$y^V(k+1)$	- Valor real da observação $y(k+1)$ .
$y_{\rho(i)}(k)$	- Componente do vetor de observações relativa à distância entre a estação de rastreamento $i$ ao satélite no instante $t_k$ .
$\hat{y}_{\rho(i)}(k)$	- Valor calculado para a observação $y_{\rho(i)}(k)$ a partir da estimativa do estado.
$y_{\dot{\rho}(i)}(k)$	- Componente do vetor de observações relativa à variação temporal da distância entre a estação de rastreamento $i$ ao satélite no instante $t_k$ .
$\hat{y}_{\dot{\rho}(i)}(k)$	- Valor calculado para a observação $y_{\dot{\rho}(i)}(k)$ a partir da estimativa do estado.
$Z(k+1)$	- Pseudo-observação calculada para o instante $k+1$ .
$\beta_t$	- Processo vetorial de movimentos brownianos independentes.
$\Gamma(t_k)$	- Matriz $n \times r$ do modelo do sistema linearizado e discretizado.
$\Gamma_{ij}$	- Elemento da $i$ -ésima linha e $j$ -ésima coluna da matriz $\Gamma$ .
$\Delta e(i)$	- Erro real na estimativa do erro tendencioso na componente $i$ do vetor de observações.
$\hat{\Delta e}(i)$	- Valor estimado para o erro $\Delta e(i)$ .
$\Delta r$	- Erro real na estimativa do módulo do vetor posição do satélite.
$\hat{\Delta r}$	- Valor estimado para o erro $\Delta r$ .

$\Delta v$	- Erro real na estimativa do m $\ddot{o}$ du <u>l</u> o do vetor velo <u>c</u> idade do sat $\acute{e}$ l <u>i</u> te.
$\Delta \bar{v}$	- Valor estimado para o erro $\Delta v$ .
$\delta_{kj}$	- Fun $\tilde{c}$ ao delta de Kronecker.
$\delta(t - \tau)$	- Fun $\tilde{c}$ ao delta de Dirac.
$\delta x(t)$	- Desvio da trajet $\acute{o}$ ria nominal.
$\delta y(t_k)$	- Varia $\tilde{c}$ ao em torno das medidas nomina <u>i</u> s.
$\mu$	- Constante gravitacional.
$\eta'(k+1)$	- Ru <u>í</u> do aleat $\acute{o}$ rio definido no Cap <u>í</u> tulo 2.
$\eta(k+1)$	- Ru <u>í</u> do aleat $\acute{o}$ rio definido no Cap <u>í</u> tulo 2.
$v_k, v(k)$	- Vetor de dimens $\tilde{a}$ o $m$ ou escalar que representa o ru <u>í</u> do aleat $\acute{o}$ rio nas observa $\tilde{c}$ oes.
$v(i)$	- $i$ - $\acute{e}$ sima componente do vetor de ru <u>í</u> do nas obser <u>va</u> oes.
$\rho$	- Dist $\tilde{a}$ ncia esta $\tilde{c}$ ao de rastreamento-sat $\acute{e}$ l <u>i</u> te.
$\dot{\rho}$	- Varia $\tilde{c}$ ao temporal da dist $\tilde{a}$ ncia esta $\tilde{c}$ ao de ras <u>tr</u> eam <u>e</u> nto-sat $\acute{e}$ l <u>i</u> te.
$\sigma_\rho$	- Desvio padr $\tilde{a}$ o nas medidas da dist $\tilde{a}$ ncia esta $\tilde{c}$ ao de rastreamento-sat $\acute{e}$ l <u>i</u> te.
$\sigma_{\dot{\rho}}$	- Desvio padr $\tilde{a}$ o nas medidas da varia $\tilde{c}$ ao temporal da dist $\tilde{a}$ ncia esta $\tilde{c}$ ao de rastreamento-sat $\acute{e}$ l <u>i</u> te.
$\phi(t, t_0)$	- Matriz de transi $\tilde{c}$ ao de estado no instante $t_0$ ao instante $t_k$ .
$uu_\phi$	- Partic $\tilde{a}$ o de dimens $\tilde{a}$ o $u \times u$ da matriz de transi $\tilde{c}$ ao de estado.
$uv_\phi$	- Partic $\tilde{a}$ o de dimens $\tilde{a}$ o $u \times v$ da matriz de transi $\tilde{c}$ ao de estado.
$vu_\phi$	- Partic $\tilde{a}$ o de dimens $\tilde{a}$ o $r \times u$ da matriz de transi $\tilde{c}$ ao de estado.

- $\mathbb{V}_\phi$  - Partição de dimensão  $v \times v$  da matriz de transição de estado.
- $\omega_t, \omega(t)$  - Vetor de dimensão  $r$  que representa o ruído no estado do sistema dinâmico.
- $\omega(i)$  -  $i$ -ésima componente do vetor  $\omega$ .
- $\omega_A(t)$  - Vetor dimensão  $r+2m$  que representa o ruído no estado aumentado.
- $\omega_A(i)$  -  $i$ -ésima componente do vetor  $\omega_A$ .
- $\omega_b$  - Vetor de dimensão  $m$  que representa o ruído no modelo matemático adotado para os parâmetros desconhecidos.
- $\omega_e$  - Vetor de dimensão  $m$  que representa o ruído no modelo matemático adotado para os erros tendenciosos nas observações de estado.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Serão apresentados neste trabalho três métodos desenvolvidos a partir do emprego de técnicas estocásticas, para aplicações em pré-processamento de dados de rastreamento e de telemetria de atitude de satélites artificiais. O termo pré-processamento é aqui utilizado para designar o processamento preliminar de dados, resultantes de medidas de alguma grandeza física de interesse de um dado sistema dinâmico, com a finalidade de adequá-los ao processamento posterior através do qual deverão ser atingidos os objetivos finais que motivaram a efetuação das medidas. No caso de dados de rastreamento e de telemetria de satélites artificiais, os objetivos finais são a determinação e controle de órbita e atitude, respectivamente. Esse pré-processamento consiste basicamente na aplicação de procedimentos para a associação de tempos aos dados; na efetuação de correções de calibração; na compressão, conversão, validação e suavização de dados; na correção de dados inválidos; nas correções de instantes associados; etc. (Wertz, 1978). Uma descrição resumida de vários procedimentos correntemente utilizados em pré-processamento de dados de rastreamento e telemetria de atitude de satélites artificiais é encontrada em Orlando (1983).

Os procedimentos desenvolvidos, apresentados na sequência do trabalho, têm finalidades distintas dentro da fase de pré-processamento, quais sejam: suavização de dados, tratamento de tendências e compressão de dados, respectivamente na ordem em que serão apresentados. Técnicas de suavização de dados são amplamente utilizadas para a obtenção de valores mais prováveis de medidas a partir dos dados grosseiros; para a redução do volume de dados a ser armazenado, transmitido ou processado; para interpolações; para o cálculo de taxas de variação; etc. Essas técnicas se dividem basicamente em duas categorias: técnicas de ajuste de curvas e técnicas de filtragem (Hamming, 1977). O procedimento apresentado no Capítulo 3 enquadra-se na categoria das técnicas de suavização por ajuste de curvas. Essas técnicas se

baseiam fundamentalmente na consideração de que os dados possuem uma forma funcional dentro de um determinado intervalo de tempo, a qual pode ser expressa por uma combinação linear ou não de funções do tempo. Os coeficientes dessa combinação de funções são então calculados de modo a minimizar algum tipo de índice de desempenho, e seus valores passam a representar os dados dentro do intervalo de tempo envolvido. Os métodos mais comumente utilizados para esse fim são os métodos de ajuste por mínimos quadrados e  $\chi$ -quadrado (Wertz, 1978; Meyer, 1975; Bendat and Piersol, 1971).

Ambos os métodos consideram os valores da curva a ser ajustada nos instantes de amostragem dos dados como os valores esperados da grandeza medida nesses instantes. Para o ajuste por mínimos quadrados, os coeficientes da curva são então calculados de modo a minimizar uma soma ponderada que envolve o quadrado dos resíduos entre os dados e os correspondentes valores da curva. Essa técnica, aplicável independentemente da distribuição estatística dos erros aleatórios dos dados, fornece estimativas não-viciadas e de mínima variância do erro. Possui ainda característica de processamento em lotes, isto é, para que possa ser aplicada a um dado conjunto de medidas é necessário que todo o conjunto já tenha sido coletado. Para a técnica de ajuste  $\chi$ -quadrado, o critério de otimalidade para a estimação dos coeficientes é o de máxima verossimilhança. Supõe distribuição gaussiana para os erros, bem como os valores da curva correspondentes aos instantes de amostragem de dados como os valores esperados da grandeza medida nos correspondentes instantes. Os coeficientes da curva são então calculados no sentido de maximizar a função densidade de probabilidade conjunta de ocorrência dos valores observados. Verifica-se que maximizar a citada função é o mesmo que minimizar o expoente da exponencial envolvida, o qual segue uma distribuição  $\chi$ -quadrada, de onde o nome dado a essa técnica de suavização (Meyer, 1975). Essa técnica possui também a característica de processamento em lotes. No procedimento desenvolvido para suavização de dados apresentado no Capítulo 3, o problema de ajuste é colocado numa forma tal que permite o emprego do filtro de Kalman (Jazwinski, 1970) associado a uma técnica de ruído adaptativo (Rios Neto e Kuga,

1982) para a estimação dos coeficientes. Com isso os coeficientes são estimados no sentido de se minimizar os resíduos entre os pontos de dados e a curva ajustada. O procedimento é apresentado em duas formas distintas: uma baseada no processamento dos dados em lotes e outra baseada no processamento sequencial dos dados. Essa última característica é inédita entre os procedimentos de suavização pesquisados na literatura, pois permite que o ajuste de curva possa ser feito em tempo real desde que se conheça o grau da curva a ser ajustada.

No Capítulo 4 é apresentado um procedimento para tratamento automático de tendências existentes em dados de observações de sistemas dinâmicos para estimação do estado do sistema. Erros tendenciosos são geralmente impostos a dados resultantes de medidas de alguma grandeza física de interesse, tanto pela instrumentação de medida como por perturbações causados por fenômenos externos. Os erros tendenciosos devidos à instrumentação são geralmente constantes e determinados por calibração do equipamento (Wertz, 1978; Cappellari et alii ed, 1976). Quanto aos erros tendenciosos impostos por fenômenos externos, estes geralmente variam com o tempo e exigem procedimentos computacionais que empregam modelos matemáticos dos fenômenos físicos que os provocam, os quais podem ser de relativa complexidade e depender de parâmetros locais cuja variação a longo termo é de caráter aleatório, tornando necessária a monitoração desses parâmetros no local. Esse é o caso, por exemplo, do erro tendencioso imposto às medidas da distância estação-satélite e da variação temporal dessa distância ("range" e "range-rate") por estações de rastreamento, devido ao efeito de refração atmosférica (Cappellari et alii ed, 1976). O procedimento desenvolvido, apresentado no Capítulo 4, visa evitar a necessidade do emprego desses modelos complexos através da estimação conjunta das tendências existentes nas observações com o vetor de estado do sistema via filtro de Kalman. Como o emprego do filtro de Kalman supõe que as observações estejam isentas de erros tendenciosos, o problema é tratado de tal modo que esses erros fiquem transparentes ao filtro.

O terceiro procedimento desenvolvido é apresentado no Capítulo 5, sendo enquadrado na categoria dos procedimentos para compressão de dados. São enquadrados nessa categoria procedimentos que visem a redução do volume de dados a ser armazenado ou transmitido (Andrews et alii, ESRO, 1973); bem como procedimentos que visem adaptar a velocidade de processamento do estimador de estado à taxa com que os dados são enviados a fim de permitir processamento em tempo real, que é o caso do procedimento apresentado no Capítulo 5.

Dressler (1970) apresentou um procedimento com o objetivo de aumentar a velocidade de processamento em estimação de estado via filtro de Kalman. Esse procedimento, baseado na existência de dados redundantes, consiste basicamente em computar o ganho de Kalman em um determinado instante, mantendo-o constante durante  $N$  intervalos de amostragem, sendo  $N$  um número inteiro predeterminado. Na  $n$ -ésima interação, o valor do ganho é atualizado. O mesmo é feito com relação à matriz de covariância do erro de estimação.

Bar-Shalom (1972) desenvolveu um procedimento de compressão com a mesma finalidade do anterior, que atinge o objetivo por intermédio de redução de redundância dos dados. Esse método consiste em pré-processar os dados de  $N$  em  $N$  pontos, sendo  $N$  um número inteiro ímpar predeterminado, estimando-se nesse pré-processamento o valor da grandeza medida correspondente ao ponto central de cada conjunto de  $N$  dados, com base em um critério de máxima verossimilhança. As estimativas assim efetuadas a cada  $N$  pontos de dados é então destinada à alimentação do estimador sequencial de estado, e é provado que cada uma dessas estimativas contém praticamente toda a informação contida nos  $N$  pontos utilizados em sua obtenção. Desse modo o estimador de estado é alimentado com observações a uma taxa  $N$  vezes menor que a taxa de amostragem original dos dados, operando porém com praticamente a mesma eficiência que o faria a partir do processamento direto dos dados não-comprimidos.

Bar-Itzhack (1980) apresentou uma nova técnica de compressão que visa aumentar a velocidade de processamento de procedimentos de estimação de estado via filtro de Kalman. É uma técnica aplicável apenas a sistemas lineares cujas observações sejam funções apenas de alguns elementos do vetor de estado. É provado que, se em um determinado instante forem conhecidas estimativas atualizadas apenas da partição do vetor de estado da qual as observações são funções e da respectiva matriz de covariância do erro da estimativa dessa partição, bem como das estimativas propagadas para o mesmo instante do vetor de estado completo e da matriz de covariância do erro de estimação completa, é possível calcular a estimativa atualizada da partição restante do estado e a correspondente matriz de covariância do erro dessa estimativa. A técnica de Bar-Itzhack, baseada nesse fato, consiste em utilizar um filtro de Kalman que emprega um modelo de ordem reduzida do sistema e opera à taxa real de amostragem de observações para a estimação apenas da partição do estado diretamente observada. A cada  $N$  iterações, sendo  $N$  um número inteiro predeterminado, a partir da estimativa atualizada da citada partição do estado e respectiva matriz de covariância do erro obtidas através do filtro de ordem reduzida e de estimativa propagada (com auxílio da matriz de transição de estado do sistema) do vetor de estado completo e correspondente matriz de covariância do erro, são calculadas as estimativas atualizadas da outra partição do estado e das partições restantes da matriz de covariância do erro. O procedimento apresentado no Capítulo 5 baseia-se também na suposição de que as observações sejam funções apenas de parte do estado e no fato citado acima, provado em Bar-Itzhack (1980). É, porém, aplicável também a sistemas não-lineares e contorna, mediante algumas aproximações, o problema de necessitar de um modelo de ordem reduzida do sistema dinâmico.

Nas seções finais dos capítulos dedicados à descrição dos procedimentos desenvolvidos são apresentados e discutidos os resultados obtidos nos testes efetuados para avaliação dos seus desempenhos. Esses testes foram efetuados com dados simulados de rastreamento relativo à órbita do satélite TD-1A (European Space Agency - ESA):



## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os principais fundamentos teóricos nos quais se alicerçam os procedimentos desenvolvidos neste trabalho. Essa apresentação é feita de modo resumido, visto que os assuntos cobertos se encontram difundidos na literatura técnica da área. Ao leitor que julgar necessário maiores detalhes sugere-se a leitura das referências que serão citadas na sequência. Inicialmente apresentam-se as equações relativas ao estimador ótimo não-tendencioso de mínima variância, conhecido como filtro de Kalman, em sua aplicação a sistemas lineares. A seguir, a extensão desse estimador para aplicações a sistemas não-lineares é apresentada. Descrições mais detalhadas dessas técnicas de filtragem são encontradas em Jazwinski (1970), Gelb (1974) e Liebelt (1967). Depois disso descreve-se uma técnica adaptativa de compensação de erros no modelo matemático do sistema, empregado para a propagação das estimativas do estado via filtro de Kalman (Rios Neto e Kuga, 1982; Kuga, 1982).

#### 2.2 - FILTRO DE KALMAN

Suponha-se um sistema dinâmico linear modelado matematicamente por (ver Apêndice A):

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)\omega(t), \quad (2.1)$$

onde  $x(t)$  é o vetor n-dimensional de estado do sistema;  $F(t)$  é uma matriz  $n \times n$  contínua no tempo;  $G(t)$  é uma matriz  $n \times r$  contínua no tempo;  $\omega(t)$  é um vetor de dimensão  $r$  que representa incertezas na modelagem. Esse vetor,  $\omega(t)$ , é um processo branco gaussiano com estatística  $N[0, Q(t)]$ , ou seja:

$$E[\omega(t)] = 0 ,$$

$$\text{cov}[\omega(t), \omega(t + \Delta t)] = Q(t)\delta(\Delta t), \quad \forall \Delta t > 0 , \Delta t \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

onde  $E[\cdot]$  representa a expectância da variável aleatória entre as chaves,  $Q(t)$  é uma matriz  $n \times n$  positiva semidefinida;  $\delta(\Delta t)$  é a função delta de Dirac.

Considere-se que se dispõe de observações do estado do sistema, obtidas discretamente no tempo e espaçadas por um intervalo de tempo constante. Suponha-se que essas observações possuem o seguinte modelo matemático:

$$y_k = H_k x_k + v_k , \quad (2.3)$$

onde o índice  $k$  representa o instante a que se refere a observação, ou seja:  $k = 1, 2, \dots$  para  $t = t_1, t_2, \dots$ ; respectivamente;  $y_k$  é um vetor de dimensão  $m$  que representa o conjunto de observações referentes ao instante  $t_k$ ;  $H_k$  é uma matriz  $m \times n$ ;  $v_k$  é um vetor de dimensão  $m$  que representa uma sequência branca gaussiana com as seguintes estatísticas:

$$E[v_k] = 0 , \quad (2.4)$$

$$\text{cov}[v_k, v_j] = R_k \delta_{k,j} , \quad R_k > 0 .$$

Supõe-se que o vetor de estado inicial do sistema é uma variável aleatória que segue uma distribuição gaussiana com:

$$E[x(t_0)] = \hat{x}(t_0) , \quad (2.5)$$

$$\text{cov}[x(t_0)] = P(t_0) ,$$

onde  $\hat{x}(\cdot)$  representa a melhor estimativa do estado no instante considerado;  $P$  é a matriz de covariância do erro no estado do sistema. O problema colocado será tratado com o filtro de Kalman, que é um estimador

de estado que fornece como resultado o valor médio do estado condicionado às observações processadas, e é um estimador ótimo no sentido de minimizar as variâncias dos erros de estimação. A dedução do filtro de Kalman está, ainda, baseada nas seguintes hipóteses adicionais: o ruído no estado,  $\omega(t)$ , é não-correlacionado tanto com o estado inicial quanto com o ruído nas observações, assim como este último é não-correlacionado com o estado. Essas hipóteses são respectivamente expressas matematicamente por:

$$\text{cov}[\omega(t), v_j] = 0 ,$$

$$\text{cov}[\omega(t), x(t_0)] = 0 , \quad (2.6)$$

$$\text{cov}[v_k, x(t)] = 0 .$$

As equações do filtro de Kalman, aplicado ao sistema dinâmico modelado pela Equação 2.1 para a estimação, de maneira recursiva e ótima no sentido médio quadrático, do seu estado, são as seguintes:

$$\dot{\hat{x}}(t/t_{k-1}) = F(t)\hat{x}(t/t_{k-1}) , \quad (2.7)$$

$$\dot{P}(t/t_{k-1}) = F(t)P(t/t_{k-1})F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) , \quad (2.8)$$

com  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$  .

A Equação 2.7 é utilizada para propagação do estado do sistema entre instantes de amostragem de observações. A Equação 2.8 realiza a mesma função com relação à matriz de covariância do erro no estado,  $P$ . Note-se que a equação para propagação do estado não leva em conta a parcela estocástica,  $\omega(t)$ , que representa incertezas na modelagem matemática do sistema. Essa incerteza é, porém, levada em conta na propagação da matriz de covariância,  $P$ , através da matriz densidade espectral de  $\omega(t)$ ,  $Q(t)$ , conforme pode ser verificado na Equação 2.8. O vetor  $\hat{x}$ , resultante da propagação do estado pela Equação 2.7, é usual

mente chamado de estado nominal. No momento em que for disponível um conjunto de observações com informações sobre o estado real do sistema, esse conjunto deverá ser processado no sentido de extrair dele essas informações. Com isso, o estado nominal do sistema correspondente ao instante a que se referem as observações é corrigido, vindo a incorporar as informações sobre o estado real no citado instante contidas nas observações. Essa correção, geralmente denominada atualização, é aplicada tanto ao estado nominal quanto à matriz de covariância do erro no estado. Com o aumento do conhecimento sobre o estado, os elementos dessa matriz, que representam as incertezas no seu conhecimento, devem decrescer. As equações do filtro de Kalman para a atualização das estimativas são as seguintes:

a) Atualização do estado

$$x(k/k) = \hat{x}(k/k-1) + K_k [y_k - H_k \hat{x}(k/k-1)] . \quad (2.9)$$

b) Atualização da matriz de covariância do erro no estado

$$P(k/k) = [I - K_k H_k] P(k/k-1) , \quad (2.10)$$

onde  $I$  é a matriz identidade;

$$K_k = P(k/k-1) H_k^T [H_k P(k/k-1) H_k^T + R_k]^{-1} \quad (2.11)$$

é o ganho de Kalman e, para simplificar a notação, utilizou-se  $k/k-1$  em lugar de  $t_k/t_{k-1}$  e  $k/k$  em lugar de  $t_k/t_k$ .

Resumindo, o processo de filtragem consta do seguinte: propaga-se o estado do sistema e a respectiva matriz de covariância do erro do instante  $t_{k-1}$  para o instante  $t_k$ . Com isso obtêm-se  $\hat{x}(k/k-1)$  e  $P(k/k-1)$ , ou seja, as estimativas do estado e correspondente matriz de covariância do erro no instante  $t_k$ , a partir de observações em até o instante  $t_{k-1}$ . A seguir processam-se as observações relativas ao instante  $t_k$  através das Equações 2.9, 2.10 e 2.11. Com isso obtêm-se as esti

mativas atualizadas  $\hat{x}(k/k)$  e  $P(k/k)$ , ou seja, estimativas do estado e sua matriz de covariância do erro correspondentes ao instante  $t_k$ , agora baseadas em observações até o instante  $t_k$ , inclusive. Esse procedimento é repetido sequencialmente, processando-se sucessivamente as observações nos instantes consecutivos à medida que essas observações se tornem disponíveis.

Para a resolução das Equações Diferenciais 2.18 e 2.19, pode-se recorrer à matriz de transição de estado do Sistema Dinâmico 2.1 no intervalo de tempo  $[t_{k-1}, t_k]$  definida por:

$$\dot{\phi}(t, t_{k-1}) = F(t)\phi(t, t_{k-1}), \quad (2.12)$$

com condição inicial  $\phi(t_{k-1}, t_{k-1}) = I$  e  $k-1 \leq t \leq k$ .

Com o auxílio da matriz de transição de estado do sistema as equações para propagação do estado e sua covariância do erro as Equações 2.7 e 2.8, ficam dadas por:

$$\hat{x}(k/k-1) = \phi(k, k-1)\hat{x}(k-1/k-1), \quad (2.13)$$

e

$$P(k/k-1) = \phi(k, k-1)P(k-1/k-1)\phi^T(k, k-1) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi(k, \tau)G(\tau)Q(\tau)G^T(\tau)\phi^T(k, \tau)d\tau. \quad (2.14)$$

### 2.3 - FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

A adaptação do filtro de Kalman para aplicação a sistemas não-lineares gera o chamado filtro estendido de Kalman. Para iniciar a apresentação resumida do filtro estendido de Kalman, suponha-se um sistema não-linear cujo modelo matemático é dado por:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t] + G(t)\omega(t) , \quad (2.15)$$

onde  $x(t)$  é o vetor n-dimensional de estado do sistema;  $f$  é um vetor n-dimensional no qual pelo menos uma de suas componentes é função não-linear do estado;  $G(t)$  é uma matriz  $n \times r$  com elementos contínuos no tempo;  $\omega(t)$  é um vetor de dimensão  $r$  que representa incertezas na modelagem do sistema. As propriedades estatísticas de  $\omega(t)$  são, também neste caso, aquelas expressas na Equação 2.2. A condição inicial  $x(t_0)$  é uma variável aleatória com estatística  $N[\bar{x}(t_0), P(t_0)]$ , supondo-se válidas as hipóteses de não-correlação expressas na Equação 2.6.

Suponha-se agora que se gere uma trajetória nominal  $\bar{x}(t)$  a partir de uma condição inicial  $\bar{x}(t_0)$  dada, a qual satisfaz:

$$\dot{\bar{x}}(t) = f[\bar{x}(t), t] . \quad (2.16)$$

Defina-se agora:

$$\delta x(t) \triangleq x(t) - \bar{x}(t) \quad (2.17)$$

como o desvio da trajetória nominal. Nota-se então que  $\delta x(t)$  é um processo estocástico que satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d[\delta x(t)]}{dt} = f[x(t), t] - f[\bar{x}(t), t] + G(t)\omega(t) , \quad (2.18)$$

com estatística  $N[\bar{x}(t_0) - \bar{x}(t_0), P(t_0)]$ .

Se esse desvio for pequeno, no sentido médio quadrático, uma expansão em série de Taylor de 1ª ordem fornecerá:

$$f[x(t), t] - f[\bar{x}(t), t] \approx F[t; \bar{x}(t_0)]\delta x(t) , \quad (2.19)$$

onde:

$$F[t, \bar{x}(t_0)] \triangleq \left[ \frac{\partial f[\bar{x}(t), t]}{\partial x} \right] \quad (2.20)$$

é a matriz de derivadas parciais de  $f[\cdot]$  em relação ao estado calculada ao longo da trajetória de referência.

Substituindo o resultado expresso na Equação 2.19 na Equação 2.18, obtêm-se:

$$\frac{d[\delta x(t)]}{dt} = F[t; \bar{x}(t_0)]\delta x(t) + G(t)\omega(t) , \quad (2.21)$$

que é a equação linearizada do Sistema 2.15.

Para enfatizar a dependência de  $\delta x(t)$  na escolha da trajetória nominal, incluiu-se  $\bar{x}(t_0)$  no argumento da função  $F$ . Deve ser entendido que  $F$  é função apenas do tempo, sendo avaliada nos valores de  $\bar{x}(t)$ .

Discretizando a Equação 2.21, obtêm-se:

$$\delta x(t_{k+1}) = \phi[t_{k+1}, t_k; \bar{x}(t)]\delta x(t_k) + \Gamma(t_k)\omega(t_k) , \quad (2.22)$$

onde  $\phi$  é a matriz de transição de estado do sistema linearizado, definida na Equação 2.12,

$$\Gamma(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi[t_{k+1}, \tau]G(\tau)d\tau , \quad (2.23)$$

e  $\omega(t_k)$  possui as seguintes propriedades estatísticas:

$$E[\omega(t_k)] = 0 , \quad (2.24)$$

$$E[\omega(t_k)\omega^T(t_j)] = Q(t_k)\delta_{kj} ,$$

sendo  $\delta_{kj}$  a função delta de Kronecker.

Suponha-se agora que se disponha de observações, também funções não-lineares do estado do sistema dinâmico, modeladas matematicamente por:

$$y(t_k) = h[x(t_k), t_k] + v_k, \quad (2.25)$$

onde  $y(t_k)$  é o vetor de observações no instante  $t_k$  com dimensão  $m$ ;  $h$  é um vetor de funções não-lineares do estado cuja dimensão é  $m$ ;  $v_k$  é um vetor de dimensão  $m$ , cujas componentes representam ruídos nas respectivas componentes do vetor de observação. As propriedades estatísticas de  $v_k$  são dadas por:

$$\begin{aligned} E[v_k] &= 0, \\ E[v_k v_k^T] &= R_k. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Defina-se agora como medidas nominais  $\bar{y}(t_k)$  o vetor de medidas calculados a partir da trajetória nominal  $\bar{x}(t_k)$ , ou seja:

$$\bar{y}(t_k) \triangleq h[\bar{x}(t_k), t_k]. \quad (2.27)$$

Defina-se, também, a variação em torno das medidas nominais por:

$$\delta y(t_k) \triangleq y(t_k) - \bar{y}(t_k). \quad (2.28)$$

Procedendo de modo análogo ao que foi descrito por ocasião da linearização das equações do sistema dinâmico, obtêm-se:

$$\delta y(t_k) = M[t_k; \bar{x}(t_k)] \delta x(t_k) + v_k, \quad (2.29)$$

onde:

$$M[t_k; \bar{x}(t_k)] \triangleq \left[ \frac{\partial h(\bar{x}(t_k), t_k)}{\partial x} \right]. \quad (2.30)$$



Note-se que as equações linearizadas do Sistema, 2.22 e 2.29, são equações de um sistema linear discreto, ao qual são aplicáveis as equações do filtro discretizadas apresentadas no final da seção anterior. Neste caso, porém, ao invés de se trabalhar diretamente com estado e medida, trabalha-se com desvios de estado e desvios de medidas.

Visto que se quer uma trajetória nominal próxima à trajetória real, escolhe-se a trajetória nominal com base na estimativa mais recente do estado, ou seja:

$$\bar{x}(t_k) = \bar{x}(t_k/t_k) . \quad (2.31)$$

Para dar partida ao processo escolhe-se então:

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}(t_0) , \quad (2.32)$$

sendo  $\bar{x}(t_0)$  a estimativa a priori do estado. Com essa escolha tem-se que  $\delta x(t_0) \sim N(0, P(t_0))$ . A melhor estimativa do estado do sistema entre observação é dada por:

$$\frac{d\bar{x}(t/t_k)}{dt} = f[\bar{x}(t/t_k), t] , \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} . \quad (2.33)$$

Para o Sistema linearizado, 2.22 e 2.29, a equação para correção da estimativa fica dada por:

$$\begin{aligned} \delta\bar{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \delta\bar{x}(t_{k+1}/t_k) + K[t_{k+1}; \bar{x}(t_{k+1}/t_k)] \cdot \\ &\cdot \{ \delta y_{k+1} - M(t_{k+1}) \delta\bar{x}(t_{k+1}/t_k) \} . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Quando se processar um conjunto de observações em  $t = t_{k+1}$  obter-se-á um  $\delta\bar{x}(t_{k+1}/t_{k+1})$ , que representa a correção que deve ser efetuada em  $\bar{x}(t_{k+1}/t_k)$  para que a estimativa do estado em  $t_{k+1}$  possa incluir as informações sobre o estado real em  $t_{k+1}$  contidas nessas observações. Assim pode-se escrever:

$$\bar{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \bar{x}(t_{k+1}/t_k) + \delta\bar{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) . \quad (2.35)$$

Antes do processamento desse conjunto de observações, a melhor estimativa do estado é dada por  $\bar{x}(t_{k+1}/t_k)$ , que é a propagação de  $\bar{x}(t_k/t_k)$  com auxílio da Equação 2.33. Disso se conclui que:

$$\delta\bar{x}(t_{k+1}/t_k) = 0 . \quad (2.36)$$

Substituindo  $\delta\bar{x}(t_{k+1}/t_{k+1})$  da Equação 2.35 e  $\delta\bar{x}(t_{k+1}/t_k) = 0$  e  $\delta y(t_k)$  da Equação 2.28 na Equação 2.34, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) = & \bar{x}(t_{k+1}/t_k) + K[t_{k+1}; \bar{x}(t_{k+1}/t_k)] \cdot \\ & \cdot \{y(t_k) - h[\bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1}]\} , \end{aligned} \quad (2.37)$$

que é a equação para atualização do estado através do filtro estendido de Kalman.

Condensando os resultados, têm-se as seguintes equações para o filtro estendido de Kalman:

a) Equações para propagação do estado entre instantes de amostragem:

$$\bar{x}(t_{k+1}/t_k) = \bar{x}(t_k/t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f[\bar{x}(t/t_k)] dt , \quad (2.38)$$

que é a equação para propagação do estado.

Para a propagação da matriz de covariância do erro, a equação é análoga ao filtro linear e dada por:

$$\begin{aligned} P(t_{k+1}/t_k) = & \phi[t_{k+1}, t_k; \bar{x}(t_k/t_k)] P(t_k/t_k) \cdot \\ & \cdot \phi^T[t_{k+1}, t_k; \bar{x}(t_k/t_k)] + \Gamma(t_k)Q(t_k)\Gamma^T(t_k) . \end{aligned} \quad (2.39)$$

b) Equações para atualização:

A equação para atualização do estado é a seguinte:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \hat{x}(t_{k+1}/t_k) + K[t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] \cdot \\ &\cdot \{y_{k+1} - h[\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}]\}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Para atualização da matriz de covariância do erro, tem-se:

$$\begin{aligned} P(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \{I - K[t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] \cdot \\ &\cdot M[t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)]\} \cdot P(t_{k+1}/t_k). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Nas Equações 2.40 e 2.41,  $K[t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)]$  é o ganho de Kalman dado por:

$$\begin{aligned} K[t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] &= P(t_{k+1}/t_k)M^T[t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] \cdot \\ &\cdot \{M[t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)]P(t_{k+1}/t_k) \cdot \\ &\cdot M^T[t_{k+1}; \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] + R_{k+1}\}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

## 2.4 - PROCESSAMENTO SEQUENCIAL DO VETOR DE OBSERVAÇÕES

Se os erros em todas as componentes do vetor de observações forem não-correlacionados entre si, poder-se-á processar o vetor de observações relativo a cada instante de amostragem componente a componente, em lugar de processá-lo de maneira simultânea, como é feito através da Equação 2.9 no caso do filtro aplicado a sistemas lineares, e da Equação 2.40 no caso do filtro estendido de Kalman. Com isso consegue-se evitar a inversão matricial que aparece nas Equações 2.11 e 2.42, transformando-a na inversão de um escalar. Isso acarreta, em geral, lucros, em termos de tempo de processamento e precisão de cálculos. Para que isso seja possível, deve-se ter todas as  $m$  componentes do erro de observações não-correlacionadas, ou seja:

$$y(k+1) = \begin{bmatrix} y(k+1) \\ (1) \\ y(k+1) \\ (2) \\ y(k+1) \\ (m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(k+1) \\ (1) \\ M(k+1) \\ (2) \\ M(k+1) \\ (m) \end{bmatrix} x(k+1) + \begin{bmatrix} v(k+1) \\ (1) \\ v(k+1) \\ (2) \\ v(k+1) \\ (m) \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

onde as notações:  $y_{(i)}$  representa a  $i$ -ésima componente do vetor  $y$ ;  $M_{(i)}$  a  $i$ -ésima linha da matriz  $M$ ;  $v_{(i)}$  a  $i$ -ésima linha do vetor  $v$ ,

com:

$$E[v(k+1)v^T(k+1)] = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & R_{mm} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Se essa condição for satisfeita, cada componente do vetor de observações poderá ser tratada separadamente processando  $y_{(1)}(k+1)$  em lugar do vetor  $y(k+1)$  para a primeira atualização do estado. Com isso obtêm-se uma estimativa preliminar  $\hat{x}(k+1/k+1)$ , que inclui informações contidas apenas na primeira componente do vetor  $y(k+1)$ . Usando essa estimativa como informação a priori, processa-se a segunda componente do vetor de observações atualizando a estimativa de modo que essa inclua as informações sobre o estado contidas nessa componente do vetor de observações. Esse processo deve ser repetido sucessivamente até que a componente  $m$  do vetor de observações tenha sido processada, obtendo-se com isso a estimativa final do vetor de estado,  $\hat{x}(k+1, k+1)$  (Sorenson, 1966). Note-se, através das Equações 2.11 e 2.42, que a matriz que deve ser invertida torna-se um escalar em cada um dos passos acima descritos.

## 2.5 - TÉCNICA DE ESTIMAÇÃO DO RUÍDO DINÂMICO POR PROCESSO ADAPTATIVO

Quando se aplica o processo de estimação de estado, através do filtro de Kalman, a sistemas não-lineares, devido às hipóteses simplificadoras efetuadas, é muito comum a ocorrência do chamado fenômeno de divergência do filtro. Esse fenômeno geralmente ocorre após os instantes iniciais da aplicação do filtro, caracterizando-se pela obtenção de erros estimados, que na realidade são menores que os respectivos erros reais da estimação. As estimativas dos erros no estado estimado são caracterizadas pela matriz de covariância do erro. Se essa matriz passa a apresentar seus elementos da diagonal principal (variâncias) irrealisticamente pequenas para o filtro, tudo vai se passar como se a estimativa do estado realmente estivesse bastante próxima ao valor do estado real e, conseqüentemente, o processamento de uma observação quase nenhum efeito teria para corrigir a estimativa errônea. Isso pode ser observado matematicamente pela equação de atualização da estimativa do estado (Equação 2.40). Note-se nessa equação que o quanto se irá retirar de informação sobre o estado de uma observação dependerá do valor de  $K$ , o ganho de Kalman. Pela Equação 2.42 nota-se que o valor do ganho de Kalman num determinado instante depende diretamente do valor da matriz de covariância do erro nesse mesmo instante. Assim, se a matriz de covariância for irrealisticamente pequena, também o será o ganho de Kalman e, conseqüentemente, o mesmo ocorrerá com a correção na estimativa que, então, divergirá mais e mais do estado real do sistema (Fitzgerald, 1971).

O procedimento apresentado nessa seção visa evitar a divergência no filtro estendido de Kalman. Esse procedimento fundamentalmente visa a estimação adaptativa do nível de ruído no estado necessário para evitar a divergência do filtro, que através da parcela  $\Gamma(t_k)Q(t_k)P^T(t_k)$  da Equação 2.39 é acrescentado à matriz de covariância. O método a ser descrito tem por requisito básico o mesmo do trabalho de Jazwinski (1970), porém, com a inclusão de hipóteses adicionais que levam a um procedimento modificado (Rios Neto e Kuga, 1982).

Para iniciar a descrição resumida do procedimento, suponha-se o sistema dinâmico modelado matematicamente pela Equação 2.15, com observações modeladas pela Equação 2.25 (supondo-se, sem perda de generalidade, que elas sejam escalares), já na forma linearizada e discretizada, conforme as Equações 2.22 e 2.29, ou seja:

$$\delta x(k+1) = \phi(k+1, k) \delta x(k) + \Gamma(k) \omega(k) , \quad (2.45)$$

e

$$\delta y(k) = M(k) \delta x(k) + v(k) , \quad (2.46)$$

onde, para simplificar a notação, substituíram-se  $t_k, t_{k+1}$  por  $k, k+1$ , respectivamente;  $\Gamma(k)$  é dado pela Equação 2.23 e  $M(k)$  pela Equação 2.30.

Defina-se agora resíduo "observado" por:

$$r(k+1) \triangleq y(k+1) - \hat{y}(k+1/k) , \quad (2.47)$$

onde  $y$  é a observação e  $\hat{y}$  é a observação calculada através da parcela determinística do modelo das observações (Equação 2.25) a partir do vetor de estado previsto,  $\hat{x}(k+1/k)$ . Portanto:

$$\hat{y}(k+1) = h_{k+1}[\hat{x}(k+1/k)] \cong E[y_{k+1}/y_k, y_{k-1}, \dots, y_1] . \quad (2.48)$$

Por resíduo verdadeiro defina-se:

$$r_v(k+1) = y^v(k+1) - \hat{y}(k+1) , \quad (2.49)$$

onde  $y^v$  é o valor real da grandeza física observada, isto é, o valor que teria a observação caso a instrumentação de medida fosse perfeita.

Assim, o resíduo observado e o verdadeiro possuem a seguinte relação:

$$r(k+1) = r_v(k+1) + v(k+1) . \quad (2.50)$$

A hipótese fundamental de consistência entre o resíduo e sua estatística, dada por Jazwinski (1969), é obtida atribuindo ao resíduo uma distribuição gaussiana e determinando o vetor das variâncias do ruído dinâmico,  $q$ , que produz o valor mais provável do ruído verdadeiro:  $\max_{(q)} p[r_v]$ , onde  $p$  é a densidade de probabilidade do resíduo (Jazwinski, 1970). A maximização da probabilidade de ocorrência do resíduo verdadeiro leva a:

$$[r_v^2(k+1)]_{oc} = E[r_v^2(k+1)] , \quad (2.51)$$

onde  $[r_v^2(k+1)]_{oc}$  representa o valor ocorrido de  $r_v^2(k+1)$ .

Desenvolver-se-ão a seguir expressões para o primeiro e segundo membro da igualdade acima.

Observa-se facilmente que a Equação 2.47 pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned} r(k+1) = & M(k+1)\{\phi(k+1,k)[x(k) - \hat{x}(k/k)] + \\ & + \Gamma(k)\omega(k)\} + v(k+1) . \end{aligned} \quad (2.52)$$

Então, pela Equação 2.50 pode-se escrever:

$$r_v(k+1) = M(k+1)\{\phi(k+1,k)[x(k) - \hat{x}(k/k)] + \Gamma(k)\omega(k)\} . \quad (2.53)$$

Com isso, obtêm-se para  $E[r_v(k+1)]^2$ :

$$\begin{aligned} E[r_v(k+1)]^2 = & M(k+1)\phi(k+1)P(k/k)\phi^T(k+1,k)M^T(k+1) + \\ & + M(k+1)\Gamma(k)Q(k)\Gamma_k^T H_{k+1}^T . \end{aligned} \quad (2.54)$$

Calcule-se agora o quadrado do resíduo verdadeiro  $r_v^2(k+1)$  por intermédio da Equação 2.50. Feito isso, obtêm-se:

$$r_v^2(k+1) = r^2(k+1) - 2r(k+1)v(k+1) + v^2(k+1) . \quad (2.55)$$

Chame-se:

$$\eta'(k+1) = v^2(k+1) - 2r(k+1)v(k+1) . \quad (2.56)$$

Note-se que  $\eta'(k+1)$  possui as seguintes propriedades estatísticas:

$$E[\eta'(k+1)] = E[v^2(k+1) - 2r(k+1)v(k+1)] = R(k+1) , \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} E[(\eta'_{k+1} - E[\eta'(k+1)])^2] &= E\{[(v^2(k+1) - 2r(k+1)v(k+1) - R(k+1))]^2\} = \\ &= E[v^4(k+1) - 4r(k+1)v^3(k+1) - 2R(k+1)v^2(k+1) + \\ &+ 4r^2(k+1)v^2(k+1) + 4r(k+1)v(k+1)R(k+1) + R^2(k+1)] . \end{aligned}$$

Mas:

$$E[r(k+1)] = E[v(k+1)] = 0 ;$$

$$E[v^2(k+1)] = R(k+1) ;$$

$$E[v^3(k+1)] = 0 ; e$$

$$E[v^4(k+1)] = 3R^2(k+1) .$$

Assim tem-se que:

$$E[(\eta'(k+1) - E[\eta'(k+1)])^2] = 4r^2(k+1)R(k+1) + 2R^2(k+1) . \quad (2.58)$$



Substituindo as Equações 2.54 e 2.55 na Equação 2.51 e utilizando a Equação 2.56, obtêm-se:

$$\begin{aligned} r^2(k+1) + \eta'(k+1) &= M(k+1)\phi(k+1,k)P(k/k)\phi^T(k+1,k)M^T(k+1) + \\ &+ M(k+1)\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)M^T(k+1) . \end{aligned} \quad (2.59)$$

Defina-se agora:

$$\eta(k+1) = \eta'(k+1) - R(k+1) ,$$

e note-se que  $\eta$  é um ruído branco gaussiano e, portanto, com média nula e segundo momento dado por:

$$E[\eta^2(k+1)] = 4r^2(k+1)R_{k+1} + 2R_{k+1}^2 . \quad (2.60)$$

Substituindo  $\eta(k+1)$  na Equação 2.59 e efetuando almas manipulações algébricas, obtêm-se:

$$\begin{aligned} r^2(k+1) + R(k) - M(k+1)\phi(k+1,k)P(k/k)\phi^T(k+1/k)M^T(k+1) &= \\ = M(k+1)\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)M^T(k+1) + \eta(k+1) . \end{aligned} \quad (2.61)$$

Supondo que os ruídos dinâmicos sejam independentes entre si, tem-se que a matriz  $Q_k$  é diagonal. Chamem-se os elementos da diagonal de  $q_{(1)}, q_{(2)}, \dots, q_{(r)}$ . Desenvolvendo o segundo membro da Equação 2.61 a partir dessa suposição, obtêm-se:

$$\begin{aligned} M(k+1)\Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)M^T(k+1) &= (M_{(1)}\Gamma_{11} + M_{(2)}\Gamma_{21} + \dots + \\ &+ M_{(n)}\Gamma_{n1})^2 q_{(1)} + \dots + (M_{(1)}\Gamma_{1r} + \\ &+ M_{(2)}\Gamma_{2r} + \dots + M_{(n)}\Gamma_{nr})^2 q_{(r)} = \\ &= \sum_{i=1}^r \left( \sum_{j=1}^n M_{(j)}\Gamma_{ji} \right)^2 q_{(i)} , \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde  $M_{(j)}$  representa o  $j$ -ésimo elemento do vetor  $M(k+1)$  e  $\Gamma_{ji}$  representa o elemento da  $j$ -ésima linha e  $i$ -ésima coluna da matriz  $\Gamma(k)$ .

Pode-se escrever a Equação 2.62 como:

$$M(k+1)Q(k)\Gamma^T(k)M^T(k+1) = H(k+1)q(k+1) , \quad (2.63)$$

onde:

$$H(k+1) \triangleq [(\sum_{j=1}^n M_j \Gamma_{j1})^2; (\sum_{j=1}^n M_j \Gamma_{j2})^2; \dots; (\sum_{j=1}^n M_j \Gamma_{jr})^2] , \quad (2.64)$$

e  $q(k+1)$  é o vetor formado pelos elementos da diagonal da matriz  $Q(k)$ .

Define-se como pseudo-observação,  $Z(k+1)$ , o primeiro membro da Equação 2.61:

$$\begin{aligned} z(k+1) \triangleq & r^2(k+1) + R(k+1) - \\ & - M(k+1)\phi(k+1,k)P(k/k)\phi^T(k+1,k)M^T(k+1) . \end{aligned} \quad (2.65)$$

Substituindo as Equações 2.65 e 2.63 na Equação 2.61, obtêm-se a chamada equação de pseudo-observação:

$$z(k+1) = H(k+1)q(k+1) + \eta(k+1) . \quad (2.66)$$

Essa equação, obtida a partir da hipótese de máxima probabilidade de ocorrência do resíduo verdadeiro, fornecerá informações sobre o valor das variâncias do ruído no estado  $q(k+1)$  que deverão ser adicionados à diagonal da matriz de covariância do erro no estado, a fim de obter consistência do ruído, buscando-se evitar, desse modo, que ocorra divergência na filtragem. As pseudo-observações modeladas matematicamente pela Equação 2.66 deverão ser calculadas através da Equação 2.65. Com isso, elas poderão alimentar um filtro de Kalman secundário, que deverá funcionar paralelamente ao que estima o estado do

sistema dinâmico. As equações do filtro de Kalman para processamento das pseudo-observações são as seguintes:

a) Propagação da estimativa do ruído

$$\hat{q}(k+1/k) = I \cdot \hat{q}(k/k) = \hat{q}(k/k). \quad (2.67)$$

b) Propagação da matriz de covariância do erro da estimativa do ruído

$$P^q(k+1/k) = P^q(k/k). \quad (2.68)$$

c) Atualização da estimativa do ruído

$$\hat{q}(k+1/k+1) = \hat{q}(k+1/k) + K^q[z(k+1) - H(k+1)\hat{q}(k+1/k)]. \quad (2.69)$$

d) Atualização da matriz de covariância do erro da estimativa do ruído

$$P^q(k+1/k+1) = [I - K^q(k+1)H(k+1)]P^q(k+1/k), \quad (2.70)$$

onde:

$$K^q(k+1) = P^q(k+1/k)M^T(k+1)[H(k+1)P^q(k+1/k)H^T(k+1) + 4r^2(k+1)R(k+1) + 2R^2(k+1)]^{-1}. \quad (2.71)$$

Para a escolha dos valores iniciais  $q_0$  e  $P_0^q$  pode-se, por exemplo, supor  $\hat{q}(0/0) = 0$  e ajustar  $P^q(0/0)$  através de testes por tentativa e erro. Se em alguma aplicação em particular algo que possa ajudar na escolha de  $\hat{q}(0/0)$  e  $P^q(0/0)$  for conhecido, isso poderá ser levado em conta em tal escolha, de modo a torná-la mais criteriosa.

## CAPÍTULO 3

### APLICAÇÃO DE TÉCNICA DE RUÍDO ADAPTATIVO EM ESTIMAÇÃO DE ESTADO À SUAVIZAÇÃO DE DADOS

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Técnicas de suavização de dados têm ampla faixa de aplicação no tratamento de dados obtidos através de medidas de características físicas de sistemas dinâmicos. Essas medidas são afetadas por erros aleatórios impostos pela instrumentação que as efetuam, bem como por ruídos de alta frequência causados por perturbações externas, além de possíveis erros de caráter tendencioso. Uma primeira aplicação de técnicas de suavização de dados consiste na obtenção de valores mais prováveis das medidas a partir dos dados grosseiros, com consequente remoção de ruídos de alta frequência. Outras aplicações importantes consistem na utilização de técnicas de suavização para (Wertz, 1978):

- a) Compressão de dados, cujo objetivo é reduzir a quantidade de dados a ser armazenada, processada ou transmitida.
- b) Interpolação para a estimação de valores de dados em instantes intermediários aos de amostragem. É muito útil para compressão de dados, apresentação de dados em terminal de vídeo, sincronização no tempo de dados provenientes de várias fontes de medidas, etc.
- c) Cálculo de taxas de variação.

As principais técnicas empregadas para suavização de dados são as chamadas técnicas de ajuste de curvas e técnicas de filtragem (Wertz, 1978). O procedimento desenvolvido a ser apresentado enquadra-se na categoria das técnicas de ajuste de curvas. Essas técnicas se baseiam fundamentalmente na consideração de que os dados possuem uma forma funcional dentro de um determinado intervalo de tempo, que pode ser representada por uma combinação linear de funções ou potências do

tempo. Os coeficientes dessa combinação linear são então calculados de modo a minimizar algum tipo de índice de desempenho, e seus valores passam a representar os dados dentro do intervalo de tempo envolvido no ajuste. Os métodos mais comumente utilizados são os métodos  $\chi$ -quadrado ("Chi-square") e dos mínimos quadrados (Meyer, 1975). No primeiro método o critério de otimalidade para ajuste é o de máxima verossimilhança. Supõe-se que os valores da curva nos instantes de amostragem de dados sejam os valores esperados da grandeza medida nesses instantes. Maximiza-se então a função densidade de probabilidade conjunta de ocorrência desses valores em relação aos coeficientes da curva a ser ajustada, supondo que os erros sigam uma distribuição gaussiana. Verifica-se que maximizar a citada função é o mesmo que minimizar o expoente da exponencial envolvida, o qual segue uma distribuição  $\chi$ -quadrada, de onde o nome dado a essa técnica de suavização (Bendat e Piersol, 1971). No caso do ajuste de curvas por mínimos quadrados, os coeficientes são calculados de modo a minimizar uma soma ponderada que envolve os quadrados dos resíduos entre os dados e correspondentes valores da curva ajustada. Essa técnica de ajuste, ao contrário da técnica  $\chi$ -quadrado que só é aplicável a dados cujos erros aleatórios possuem distribuição gaussiana, pode ser aplicada independentemente da distribuição dos erros. O ajuste por mínimos quadrados fornece estimativas não-viciadas dos coeficientes e de mínima variância do erro.

Para que qualquer um dos métodos de ajuste de curvas possa ser aplicado, há necessidade de que já se tenham coletado todos os pontos de dados aos quais o ajuste será feito pois estes possuem características de processamento em lotes completos de observações ("batch"). Uma dificuldade imposta ao emprego desses métodos diz respeito à escolha da ordem da curva a ser ajustada. A escolha de um grau muito baixo resulta em uma curva mais suave, porém pode eliminar componentes de frequência mais alta que não sejam ruído o que acarreta perda de informação. Por outro lado, se o grau da curva ajustada for muito alto, embora o ajuste aos valores dos dados seja melhor, componentes indesejáveis de ruído podem ainda ficar presentes. Existe, assim, a necessidade de fazer uma escolha de compromisso.

Outro fator a ser considerado é o de que as técnicas de ajuste de curvas inserem correlação entre distintos pontos de dados. Por esse motivo torna-se importante o cálculo da matriz de covariância do erro dos valores estimados a partir da curva ajustada. Os termos da diagonal principal da matriz de covariância são somados de maneira ponderada aos respectivos valores da variância a priori do erro nos dados originais. Os valores dos dados de observações estimados pela curva ajustada e as respectivas variâncias calculadas do modo acima descrito são os valores utilizados para a extração de informações sobre o estado do sistema dinâmico observado em estimação de estado via filtro de Kalman.

A seguir iniciar-se-á a descrição do método desenvolvido para suavização de dados via ajuste de curva, no qual os coeficientes são calculados com o auxílio do filtro de Kalman e de uma técnica de ruído adaptativo, descrita resumidamente no capítulo anterior.

### 3.2 - DESCRIÇÃO DO MÉTODO DESENVOLVIDO

Suponha que se dispõe de um conjunto de observações provenientes de medidas de uma mesma grandeza física de interesse, efetuadas em um determinado sistema dinâmico. Suponha-se que essas medidas sejam tomadas em instantes discretos separados por intervalos de tempo constantes, e estejam afetadas apenas por erros aleatórios, cujas propriedades estatísticas são conhecidas. Chamando de  $y(k+1)$  o valor da observação no instante  $t_{k+1}$ , tem-se:

$$y(k+1) = y_R(k+1) + v(k+1) , \quad k = 0,1,2,\dots,m , \quad (3.1)$$

onde  $y_R(k+1)$  representa o valor real da grandeza medida no instante  $t_{k+1}$  e  $v(k+1)$  representa o erro aleatório pelo qual a observação está afetada. Suponha-se que esse erro segue uma distribuição gaussiana com:

$$E[v(k+1)] = 0 ,$$

$$E[v^2(k+1)] = r_{k+1} , \quad (3.2)$$

$$E[v(i)v(j)] = 0 , \quad i \neq j .$$

Considere-se agora o problema de ajustar uma curva a esses dados, representada por uma combinação linear de funções do tempo linearmente independentes, dada por:

$$f(x,t) = x_{(1)}g_1(t) + x_{(2)}g_2(t) + \dots + \\ + x_{(n)}g_n(t) = \sum_{j=1}^n x_{(j)}g_j(t) , \quad (3.3)$$

onde  $x_{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  são constantes escalares;  $g_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  são funções do tempo conhecidas e linearmente independentes.

Suponha-se que se deseja ajustar essa curva aos dados de modo que ela forneça estimativas ótimas do valor real da grandeza física medida no decorrer do tempo no sentido de minimizar o desvio médio quadrático. Uma vez que as funções  $g_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  são conhecidas, para que a curva fique determinada é necessário estimar os valores dos coeficientes  $x_{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . O problema a ser resolvido a fim de estimar esses coeficientes será colocado a seguir em uma forma tal que o adeque à aplicação do filtro de Kalman em sua solução. Estimando os coeficientes através do processo de filtragem de Kalman, essas estimativas serão ótimas no sentido de minimizar uma função quadrática dos erros.

Seja  $x$  o vetor formado pelos coeficientes da curva a ser ajustada definido por:

$$x \triangleq [x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}]^T . \quad (3.4)$$

Considere-se esse vetor modelado dinamicamente pela seguinte equação a diferenças:

$$x_1 = x_0 + \omega_0 , \quad (3.5)$$

onde  $\omega_0$  é um vetor de dimensão  $n$ , que se constitui de um ruído branco gaussiano com:

$$E[\omega_0] = 0 ,$$

$$E[\omega_0(i)\omega_0(j)] = Q_0\delta_{ij} ,$$

e expressa incertezas no conhecimento do modelo matemático, e os índices 0 e 1, a princípio nada têm a ver com os instantes de amostragem dos pontos de dados, como se tornará claro na sequência deste trabalho.

Deseja-se que a curva ajustada ao conjunto de dados seja uma aproximação do valor esperado da grandeza física real, em função do tempo condicionado às observações que consistem nos pontos de dados tomados para o ajuste. Deseja-se ainda que essa aproximação seja ótima num sentido médio quadrático. Considerem-se então as observações expressas matematicamente pela seguinte equação:

$$y_1(k+1) = f(x_1, k+1) + v_1(k+1) , \quad k = 0, \dots, m-1 , \quad (3.6)$$

onde a notação  $y_1(k+1)$  representa a observação referente ao instante  $k+1$ , a qual contém informações sobre o vetor de coeficiente  $x_1$ ;  $f$  é a curva a ser ajustada cuja expressão é dada na Equação 3.3;  $v_1(k+1)$  é o ruído na observação cujas propriedades estatísticas estão dadas na Equação 3.2.

Definindo:

$$Y_1 \triangleq [y_1(1), y_1(2), \dots, y_1(m)] , \quad (3.7)$$



$$M_1 = \begin{bmatrix} g_1(1) & g_2(1) & \dots & g_n(1) \\ g_1(2) & g_2(2) & \dots & g_n(2) \\ \vdots & & & \\ g_1(m) & g_2(m) & \dots & g_n(m) \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

e

$$V_1 = [v(1) \quad v(2) \quad \dots \quad v(m)], \quad (3.9)$$

onde:

$$E[V_1] = 0, \quad (3.10)$$

$$E[V_1 V_1^T] = R_1,$$

então a Equação 3.6 pode ser expressa na seguinte forma vetorial:

$$Y_1 = M_1 x_1 + V_1. \quad (3.11)$$

Resumindo, o problema do ajuste da curva 3.3 a um conjunto de pontos correspondentes às medidas de uma determinada grandeza física de um sistema dinâmico foi colocado numa forma adequada à aplicação do filtro de Kalman para a estimação dos coeficientes que a determinam. Consideraram-se os coeficientes modelados pela Equação 3.5 com observações constituídas pelos pontos de dados, as quais foram modeladas pela Equação 3.11, ou seja:

$$x_1 = x_0 + \omega_0, \quad (3.12)$$

$$Y_1 = M_1 x_1 + V_1. \quad (3.13)$$

As equações do filtro de Kalman aplicadas a esse sistema tomam a forma de:

a) Equações para propagação:

$$\hat{x}_{1/0} = \Pi \hat{x}_{0/0} , \quad (3.14)$$

$$P_{1/0} = \Pi P_{0/0} \Pi^T + Q_0 . \quad (3.15)$$

b) Equações para atualização:

$$\hat{x}_{1/1} = \hat{x}_{1/0} + K_1 [Y_1 - M_1 \hat{x}_{1/0}] , \quad (3.16)$$

$$P_{1/1} = [\Pi - K_1 M_1] P_{1/0} , \quad (3.17)$$

onde:

$$K_1 = P_{1/0} M^T [M P_{1/0} M^T + R_1]^{-1} \quad (3.18)$$

Deduzir-se-á, a seguir, uma equação para o cálculo da matriz de covariância do erro do vetor, cujos elementos constituem-se das estimativas da grandeza física observada nos consecutivos instantes de amostragem, calculadas a partir da curva ajustada. Chame-se de  $\hat{Y}$  esse vetor e note-se que:

$$\hat{Y} = M_1 \hat{x}_{1/1} . \quad (3.19)$$

A matriz de covariância do erro em  $\hat{Y}$  é definida por:

$$\begin{aligned} P_{\hat{Y}} &\triangleq E\{[M_1 \hat{x}_{1/1} - M_1 x][M_1 \hat{x}_{1/1} - M_1 x]^T\} = \\ &= E\{[M_1(\hat{x}_{1/1} - x)][M_1(\hat{x}_{1/1} - x)]^T\} = \\ &= E\{M_1[\hat{x}_{1/1} - x][\hat{x}_{1/1} - x]^T M_1^T\} = M_1 E\{[\hat{x}_{1/1} - x][\hat{x}_{1/1} - x]^T\} M_1^T . \end{aligned}$$

Mas:

$$E\{[\hat{x}_{1/1} - x][\hat{x}_{1/1} - x]^T\} = P_{1/1} ;$$

Logo, a equação procurada fica dada por:

$$P_{\hat{y}} = M_1 \cdot P_{1/1} \cdot M_1^T \quad (3.20)$$

A resolução do problema de suavização da maneira colocada acima supõe que todos os pontos de dados já tenham sido coletados por ocasião da aplicação do filtro de Kalman para a determinação dos coeficientes. Durante o processo de filtragem os dados correspondentes aos vários instantes de amostragem são processados simultaneamente em uma única iteração. Note-se então que tudo se passa como se cada observação disponível, ou seja, cada ponto de dado, contivesse informações sobre os coeficientes da curva relativa a um único instante genérico, que se representou pelo índice 1. Isso é válido uma vez que se supõe que os coeficientes são constantes. Desse modo, verifica-se que os índices 0 e 1 foram introduzidos apenas com a finalidade de colocar o problema numa notação plausível e compatível com a utilizada pelas equações do filtro de Kalman, de modo a permitir a aplicação deste na sua resolução. A passagem do "instante" representado pelo índice 0 para o "instante" representado pelo índice 1 não implica variação de tempo com relação à dinâmica do sistema físico observado.

Devido a esse fato e visto que  $\hat{x}_{0/0}$  (a estimativa a priori do vetor de coeficientes) possui o mesmo valor que  $\hat{x}_{1/0}$  (a estimativa propagada do instante representado por 0 para o representado por 1), não existe um intervalo de tempo determinado relacionando esses dois instantes. O índice 0 pode representar qualquer instante anterior ao instante de processamento das observações, incluindo esse instante, enquanto o índice 1 pode representar qualquer instante após a disponibilidade de todos os elementos do vetor de observações. O mais lógico então é encarar esses índices apenas do ponto de vista de compatibilidade de notação, e a passagem do instante representado por 0 para o instante representado por 1 como não implicando nenhum intervalo de tempo, uma vez que ambos os instantes se confundem.

É importante notar que o cálculo do ganho de Kalman, conforme pode ser visto pela Equação 3.18, envolve a inversão de uma matriz  $m \times m$  e, se o número de pontos de dados for grande, esse cálculo poderá se tornar extremamente complicado e impreciso. Esse problema é solucionado através do emprego do processamento sequencial das observações, descrito no Capítulo 2, já que se supõe que as observações são não-correlacionadas, ou seja, que a matriz  $R_1$  é diagonal. Com a aplicação desse procedimento a inversão matricial é evitada, sendo substituída por inversões de escalares, uma por observação processada.

Para que se possa dar partida ao processo de estimação é necessário que se disponha de estimativas a priori dos coeficientes,  $\hat{x}_{0/0}$  e da respectiva matriz de covariância do erro,  $P_{0/0}$ . A inclusão do ruído aleatório  $\omega_0$  na equação com a qual se modelaram os coeficientes, Equação 3.5, tem o objetivo de criar uma faixa de incerteza em torno do valor da estimativa a priori dos coeficientes com dispersão representada por  $Q_0$ . Uma vez escolhida uma estimativa a priori dos coeficientes e da matriz de covariância do erro, note-se pela Equação 3.5 que o valor propagado da estimativa a priori dos coeficientes será o próprio valor escolhido; porém, pela Equação 3.15 percebe-se que o mesmo não ocorre com relação ao valor da matriz de covariância do erro propagada. O valor propagado dessa matriz é o valor da estimativa a priori,  $P_{0/0}$ , adicionado ao valor da matriz de covariância de  $\omega_0$ ,  $Q_0$ , ou seja:

$$P_{1/0} = P_{0/0} + Q_0 \quad (3.21)$$

Considere-se o problema de determinar a matriz  $Q_0$  de modo que sua adição à matriz de covariância do erro a priori resulte em uma matriz de covariância  $P_{1/0}$  compatível com o valor escolhido para a estimativa a priori  $\hat{x}_{0/0} = \hat{x}_{1/0}$ . Tudo se passaria então como se a partir de uma estimativa a priori de qualidade duvidável se passasse a obter uma nova estimativa a priori estatisticamente compatível.

Para a resolução desse problema, propõe-se para a determinação da matriz  $Q_0$  o emprego da técnica de ruído adaptativo em estimação de estado descrita no Capítulo 2. Com o emprego dessa técnica a matriz  $Q_0$ , e em consequência  $P_{1/0}$ , é estimada no sentido de satisfazer a hipótese fundamental de consistência entre o resíduo das observações e sua estatística. Para satisfazer a essa hipótese as variâncias do ruído dinâmico, constituídas pela diagonal principal da matriz  $Q_0$ , que por suposição é uma matriz diagonal, são estimadas de modo a maximizar a densidade de probabilidade de ocorrência do valor verdadeiro do resíduo de cada observação (Jazwinski, 1969). A adição da Matriz  $Q_0$  assim determinada à matriz de covariância do erro da estimativa a priori dos coeficientes,  $P_{0/0}$ , resulta em uma matriz propagada  $P_{1/0}$  coerente com os resíduos componentes do vetor:

$$RES_1 = Y_1 - M_1 \hat{x}_{1/0} . \quad (3.22)$$

A aplicação do procedimento de ruído adaptativo descrito no Capítulo 2 ao problema de ajuste fornece as seguintes equações:

a) Equações para propagação:

$$\hat{q}_{k+1/k} = \hat{q}_{k/k} , \quad (3.23)$$

$$P_{k+1/k}^q = P_{k/k}^q , \quad (3.24)$$

onde  $\hat{q}$  é o vetor  $n$  dimensional cujos elementos são as estimativas dos elementos da diagonal principal da matriz  $Q$ ;  $P^q$  é a matriz de covariância do erro na estimação do vetor  $q$ ; o índice  $k$  representa o instante genérico de amostragem  $t_k$ .

b) Equações para atualização:

$$\hat{q}_{k+1/k+1} = \hat{q}_{k+1/k} + K_{k+1}^q [Z_{k+1} - H_{k+1} \hat{q}_{k+1/k}] , \quad (3.25)$$

$$P_{k+1/k+1}^q = [I - K_{k+1}^q H_{k+1}] P_{k+1/k}^q, \quad (3.26)$$

Com observações modeladas por:

$$z_{k+1} = H_{k+1} q_{k+1} + \eta_{k+1}, \quad (3.27)$$

onde:

$$H_{k+1} = [M_{1(k+1,1)}^2 \quad M_{1(k+1,2)}^2 \quad \dots \quad M_{1(k+1,n)}^2], \quad (3.28)$$

em que o índice  $(i, \ell)$  representa o elemento da  $i$ -ésima linha e  $\ell$ -ésima coluna da matriz indexada,

$$E(\eta_{k+1}) = 0,$$

$$E[\eta_{k+1}^2] = 4r_{0_{k+1}}^2 \cdot r_{k+1} + 2r_{k+1}^2, \quad (3.29)$$

com

$$r_{0_{k+1}} = y_1(k+1) - M_{1(k+1)} \cdot \hat{x}_{1/0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad (3.30)$$

onde  $y_1(k+1)$  representa a observação correspondente ao instante  $t_{k+1}$  e  $M_{1(k+1)}$  a  $k+1$ -ésima linha da matriz  $M_1$ ,

o valor da observação  $z_{k+1}$  é calculado por:

$$z_{k+1} = r_{0_{k+1}}^2 + r_{k+1} - M_{1(k+1)} P_{0/0} M_{1(k+1)}^T, \quad (3.31)$$

e

$$K_{k+1}^q = P_{1/0}^q H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{1/0}^q H_{k+1}^T + 4r_{0_{k+1}}^2 r_{k+1} + 2r_{k+1}^2]^{-1}. \quad (3.32)$$

O processo de estimação do vetor  $q$ , formado pelos elementos da diagonal principal da matriz  $Q$ , é feita com o processamento sequencial de todas as  $m$  componentes do vetor de observações.

Através do emprego da técnica de ruído adaptativo, cria-se uma comodidade maior na escolha dos valores das estimativas a priori necessárias à aplicação do procedimento. É, porém, razoável que se faça essa escolha de modo consciente. Por exemplo, deve-se procurar efetua-la fundamentado em informações que se possam obter a partir do conhecimento do tipo de curva a ser ajustada, bem como do conjunto de observações. Para exemplificar, suponha-se que a curva seja um polinômio em  $t$ , ou seja, as funções  $g_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  que aparecem na representação genérica da curva dada na Equação 3.3 formam uma série de potências em  $t$ . Têm-se, então:

$$f(x, t) = x_{(1)} + x_{(2)}(t - t_0) + x_{(3)}(t - t_0)^2 + \dots + x_{(n)}(t - t_0)^{n-1}, \quad (3.33)$$

onde os índices  $(1)$ ,  $(2)$ ,  $\dots$ ,  $(n)$  se referem às componentes do vetor de coeficientes, não devendo ser confundidos com os índices sem parênteses, usados a partir da Equação 3.5.

Se o instante de referência  $t_0$  for considerado o instante correspondente ao primeiro ponto do conjunto de dados ao qual o ajuste deve ser feito, o que não acarreta perda de generalidade, então para  $t = t_0$  tem-se:

$$f(x, t_0) = x_{(1)}, \quad (3.34)$$

ou seja, o valor do primeiro coeficiente da curva ajustada será a própria estimativa do valor esperado do primeiro ponto de dado  $y_{(1)}$ . Então, os valores do primeiro ponto de dados  $y_{(1)}$  e da variância da respectiva incerteza  $v_{(1)}$  podem ser considerados as estimativas a priori do coeficiente  $x_1$  e sua variância do erro, respectivamente. Como o polinômio ajustado

deve constituir uma s\u00e9rie convergente, sugere-se tomar as estimativas dos coeficientes subsequentes a partir da estimativa do primeiro dividida por pot\u00eancias de 10 e das respectivas vari\u00e2ncias, a partir da vari\u00e2ncia da incerteza  $v_{(1)}$ , dividida por pot\u00eancias de 100. Os valores a priori seriam, ent\u00e3o:

$$\hat{x}_{0/0} = \hat{x}_{1/0} = \begin{bmatrix} y_{(1)} \\ y_{(1)}/10 \cdot ut \\ y_{(1)}/10^2 \cdot (ut)^2 \\ \vdots \\ y_{(1)}/10^{n-1} \cdot (ut)^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

e

$$P_{0/0} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_{(1)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{y_{(1)}/10^2 \cdot (ut)^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{y_{(1)}/10^{(n-1)^2} \cdot (ut)^{(n-1)^2}} \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

onde  $ut$  representa a unidade de tempo utilizada.

Outro fator importante refere-se ao grau de curva a ser ajustada. Como j\u00e1 foi comentado anteriormente, nos m\u00e9todos usualmente utilizados existe uma escolha de compromisso. A escolha de um grau muito alto implica uma suaviza\u00e7\u00e3o pobre na qual componentes indesej\u00e1veis de ru\u00eddo de alta frequ\u00eancia podem estar presentes na curva ajustada. Por outro lado, se o grau for muito baixo poder-se-\u00e3o cortar componentes de alta frequ\u00eancia que ainda n\u00e3o sejam ru\u00eddo, acarretando perda de informa\u00e7\u00e3o. No caso do m\u00e9todo apresentado, a escolha do grau se torna autom\u00e1tica. Inicialmente, aplica-se a solu\u00e7\u00e3o descrita no ajuste de uma curva de primeiro grau. Verifica-se ent\u00e3o se:



$$|y(t_k) - f(t_k, x)| \leq 3 \sqrt{r_k} \quad , \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.37)$$

Se a desigualdade acima não se verificar, incrementa-se o grau da curva de 1 unidade e repete-se o procedimento de estimação dos coeficientes. Repete-se o processo até que pela primeira vez essa desigualdade se verifique. Quando isso ocorrer, ter-se-á o resíduo estimado da mesma ordem do resíduo verdadeiro e a curva ajustada deverá, desse modo, aproximar bem o valor real da grandeza medida.

### 3.3 - ADAPTAÇÃO DO PROCEDIMENTO DESENVOLVIDO PARA PERMITIR AJUSTE DE CURVA EM TEMPO REAL

Conforme foi descrito na Seção 2.5 do capítulo anterior, se as componentes do ruído nas observações forem não-correlacionadas entre si, então cada componente do vetor de observações pode ser processada separadamente. Considerou-se, então, o problema de ajuste de curva a um conjunto de dados, descrito na seção anterior, no qual se fez a hipótese de não-correlação entre as componentes do vetor de observações e se supôs que todos os dados, aos quais o ajuste seria feito, já estivessem disponíveis por ocasião da aplicação do procedimento de suavização. Aqui, ao contrário, suponha-se que se deseja processar cada dado tão logo este se torne disponível. Se isso for feito, a medida que cada dado é processado, os valores dos coeficientes sofrem variações a fim de que a curva ajustada passe a incluir mais um ponto. Durante o processo de estimação, neste caso, tudo se passa como se os coeficientes variassem dinamicamente durante os intervalos entre instantes de amostragem de dados. Pode-se então modelar matematicamente o vetor de coeficientes,  $x$ , por:

$$x_{k+1} = x_k + \omega_k \quad , \quad k \geq 0 \quad , \quad (3.38)$$

onde o índice  $k$  pode agora ser relacionado diretamente com os instantes de amostragem de observações; por esse motivo substituiu-se a notação utilizada na seção anterior,  $x_1(k+1)$ , por  $x_{k+1}$ . Efetuando o mesmo com a Equação 3.11 de observações e lembrando que aqui as observações

são escalares, constituídas pelas sucessivas componentes do vetor de observações, dado nessa equação, tem-se:

$$y_{k+1} = f(x_{k+1}, t_{k+1}) + v_{k+1} = M'_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1}, \quad (3.39)$$

onde:

$$M'_{k+1} = [g_1(k+1) \ g_2(k+1) \ \dots \ g_n(k+1)]. \quad (3.40)$$

Deve ainda ser destacada que o termo forçante aleatório,  $\omega_k$ , que aparece na Equação 3.38 visa criar uma faixa de incerteza em torno do valor da última atualização dos coeficientes. Se sua dispersão for calculada, como descrito na seção anterior, de modo a criar uma coerência entre  $\bar{x}_{k+1/k} = \bar{x}_{k/k}$  e a correspondente matriz de covariância propagada  $P_{k+1/k} = P_{k/k} + Q_k$ , então ter-se-ão criado condições para que no processamento da observação  $y_{k+1}$  se retirem as informações necessárias a fim de acomodar os valores dos coeficientes à inclusão de mais esse ponto no ajuste. Como aqui também valem todas as hipóteses efetuadas na seção anterior, a matriz de covariância de  $\omega_k$  :  $Q_k$  é diagonal e o vetor constituído pelos elementos da diagonal principal dessa matriz serão estimados para cada instante de amostragem através do procedimento de ruído adaptativo descrito na Seção 2.6. Com isso a matriz  $Q$  e, portanto, a matriz de covariância do erro das estimativas  $P_{k+1/k}$  serão calculadas de modo a satisfazer a hipótese fundamental de consistência entre o resíduo das observações e sua estatística. Assim, aos valores dos elementos da matriz de covariância do erro não é permitido cair enganosamente, devido ao uso de modelo determinístico não-exato. Como o ganho de Kalman é diretamente proporcional à matriz de covariância do erro, esse ajuste adaptativo da matriz de covariância ajusta também o valor do ganho, o que permite que na atualização seja retirado o máximo possível de informações contidas em cada observação sobre as variáveis estimadas, evitando a divergência do filtro.

As equações do filtro de Kalman para o processamento sequencial dos pontos de dado tomam a seguinte forma:

a) Equações para propagação do valor dos coeficientes e respectiva matriz de covariância do erro entre instantes de amostragem de dados:

$$\hat{x}_{k+1/k} = \hat{x}_{k/k} , \quad (3.41)$$

$$P_{k+1/k} = P_{k/k} + Q_k . \quad (3.42)$$

b) Equações para atualização:

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} [y_{k+1} - M'_{k+1} \hat{x}_{k+1/k}] , \quad (3.43)$$

$$P_{k+1/k+1} = [\Pi - K_{k+1} M'_{k+1}] P_{k+1/k} , \quad (3.44)$$

onde:

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} M'^T_{k+1} [M'_{k+1} P_{k+1/k} M'^T_{k+1} + r_{k+1}]^{-1} . \quad (3.45)$$

Procedendo de modo análogo ao descrito no caso anterior (processamento em lotes) chega-se à seguinte equação para o cálculo da variância do erro de cada ponto estimado pela curva ajustada:

$$P_{\hat{y}_{k+1}} = M'_{k+1} P_{m/m} M'^T_{k+1} . \quad (3.46)$$

Com a aplicação da técnica de ruído adaptativo em estimação de estado para a estimação da matriz  $Q_k$ , obtêm-se as seguintes equações:

a) Equações para propagação:

$$\hat{q}_{k+1/k} = \hat{q}_{k/k} , \quad (3.47)$$

$$P^q_{k+1/k} = P^q_{k/k} ,$$

onde  $\hat{q}$  é o vetor n dimensional cujos elementos são as estimativas dos elementos da diagonal principal da matriz  $Q_k$ ;  $P^q$  é a matriz de covariância do erro na estimação do vetor  $q$ .

b) Equações para atualização:

$$\hat{q}_{k+1/k+1} = \hat{q}_{k+1/k} + K_{k+1}^q [Z_{k+1} - H_{k+1} \hat{q}_{k+1/k}] , \quad (3.49)$$

$$P_{k+1/k+1}^q = [I - K_{k+1}^q H_{k+1}] P_{k+1/k}^q , \quad (3.50)$$

com observações modeladas por:

$$Z_{k+1} = H_{k+1} q_{k+1} + \eta_{k+1} , \quad (3.51)$$

onde:

$$H_{k+1} = [M_{k+1(1)}^{i2} \quad M_{k+1(2)}^{i2} \quad \dots \quad M_{k+1(n)}^{i2}] , \quad (3.52)$$

onde o índice (i) representa a i-ésima componente de  $M_{k+1}^i$ .

$$E(\eta_{k+1}) = 0 , \quad (3.53)$$

$$E[\eta_{k+1}^2] = 4r_{0_{k+1}}^2 \cdot r_{k+1} + 2r_{k+1}^2 ,$$

com

$$r_{0_{k+1}} = y_{k+1} - M_{k+1}^i \hat{x}_{k+1/k} . \quad (3.54)$$

O valor da observação  $Z_{k+1}$  é calculado por:

$$Z_{k+1} = r_{0_{k+1}}^2 + r_{k+1} - M_{k+1}^i P_{k/k} M_{k+1}^{iT} \quad (3.55)$$

e

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{k+1}^q &= P_{k+1/k}^q H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1/k}^q H_{k+1}^T + \\
 &+ 4r_{0k+1}^2 r_{k+1} + 2r_{k+1}^2]^{-1} .
 \end{aligned}
 \tag{3.56}$$

Na prática, o número de pontos,  $N$ , aos quais o ajuste será feito é fixado a priori. O procedimento de ajuste de curva é então aplicado sucessivamente a cada conjunto de  $N$  pontos de dados. É razoável, pois, tomar estimativas a priori de  $\hat{x}_{k/k}$ ,  $P_{k/k}$ ,  $\hat{q}_{k/k}$  e  $P_{k/k}^q$ , com base no que foi comentado por ocasião da descrição do método de ajuste com processamento de observações aos lotes ("batch"), por ocasião do ajuste ao primeiro conjunto de dados. Para os próximos ajustes o razoável é tomar como estimativas a priori os valores obtidos como resultados do ajuste efetuado ao conjunto anterior, além de utilizar o mesmo grau ali encontrado para a curva. A escolha desse grau é razoável desde que a variação dinâmica da grandeza física representada pelos dados não se altere muito entre conjuntos de dados consecutivos. Se os sucessivos conjuntos de dados puderem ser suavizados por uma curva de mesmo grau, então o ajuste poderá ser feito em tempo real, visto que não haverá necessidade de repetição do processamento das observações para a escolha de um novo grau. Essa característica de processamento em tempo real na aplicação do procedimento de ajuste é inédita entre os procedimentos pesquisados na literatura para essa finalidade.

Deve ainda ser salientado que as supostas variações dos coeficientes para que o ajuste acomode mais um ponto de dado à medida que cada observação é processada pode se constituir de variações de caráter tendencioso, não consideradas no modelo matemático adotado para os coeficientes dado na Equação 3.38. O modelo que inclui essas tendências pode ser escrito por:

$$x_{k+1} = x_k + \psi_k + \omega_k ,
 \tag{3.57}$$

onde  $\psi_k$  representa o erro tendencioso desconhecido que se comete com a utilização do Modelo 3.38. Existe um corolário de um teorema de conver

gência do filtro de Kalman apresentado em Jazwinski (1970), segundo o qual: Se o modelo do sistema  $\bar{e}$  uniforme e completamente observável e uniforme e completamente controlável, e se  $\psi_k$   $\bar{e}$  uniformemente limitado e  $P_0$   $\bar{e}$  limitada, então  $P_{k/k}$   $\bar{e}$  uniformemente limitada, ou seja, o filtro converge.

A fim de dar a condição para que o modelo seja uniforme e completamente observável, defina-se a matriz de informação por:

$$\phi_{k,1} \triangleq \sum_{i=1}^k \phi_{i,k}^T M_i^T R_i^{-1} M_i \phi_{i,k}, \quad (3.58)$$

onde  $\phi_{i,k}$   $\bar{e}$  a matriz de transição de estado do sistema que leva o estado do instante  $k$  para o instante  $i$ . No caso do Sistema 3.38, essa matriz  $\bar{e}$  a matriz identidade.

Com base nessa definição, o sistema será uniforme e completamente observável se existirem um número inteiro positivo  $N$  e duas constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta$ , tal que:

$$0 < \alpha I \leq \phi_{k,k-N} \leq \beta I, \quad \forall k > N. \quad (3.59)$$

O modelo matemático para os coeficientes expressos na Equação 3.29 possui essa propriedade, pois para ele tem-se:

$$\phi_{k,k-N} = \sum_{i=k-N}^k M_i^T R_i^{-1} M_i, \quad (3.60)$$

visto que  $M_i$  dado na Equação 3.40 em geral  $\bar{e}$  constituído por funções do tempo positivas e limitadas, e  $R_i$ , no caso, por um escalar positivo também limitado.

A condição de que o sistema seja uniforme e completamente controlável  $\bar{e}$  dada a partir da seguinte definição da matriz de controlabilidade do sistema (Jazwinski, 1970):

$$C(k,0) \triangleq \sum_{i=0}^{k-1} \phi(k,i+1) \Gamma(i) Q_{i+1} \Gamma^T(i) \phi^T(k, i+1) . \quad (3.61)$$

O sistema  $\bar{e}$  uniforme e completamente controlável se existe um inteiro positivo  $N$  e duas constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta$ , tal que:

$$0 < \alpha I \leq C(k, k-N) \leq \beta I.$$

No caso presente, a matriz de controlabilidade  $C(k, k-N)$  é dada por:

$$C(k, k-N) = \sum_{i=k-N}^k Q_{i+1} .$$

Como  $Q_{i+1}$  é uma matriz de elementos positivos, essa condição também é satisfeita.

Desse modo, visto que o modelo adotado para os coeficientes satisfaz as condições de uniforme e completamente observável e uniforme e completamente controlável, desde que  $\psi_k$  seja uniformemente limitado, também o será a matriz  $P_{k/k}$  e o filtro convergirá.

Tanto o procedimento para ajuste de curva com processamento dos dados em lotes quanto o sequencial foram testados na suavização de dados simulados de rastreamento de um satélite artificial. Para a geração desses dados simulou-se a órbita do satélite TD-1A (European Space Agency (ESA)). Considerando uma estação de rastreamento fictícia, calculou-se a cada segundo de órbita, da órbita simulada, a distância entre essa estação e o satélite. A cada valor da distância estação satélite assim obtida somou-se um erro aleatório de média nula e desvio padrão de 50 metros, calculado a partir de uma rotina geradora de números aleatórios. Maiores detalhes sobre o procedimento de simulação de órbita e geração de dados tipo distância estação-satélite são dados no próximo capítulo. Os resultados obtidos nos testes efetuados serão apresentados na próxima seção.

### 3.4 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

#### 3.4.1 - RESULTADOS OBTIDOS COM A APLICAÇÃO DO PROCEDIMENTO DE AJUSTE COM PROCESSAMENTO DOS DADOS EM LOTE

Primeiramente são apresentados os resultados obtidos com a aplicação descrita para o procedimento de ajuste com processamento dos dados em lote. A curva ajustada foi uma série polinomial de potências do tempo, conforme representado na Equação 3.3. As estimativas a priori das matrizes de covariância do erro nas estimativas dos coeficientes,  $P_{0/0}$ , e do ruído aleatório,  $\omega_0$ ,  $P_{0/0}^q$ , foram tomadas de acordo com a Equação 3.36, adotando-se para o primeiro elemento da diagonal dessas matrizes os valores 0,01 e  $10^{-30}$ , respectivamente. As estimativas a priori tanto do vetor de coeficientes,  $\hat{x}_{0/0}$ , quanto do vetor formado pelos elementos da diagonal principal da matriz Q,  $\hat{q}_{0/0}$  foram consideradas nulas. O procedimento foi aplicado primeiramente a 20 pontos de dados. Para esse caso, o grau da curva ajustada que primeiro satisfizesse a Condição 3.37 foi o segundo. A Figura 3.1 apresenta os resultados obtidos nessa aplicação. A Figura 3.1a mostra a curva real da distância estação-satélite e a curva obtida no procedimento de ajuste traçadas sobrepostas em um único gráfico. Devido à ordem de grandeza dessa distância em relação à ordem de grandeza dos erros não se consegue distinguir no gráfico essas curvas. Na Figura 3.1b foram plotados os erros aleatórios com os quais foram contaminados os valores reais das observações simuladas da distância estação-satélite. Como já foi dito, esses valores foram obtidos através de uma rotina geradora de números aleatórios, considerando um desvio padrão de 50 metros. Note-se que os picos da curva apresentada, correspondentes aos valores discretos dos erros aleatórios utilizados, mantêm-se na faixa  $\pm 3\sigma$ , ou seja, no intervalo  $[-150, +150\text{m}]$ . A Figura 3.1c apresenta a curva obtida para os desvios entre a curva real da grandeza medida e a curva de grau 2 ajustada aos pontos de dados. Note-se que agora os erros já não apresentam a característica de um erro aleatório, isto é, os pontos calculados pela curva, correspondentes aos instantes de amostragem dos dados, apresentam desvios em relação à curva real alinhados segundo uma curva suave que mantém, na maior parte do intervalo, valores menores que 25 metros.



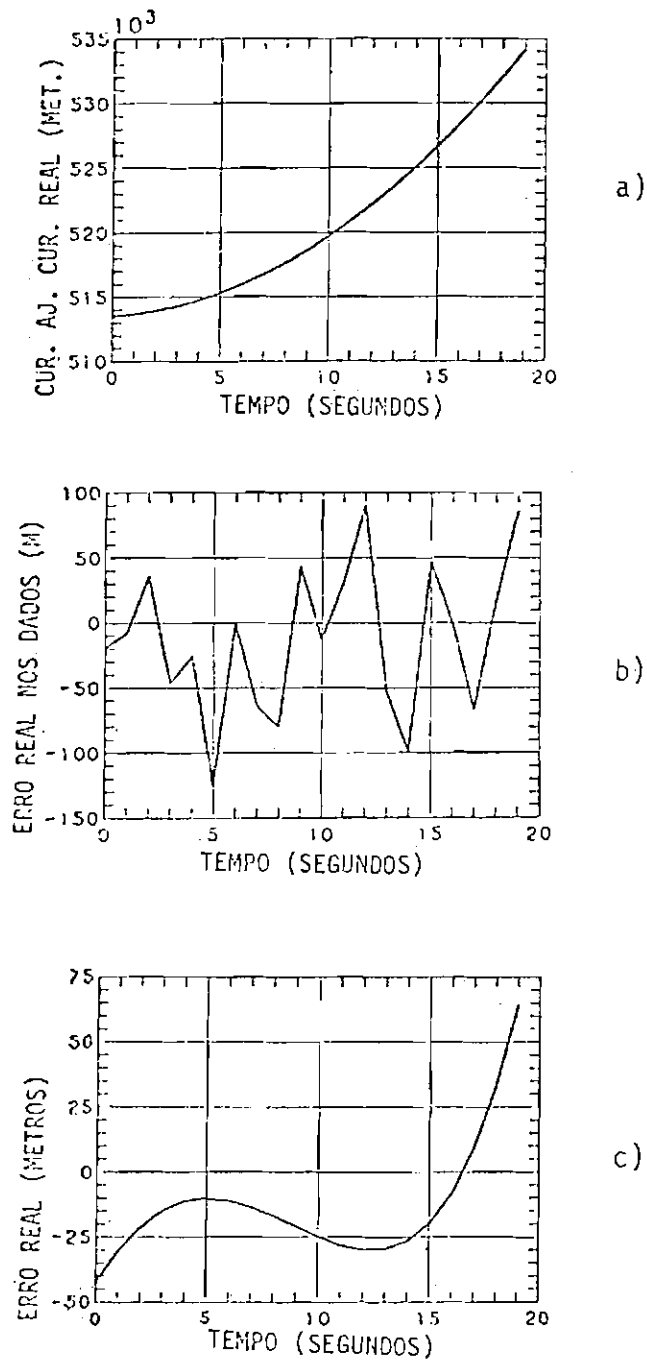


Fig. 3.1 - Resultados obtidos no ajuste de curva a vinte pontos de dados, com processamento em lotes:

a) curvas ajustada e real sobrepostas; b) erro aleatório nos dados; c) erro real no ajuste.

Para a estimativa do vetor de coeficientes e respectiva matriz de covariância do erro, obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\hat{\bar{x}}_{1/1} = \begin{bmatrix} 513479.948 \text{ m} \\ 103.149635 \text{ m/s} \\ 51.6501758 \text{ m/s}^2 \end{bmatrix},$$

e

$$P_{1/1} = \begin{bmatrix} 926.859127 \text{ m}^2 & -189.889623 \text{ m}^2/\text{s} & 8.11424315 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ -189.889623 \text{ m}^2/\text{s} & 55.1479525 \text{ m}^2/\text{s}^2 & -2.70461015 \text{ m}^2/\text{s}^3 \\ 8.11424315 \text{ m}^2/\text{s}^2 & -2.70461015 \text{ m}^2/\text{s}^3 & 0.142345747 \text{ m}^2/\text{s}^4 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, os resultados obtidos para a variância do erro dos pontos estimados pela curva, correspondentes aos instantes de amostragem dos dados, isto é, para  $t = 1, 2, \dots, 20$  segundos, estão apresentados na Tabela 3.1.

TABELA 3.1

VARIÂNCIAS DO ERRO NOS PONTOS DE DADOS ESTIMADOS PELA CURVA  
AJUSTADA A 20 PONTOS, COM PROCESSAMENTO EM LOTE

TEMPO (seg)	VARIÂNCIA (metros <sup>2</sup> )	TEMPO (seg)	VARIÂNCIA (metros <sup>2</sup> )
1	926.85912674	11	280.947709061
2	613.18944417	12	270.248370038
3	411.810157802	13	252.264085057
4	295.390392758	14	233.82658549
5	240.015572079	15	225.185392837
6	225.187416741	16	240.004088187
7	233.823945659	17	295.364042576
8	252.259475626	18	411.762552346
9	270.244621405	19	613.11321114
10	280.946295677	20	926.74591126

Comparando os valores das variâncias apresentados na ta bela acima com os erros reais dos pontos correspondentes, calculados pela curva ajustada, apresentados graficamente na Figura 3.1c, nota-se que existem coerências estatísticas entre os erros e respectivas variâncias. Note-se, ainda, que os valores dessas variâncias são bem menores que os da variância do erro dos dados iniciais ( $2500 \text{ m}^2$ ), que era cons tante para todos os pontos. Isso era de se esperar, visto que a curva foi ajustada a partir das informações contidas em todas as observações da grandeza medida, ou seja, em todos os pontos de dados tomados para o ajuste.

A seguir, o procedimento foi aplicado a conjuntos de 40, 60, 80 e 100 pontos de dados. Como os resultados foram em todos os ca sos satisfatórios, sã serã apresentadas as curvas análogas às apresen tadas na Figura 3.1, bem como os valores do grau da curva que primeiro satisfez a Condição 3.37 e das estimativas dos coeficientes.

A Figura 3.2 apresenta os resultados da aplicação a 40 pontos de dados. Valem aqui os mesmos comentários efetuados acima por ocasião da apresentação dos resultados obtidos na aplicação do procedi mento a 20 pontos de dados, visto que, também no caso presente, os re sultados são igualmente satisfatórios. Deve ser aqui destacado, porém, que a curva ajustada é de terceiro grau, pois foi este o menor grau que satisfez a Condição 3.37.

Os valores encontrados para a estimativa do vetor de coe ficientes foram os seguintes:

$$\hat{\bar{x}}_{1/1} = \begin{bmatrix} 513526.670 \text{ m} \\ 68.3072583 \text{ m/s} \\ 56.4228497 \text{ m/s}^2 \\ -0.169241391 \text{ m/s}^3 \end{bmatrix} .$$

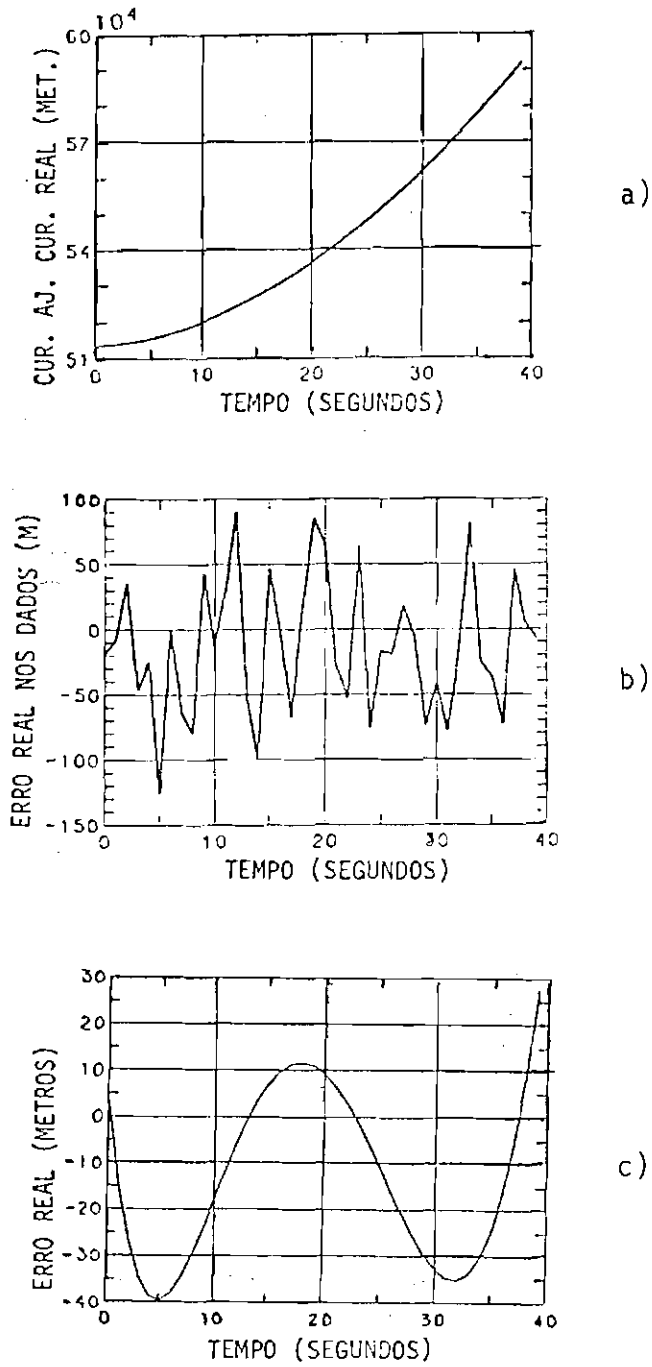


Fig. 3.2 - Resultados obtidos no ajuste de curva a quarenta pontos de dados, com processamento em lotes:

a) curvas ajustada e real sobrepostas; b) erro aleatório nos dados; c) erro real no ajuste.

Na Figura 3.3 apresentam-se os resultados obtidos para o ajuste de curva a 60 pontos de dados. Também nesse caso o menor grau que satisfaz a Condição 3.37 foi 3.

Foram os seguintes os valores encontrados para a estimativa do vetor de coeficientes:

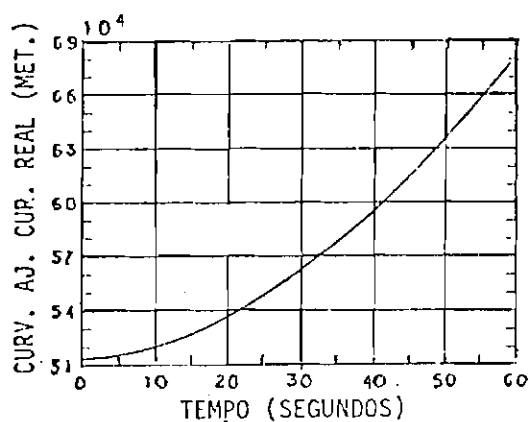
$$\hat{\bar{x}}_{1/1} = \begin{bmatrix} 513605.785 \text{ m} \\ 41.2710223 \text{ m/s} \\ 58.1817114 \text{ m/s}^2 \\ -0.198756530 \text{ m/s}^3 \end{bmatrix} .$$

Para o ajuste a 80 pontos de dados o grau da curva ajustada foi 4, e os resultados encontram-se apresentados na Figura 3.4.

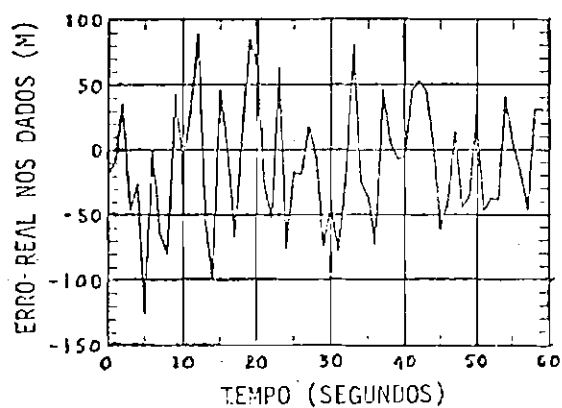
Neste caso os valores obtidos para a estimativa do vetor de coeficientes foi o seguinte:

$$\hat{\bar{x}}_{1/1} = \begin{bmatrix} 513620.115 \text{ m} \\ 35.2379715 \text{ m/s} \\ 58.6489415 \text{ m/s}^2 \\ -0.210126444 \text{ m/s}^3 \\ 0.000082903 \text{ m/s}^4 \end{bmatrix} .$$

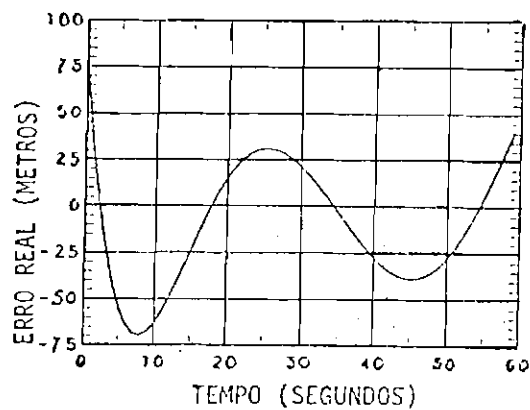
Finalmente, no ajuste a 100 pontos de dados, a curva ajustada foi de 5º grau, apresentando-se os resultados na Figura 3.5.



a)



b)



c)

Fig. 3.3 - Resultados obtidos no ajuste de curva a sessenta pontos de dados, com processamento em lotes:

a) curvas ajustada e real sobrepostas; b) erro aleatório nos dados; c) erro real no ajuste.

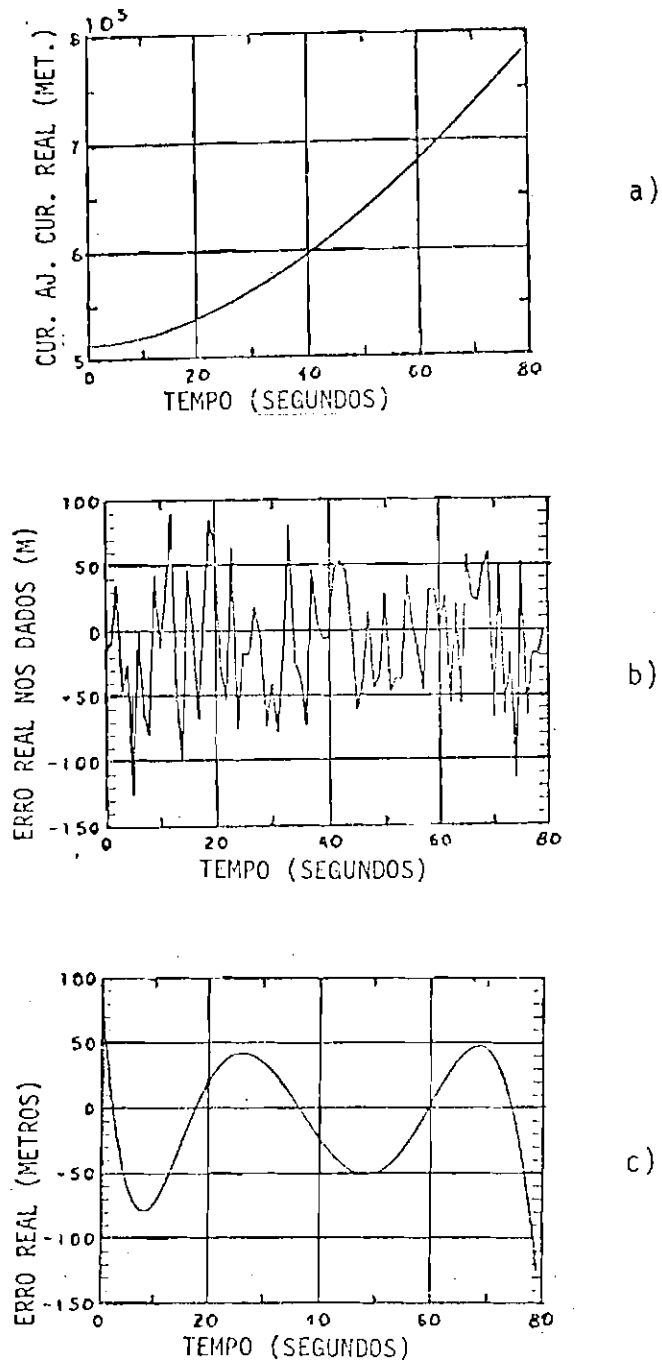
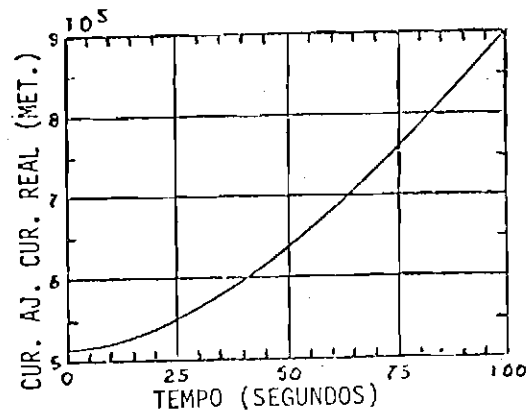
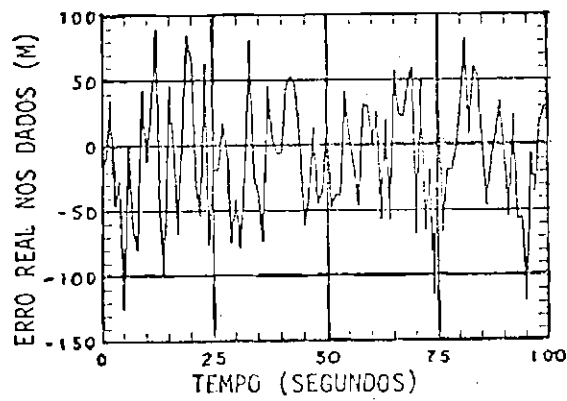


Fig. 3.4 - Resultados obtidos no ajuste de curva a oitenta pontos de dados, com processamento em lotes:

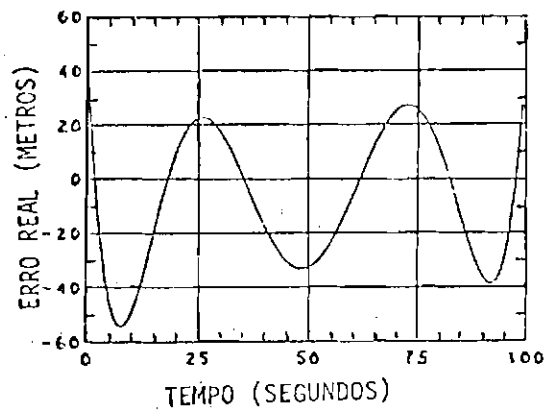
- a) curvas ajustada e real sobrepostas;
- b) erro aleatório nos dados;
- c) erro real no ajuste.



a)



b)



c)

Fig. 3.5 - Resultados obtidos no ajuste de curvas a cem pontos de dados, com processamento em lotes:

a) curvas ajustadas e real sobrepostas; b) erro aleatório nos dados; c) erro real no ajuste.



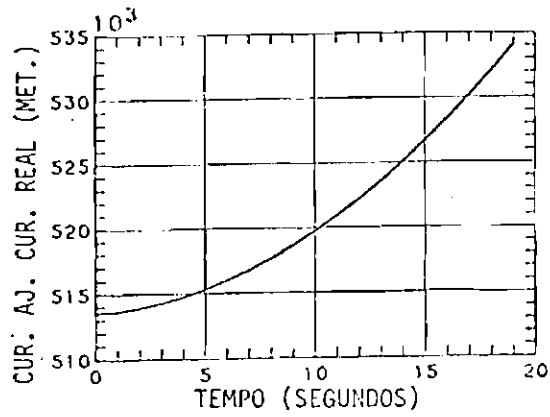
Encontrou-se neste último teste a seguinte estimativa para o vetor de coeficientes da curva:

$$\hat{x}_{1/1} = \begin{bmatrix} 513570.033 \\ 56.6224806 \\ 56.6442602 \\ -0.139296052 \\ -0.0009697764 \\ 0.0000055545 \end{bmatrix} .$$

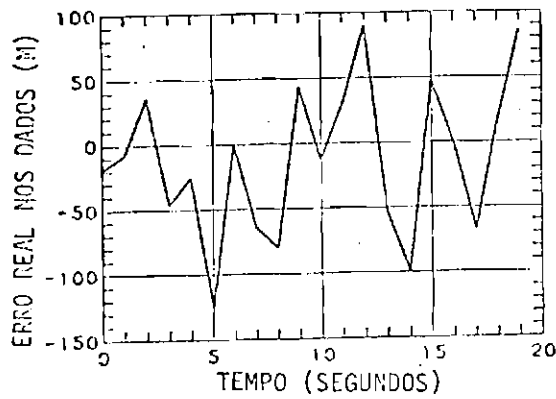
### 3.4.2 - RESULTADOS OBTIDOS COM A APLICAÇÃO DO PROCEDIMENTO DE AJUSTE COM PROCESSAMENTO SEQUENCIAL DOS DADOS

Os resultados obtidos com a aplicação do procedimento desenvolvido aos mesmos dados simulados de rastreamento de satélite do caso anterior, procedimento este que se utiliza de processamento sequencial dos dados, foram praticamente os mesmos obtidos a partir da técnica com processamento em lotes dos dados para ajuste de curva via filtro de Kalman. Esses resultados serão aqui apresentados a título de comparação, confirmando a validade do procedimento sequencial de ajuste e mostrando que se pode efetuar ajuste de curva em tempo real com a mesma eficiência do ajuste com processamento de dados em lotes.

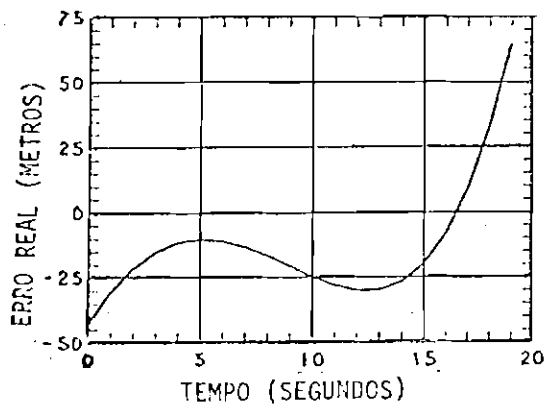
A Figura 3.6 apresenta os resultados obtidos na aplicação da técnica a 20 pontos de dados. Como no caso anterior, a curva de menor grau que satisfaz a Condição 3.37 foi a de 2º grau. Comparando as curvas apresentadas nessa figura com as análogas apresentadas na Figura 3.1, percebe-se que os resultados são praticamente os mesmos.



a)



b)



c)

Fig. 3.6 - Resultados obtidos no ajuste de curva a vinte pontos de dados, com processamento sequencial:

a) curvas ajustada e real sobrepostas; b) erro aleatório nos dados; c) erro real no ajuste.

A estimativa do vetor de coeficientes e correspondente matriz de covariância após o processamento do último ponto foi a seguinte:

$$\hat{x}_{20/20} = \begin{bmatrix} 513479.948 \text{ m} \\ 103.149634 \text{ m/s} \\ 51.6501758 \text{ m/s}^2 \end{bmatrix},$$

e

$$P_{20/20} = \begin{bmatrix} 926.859132 \text{ m}^2 & -189.889623 \text{ m}^2/\text{s} & 8.11424313 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ -189.889623 \text{ m}^2/\text{s} & 55.1479525 \text{ m}^2/\text{s}^2 & -2.70461015 \text{ m}^2/\text{s}^3 \\ 8.11424313 \text{ m}^2/\text{s}^2 & -2.70461015 \text{ m}^2/\text{s}^3 & 0.142345747 \text{ m}^2/\text{s}^4 \end{bmatrix}.$$

Para a variância do erro dos pontos estimados pela curva obtiveram-se neste caso os seguintes valores, apresentados na Tabela 3.2.

TABELA 3.2

VARIÂNCIAS DO ERRO NOS PONTOS DE DADOS ESTIMADOS PELA CURVA AJUSTADA  
A 20 PONTOS, COM PROCESSAMENTO SEQUENCIAL

TEMPO (seg)	VARIÂNCIA (metros)	TEMPO (seg)	VARIÂNCIA (metros)
1	926.85913197	11	280.94771387
2	613.18944969	12	270.248374367
3	411.810163572	13	252.264088915
4	295.390398708	14	233.8269618
5	240.01557814	15	225.185395529
6	225.187422824	16	240.004090185
7	233.82395165	17	295.364044063
8	252.259481472	18	411.762553186
9	270.24462699	19	613.11321174
10	280.946300935	20	926.74591165

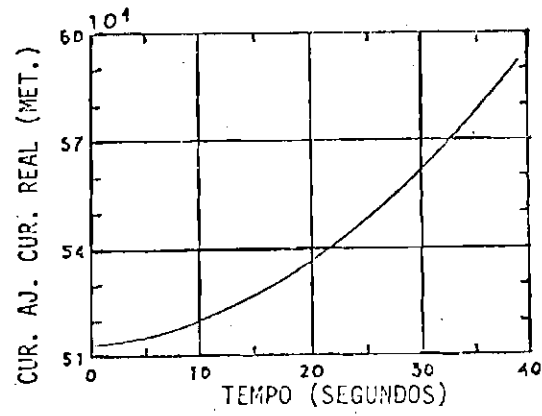
Deve ser notado que todos os valores acima apresentados são praticamente iguais aos valores correspondentes apresentados para o processamento em lotes, a menos de algumas variações nas últimas casas decimais.

Foram também efetuados testes com 40, 60, 80 e 100 pontos de dados, obtendo-se resultados equivalentes aos que se apresentam para esses números de pontos, obtidos com a aplicação da técnica com processamento em lotes. Na Figura 3.7 apresentam-se os resultados correspondentes à aplicação a 40 pontos. A curva ajustada nesse caso foi de 30 grau.

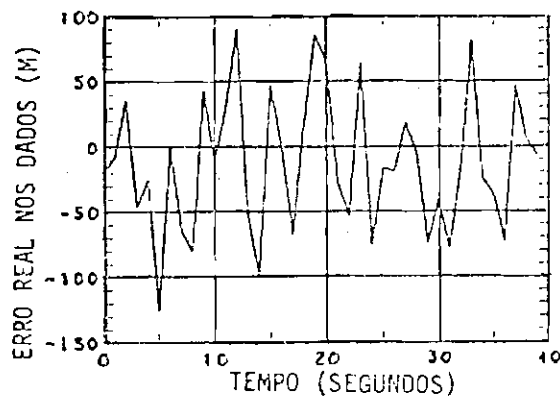
Para a estimativa do vetor de coeficientes foram encontrados, neste caso, os valores:

$$\hat{\bar{x}}_{40/40} = \begin{bmatrix} 513526.670 \text{ m} \\ 68.3072584 \text{ m/s} \\ 56.4228497 \text{ m/s}^2 \\ -0.169241391 \text{ m/s}^3 \end{bmatrix} .$$

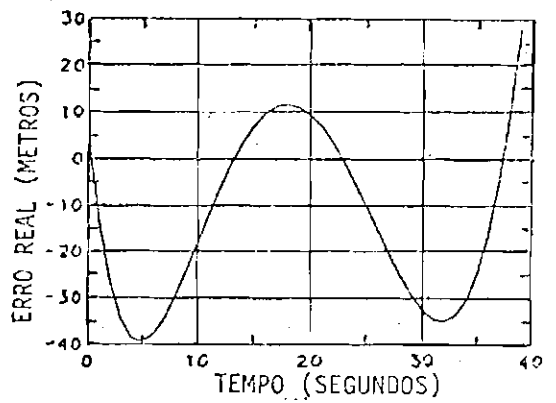
A seguir, na Figura 3.8 são apresentados os resultados obtidos no ajuste a 60 pontos de dados, onde a curva ajustada foi de 30 grau.



a)



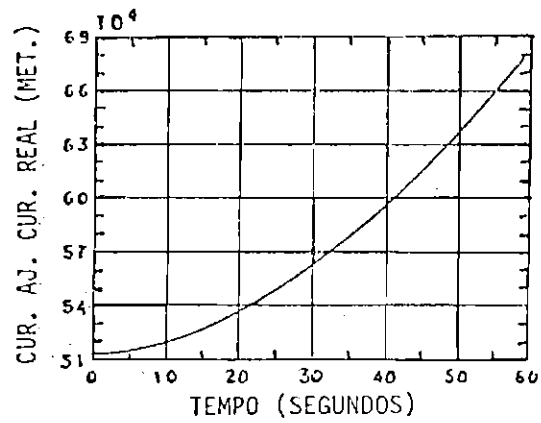
b)



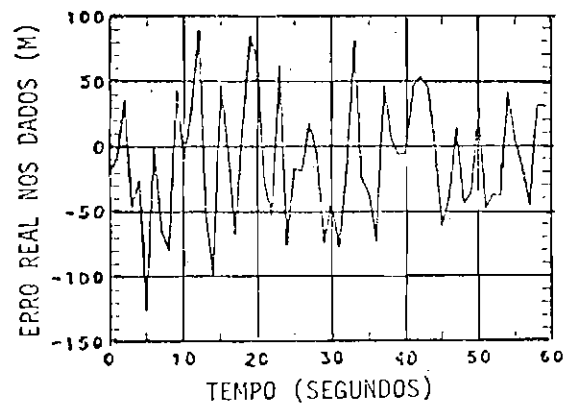
c)

Fig. 3.7 - Resultados obtidos no ajuste de curva a quarenta pontos de dados, com processamento sequencial:

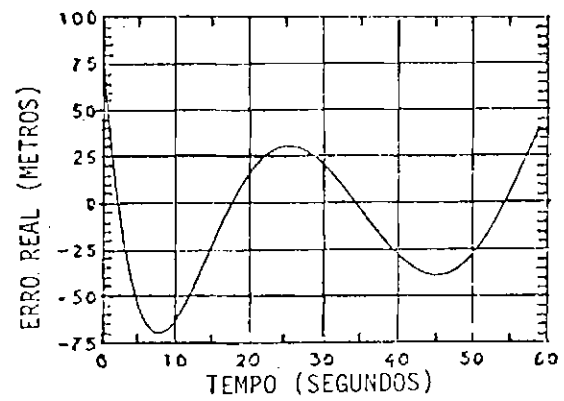
a) curvas ajustada e real sobrepostas; b) erro aleatório nos dados; c) erro real no ajuste.



a)



b)



c)

Fig. 3.8 - Resultados obtidos no ajuste de curva a sessenta pontos de dados, com processamento sequencial:

a) curvas ajustada e real sobrepostas; b) erro aleatório nos dados; c) erro real no ajuste.

As estimativas dos coeficientes no ajuste a 60 pontos foram as seguintes:

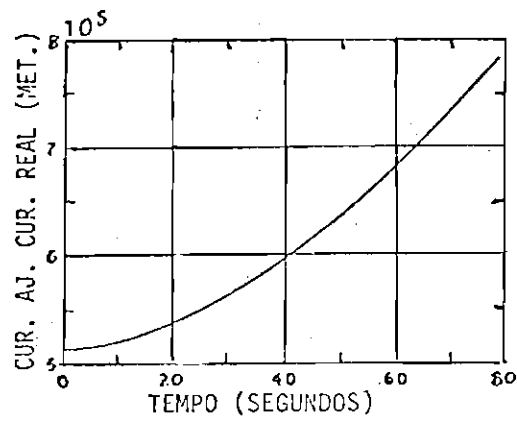
$$\tilde{x}_{60/60} = \begin{bmatrix} 513605.785 \text{ m} \\ 41.2710224 \text{ m/s} \\ 58.1817114 \text{ m/s}^2 \\ -0.198756530 \text{ m/s}^3 \end{bmatrix} .$$

Com a aplicação do ajuste sequencial a 80 pontos obtiveram-se os resultados apresentados na Figura 3.9. Neste caso a curva ajustada foi de 4º grau.

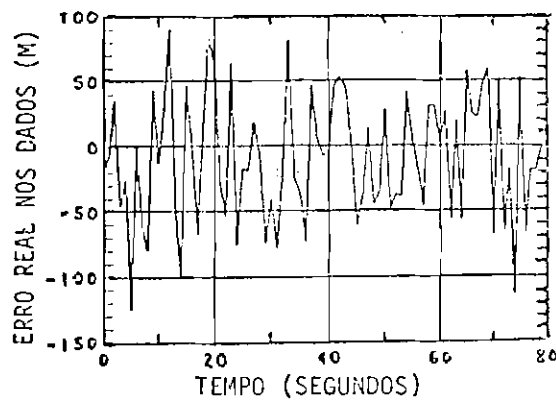
Neste ajuste a estimativa do vetor de coeficientes apresentou os seguintes valores:

$$\tilde{x}_{80/80} = \begin{bmatrix} 513620.115 \text{ m} \\ 35.2379722 \text{ m/s} \\ 58.6489415 \text{ m/s}^2 \\ -0.21012644 \text{ m/s}^3 \\ 0.000082903 \text{ m/s}^4 \end{bmatrix} .$$

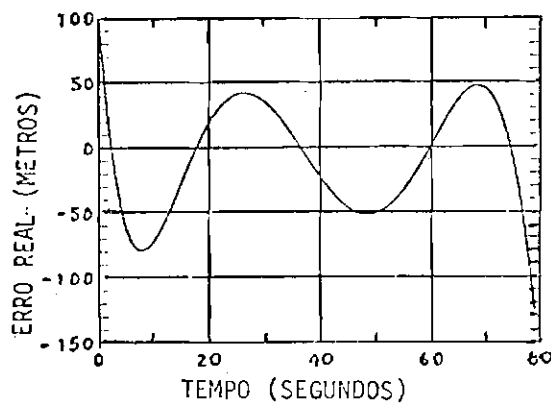
Finalmente para o ajuste a 100 pontos o grau da curva ajustada foi de 5 e os resultados são apresentados na Figura 3.10.



a)



b)



c)

Fig. 3.9 - Resultados obtidos no ajuste de curva a oitenta pontos de dados, com processamento sequencial:

a) curvas ajustada e real sobrepostas; b) erro aleatório nos dados; c) erro real no ajuste.



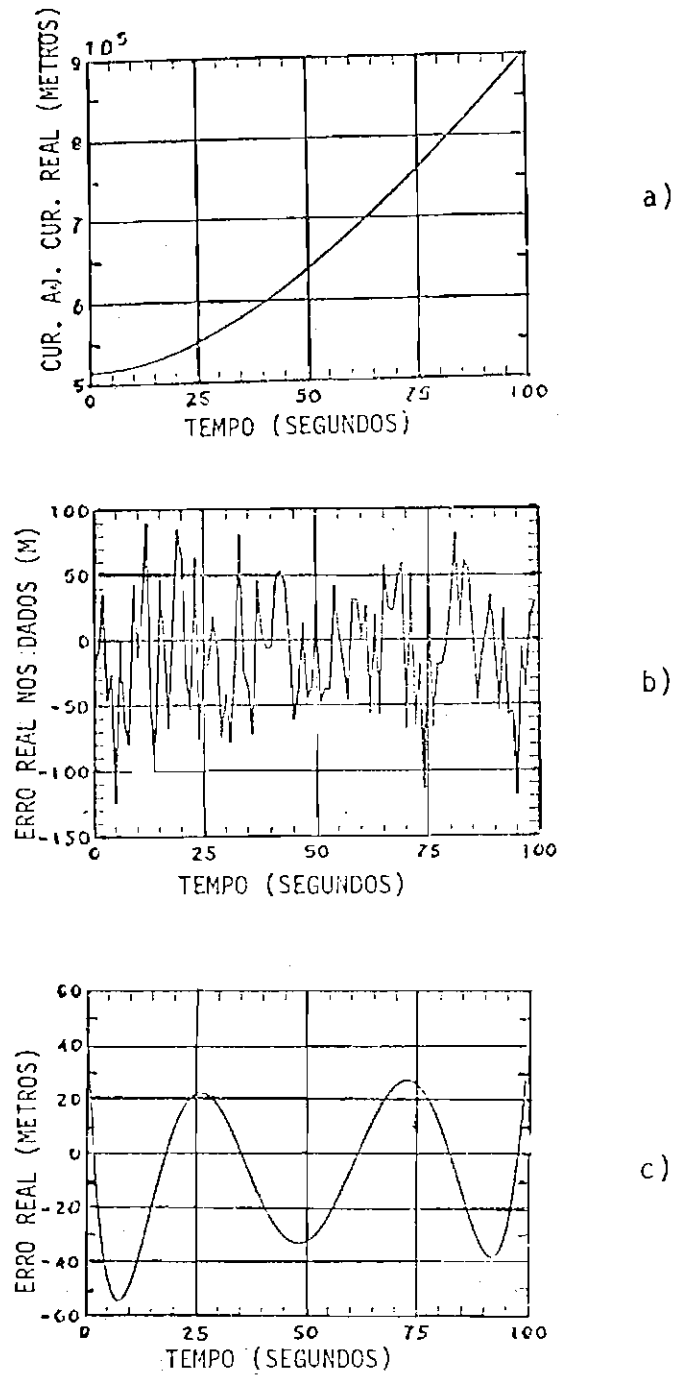


Fig. 3.10 - Resultados obtidos no ajuste de curva a cem pontos de dados, com processamento sequencial:

- a) curvas ajustada e real sobrepostas;
- b) erro aleatório nos dados;
- c) erro real no ajuste.

Para a estimativa do vetor de coeficientes obteve  
-se:

$$\hat{X}_{100/100} = \begin{bmatrix} 513570.003 \text{ m} \\ 56.6224778 \text{ m/s}^2 \\ 56.6442605 \text{ m/s}^3 \\ -0.139296062 \text{ m/s}^4 \\ -0.000969776 \text{ m/s}^5 \\ 0.0000055545 \text{ m/s}^6 \end{bmatrix}$$

Comparando todos os resultados apresentados provenientes da aplicação da técnica sequencial de ajuste via filtro de Kalman com os obtidos na aplicação da técnica com processamento em lote, percebe-se que realmente, a menos de pequenas diferenças não-significativas, ambos os procedimentos apresentaram a mesma eficiência.

## CAPÍTULO 4

### TRATAMENTO AUTOMÁTICO DE TENDENCIOSIDADES EM OBSERVAÇÕES

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

Conforme já foi mencionado no capítulo anterior, dados resultantes de medidas de grandezas físicas de interesse em sistemas dinâmicos são afetados tanto por erros aleatórios de média nula, impostos pela instrumentação e por ruídos provocados por fenômenos externos, como por erros de característica tendenciosa, impostos pelas mesmas fontes. Os erros tendenciosos devidos à instrumentação são na maioria dos casos constantes. Geralmente eles são estimados por procedimentos de calibração do equipamento de medição em uma fase anterior à de operação conjunta desse equipamento com o sistema dinâmico com o qual deverá trabalhar. Quando em operação do sistema aos dados gerados por sucessivas medidas são efetuadas as chamadas correções de calibração. Essas correções consistem em subtrair do valor de cada ponto de dado o valor do erro tendencioso estimado através do processo de calibração do equipamento. Essas correções são geralmente efetuadas na fase de pré-processamento dos dados.

Quanto aos erros tendenciosos impostos aos dados por fenômenos externos, são geralmente exigidos procedimentos computacionais para as correções, em geral de relativa complexidade. Esses erros geralmente não são constantes, em consequência de variações temporais de parâmetros dos quais depende o fenômeno que os provocou. Por esse motivo, os procedimentos normalmente utilizados para corrigir esse tipo de tendenciosidades avaliam o valor do erro em um dado instante, com o auxílio de modelagem matemática, desenvolvida a partir de estudos do fenômeno físico externo envolvido. Em alguns casos os modelos matemáticos podem possuir razoável grau de complexidade e depender de grandezas físicas que necessitem ser constantemente monitoradas. Esse é, por exemplo, o caso dos erros tendenciosos impostos pelo efeito de refração atmosférica em medidas da distância entre um satélite e uma deter

minada estação de rastreamento e medidas da variação temporal dessa distância. As primeiras, geralmente, se baseiam na computação do tempo gasto por uma onda eletromagnética em sua propagação pelo percurso estação-satélite e volta à estação ou apenas satélite-estação (Orlando, 1982). Na sua propagação por esse percurso, essa onda sofre atrasos em relação ao tempo que gastaria para cobrir a mesma distância, caso se propagasse no vácuo, devido ao efeito de refração causado pela atmosfera. O erro causado nas medidas por esse efeito depende do ângulo de elevação do satélite e respectiva derivada temporal; da densidade de elétrons em função da altitude na região que compreende a estação de rastreamento e na época em que está sendo feita a medição; da refratividade de superficial nessa região e época; do fluxo solar; da refratividade troposférica e ionosférica; da altura de escala da ionosfera e troposfera; da frequência da onda eletromagnética entre outros parâmetros (Cappellari et alii, 1976; Orlando, 1982). No caso da medida da variação temporal da distância, a qual é geralmente efetuada por técnicas baseadas no desvio Doppler de frequência, a correção para erros devidos ao efeito de refração é de complexidade análoga. Maiores detalhes sobre essa técnica de medida são encontradas em Cappellari et alii (1976), Orlando (1982).

A seguir iniciar-se-á a descrição de um método para o tratamento automático dos erros tendenciosos em dados de observação de sistemas dinâmicos. O objetivo do método é tornar possível a utilização de observações ainda afetadas por tendenciosidades diretamente em processos de estimação de estado de sistemas dinâmicos via filtro de Kalman. Isso permite que se contorne a necessidade de modelos matemáticos complexos para correção de dados afetados por esse tipo de erro, como também ajuda a evitar divergência do filtro devido à presença de erros tendenciosos residuais, que ainda permanecem nos dados mesmo após a aplicação de procedimentos usuais de correção.

#### 4.2 - DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Considere-se um sistema dinâmico genérico, cujo modelo matemático é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais estocásticas:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t] + G(t) \omega(t) , \quad (4.1)$$

onde  $x(t)$  é o vetor de estado do sistema cuja dimensão é  $n$ ;  $f$  é um vetor  $n$  dimensional cujas componentes são funções lineares ou não do estado do sistema;  $G(t)$  é uma matrix  $n \times r$  contínua no tempo;  $\omega(t)$  é um vetor  $r$  dimensional que expressa incertezas no conhecimento da dinâmica do sistema, constituindo-se, por hipótese, de um ruído branco gaussiano, com:

$$E[\omega(t)] = 0 , \quad (4.2)$$

$$E[\omega(t), \omega^T(\tau)] = Q(t) \delta(t - \tau) ,$$

onde  $\delta(t - \tau)$  é a função  $\delta$  de Dirac, e  $Q(t)$  é a matriz de densidade espectral de  $\omega(t)$ .

Suponha-se que se dispõe de observações da dinâmica do sistema, funções de seu estado, que são coletadas discretamente a taxa constante e modeladas matematicamente por:

$$y(k+1) = h[x(k+1), k+1] + e(k+1) + v(k+1) , \quad (4.3)$$

onde  $y(k+1)$  é o vetor  $m$  dimensional de observações; a notação  $k+1$  refere-se ao instante  $t_{k+1}$ ;  $h$  é um vetor  $m$  dimensional de funções lineares ou não do estado do sistema;  $e(k+1)$  é um vetor de dimensão  $m$ , cujas componentes representam erros tendenciosos do vetor de observações relativo ao instante  $t_{k+1}$ ;  $v(k+1)$  representa erros aleatórios nas observações, cujas propriedades estatísticas são:

$$\begin{aligned} E[v(k+1)] &= 0, \\ E[v(k+1)v^T(k+1)] &= R(k+1). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Suponha-se ainda ser válido que:

$$\begin{aligned} E[\omega_k v_j^T] &= 0, \\ E[v_k x^T(j)] &= 0, \end{aligned}$$

e que o vetor de estado inicial  $\bar{x}$  é uma variável aleatória gaussiana, com:

$$\begin{aligned} E[x(t_0)] &= \bar{x}(t_0), \\ E\{[x(t_0) - \bar{x}(t_0)][x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^T\} &= P(t_0). \end{aligned}$$

Uma das hipóteses básicas que deve ser satisfeita para que as equações do filtro de Kalman possam ser aplicadas à estimação sequencial do estado do sistema acima não está sendo válida neste caso. Conforme pode-se notar através das Equações 2.14 e 2.36, as equações do filtro de Kalman foram deduzidas a partir da suposição de não-existência de erros tendenciosos nas observações, ao contrário do que ocorre com as observações do sistema em estudo, cujo modelo, dado pela Equação 4.3, apresenta tendenciosidades por suposição. O que se procurará fazer a seguir é colocar o problema de estimação numa forma tal que para o filtro tudo venha a se passar como se as observações s $\bar{o}$  estivessem afetadas por erros aleatórios. Isso será feito através da inclusão das tendenciosidades entre as variáveis de estado do sistema a serem estimadas, estimando-se, então, conjuntamente, variáveis de estado do sistema e erros tendenciosos de observação. Porém, para que isso possa ser feito, torna-se necessário que se tenha posse de equações diferenciais que modelam dinamicamente as tendenciosidades. Esse problema será solucionado via estimação de parâmetros da seguinte maneira:

Supõe-se inicialmente que as tendências estão modeladas dinamicamente pelo seguinte sistema de equações diferenciais estocásticas lineares:

$$\dot{e}(t) = B(t) e(t) + \omega_e(t) , \quad (4.5)$$

onde  $e(t)$  é um vetor  $m$  dimensional, cujos elementos representam continuamente no tempo os erros tendenciosos que afetam as respectivas componentes do vetor de observações,  $B(t)$  é uma matriz diagonal  $m \times m$  de funções de tempo;  $\omega_e(t)$  é um vetor  $m$  dimensional que representa uma faixa de incerteza criada em torno do modelo matemático adotado para a dinâmica dos erros. Suponha-se que  $\omega_e(t)$  possui distribuição normal com:

$$E[\omega_e(t)] = 0 , \quad (4.6)$$

$$E[\omega_e(t) \omega_e^T(\tau)] = Q_e \delta(t - \tau) ,$$

onde  $Q_e$  é uma matriz  $m \times m$  positiva semidefinida.

Seja  $b(t)$  o vetor formado pelos elementos da diagonal principal da matriz  $B(t)$  e suponha-se que esse vetor é modelado dinamicamente por:

$$\dot{b}(t) = \omega_b(t) , \quad (4.7)$$

onde  $\omega_b(t)$  é um ruído branco gaussiano com:

$$E[\omega_b(t)] = 0 , \quad (4.8)$$

$$E[\omega_b(t) \omega_b^T(\tau)] = Q_b \delta(t - \tau) ,$$

sendo  $Q_b$  uma matriz  $m \times m$  positiva semidefinida.

Os valores iniciais de  $e(t)$  e  $b(t)$ :  $e(t_0)$  e  $b(t_0)$ , respectivamente, serão considerados variáveis aleatórias com distribuição gaussiana e com:

$$\begin{aligned} E[e(t_0)] &= \hat{e}_0, & E\{[e(t_0) - \hat{e}_0][e(t_0) - \hat{e}_0]^T\} &= P_e(t_0); \\ E[b(t_0)] &= \hat{b}_0, & E\{[b(t_0) - \hat{b}_0][b(t_0) - \hat{b}_0]^T\} &= P_b(t_0); \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde  $\hat{e}_0$  e  $\hat{b}_0$  são estimativas a priori do vetor de erros tendenciosos e do vetor de parâmetros  $b$ , no instante  $t_0$ .

Suponha-se ainda serem válidas as seguintes hipóteses de não-correlação:

$$\begin{aligned} E[\omega_e v^T] &= 0, \\ E[e(t_0) v^T] &= 0, \\ E[\omega_b v^T] &= 0, \\ E[b(t_0) v^T] &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Observando a Equação 4.5, percebe-se que cada componente do vetor de erros tendenciosos nas observações foi modelado como um processo estocástico de Gauss-Markov, visto que para um dado conjunto de instantes discretos  $\{t_k, i = 1, 2, \dots\}$  com  $t_{k+1} > t_k$  para qualquer  $\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , é válido que:

$$\begin{aligned} P_r\{e(t_k) \leq \lambda/e(t_1), e(t_2), \dots, e(t_{k-1})\} &= \\ &= P_r\{e(t_k) \leq \lambda/e(t_{k-1})\}, \end{aligned}$$

ou seja, a lei de probabilidade do processo no futuro, quando se está em um dado estado, não depende de como o processo atingiu esse estado, que é a propriedade que define o processo de Markov.



Adicionando as Equações 4.5 e 4.7 às equações diferenciais estocásticas do sistema dinâmico dadas na Equação 4.1, têm-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[x(t), t] + G(t) \omega(t) , \\ \dot{e}(t) &= b^T(t) e(t) + \omega_e(t) , \\ \dot{b}(t) &= \omega_b(t) . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Defina-se agora o vetor  $x_A(t)$ , de dimensão  $n+2m$ , por:

$$\begin{aligned} x_A(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \\ b(t) \end{bmatrix} &= [x_{(1)} : \dots : x_{(n)} : e_{(1)} : \dots : e_{(m)} : \\ &: b_{(1)} : \dots : b_{(m)}]^T = [x_{A(1)} : \dots : x_{A(n)} : x_{A(n+1)} : \\ &: \dots : x_{A(n+m)} : x_{A(n+m+1)} : \dots : x_{A(n+2m)}] , \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde  $x_{(i)}$ ,  $e_{(j)}$  e  $b_{(j)}$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$  representam, respectivamente, as componentes dos vetores  $x(t)$ ,  $e(t)$  e  $b(t)$ ;  $x_{A(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n+2m$  representa a componente  $i$  do vetor  $x_A$ .

Defina-se ainda  $f_A(t)$ ,  $G_A(t)$  e  $\omega_A(t)$  por:

$$\begin{aligned} f_A[x_A(t), t] \triangleq \begin{bmatrix} f[x(t), t] \\ b^T(t)e(t) \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} &= [f_{(1)} : \dots : f_{(n)} : b_{(1)}e_{(1)} : \dots : \\ &: b_{(m)}e_{(m)} : 0 : \dots : 0]^T = [f_{A(1)} : \dots : f_{A(n)} : f_{A(n+1)} : \\ &: \dots : f_{A(n+m)} : f_{A(n+m+1)} : \dots : f_{A(n+2m)}]^T , \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$G_A(t) \triangleq \begin{bmatrix} G(t) & 0_{n \times m} & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times r} & I_{m \times m} & 0_{m \times m} \\ 0_{m \times r} & 0_{m \times m} & I_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \omega_A(t) \triangleq \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \omega_e(t) \\ \omega_b(t) \end{bmatrix} &= [\omega_{(1)} : \dots : \omega_{(r)} : \omega_{e(1)} : \dots : \omega_{e(m)} : \omega_{b(1)} : \\ &: \dots : \omega_{b(m)}]^T = [\omega_{A(1)} : \dots : \omega_{A(r)} : \omega_{A(r+1)} : \dots : \\ &: \omega_{A(r+m)} : \omega_{A(r+m+1)} : \dots : \omega_{A(r+2m)}]^T, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde  $f_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $f_{A(\ell)}$ ,  $\ell = 1, \dots, n+2m$  representam as componentes do vetor  $f$  e  $f_A$ , respectivamente;  $\omega_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $\omega_{e(j)}$  e  $\omega_{b(j)}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $\omega_{A(k)}$ ,  $k = 1, \dots, r+2m$  representam as componentes dos vetores  $\omega(t)$ ,  $\omega_e(t)$ ,  $\omega_b(t)$  e  $\omega_A(t)$ , respectivamente; a notação  $0_{i \times j}$  representa a matriz nula de dimensão  $i \times j$  e a notação  $I_{i \times i}$  representa a matriz unitária de dimensão  $i \times i$ ;  $0_{m \times 1}$  representa o vetor nulo de dimensão  $m$ .

Tendo em vista as definições acima, o Sistema 4.11 pode ser reescrito como:

$$\dot{x}_A(t) = f_A[x_A(t), t] + G_A(t) \omega_A(t). \quad (4.16)$$

Note-se, ainda por essas definições, que:

$$e(t) = [x_{A(n+1)} : x_{A(n+2)} : \dots : x_{A(n+m)}]. \quad (4.17)$$

A Equação de Observações 4.3 pode então ser colocada na forma:

$$y(k+1) = h_A[x_A(k+1), k+1] + v(k+1) , \quad (4.18)$$

onde:

$$h_A \triangleq h[x(k+1), k+1] + e(k+1) . \quad (4.19)$$

Note-se ainda pelas Equações 4.2, 4.6 e 4.8 que:

$$E[\omega_A(t) \omega_A^T(\tau)] = Q_A \delta(t - \tau) , \quad (4.20)$$

onde:

$$Q_A = \begin{bmatrix} Q & 0_{rxm} & 0_{rxm} \\ 0_{m \times r} & Q_e & 0_{m \times m} \\ 0_{m \times r} & 0_{m \times m} & Q_b \end{bmatrix} . \quad (4.21)$$

Em resumo, transformou-se o sistema de  $n$  equações diferenciais estocásticas, que modelam a dinâmica do sistema físico, em um sistema aumentado de  $n+2m$  equações, com a inclusão de  $m$  equações para modelar a dinâmica das tendências presentes nas observações e mais  $m$  para modelar parâmetros desconhecidos dessas equações. Cada erro tendencioso foi modelado por um processo estocástico de Gauss-Markov de primeira ordem. Com isso definiu-se um vetor de estado aumentado  $x_A$ , cujas componentes incluem as tendências. Em vista disso, já que os erros tendenciosos fazem parte do estado aumentado para o sistema dinâmico definido por esse estado, as observações podem ser consideradas afetadas apenas por erros aleatórios gaussianos de média nula e covariância  $R(k+1)$ , conforme colocado na Equação 4.4. Desse modo as equações de observações tomaram, para o sistema aumentado, uma forma compatível com a exigida no emprego do filtro de Kalman na estimação sequencial do estado. As tendências das observações serão então estimadas conjuntamente com o estado do sistema dinâmico original, o mesmo ocorrendo com os parâmetros desconhecidos utilizados no modelamento da sua dinâmica. Com isso consegue-se um tratamento automático de erros tendenciosos presentes nas observações.

As equações do filtro de Kalman aplicadas às equações diferenciais estocásticas do Sistema aumentado 4.16, com observações modeladas pela Equação 4.18, são análogas às equações do filtro apresentadas no Capítulo 2, a menos de pequenas diferenças de notação, sendo por isso desnecessário repeti-las aqui. Se a função  $f_A[x_A(t), t]$  for linear, então deverão ser aplicadas as equações do filtro deduzidas para sistemas lineares; caso contrário deve ser aplicado o filtro estendido de Kalman.

#### 4.3 - APLICAÇÃO SIMULADA DO MÉTODO EM ESTIMAÇÃO DE ÓRBITA DE SATÉLITES ARTIFICIAIS

O procedimento foi testado através da simulação em computador digital de sua aplicação ao problema de estimação de órbita de satélites artificiais, com observações da distância estação de rastreamento-satélite ("range") e variação temporal dessa distância ("range-rate"), afetadas por erros tendenciosos devido à refração atmosférica. As observações são geradas a partir da simulação da órbita de um satélite artificial com a utilização de um modelo sofisticado, que inclui efeitos perturbadores tais como perturbações devidas ao geopotencial, ao arrasto atmosférico e perturbações lunissolares (Negreiros de Paiva, 1980; Kuga, 1982), e a partir da simulação de 3 estações de rastreamento fictícias dispostas numa geometria tal que possui uma região de intersecção entre os respectivos cones de visibilidade de suas antenas de rastreamento. Para o estimador é adotado um modelo dinâmico simplificado da órbita do satélite, que leva em conta apenas o movimento kepleriano e a influência do achatamento terrestre através do coeficiente zonal  $J_2$ .

A órbita mais precisa simulada é considerada como a órbita real do satélite para efeito de testes, com o que é permitido avaliar o desempenho do procedimento através do cálculo do erro real das estimativas. As condições iniciais para o estimador são calculadas a partir das condições iniciais utilizadas na simulação dessa órbita, às quais se somam valores de erros calculados a partir de rotina computa

cional geradora de números aleatórios gaussianos com média nula e variância predeterminada (Negreiros de Paiva, 1980). Consideram-se então, os valores assim calculados como as estimativas a priori do vetor de estado da órbita do satélite para o estimador,  $\hat{x}(0)$ , cuja matriz de covariância do erro,  $P_0$ , constitui-se da matriz diagonal, cuja diagonal principal é formada pelas variâncias utilizadas na geração dos números aleatórios que foram somados a cada componente do vetor de estado real, respectivamente.

Para o modelo matemático do movimento orbital do satélite utilizado na geração da órbita, considerada real para efeito de testes, utilizaram-se as equações do movimento na forma:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f_m(x,t) + f_{nm}(x,t) , \quad (4.22)$$

e para o modelo simplificado empregado no estimador adotou-se:

$$\dot{\hat{x}}(t) = f_m(x,t) , \quad (4.23)$$

onde  $x(t) = [x_{(1)} : x_{(2)} : x_{(3)} : x_{(4)} : x_{(5)} : x_{(6)}]$  é o vetor de estado do satélite no qual  $x_{(1)}$ ,  $x_{(2)}$ ,  $x_{(3)}$  são coordenadas de posição do centro de massa do satélite e  $x_{(4)}$ ,  $x_{(5)}$ ,  $x_{(6)}$  são coordenadas de velocidade do centro de massa;  $f_m(x,t)$  é um vetor de dimensão 6 que caracteriza o movimento modelado empregado no estimador e  $f_{nm}(x,t)$  é um vetor de dimensão 6 que caracteriza os efeitos modelados apenas para a geração da órbita real.

O modelo simplificado utilizado, que leva em conta apenas o movimento kepleriano e o coeficiente zonal  $J_2$ , é dado pela Equação 4.23 com (Kuga, 1982):

$$\dot{x}_{(1)} = f_{m1} = x_{(4)} ,$$

$$\dot{x}_{(2)} = f_{m2} = x_{(5)} ,$$

$$\dot{x}_{(3)} = f_{m3} = x_{(6)}, \quad (4.24)$$

$$\dot{x}_{(4)} = f_{m4} = -\frac{\mu x_{(1)}}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{r^2} \left( \frac{5x_{(3)}^2}{r^2} \right) \right],$$

$$\dot{x}_{(5)} = f_{m5} = \frac{x_{(2)}}{x_{(1)}} \cdot f_{m4},$$

$$\dot{x}_{(6)} = -\frac{\mu x_{(3)}}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{r^2} \left( 3 - \frac{5x_{(3)}^2}{r^2} \right) \right],$$

onde  $\mu$  é a constante gravitacional;  $J_2$  é o coeficiente do 2º harmônico zonal;  $r$  é o módulo do vetor posição do satélite;  $R$  é o raio equatorial da Terra.

Os valores das observações da órbita do satélite considerados reais, calculados a partir da órbita adotada como real, possuem as seguintes expressões:

$$\rho = \sqrt{(x_{(1)} - x_{e(1)})^2 + (x_{(2)} - x_{e(2)})^2 + (x_{(3)} - x_{e(3)})^2}, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & [(x_{(1)} - x_{e(1)})(x_{(4)} - x_{e(4)}) + (x_{(2)} - x_{e(2)})(x_{(5)} - x_{e(5)}) + \\ & + (x_{(3)} - x_{e(3)})(x_{(6)} - x_{e(6)})] / \rho, \end{aligned}$$

onde  $\rho$  é a distância entre estação de rastreamento-satélite;  $\dot{\rho}$  é a variação temporal dessa distância;  $x_{e(1)}$ ,  $x_{e(2)}$  e  $x_{e(3)}$  são coordenadas de posição da estação de rastreamento;  $x_{e(4)}$ ,  $x_{e(5)}$  e  $x_{e(6)}$  são coordenadas de velocidade dessa estação.

Para gerar as observações para o estimador, colocadas na forma da Equação 4.3, somou-se a cada valor real, calculado para elas através da Equação 4.25, um número aleatório gaussiano de média nula e

variância conhecida, do modo descrito para o cálculo do estado inicial da órbita do satélite. O desvio padrão desse ruído aleatório adicionado foi tomado compatível com a precisão dos equipamentos que fazem esse tipo de medida, da ordem de 3 metros para a distância e 1 cm/s para medidas da variação temporal da distância. Para a inclusão dos erros tendenciosos devidos ao efeito de refração atmosférica, utilizou-se um modelo baseado no Perfil Modificado de Chapman (Wagner e Velez. ed., 1972; Orlando, 1982) normalmente utilizado para correção desses erros nesses tipos de medida. Os valores desses erros, avaliados através do citado modelo, são somados às observações correspondentes nos sucessivos instantes de integração das equações do movimento e considerados, para efeito de testes do procedimento de estimação, como valores reais desses erros. As condições iniciais para esses erros, relativas ao estimador, são calculadas da mesma forma descrita para o cálculo das condições iniciais do satélite. Para os parâmetros desconhecidos dos modelos adotados para esses erros, a fim de estimá-los conjuntamente com o estado, adotaram-se condições iniciais nulas com variâncias calibradas por tentativa e erro. Utilizou-se ainda, nesses testes do procedimento, o método de estimação do ruído dinâmico do estado, descrito no Capítulo 2. Tendo em vista que o modelo do sistema dinâmico constitui-se de um sistema de equações diferenciais não-lineares, o processo de estimação foi efetuado a partir da aplicação do filtro estendido de Kalman.

#### 4.4 - DEFINIÇÕES DE PARÂMETROS A SEREM USADOS PARA ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS NA APLICAÇÃO DO PROCEDIMENTO

Os resultados obtidos na aplicação do procedimento descrito acima serão apresentados e discutidos na próxima seção, reservada para essa finalidade. Com o intuito de facilitar a análise desses resultados, serão agora definidos alguns parâmetros utilizados na sua avaliação. O comportamento desses parâmetros em função do tempo demonstrará o desempenho do procedimento descrito nos testes efetuados.

Inicialmente serão definidos dois parâmetros, utilizados para análise do erro no módulo do vetor posição do satélite gerado pe

Las estimativas efetuadas para seu estado. Um deles, que será representado por  $\Delta r$ , é o próprio erro real do módulo do vetor posição; o outro, representado por  $\Delta \hat{r}$ , é o módulo do erro em posição estimado, calculado a partir da matriz de covariância do erro das estimativas das componentes de posição do vetor de estado. Esses parâmetros são definidos por:

$$\Delta r \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^3 [x_{A(i)}(k) - \hat{x}_{A(i)}(k/k)]^2 \right\}^{1/2}, \quad (4.26)$$
$$\Delta \hat{r} \triangleq \left[ \sum_{i=1}^3 P_{ii}(k/k) \right]^{1/2},$$

onde  $x_{A(i)}(k)$ ,  $i = 1, 2, 3$  representam as 3 primeiras componentes do vetor de estado orbital do satélite, obtidos através da simulação efetuada com modelo mais sofisticado, considerada nos testes como órbita real;  $\hat{x}_{A(i)}(k/k)$  são as três primeiras componentes do vetor de estado aumentado estimado relativas ao instante  $t_k$ , as quais se constituem das componentes de posição do vetor de estado do satélite;  $P_{ii}(k/k)$ ,  $i = 1, 2, 3$  são os 3 primeiros elementos da diagonal da matriz de covariância do erro de estimação relativa ao instante  $t_k$ .

Serão apresentados gráficos que mostram resultados obtidos nos testes, nos quais ambos os parâmetros definidos serão traçados em função do tempo de maneira superposta. Um bom desempenho do procedimento é caracterizado quando ambos os parâmetros convergem para valores próximos e pequenos e se mantêm assim indefinidamente.

Analogamente às definições dos parâmetros acima, definem-se dois outros parâmetros para avaliação do erro em velocidade por:

$$\Delta v \triangleq \left\{ \sum_{i=4}^6 [(x_{A(i)}(k) - \hat{x}_{A(i)}(k/k))]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (4.27)$$
$$\Delta \hat{v} \triangleq \left[ \sum_{i=4}^6 P_{ii}(k/k) \right]^{1/2},$$



onde  $\Delta v$  é o módulo do erro real em velocidade cometida pelo estimador;  $x_{A(i)}$ ,  $i = 4,5,6$  representam as componentes de velocidade do vetor de estado orbital real do satélite;  $\bar{x}_{A(i)}(k/k)$ ,  $i = 4,5,6$  representam as componentes de velocidade do vetor de estado estimado, relativas ao instante  $t_k$  e  $P_{i/j}(k/k)$ ;  $i = 4,5,6$  são a quarta, quinta e sexta componentes da matriz de covariância do erro das estimativas das componentes de velocidade do vetor de estado nesse mesmo instante.

A avaliação dos resultados é feita de maneira análoga à descrita para os erros em posição.

Finalmente os parâmetros para análise do erro nas estimativas das tendências da observação serão definidos por:

$$\Delta e_{(i)} = |\bar{x}_{A_{(6+i)}}(k/k) - e_{(i)}|, \quad (4.28)$$

$$\Delta \bar{e}_{(i)} = [P_{6+i,6+i}(k/k)]^{1/2}, \quad i = 1, \dots, m,$$

onde  $\Delta e_{(i)}$  representa o valor do erro real cometido na estimativa do erro tendencioso presente na componente  $i$  do vetor de observações relativo ao instante  $t_k$ ;  $\bar{x}_{A_{(6+i)}}(k/k)$  representa o valor da estimativa desse erro no citado instante;  $\Delta \bar{e}_{(i)}$  é o desvio padrão dessa estimativa;  $P$  é a respectiva matriz de covariância do erro.

A análise dos resultados através desses dois parâmetros é também análoga aos casos anteriores.

Defina-se, agora, o resíduo normalizado das observações da distância estação-satélite e das observações da variação temporal dessa distância por:

$$r_p(k) \triangleq \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_{p(i)}(k) - \bar{y}_{p(i)}(k)| \right\} / \sigma_p, \quad (4.29)$$

onde  $y_{\rho(i)}(k)$  é o valor da observação da distância estação de rastreamento  $i$  ao satélite no instante  $t_k$ ;  $\hat{y}_{\rho(i)}(k)$  é o valor calculado para a observação dessa distância no instante  $t_k$  a partir do estado estimado;  $\sigma_{\rho}$  é o desvio padrão da observação  $y_{\rho(i)}$ ;  $N$  é o número de estações que efetuam as observações.

Note-se que o cálculo de  $\hat{y}_{\rho(i)}(k)$  deve ser feito a partir do valor estimado para o estado, através da Equação 4.25, com a adição do erro tendencioso presente na observação e estimado conjuntamente com o estado, ou seja:

$$\hat{y}_{\rho(i)}(k) = \left\{ \sum_{j=1}^3 [\hat{x}_{(j)}(k) - x_{e(j)}(k)]^2 \right\}_{(i)}^{1/2} + \hat{e}_{(i)}(k), \quad (4.30)$$

onde o índice  $i$  indica que os cálculos se referem à estação de rastreamento  $i$ .

Note-se ainda que os cálculos de resíduos normalizados da distância pela Equação 4.29 fornecem valores em unidades  $\sigma_{\rho}$ . Isso facilita a visualização por ocasião da análise dos resultados, visto que se deseja que o resíduo permaneça na faixa de  $\pm 3\sigma$ , o que é um indicio da convergência do estimador.

O resíduo normalizado de observações da variação da distância estação de rastreamento satélite é definido por:

$$r_{\rho}(k) \triangleq \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_{\rho(i)}(k) - \hat{y}_{\rho(i)}(k)| \right\} / \sigma_{\rho}, \quad (4.31)$$

onde  $y_{\rho(i)}(k)$  é o valor da observação da variação temporal da distância entre a estação de rastreamento  $i$  e o satélite, no instante  $t_k$ ;  $\hat{y}_{\rho(i)}(k)$  é o valor calculado para essa observação a partir do estado estimado;  $\sigma_{\rho}$  é o desvio padrão da observação  $y_{\rho(i)}$ ;  $N$  é o número de estações que efetuam as observações.

Para o cálculo de  $\hat{y}_{\hat{p}(i)}(k)$ , que deve ser feito através da Equação 4.25 a partir do estado estimado, tem-se aqui também de adicionar o valor estimado do erro tendencioso presente na observação.

Analogamente ao caso anterior, o valor do resíduo normalizado da Equação 4.31 é dado em unidade  $\sigma_p$ , o que facilita a visualização gráfica da faixa  $3\sigma_p$  por ocasião da análise dos resultados.

#### 4.5 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

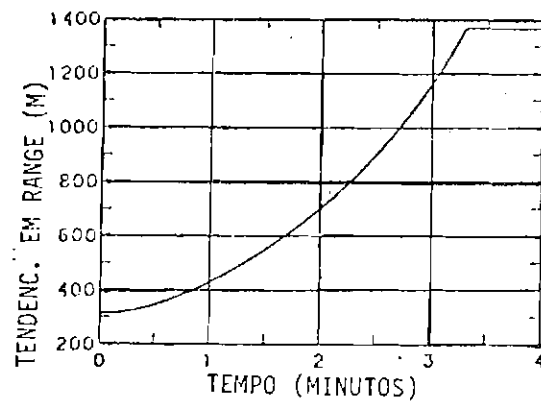
Os testes do procedimento foram efetuados a partir da simulação da órbita do satélite TD-1A, cuja altitude é de aproximadamente 550 km, caracterizada pelos seguintes elementos keplerianos iniciais: semi-eixo maior  $a = 6909600$  m; excentricidade  $e = 0,0027$ ; inclinação  $i = 0,0027$  rd; ascensão reta do nodo descendente  $\Omega = 5,5484$  rd; argumento do perigeu  $\omega = 1,5813$  rd; anomalia média  $M = 0,267$  rd (European Space Agency (ESA)). No sistema geocêntrico inercial a órbita é caracterizada pelo seguinte vetor de estado:  $x_{(1)} = -2016084,7043$  metros;  $x_{(2)} = 642597,905$  m;  $x_{(3)} = 6558737,84$  m;  $x_{(4)} = -5237,77$  m/s;  $x_{(5)} = 5111,122$  m/s;  $x_{(6)} = -2104,99$  m/s. Esse vetor de estado é utilizado como condição inicial no procedimento de simulação da órbita do satélite. As condições iniciais para o estimador foram obtidas a partir das condições iniciais da órbita real simulada, ou seja, dos valores dados acima, aos quais foram adicionados erros aleatórios do modo descrito anteriormente, a partir de uma sub-rotina geradora de números aleatórios gaussianos, com desvio padrão de 1000 m para as componentes de posição do vetor de estado e de 1 m/s para as componentes de velocidade. Esses valores para a incerteza no conhecimento do estado inicial estão superdimensionados, como medida de segurança, pois métodos clássicos para determinação de órbita podem fornecer esses valores com precisão de 100 metros e 0,1 m/s para coordenadas de posição e velocidade, respectivamente. A matriz de covariância inicial foi considerada diagonal e formada pelos quadrados dos desvios padrões em posição e velocidade, respectivamente. As observações calculadas a partir da órbita real simuladas, foram somados erros aleatõ

rios com desvio padrão de 3 m para as observações da distância estação satélite e de 0,01 m/s para as observações da variação temporal dessa distância. Esses valores são compatíveis com a precisão dos equipamentos normalmente usados para a efetuação desses tipos de medidas (Jazwinski and Hipkins, 1975). Os erros tendenciosos adicionados às observações foram calculados, como já foi dito, a partir de um procedimento para cálculo dos erros impostos pelo efeito de refração atmosférica nesses tipos de medidas, baseado no perfil de Chapman Modificado. Como valores iniciais para esses erros consideraram-se os valores calculados, que foram adicionados às observações correspondentes ao instante  $t_1$ , aos quais se somaram erros aleatórios com desvios padrões de 30 metros e 1 m/s para erros tendenciosos em distância e variação temporal da distância, respectivamente.

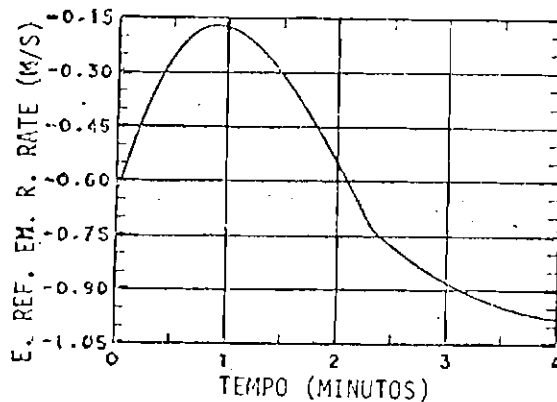
A Figura 4.1 apresenta as curvas dos erros tendenciosos correspondentes ao efeito de refração atmosférica, calculados do modo descrito na seção anterior, adicionados às observações da órbita do satélite. Na Figura 4.1a é apresentada a curva do erro de refração que afeta as medidas da distância estação-satélite relativas a uma das estações fictícias geradas; na Figura 4.2a mostra-se a curva desse tipo de erro introduzido nas medidas da variação temporal da distância devidas à mesma estação de rastreamento.

Nas Figuras 4.2 e 4.3 mostram-se os resultados obtidos com a utilização do filtro de Kalman na forma original (sem a inclusão do procedimento de estimação das tendenciosidades presentes nas observações), para a estimação do estado do satélite a partir de observações afetadas pelos citados erros tendenciosos. A Figura 4.2a apresenta, traçadas em um único gráfico, as curvas dos erros estimado e real em posição,  $\Delta \hat{r}$  e  $\Delta r$ , respectivamente, definidos na Equação 4.26, em função do tempo, para um arco de órbita percorrido em 4 minutos pelo satélite. Note-se nessa figura que o erro real em posição, inicialmente da ordem de 1000 metros, cai rapidamente no início para valores da ordem de 300 metros, crescendo novamente depois disso, atingindo valores próximos a 1000 metros decorridos 4 minutos. Por outro lado, o erro estimado cai

irrealisticamente para valores menores que 10 metros. Isso ocorre devido ao fato de estarem presentes nas observações erros tendenciosos que não estão incluídos na faixa de incerteza representada pelo ruído aleatório na observação, cujo desvio padrão  $\bar{\sigma}$  é de 3 m para as observações da distância estação-satélite e de 0,01 m/s para as observações da sua variação temporal. Como para o estimador  $\bar{s}$  é prevista a existência da faixa de incerteza aleatória em torno do valor de cada observação, este interpreta cada observação como o valor verdadeiro da grandeza observada a menos da citada faixa. Visto no caso presente isto não ser verdadeiro, o filtro de Kalman extrai informações errôneas das observações sobre o estado orbital do satélite.



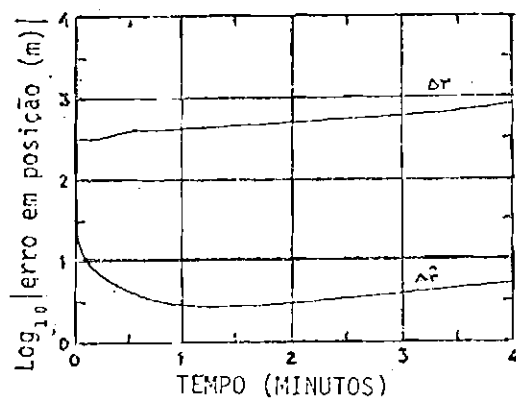
a)



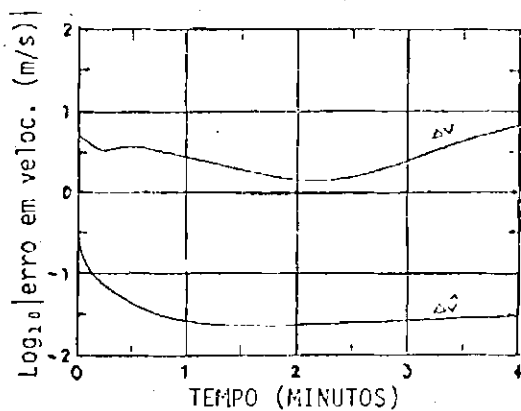
b)

Fig. 4.1 - Erros devidos ao efeito de refração atmosférica:

a) nas medidas da distância estação de rastreamento-satélite; b) nas medidas da variação temporal da distância estação de rastreamento-satélite.



a)



b)

Fig. 4.2 - Curvas sobrepostas dos erros estimado e real, em posição e velocidade, obtidas com a aplicação do filtro de Kalman na forma original, com observações contaminadas por erros tendenciosos:

a) erros estimado e real em posição; b) erros estimado e real em velocidade.

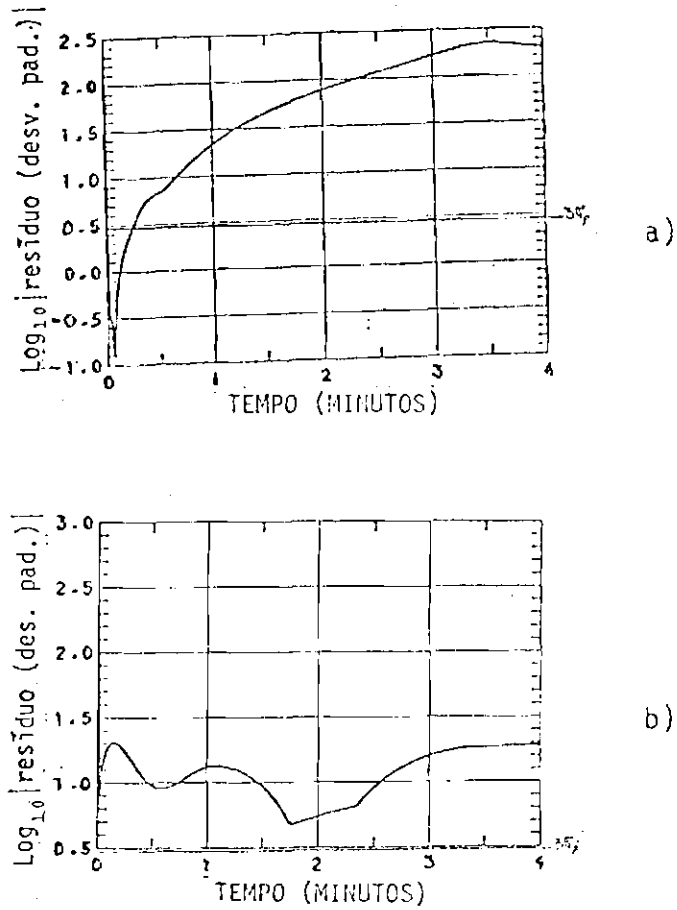


Fig. 4.3 - Curvas dos resíduos normalizados em observações, obtidas com a aplicação do filtro de Kalman na forma original, com observações contaminadas por erros tendenciosos:

a) da distância estação de rastreamento-satélite; b) da variação temporal da distância estação de rastreamento-satélite.

Para o filtro, a medida que cada observação é processada, tudo se passa como se o conhecimento sobre o estado do satélite estivesse aumentando. Como as informações sobre o estado (contidas nas observações) são errôneas, o estimador converge para um estado errado e o erro estimado se torna irrealisticamente pequeno. Por outro lado, o erro real tende a aumentar visto que as estimativas estão realmente divergindo cada vez mais do estado verdadeiro.

A Figura 4.2b apresenta a sobreposição das curvas dos erros estimado e real em velocidade,  $\Delta\bar{v}$  e  $\Delta v$ , respectivamente, definidos na Equação 4.27. A análise dessas curvas é análoga à efetuada para as curvas dos erros em posição. Nota-se que aqui também o comportamento das curvas é análogo ao do caso anterior, visto que a curva do erro estimado em velocidade cai rapidamente para um valor pequeno, da ordem de 0,03 m/s, enquanto a do erro real atinge um valor mínimo próximo de 1 m/s a aproximadamente 2,4 minutos, atingindo valores próximos a 10 m/s aos 4 minutos de simulação, o que pelos mesmos motivos citados com relação à estimação das componentes de posição do vetor de estado atesta a divergência do estimador.

Nas Figuras 4.3a e 4.3b estão traçadas as curvas do resíduo normalizado das observações da distância estação de rastreamento-satélite ("range") e da variação temporal dessa distância,  $r_{\rho}$  e  $\dot{r}_{\rho}$ , respectivamente, definidos nas Equações 4.29 e 4.31, em função do tempo. Note-se que em ambos os casos os resíduos apresentam valores completamente fora da faixa de  $3\sigma$ , a qual corresponde a 9 m para observações de distância e 0,03 m/s para observações de variação da distância. Isso reforça o mau desempenho do estimador verificado pela Figura 4.2.

A seguir aplicou-se ao mesmo conjunto de observações o procedimento desenvolvido para a estimação conjunta do estado orbital do satélite e tendências presentes nas observações. Os resultados obtidos estão apresentados nas Figuras 4.4 e 4.5. Na Figura 4.4a são apresentadas, em um único gráfico, as curvas de  $\Delta r$  e  $\Delta\bar{r}$ . Note-se que tanto o erro real quanto o erro estimado caem para valores da ordem de 6,5 m e mantêm-se nessa ordem de grandeza.



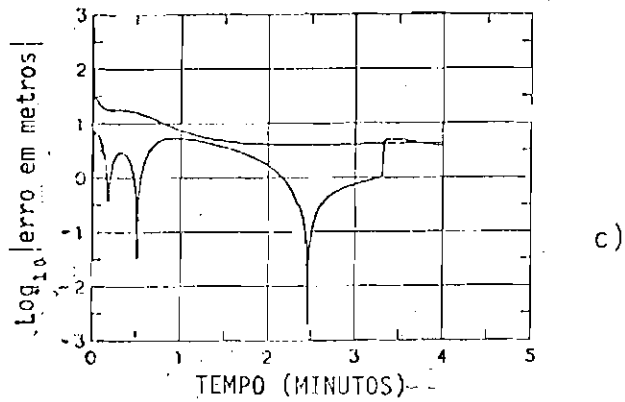
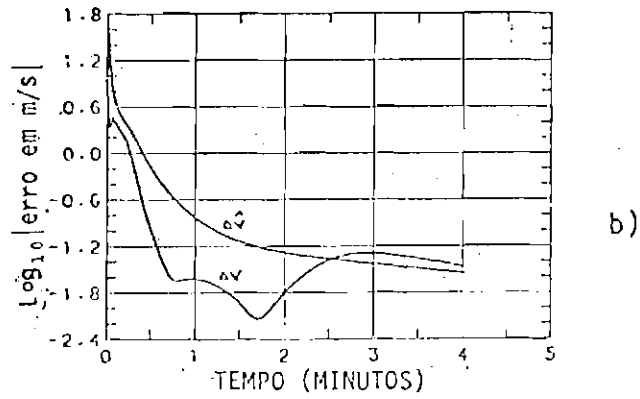
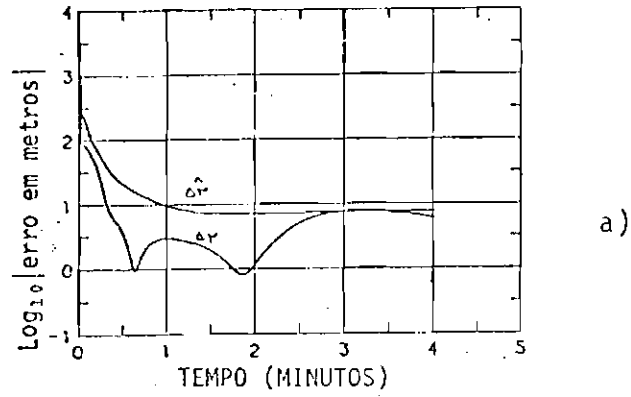


Fig. 4.4 - Curvas sobrepostas dos erros estimado e real, obtidas com a aplicação do procedimento de estimação conjunta de tendências nas observações e estado do sistema:

a) em posição; b) em velocidade; c) nas estimativas da tendência em uma das observações da distância estação de rastreamento-satélite.

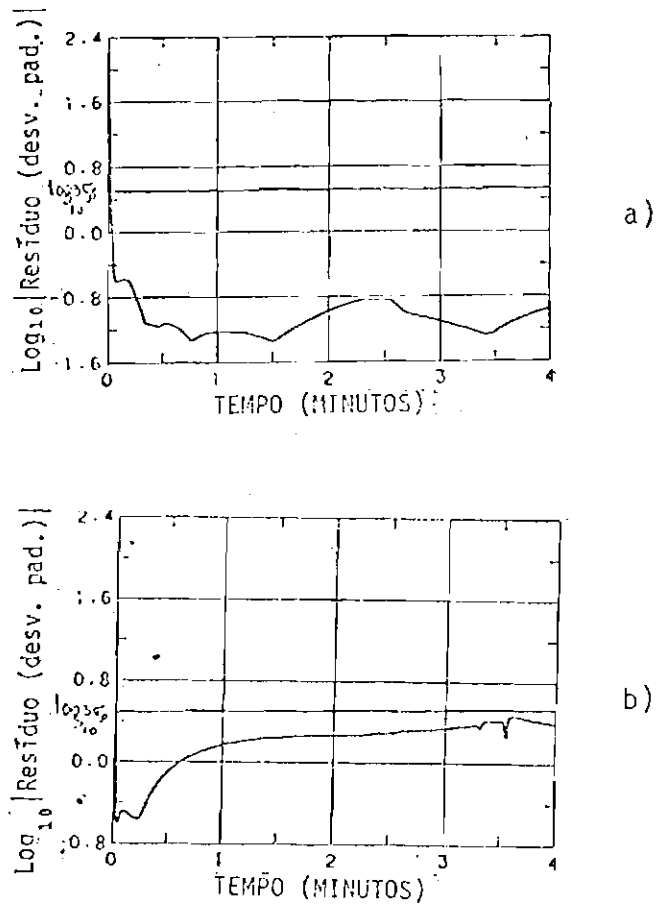


Fig. 4.5 - Curvas dos resíduos normalizados, obtidas com a aplicação do procedimento para estimação conjunta das tendências presentes nas observações com o estado do sistema:

- a) das observações da distância estação de rastreamento-satélite;
- b) das observações da variação temporal da distância estação de rastreamento-satélite.

Existe agora uma coerência estatística entre as estimativas que atesta a convergência do estimador. A Figura 4.4b apresenta sobrepostas as curvas do erro real e erro estimado em velocidade,  $\Delta v$  e  $\Delta \hat{v}$ , respectivamente, as quais apresentam um comportamento semelhante ao das apresentadas na Figura 4.4a. Os erros estimado e real caem para valores próximos a 0,025 m/s e mantêm-se nessa ordem de grandeza, o que confirma a convergência do estimador de estado. O mesmo ocorre com relação às curvas apresentadas na Figura 4.4c, relativas ao erro real e estimado das estimativas de tendências em uma das observações da distância.

Nas Figuras 4.5a e 4.5b são apresentados os resíduos normalizados das observações da distância estação-satélite e variação temporal dessa distância, respectivamente. Note-se que em ambos os casos o resíduo permanece na faixa de  $3\sigma$ , o que confirma o bom desempenho do procedimento desenvolvido.

## CAPÍTULO 5

### PROCEDIMENTO PARA AUMENTAR A VELOCIDADE DE PROCESSAMENTO EM ESTIMAÇÃO DE ESTADO VIA FILTRO DE KALMAN

#### 5.1 - INTRODUÇÃO

Existem situações nas quais os dados de observações de um sistema dinâmico destinados à alimentação do filtro de Kalman, para a estimação do estado do sistema, são colhidos a uma taxa tal que não permite ao estimador o processamento desses dados em tempo real. O procedimento a ser descrito, aplicável dentro de certas condições, visa a obtenção de um algoritmo numérico para o estimador que consuma menos tempo de processamento que o algoritmo usual do Filtro de Kalman, possuindo porém praticamente a mesma eficiência deste último. A aplicação do algoritmo pode permitir, através do ganho em velocidade de processamento, que o procedimento de estimação de estado seja feito em tempo real em casos que isso não é possível com a aplicação do filtro de Kalman original. Procedimentos com essa finalidade são classificados como procedimentos de compressão de dados.

#### 5.2 - DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Suponha-se um sistema dinâmico modelado matematicamente por:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t] + G(t) \omega(t) , \quad (5.1)$$

onde  $x(t)$  é o vetor de estado do sistema;  $f$  é um vetor de dimensão  $n$ , função não-linear do estado;  $G$  é uma matriz  $n \times r$  contínua no tempo;  $\omega(t)$  é um vetor  $r$  dimensional que representa incertezas na modelagem do sistema com as seguintes propriedades estatísticas:

$$\begin{aligned} E[\omega(t)] &= 0 , \\ E[\omega(t) \omega^T(\tau)] &= Q(t) \delta(t - \tau) , \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde  $\delta(t - \tau)$  é a função delta de Dirac e  $Q(t)$  é uma matriz positiva se midefinida,  $r \times r$ .

Suponha-se que se dispõe de observações do estado do sis tema dinâmico modeladas por:

$$y_k = h[x(t_k), t_k] + v_k , \quad (5.3)$$

onde  $y_k$  representa o vetor  $m$  dimensional de observações no instante  $t_k$ ;  $h$  é uma função vetorial  $m$  dimensional do estado do sistema;  $v_k$  é um vetor de dimensão  $m$  que representa o erro aleatório das medidas, cujas propriedades estatísticas são:

$$E[v_k] = 0 , \quad (5.4)$$

$$E[v_k v_k^T] = R_k ,$$

onde  $R_k$  é uma matriz  $m \times m$  positiva definida.

Suponha-se ainda que o vetor de estado inicial é uma va riável aleatória com estatística  $N[\bar{x}(t_0), P(t_0)]$  e que sejam válidas as hipóteses de não-correlação expressas na Equação 2.17.

As equações do filtro estendido de Kalman aplicadas ao sistema acima, conforme as Equações 2.49 a 2.53, são dadas por:

a) Equações para propagação do estado e respectiva matriz de cova riância do erro entre instantes de amostragem:

$$\hat{x}(t_{k+1}/t_k) = \hat{x}(t_k/t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f[\hat{x}(t/t_k)] dt , \quad (5.5)$$

$$P(t_{k+1}/t_k) = \phi(t_{k+1}, t_k) P(t_k/t_k) \phi^T(t_{k+1}, t_k) + \Gamma(t_k) Q(t_k) \Gamma^T(t_k), \quad (5.6)$$

onde  $\phi$  é a matriz de transição de estado do sistema linearizado, conforme descrito na Seção 2.4, definida na Equação 2.23, e  $\Gamma(t_k)$  está definida pela Equação 2.34.

b) Equações para atualização do estado e matriz de covariância do erro:

$$\hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1}/t_k) + K(t_k) \{y_{k+1} - h[\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}]\}, \quad (5.7)$$

$$P(t_{k+1}/t_{k+1}) = [\Pi - K(t_{k+1}) M(t_{k+1})] \cdot P(t_{k+1}/t_k),$$

onde:

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1}/t_k) M^T(t_{k+1}) [M(t_{k+1}) P(t_{k+1}/t_k) \cdot M^T(t_{k+1}) + R_{k+1}]^{-1}, \quad (5.8)$$

$$M(t_{k+1}) = \frac{\partial h[x(t), t]}{\partial x} \Big|_{\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}}. \quad (5.9)$$

Particione-se agora o vetor de estado do sistema do seguinte modo:

$$x(t) = [{}^u x \quad {}^v x]^T = [x_{(1)} : \dots : x_{(u)} : x_{(u+1)} : \dots : x_{(n)}]^T, \quad (5.10)$$

onde  ${}^u x$  é a partição do vetor de estado  $x(t)$  com suas primeiras  $u$  componentes;  ${}^v x$  é a partição do vetor de estado com suas últimas  $v$  componentes;  $x_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  representa a  $i$ -ésima componente do vetor de estado.

Suponha-se que o vetor de observações  $\bar{e}$  função apenas das primeiras  $u$  componentes do vetor de estado, ou seja:

$$h[x(t), t] = h[x^u(t), t], \quad (5.11)$$

o que implica que:

$$M(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{(1)}}{\partial x_{(1)}} & \dots & \frac{\partial h_{(1)}}{\partial x_{(u)}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial h_{(2)}}{\partial x_{(1)}} & \dots & \frac{\partial h_{(2)}}{\partial x_{(u)}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_{(m)}}{\partial x_{(1)}} & \dots & \frac{\partial h_{(m)}}{\partial x_{(u)}} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \triangleq [C(t_{k+1}) : 0], \quad (5.12)$$

$\bar{x}(t_{k+1}/t_k), t_k$

onde  $h_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$  representa a  $i$ -ésima componente do vetor  $m$  dimensional  $h[x(t), t]$ ;  $C(t_{k+1})$  é a partição de  $M(t_{k+1})$  definida por essa equação, cuja dimensão é  $m \times u$ ;  $0$  é a matriz nula  $m \times v$ .

Particione-se ainda a matriz de covariância do erro na estimação do estado,  $P$ , de modo a se obter:

$$P = \begin{bmatrix} uu_p & uv_p \\ uv_p^T & vv_p \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Supondo ser válida a suposição representada na Equação 5.11 e considerando a matriz de covariância do erro na estimação particionada como mostrado na Equação 5.13, obtêm-se para cada partição, através da aplicação das Equações 5.7 e 5.8, após algumas manipulações algébricas:

$$\begin{aligned} {}^{uu}P(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \{ \mathbb{I} - {}^{uu}P(t_{k+1}/t_k) C^T(t_{k+1}) [C(t_{k+1}) {}^{uu}P(t_{k+1}/t_k) \cdot \\ &\cdot C^T(t_{k+1}) + R(t_{k+1})]^{-1} C(t_{k+1}) \} {}^{uu}P(t_{k+1}/t_k), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} {}^{uv}P(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \{ \mathbb{I} - {}^{uu}P(t_{k+1}/t_k) C^T(t_{k+1}) [C(t_{k+1}) {}^{uu}P(t_{k+1}/t_k) \cdot \\ &\cdot C^T(t_{k+1}) + R(t_{k+1})]^{-1} C(t_{k+1}) \} {}^{uv}P(t_{k+1}/t_k), \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} {}^{vv}P(t_{k+1}/t_{k+1}) &= {}^{vv}P(t_{k+1}/t_k) - {}^{uv}P^T(t_{k+1}/t_k) C^T(t_{k+1}) \cdot \\ &\cdot [C(t_{k+1}) {}^{uu}P(t_{k+1}/t_k) C^T(t_{k+1}) + R(t_{k+1})]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Definindo:

$$G(t_{k+1}) \triangleq {}^{uu}P(t_{k+1}/t_{k+1}) {}^{uu}P^{-1}(t_{k+1}/t_k), \quad (5.17)$$

$$D(t_{k+1}) \triangleq {}^{uu}P^{-1}(t_{k+1}/t_k) [\mathbb{I} - G(t_{k+1})], \quad (5.18)$$

pode-se provar através de manipulações algébricas nas Equações 5.14 a 5.16 (Bar-Itzhack, 1980) que as partições  ${}^{uv}P(t_{k+1}/t_{k+1})$  e  ${}^{vv}P(t_{k+1}/t_{k+1})$  podem ser reescritas, em termos da partição  ${}^{uu}P(t_{k+1}/t_{k+1})$ , por:

$${}^{uv}P(t_{k+1}/t_{k+1}) = - G(t_{k+1}) {}^{uv}P(t_{k+1}/t_k), \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} {}^{vv}P(t_{k+1}/t_{k+1}) &= {}^{vv}P(t_{k+1}/t_k) {}^{uv}P^T(t_{k+1}/t_k) \cdot \\ &\cdot D(t_{k+1}) {}^{uv}P(t_{k+1}/t_k). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Observando as duas equações acima conjuntamente com as Equações 5.17 e 5.18, nota-se que para o cálculo da matriz  $P(t_{k+1}/t_{k+1})$  completa, basta que se conheçam sua partição  ${}^{uu}P(t_{k+1}/t_{k+1})$  e a



matriz  $P(t_{k+1}/t_k)$  completa propagada para o instante  $t_{k+1}$ . Então, dentro das condições impostas, verifica-se que se forem conhecidas a partição da matriz de covariância do erro propagada e atualizada,  ${}^{uu}P(t_{k+1}/t_{k+1})$ , e a matriz completa apenas propagada,  $P(t_{k+1}/t_k)$ , pode-se através delas e com auxílio das Equações 5.19 e 5.20 calcular a matriz de covariância atualizada completa relativa a esse instante,  $P(t_{k+1}/t_{k+1})$ .

Considere-se agora o desdobramento da equação para atualização do estado, Equação 5.7, para as duas partições do vetor de estado do sistema definidas na Equação 5.10:

$${}^u\tilde{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) = {}^u\tilde{x}(t_{k+1}/t_k) + {}^{um}K(t_{k+1})(y_{k+1} - h_{k+1}), \quad (5.21)$$

e

$${}^v\tilde{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) = {}^v\tilde{x}(t_{k+1}/t_k) + {}^{vm}K(t_{k+1})(y_{k+1} - h_{k+1}), \quad (5.22)$$

onde a notação  $h_{k+1}$  representa a função  $h[x(t_{k+1}/t_k), t_k]$  e as partições  ${}^{um}K$  e  ${}^{vm}K$  são as partições do ganho de Kalman representadas na equação:

$$K(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} {}^{um}K(t_{k+1}) \\ {}^{vm}K(t_{k+1}) \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Defina-se agora:

$$E(t_{k+1}) \triangleq M^T(t_{k+1}) [M(t_{k+1})P(t_{k+1}/t_k)M^T(t_{k+1}) + R_{k+1}]^{-1}. \quad (5.24)$$

Note-se que, desde que seja válida a Hipótese 5.11, tendo em vista a Definição 5.12, pode-se escrever:

$$E(t_{k+1}) = C^T(t_{k+1}) [C(t_{k+1}){}^{uu}P(t_{k+1}/t_k)C^T(t_{k+1}) + R_{k+1}]^{-1}, \quad (5.25)$$

$\epsilon$ , a partir da Equação 5.8, considerando as definições das partições do ganho de Kalman dadas pela Equação 5.23, tais partições podem ser escritas como:

$$um_K(t_{k+1}) = uu_P(t_{k+1}/t_k)E(t_{k+1}), \quad (5.26)$$

$$vm_K(t_{k+1}) = uv_P^T(t_{k+1}/t_k)E(t_{k+1}). \quad (5.27)$$

Substituindo a Equação 5.26 na Equação 5.21, obtêm-se:

$$\begin{aligned} u\tilde{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= u\tilde{x}(t_{k+1}/t_k) + uu_P(t_{k+1}/t_k) \\ &\cdot E(t_{k+1})(y_{k+1} - h_{k+1}), \end{aligned} \quad (5.28)$$

de onde vem que:

$$\begin{aligned} E(t_{k+1})(y_{k+1} - h_{k+1}) &= uu_P^{-1}(t_{k+1}/t_k)[u\tilde{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) - \\ &- u\tilde{x}(t_{k+1}/t_k)]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

A Equação 5.22, com a substituição da Equação 5.27, fica dada por:

$$\begin{aligned} v\tilde{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= v\tilde{x}(t_{k+1}/t_k) + uv_P^T(t_{k+1}/t_k) \\ &\cdot E(t_{k+1})(y_{k+1} - h_{k+1}). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Substituindo agora  $E(t_{k+1})(y_{k+1} - h_{k+1})$  pela sua expressão dada pela Equação 5.29 na Equação 5.30, obtêm-se finalmente:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \hat{x}(t_{k+1}/t_k) + u^v P^T(t_{k+1}/t_k) u u P^{-1}(t_{k+1}/t_k) \cdot \\ &\cdot [\hat{x}(t_{k+1}, t_{k+1}) - \hat{x}(t_{k+1}/t_k)] , \end{aligned} \quad (5.31)$$

de onde se nota que para atualizar a partição  $\hat{x}$  da estimativa do vetor de estado no instante  $t_{k+1}$ , sã se necessita da estimativa atualizada da outra partição nesse instante,  $\hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1})$ , e da estimativa do vetor de estado completa propagada para esse instante.

Os resultados acima, tando no que concerne à matriz de covariância do erro de estimação quanto ao vetor de estado estimado, foram provados por Bar-Itzhack (1980) para sistemas lineares. A partir destes resultados, o citado autor desenvolveu um método de compressão de dados, aplicável apenas a sistemas lineares, cujo objetivo é compatibilizar a velocidade de processamento do estimador de estado com requisitos de tempo impostos ao processamento em tempo real. Esse método desenvolvido utiliza um filtro de Kalman de ordem reduzida que opera a partir de um modelo dinâmico de ordem reduzida do sistema, à mesma taxa com a qual as observações são amostradas. Paralelamente um filtro de ordem total opera a uma taxa menor.

Baseados nos resultados demonstrados será apresentada a seguir a descrição de um procedimento de compressão, cuja aplicabilidade se estende a sistemas não-lineares e evita a necessidade de utilização de um modelo matemático de ordem reduzida do sistema dinâmico.

Foi demonstrado que:

- a) Se forem conhecidas a partição  $u u P(t_{k+1}/t_{k+1})$  de dimensão  $u \times u$ , definida na Equação 5.13, e a matriz  $P(t_{k+1}/t_k)$  completa pode-se calcular o restante dos elementos da matriz de covariância do erro de estimativa atualizada  $P(t_{k+1}/t_{k+1})$ . Isso se verifica pelas Equações 5.19 e 5.20 e é válido desde que as observações sejam funções apenas da partição do estado  $u_x$ , ou seja, a função  $h$  seja da forma apresentada na Equação 5.11.

b) Se forem conhecidas a estimativa do vetor de estado completo  $\hat{x}(t_{k+1}/t_k)$  e a partição da estimativa atualizada  ${}^u\hat{x}(t_{k+1}/t_{k+1})$  definida na Equação 5.10, pode-se calcular a partição restante da estimativa atualizada do estado, conforme se verifica pela Equação 5.31, desde que a citada condição imposta às observações seja válida.

Suponha-se que se dispõe de estimativas atualizadas do estado e respectiva matriz de covariância do erro correspondentes ao instante  $t_k$ , ou seja, de  $\hat{x}(t_k/t_k)$  e  $P(t_k/t_k)$ . Considere-se o instante  $t_k + NT$ , sendo  $N$  um número inteiro predeterminado e  $T$  o período de amostragem de observações. A fim de compatibilizar a notação representar-se-á esse instante por  $t_{k+N}$ . Suponha-se agora que se dispõe das estimativas atualizadas correspondentes a esse instante da partição do vetor de estado  ${}^u\hat{x}(t_{k+N}/t_{k+N})$  e da partição da matriz de covariância do erro  ${}^{uu}P(t_{k+N}/t_{k+N})$ , além das estimativas propagadas para esse instante tanto do vetor de estado completo quanto da matriz de covariância completa,  $\hat{x}(t_{k+N}/t_k)$  e  $P(t_{k+N}/t_k)$ , respectivamente. Então, aplicando as Equações 5.19, 5.20 e 5.31 a esse caso, obtêm-se:

$${}^{uv}P(t_{k+N}/t_{k+N}) = -G(t_{k+N}){}^{uv}P(t_{k+N}/t_k), \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} {}^{vv}P(t_{k+N}/t_{k+N}) &= {}^{vv}P(t_{k+N}/t_k) {}^{uv}P^T(t_{k+N}/t_k) \cdot \\ &\cdot D(t_{k+N}){}^{uv}P(t_{k+N}/t_k), \end{aligned} \quad (5.33)$$

onde se verifica pelas Equações 5.17 e 5.18 que:

$$G(t_{k+N}) = {}^{uu}P(t_{k+N}/t_{k+N}) {}^{uu}P^{-1}(t_{k+N}/t_k), \quad (5.34)$$

$$D(t_{k+N}) = {}^{uu}P^{-1}(t_{k+N}/t_k) [\Pi - G(t_{k+N})], \quad (5.35)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_{k+N}/t_{k+N}) &= \hat{x}(t_{k+N}/t_k) + {}^{uv}P^T(t_{k+N}/t_k) {}^{uu}P^{-1}(t_{k+N}/t_k) \cdot \\ &\cdot [{}^u\hat{x}(t_{k+N}/t_{k+N}) - {}^u\hat{x}(t_{k+N}/t_k)] . \end{aligned} \quad (5.36)$$

Nota-se que se pode, a partir das suposições efetuadas acima, atualizar tanto o restante da estimativa do estado, quanto o da respectiva matriz de covariância do erro. Com base nisso, propõe-se o seguinte procedimento para reduzir o número de cálculos envolvidos na aplicação do filtro de Kalman à estimação do estado de sistemas não-lineares que satisfaçam as hipóteses efetuadas:

- a) Propagar a estimativa do estado  $\hat{x}(k/k)$  a cada período de amostragem durante N períodos; porém, a cada período atualizar apenas a partição  ${}^u\hat{x}(k/k)$ . Com relação à matriz de covariância do erro, propagar e atualizar a cada período de amostragem apenas a partição  ${}^{uu}P(t_k/t_k)$  durante N períodos.
- b) Propagar de uma única vez do instante  $t_k$  ao instante  $t_{k+N}$  todo o vetor  $\hat{x}(t_k/t_k)$  e a matriz  $P(t_k/t_k)$ , obtendo-se  $\hat{x}(t_{k+N}/t_k)$  e  $P(t_{k+N}/t_k)$ , respectivamente.
- c) Uma vez obtidos os valores de  ${}^u\hat{x}(t_{k+N}/t_{k+N})$ ,  ${}^{uu}P(t_{k+N}/t_{k+N})$ ,  $\hat{x}(t_{k+N}/t_k)$  e  $P(t_{k+N}/t_k)$  através das Equações 5.32 a 5.36, calcular todos os elementos restantes das estimativas do estado e matriz de covariância do erro atualizadas.
- d) Repetir o procedimento para os próximos N períodos de amostragem seguintes ao instante  $t_{k+N}$  e, depois, para os N períodos seguintes a  $t_{k+2N}$  e, assim, sucessivamente.

Para seguir a denominação dada por Bar-Itzack (1980), chamar-se-ão instantes de renovação os instantes de atualização das partições do estado e da matriz de covariância do erro. Para ilustrar e facilitar a compreensão do procedimento, este é esquematizado na Figura 5.1.

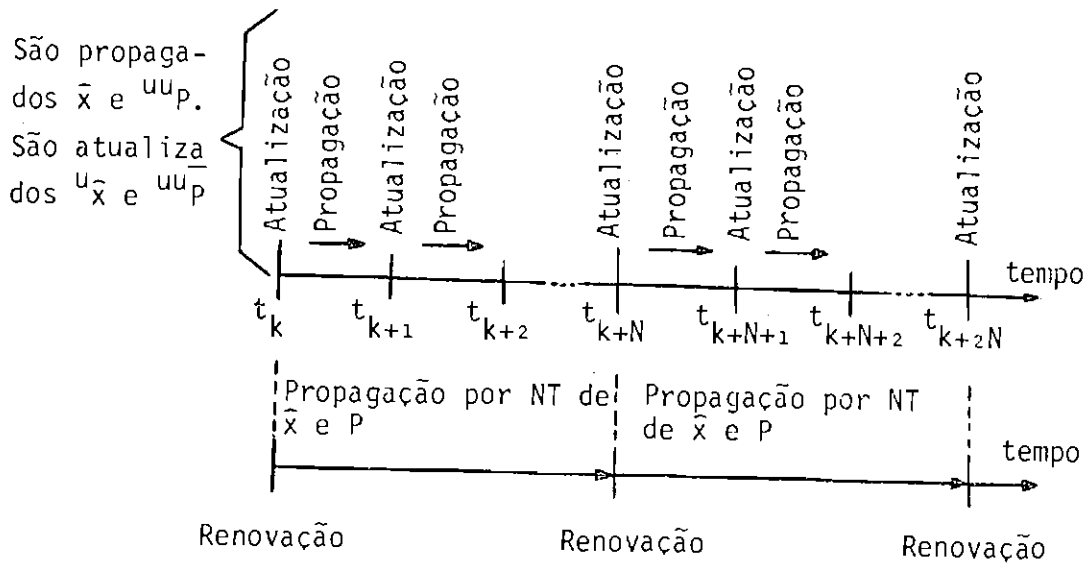


Fig. 5.1 - Esquemática do procedimento de compressão.

Para que as propagações e atualizações de apenas partições do vetor de estado e matriz de covariância do erro a cada período de amostragem possam ser efetuadas, é necessário fazer algumas aproximações. Serão apresentadas a seguir as equações envolvidas nessa tarefa, destacando-se as aproximações efetuadas:

- a) Equações para propagação da estimativa do vetor de estado completo e para atualização da estimativa da partição formada pelos primeiros  $u$  elementos desse vetor.

A propagação da estimativa do vetor de estado entre instantes de amostragem é feita diretamente pela Equação 5.5, ou seja:

$$\hat{x}(t_{k+1}/t_k) = \hat{x}'(t_k/t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f[\hat{x}'(t/t_k)] dt, \quad (5.37)$$

onde  $\hat{x}'(t_k/t_k)$  representa o vetor de estimativas do estado relativo ao instante  $t_k$ , que leva em conta atualizações só na partição  $u_x$ .

A atualização apenas da partição  $\hat{x}^u$  da estimativa do vetor de estado deve ser feita através da Equação 5.21, reescrita abaixo:

$$\hat{x}^u(t_{k+1}/t_{k+1}) = \hat{x}^u(t_{k+1}/t_k) + K^u(t_{k+1})(y_{k+1} - h_{k+1}). \quad (5.38)$$

b) Equações para propagação e atualização apenas da partição da matriz de covariância do erro  $P^u$ .

A fim de deduzir uma equação para propagação, entre instantes de amostragem de observações, da partição  $P^u$  da matriz de covariância do erro, considere-se inicialmente a matriz de transição do sistema linearizado particionada como a matriz de covariância. Pode-se, então, reescrever a Equação 5.6 como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P^u(t_{k+1}/t_k) & P^{uv}(t_{k+1}/t_k) \\ P^{uvT}(t_{k+1}/t_k) & P^{vv}(t_{k+1}/t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^u(t_{k+1}, t_k) & \phi^{uv}(t_{k+1}, t_k) \\ \phi^{vu}(t_{k+1}, t_k) & \phi^{vv}(t_{k+1}, t_k) \end{bmatrix} \\ & \cdot \begin{bmatrix} P^u(t_k/t_k) & P^{uv}(t_k/t_k) \\ P^{uvT}(t_k/t_k) & P^{vv}(t_k/t_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^uT(t_{k+1}, t_k) & \phi^{uvT}(t_{k+1}, t_k) \\ \phi^{vuT}(t_{k+1}, t_k) & \phi^{vvT}(t_{k+1}, t_k) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} r^u(t_k) \\ r^v(t_k) \end{bmatrix} \cdot Q(t_k) \begin{bmatrix} r^uT(t_k) \\ r^vT(t_k) \end{bmatrix}. \quad (5.39) \end{aligned}$$

Calculando apenas a partição  $P^u(t_{k+1}/t_k)$  através da equação acima, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 {}^{uu}P(t_{k+1}/t_k) &= {}^{uu}\phi(t_{k+1}, t_k) {}^{uu}P(t_k/t_k) {}^{uu}\phi^T(t_{k+1}, t_k) + \\
 &+ [{}^{uu}\phi(t_{k+1}, t_k) {}^{uv}P(t_k/t_k) {}^{uv}\phi^T(t_{k+1}, t_k)]^T + \\
 &+ {}^{uu}\phi(t_{k+1}, t_k) {}^{uv}P(t_k/t_k) {}^{uv}\phi^T(t_{k+1}, t_k) + \\
 &+ {}^{uv}\phi(t_{k+1}, t_k) {}^{vv}P(t_k/t_k) {}^{uv}\phi^T(t_{k+1}, t_k) + \\
 &+ {}^{ur}\Gamma(t_k) Q(t_k) {}^{ur}\Gamma^T. \tag{5.40}
 \end{aligned}$$

Mas, visto que se pretende atualizar a cada período de amostragem apenas a partição  ${}^{uu}P$ , renovando o restante dessa matriz somente a cada  $N$  períodos, percebe-se que sō se disporā das estimativas atualizadas  ${}^{uv}P(t_k/t_k)$  e  ${}^{vv}P(t_k/t_k)$  correspondentes aos instantes de renovação, ou seja, aos instantes  $t_1, t_{1+N}, t_{1+2N} \dots$ . Isso impede que o cālcūlo de  ${}^{uu}P(t_{k+1}/t_k)$  seja feito diretamente atravēs da Equação 5.40. Esse problema ē soluçionado atravēs do emprego de uma aproximação da Equação 5.40. A fim de escrever essa equação aproximada chame-se de  $t_i, i = 1, 1+N, 1+2N, \dots$  os instantes de renovação. Propõe-se, entāo, o cālcūlo de  ${}^{uu}P(t_{k+1}/t_k)$ , atravēs da seguinte aproximação da Equação 5.40:

$$\begin{aligned}
 {}^{uu}P^*(t_{k+1}/t_k) &= {}^{uu}\phi(t_{k+1}, t_k) {}^{uu}P(t_k/t_k) {}^{uu}\phi^T(t_{k+1}, t_k) + \\
 &+ [{}^{uu}\phi(t_{k+1}, t_i) {}^{uv}P(t_i/t_i) {}^{uv}\phi^T(t_{k+1}, t_i)]^T + \\
 &+ {}^{uu}\phi(t_{k+1}, t_i) {}^{uv}P(t_i/t_i) {}^{uv}\phi^T(t_{k+1}, t_i) + \\
 &+ {}^{uv}\phi(t_{k+1}, t_i) {}^{vv}P(t_i/t_i) {}^{uv}\phi^T(t_{k+1}, t_i) + \\
 &+ {}^{ur}\Gamma(t_k) Q(t_k) {}^{ur}\Gamma^T, \tag{5.41}
 \end{aligned}$$



onde a notação  $P^*$  indica tratar-se de um valor proveniente de um cálculo aproximado.

A atualização apenas da citada partição a cada período de amostragem é feita através da Equação 5.14, porém, utilizando-se do valor aproximado calculado pela Equação 5.41, em lugar de  ${}^{uu}P(t_{k+1}/t_k)$ , ou seja:

$$\begin{aligned} {}^{uu}P^*(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \{ \Pi - {}^{uu}P^*(t_{k+1}/t_k) C^T(t_{k+1}) [C(t_{k+1}) {}^{uu}P^*(t_{k+1}/t_k) \\ &\quad \cdot C^T(t_{k+1}) + R(t_{k+1})]^{-1} C(t_{k+1}) \} \\ &\quad \cdot {}^{uu}P^*(t_{k+1}/t_k) . \end{aligned} \quad (5.42)$$

Suponha-se, agora, um instante de renovação genérico  $t_i$  e que já se dispõe da estimativa atualizada completa do vetor de estado e matriz de covariância do erro dessa estimativa,  $\bar{x}(t_i/t_i)$  e  $P(t_i/t_i)$ , respectivamente. Então pode-se, com o auxílio das Equações 5.37, 5.38, 5.41 e 5.42, propagar a estimativa completa do estado e atualizar apenas sua partição  ${}^{uu}x$  a cada período de amostragem, bem como propagar e atualizar, a cada período, apenas a partição  ${}^{uu}P$  da matriz de covariância do erro na estimativa. Quando se chegar ao próximo instante de renovação,  $t_{i+N}$ , se disporá desse modo das estimativas  ${}^{uu}\bar{x}(t_{i+N}/t_{i+N})$  e  ${}^{uu}P^*(t_{i+N}/t_{i+N})$ . Para que se possa neste ponto recorrer às Equações 5.32, 5.33, 5.34, 5.35 e 5.36 para executar a renovação das estimativas completas, verifica-se ainda a necessidade de obter a estimativa completa do vetor de estado e matriz de covariância do erro propagada do instante  $t_i$  ao instante  $t_{i+N}$ , ou seja,  $\bar{x}(t_{i+N}/t_i)$  e  $P(t_{i+N}/t_i)$ . A estimativa  $\bar{x}(t_{i+N}/t_i)$  é obtida através da integração da função  $f[\bar{x}(t/t_i)]$  do instante  $t_i$  ao instante  $t_{i+N}$ , ou seja:

$$\bar{x}(t_{i+N}/t_i) = \bar{x}(t_i/t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+N}} f[\bar{x}(t/t_i)] dt , \quad (5.43)$$

e a matriz  $P(t_{i+N}/t_i)$  é calculada a partir do cálculo da matriz de transição de estado  $\phi(t_{i+N}, t_i)$  e do emprego da Equação 5.6, ou seja:

$$P(t_{i+N}/t_i) = \phi(t_{i+N}, t_i) P(t_i/t_i) \phi^T(t_{i+N}, t_i) + \Gamma(t_i) Q(t_i) \Gamma^T(t_i) . \quad (5.44)$$

Com isso fica concluída a descrição do procedimento de compressão, ressaltando tratar-se de um procedimento de estimação subótimo, visto que utiliza equações aproximadas para a propagação da matriz de covariância do erro de estimação entre instantes de amostragem.

Se o sistema dinâmico for tal que a matriz de derivadas parciais da função  $f(x(t), t)$  do modelo dinâmico representado na Equação 5.1, em relação ao estado, puder ser considerada aproximadamente constante durante  $N$  períodos de amostragem, então a matriz  $\phi(t_{k+1}, t_k)$  poderá também ser considerada constante por esses  $N$  períodos. Com isso consegue-se uma melhoria em termos de ganho em velocidade de processamento com a aplicação do algoritmo, visto que se evita a necessidade de cálculo da matriz de transição a cada período de amostragem.

O procedimento foi testado através de simulação numérica na estimação da órbita de um satélite artificial, utilizando os mesmos modelos de órbita citados no capítulo anterior, bem como os mesmos dados ali citados para essa finalidade. Foram efetuados testes, considerando vários valores de  $N$ , para matriz de transição calculada a cada período de amostragem e para matriz de transição constante durante  $N$  períodos. Os resultados são apresentados e discutidos na próxima seção.

### 5.3 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Inicialmente, a título de comparação, aplicou-se o procedimento usual do filtro de Kalman, incluindo técnica de compensação de erros na modelagem matemática (Kuga, 1982), o que eleva a dimensão do

estado de 6 para 9 variáveis. Os dados da órbita simulada são os mesmos utilizados nos testes do procedimento apresentado no capítulo anterior, devendo ser, porém destacado que aqui consideraram-se observações apenas da distância estação-satélite, afetadas por erros aleatórios com média nula, considerando 3 estações de rastreamento efetuando medidas simultaneamente. Note-se que desse modo, já que a distância estação-satélite só depende das três primeiras componentes do vetor de estado orbital do satélite, conforme a Equação 4.25, a função de observações é da forma  $h(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)})$  e, portanto, da forma exigida para que o método de compressão seja aplicável.

Na Figura 5.2 são apresentadas as curvas dos erros em posição e velocidade, real e estimado, resultantes da aplicação do filtro de Kalman sem compressão. A Figura 5.2a mostra as curvas dos erros estimados e real em posição, traçadas em um único gráfico, e a Figura 5.2b refere-se analogamente aos erros em velocidade. Note-se, pela Figura 5.2a, que o erro real em posição cai de valores iniciais da ordem de 1000 metros para valores da ordem de 1 metro, assim permanecendo, enquanto o erro estimado cai para valores da ordem de 10 m, mantendo-se coerentemente acima dos valores do erro real, dando mostras da convergência do estimador do estado. Como se pode ver pela Figura 5.2b, também as curvas relativas ao erro em velocidade atestam o bom desempenho do estimador. Nessa estimação do estado, relativa a 4 minutos de órbita simulada, através do procedimento que emprega o filtro de Kalman na forma original, foram gastos 44,6 segundos de processamento.

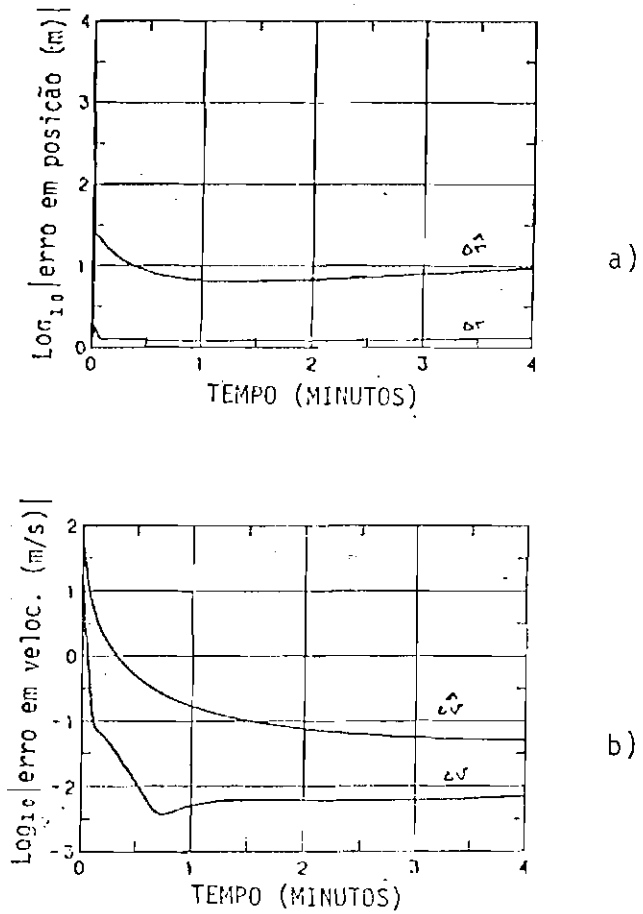


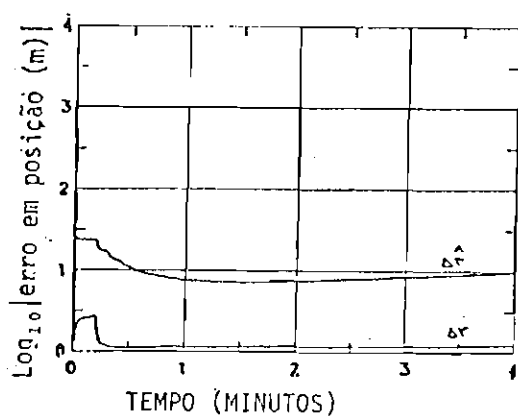
Fig. 5.2 - Resultados obtidos com a aplicação do filtro de Kalman à estimação de órbita de satélite artificial sem emprego do procedimento de compressão:

a) erros estimado e real em posição; b) erros estimado e real em velocidade.

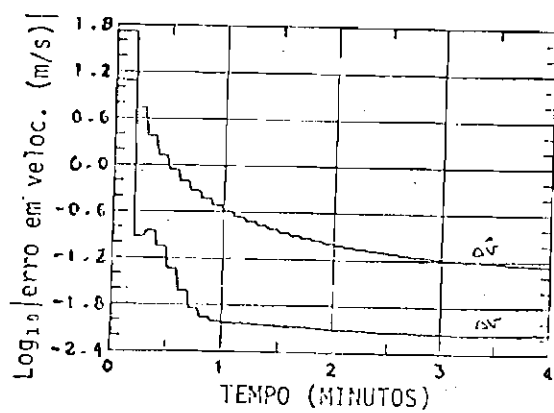
A seguir aplicou-se ao mesmo problema o procedimento de compressão desenvolvido, utilizando vários valores de  $N$ . Primeiramente foram efetuados testes considerando a matriz de transição de estado do sistema linearizado como variável de período a período de amostragem. Nesse caso, a matriz de transição é calculada a cada período. Depois efetuaram-se testes considerando a matriz de transição de estado constante durante  $N$  períodos sucessivos, só calculando essa matriz para os primeiros períodos de amostragem dos sucessivos intervalos de  $N$  períodos. A Figura 5.3 apresenta os resultados da aplicação do procedimento, considerando-se a matriz de transição como variável de período a período de amostragem e efetuando-se a renovação do estado a cada 6 períodos, ou seja,  $N = 6$ , o que significa que a renovação foi feita a cada 6 segundos, visto ser de 1 segundo o período de amostragem de observações. Na Figura 5.3a são apresentadas as curvas obtidas para os erros real e estimado em posição, enquanto na Figura 5.3b o mesmo é feito com relação aos erros em velocidade. Comparando essas curvas com as apresentadas na Figura 5.2, percebe-se que praticamente nada foi perdido em termos de precisão das estimativas a partir da aplicação do procedimento de compressão.

Por outro lado conseguiu-se reduzir o tempo gasto no processamento, que foi de 44,6 segundos com a aplicação do filtro de Kalman usual para 36,4 segundos com a aplicação do procedimento de compressão.

A seguir apresentam-se na Figura 5.4 os resultados obtidos também para  $N = 6$  porém considerando a matriz de transição constante. Nota-se novamente que pouco se perdeu em termos de precisão das estimativas, comparando essa figura com as Figuras 5.2 e 5.3. Conseguiu-se, porém, reduzir o tempo de processamento para 22,6 segundos, o que significa um ganho de 22 segundos em relação ao procedimento sem compressão e 13,8 segundos em relação ao procedimento com compressão, considerando a matriz de transição variável.



a)



b)

Fig. 5.3 - Resultados obtidos com a aplicação do procedimento de compressão de dados com matriz de transição de estado considerada variável de período a período de amostragem:

a) erros estimado e real em posição; b) erros estimado e real em velocidade.

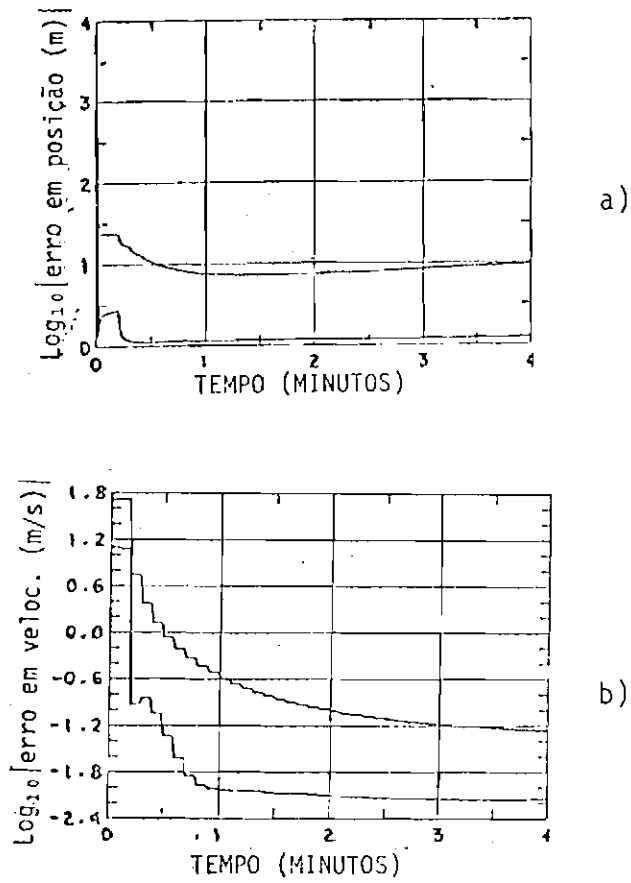


Fig. 5.4 - Resultados obtidos com a aplicação do procedimento de compressão de dados, com matriz de transição considerada constante por cada  $N$  períodos de amostragem:

a) erros estimado e real em posição; b) erros estimado e real em velocidade.

O procedimento foi testado para valores de  $N$ , que vão de 2 a 15, e notou-se que na aplicação específica para  $N > 12$  as estimativas começam a se deteriorar, e o estimador passa a apresentar tendências a divergir. Na Tabela 5.1 apresentam-se resultados da aplicação do procedimento em termos de tempo de processamento para 4 minutos de órbita simulada, para valores de  $N$  variando de 2 a 10. Os resultados, em termos de desempenho do estimador, foram constatados como semelhantes aos apresentados para  $N = 6$  nas Figuras 5.3 e 5.4, não sendo por esse motivo apresentadas as curvas correspondentes.

TABELA 5.1

RESULTADOS EM TERMOS DE TEMPO DE PROCESSAMENTO  
PARA N VARIANDO DE 2 A 10

N	TEMPO DE PROCESSAMENTO) (matriz de transição variável)	TEMPO DE PROCESSAMENTO (matriz de transição constante)
2	50,3 seg.	41 seg.
3	45,4 seg.	31 seg.
4	41,9 seg.	26,3 seg.
5	39,0 seg.	23,3 seg.
6	36,4 seg.	22,6 seg.
7	36,1 seg.	21,4 seg.
8	37,4 seg.	19,7 seg.
9	37,3 seg.	17,9 seg.
10	34,1 seg.	18,4 seg.



## CAPÍTULO 6

### COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Entre os três procedimentos apresentados, o primeiro, descrito no Capítulo 3, é diretamente aplicável na fase de pré-processamento de dados. Por se tratar de uma técnica de suavização por ajuste de curvas, possui ampla margem de aplicação, conforme evidenciado durante sua descrição. O fato de se utilizar de um estimador sequencial, o filtro de Kalman, permitiu o desenvolvimento de duas versões de procedimentos de suavização empregando essa técnica. A primeira delas para o processamento de dados em lotes; a outra para o seu processamento sequencial ponto a ponto, à medida que vão ficando disponíveis. A versão para o processamento em lotes, embora necessite que todo o conjunto de dados ao qual a curva será ajustada já tenha sido coletado para que possa ser aplicada, permite que os dados sejam processados um a um desde que os seus erros sejam não-correlacionados no tempo. Com isso é evitada a inversão matricial necessária ao cálculo do ganho de Kalman, transformando-a em uma série de inversões escalares. Essa característica de ausência de inversões matriciais não existe nos procedimentos usuais de ajuste de curvas por mínimos quadrados e  $\chi$ -quadrado, cujas aplicações requerem a inversão de uma matriz de dimensão uma unidade maior que o grau da curva ajustada (Meyer, 1975). No caso da técnica com processamento sequencial dos dados, existe uma vantagem adicional. Visto que ela permite que cada dado seja processado tão logo se encontrar disponível, ao ajuste é emprestada a característica de poder ser efetuado em tempo real, desde que se conheça a priori o grau da curva a ser ajustada. Conforme ficou evidenciado pelos resultados obtidos nos testes efetuados, apresentados na Seção 3.4, ambos os procedimentos se equivalem em termos de precisão, visto que os correspondentes resultados se mostraram análogos.

A técnica, apresentada no Capítulo 4, para tratamento automático de tendências existentes nas observações, embora não seja diretamente aplicável na fase de pré-processamento de dados, visa

evitar uma de suas etapas, referente à eliminação de erros tendenciosos dos dados. Com o emprego desta técnica podem ser utilizados dados afetados por erros tendenciosos diretamente na alimentação do filtro de Kalman, estimando-se esses erros conjuntamente com o estado do sistema dinâmico com o qual se trabalhe. Mesmo em casos nos quais as tendenciosidades das observações já foram subtraídas no pré-processamento, essa técnica é de utilidade, pois refina o processo de estimação de estado, evitando que o filtro possa divergir em consequência de possíveis tendenciosidades residuais que ainda possam estar presentes nas observações, em função de imprecisões dos procedimentos de correção aplicados no citado pré-processamento. O procedimento foi testado sob condições rigorosas em que os erros tendenciosos adicionados às observações simuladas eram muitas ordens de grandeza maiores que as precisões consideradas para essas observações. Apesar dessas condições severas de testes, os resultados obtidos, apresentados na Seção 4.4 mostraram-se bastante satisfatórios.

Finalmente o terceiro procedimento desenvolvido, apresentado no Capítulo 5, visa eliminar a necessidade, em certos casos, do emprego de procedimentos de compressão de dados ainda na fase de pré-processamento para a eliminação de dados redundantes, de modo a serem fornecidas ao estimador de estado observações a uma taxa menor que a taxa de amostragem original, o que permite a satisfação de requisitos de tempo impostos ao processamento. Esse procedimento, ao contrário, em vez de adequar a taxa de alimentação de dados do estimador à sua velocidade de processamento para que este consiga acompanhá-la, procura adequar a velocidade de processamento do estimador de estado à taxa original de amostragem de dados. O algoritmo desenvolvido para essa finalidade, aplicável a sistemas não-lineares, por utilizar certas aproximações evidenciadas durante a descrição é um procedimento subótimo. Porém, através dos resultados obtidos nos testes efetuados, apresentados na Seção 5.3, percebe-se que na aplicação em questão, ele apresentou praticamente a mesma eficiência que o algoritmo original do filtro de Kalman.

Como desenvolvimentos futuros, sugere-se para o procedimento apresentado no Capítulo 4 a sua aplicação à determinação de atitude de satélites artificiais com observações afetadas por erros tendenciosos. Com relação ao procedimento de compressão do Capítulo 5, também se sugere a sua aplicação à determinação de atitude de satélites artificiais.

Sugere-se ainda o emprego conjunto dos três procedimentos em determinação de órbita de satélites artificiais do seguinte modo:

- a) Considerar para a órbita de um determinado satélite observações não-sincronizadas no tempo (referentes a estações de rastreamento distintas que observam simultaneamente o satélite) afetadas por erros tendenciosos impostos pelo efeito de refração atmosférica.
- b) Aplicar aos dados referentes a cada estação em particular o procedimento de suavização apresentado no Capítulo 3 e, através de interpolações por intermédio da curva ajustada, sincronizar as observações de todas as fontes.
- c) Finalmente, com o emprego do procedimento de estimação (Capítulo 4) que trata automaticamente as tendenciosidades presentes na observação, porém modificado pela inclusão do procedimento de compressão do Capítulo 5, estimar o estado orbital do satélite.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDREWS, C.A.; DAVIES, J.M.; SCHWARZ, G.R. Adaptive data compression. *Proceedings of the IEEE*, 5(3):267-277, Mar. 1967.
- BAR-ITZHACK, I.Y. Novel method for data compression in recursive INS error estimation. *Journal of Guidance and Control*, 3(3):245-250, May-June 1980.
- BAR-SHALOM, Y. Redundancy and data compression in recursive estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-17(5):684-689, Oct. 1972.
- BENDAT, J.S.; PIERSOL, A.G. *Random data: analysis and measurements procedures*. New York, Wiley-Interscience, 1971.
- CAPPELLARI, J.O.; VELEZ, C.E.; FUCHS, A.J. ed. *Mathematical theory of the goddard trajectory determination system*. Greenbelt, MD, Goddard Space Flight Center, 1976.
- DRESSLER, R.M.; ROSS, D.W. A simplified algorithm for suboptimal non-linear state estimation, *Automática*, 6:477-480, May 1970.
- EUROPEAN SPACE AGENCY (ESA). *TD-1A. In: 6. Report presented by the European Space Agency to the 20th COSPAR meeting*, Tel Aviv, Israel, June, 1977. Paris, 1977. p. 44. (ESA SP-1002).
- EUROPEAN SPACE RESEARCH ORGANIZATION (ESRO). *Data preprocessing systems*, Roma, Telespazio, 1973. Vol. 1.
- FITZGERALD, R.J. Divergence of the Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16(6):736-747, Dec. 1971.
- GELB, A.; KASPER, J.F.; NASH JR., R.A.; PRICE, C.F.; SUTHERLAND JR., A.A. *Applied optimal estimation*. Cambridge, MA, MIT, 1974.
- HAMMING, E.W. *Digital filters*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1977.
- JAZWINSKI, A.H. Adaptive filtering. *Automática*, 5:475-485, 1969.
- *Stochastic processes and filtering theory*. New York, Academic, 1970. (Mathematics in Science and Engineering, 64).

- JAZWINSKI, A.H.; HIPKINS, C. J-adaptive estimation with estimated noise estatistics. In. COSPAR-IAU-IUTAM. *Satellite Dynamics*; Proceeding of the Symposium held in São Paulo, June 10-21, 1974. New York, Springer-Verlag, 1975, Session II, p. 98-110.
- KUGA, H.K. *Estimação adaptativa de órbitas aplicada a satélites a baixa altitude*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1982. (INPE-2316-TDL/079).
- LIEBELT, P.B. *An introduction to optimal estimation*. Menlo Park, CA, Addison-Wesley, 1967.
- MEYER, S.L. *Data analysis for scientistis and engineers*, New York, John Wiley & Sons Inc., 1975.
- NEGREIROS DE PAIVA, R. *Determinação de órbita de satélites artificiais através de um estimador, na presença de acelerações não-modeladas, usando a transformação KS*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1980. (INPE.1998-TDL/040).
- ORLANDO, V. *Simulação de dados de rastreamento de satélites artificiais do tipo "range" e "range-rate"*. São José dos Campos, INPE, maio, 1982. (INPE-2405-RPI/070).
- *Técnicas de pré-processamento e validação de dados em determinação de órbita e atitude de satélites artificiais*. São José dos Campos, INPE, fev. 1983. (INPE-2652-RPI/078).
- RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. *Estimoção adaptativa do ruído no estado para estimadores sequenciais*. São José dos Campos, INPE, abril 1982. (INPE-2385-PRI/069).
- SORENSEN, H.W. Kalman filtering techniques. *Advances in Control Systems*, (3):219-292, 1966.
- WAGNER, W.E.; VELEZ, C.E. ed. *Goddard trajectory determination subsystem mathematical specifications*. Greenbelt, MD, Goddard Space Flight Center, 1972.
- WERTZ, J.R. *Spacecraft attitude determination and control*. London, D. Reidel, 1978. (Astrophysics and Space Science Library).

## APÊNDICE A

### EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS

Este apêndice visa apresentar e conceituar o sentido com o qual devem ser encaradas as equações diferenciais estocásticas que servem de modelo matemático a sistemas dinâmicos. A descrição é resumida e maiores detalhes podem ser encontrados em Jazwinski (1970).

Considere-se a sequência aleatória escalar  $\{x_n, n=1, 2, 3, \dots\}$ . Diz-se que essa sequência converge para  $x$  em média quadrática se  $E\{|x_n|^2\} < \infty$  Para todo  $n$ ;  $E\{|x|^2\} < \infty$  e:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{|x - x_n|^2\} = 0 . \quad (\text{A.1})$$

Pode-se, então, escrever:

$$\text{l.i.m. } x_n = x , \quad (\text{A.2})$$

e  $x$  é chamado limite na média ou limite médio quadrático. Diz-se, então, que  $\{x_n\}$  converge para  $x$  no sentido médio quadrático.

Diz-se que uma função aleatória  $x_t$  é diferenciável em  $t \in \mathbb{R}$  no sentido médio quadrático, se o seguinte limite que define a derivada no sentido médio quadrático existe:

$$\text{l.i.m.}_{h \rightarrow 0} (x_{t+h} - x_t)/h \triangleq dx_t/dt \triangleq \dot{x}_t ,$$

para  $t + h \in \mathbb{R}^+$ .

Considerem-se agora  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$  e particione-se o intervalo  $[a, b]$  da seguinte maneira:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b .$$

Seja  $\rho = \max_i (t_{i+1} - t_i)$ ,  $t_i \leq t_i^* < t_{i+1}$ . Diz-se que a função aleatória  $x_t$  é integrável segundo Riemann no sentido médio quadrático sobre o intervalo  $[a, b]$ , se existe o limite:

$$\text{l.i.m.}_{\rho \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} x_{t_i^*} (t_{i+1} - t_i) \triangleq \int_a^b x_t dt . \quad (\text{A.3})$$

Um processo estocástico contínuo  $\{x_t, t \geq 0\}$  é um processo do tipo movimento browniano se:

- a)  $\{x_t, t \geq 0\}$  possui incrementos estacionários independentes;
- b) para todo  $t \geq 0$ ,  $x_t$  é normalmente distribuído;
- c)  $E[x_t] = 0$  para todo  $t \geq 0$ ;
- d)  $\text{Pr}[x_0 = 0] = 1$ .

Uma sequência de Markov (Jazwinski, 1970),  $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ , é chamada de sequência aleatória branca se:

$$p(x_k/x_\ell) = p(x_k), \quad k \neq \ell, \quad (\text{A.4})$$

ou seja, se todos os  $x_k$ 's forem mutualmente independentes.

Um processo gaussiano branco  $\{x_t\}$  é formalmente definido como um processo gaussiano para o qual:

$$E\{[x_t - E(x_t)][x_\tau - E(x_\tau)]^T\} = Q(t) \delta(t - \tau), \quad (\text{A.5})$$

onde  $Q(t)$  é uma matriz positiva semidefinida e  $\delta(t - \tau)$  é a função de Dirac. Por essa razão, esse processo é frequentemente chamado de processo delta-correlacionado. O processo branco gaussiano ou ruído branco pode ser interpretado como a derivada do movimento browniano. No entanto, deve ser salientado que o movimento browniano não é diferenciável em nenhum sentido matemático ou estatístico (Jazwinski, 1970).

Sistemas dinâmicos contínuos sujeitos a perturbações aleatórias podem ser frequentemente representados por equações diferenciais não-lineares do tipo:

$$\frac{dx_t}{dt} = f(x_t, \omega_t, t), \quad t \geq t_0, \quad (\text{A.6})$$

onde  $x_t$  é o vetor  $n$  dimensional de estado do sistema;  $\omega_t$  é um ruído aleatório que reflete incertezas no conhecimento do modelo e possui dimensão  $m$ ;  $f$  é uma função vetorial não-linear de dimensão  $n$ .

Essa equação é chamada equação diferencial estocástica e  $\omega_t$  é chamado função aleatória forçante. A condição inicial de tal equação  $x_{t_0}$  pode ser uma constante ou uma variável aleatória com uma distribuição específica. Considera-se que a lei de probabilidade de  $\{\omega_t, t \geq 0\}$  é especificada.

Se a função  $f$  e o processo  $\{\omega_t\}$  forem tais que a integral

$$\int_{t_0}^t f(x_\tau, \omega_\tau, \tau) d\tau \quad (\text{A.7})$$

seja bem definida no sentido médio quadrático, e a derivada  $dx_t/dt$  seja entendida no mesmo sentido, então:

$$x_t - x_{t_0} = \int_{t_0}^t f(x_\tau, \omega_\tau, \tau) d\tau. \quad (\text{A.8})$$

Um caso especial da Equação A.6 é quando a função aleatória forçante,  $\omega_t$ , é uma função aleatória gaussiana branca, e é adicionada à equação como exemplificado abaixo:

$$\frac{dx_t}{dt} = f(x_t, t) + G(x_t, t) \omega_t, \quad t \geq t_0, \quad (\text{A.9})$$



onde  $G$  é uma matriz  $n \times m$ , e a condição inicial  $x_{t_0}$  é uma variável aleatória gaussiana independente do processo  $\{\omega_t, t \geq 0\}$ . A equação acima é, às vezes, chamada de Equação de Lavegin.

Se o processo  $\{\omega_t\}$  é delta-correlacionado, não é integrável no sentido de Riemann e nem com probabilidade 1; a Equação A.9 não possui então um sentido matemático. A fim de dar um sentido a essa equação, recorre-se ao fato de que o ruído branco gaussiano é interpretado como a derivada do movimento browniano. Assim, seja  $\{\beta_t, t \geq t_0\}$  um processo vetorial de movimentos brownianos independentes. Então:

$$\omega_t = d\beta_t/dt .$$

Nesse contexto, a Equação A.9 pode ser considerada formalmente como equivalente à equação:

$$dx_t = f(x_t, t) dt + G(x_t, t) d\beta_t , \quad t \geq t_0 . \quad (A.10)$$

Se a integral da Equação A.10 for definida, essa equação passa a ter significação matemática. Integrando-a, obtêm-se:

$$x_t - x_{t_0} = \int_{t_0}^t f(x_\tau, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t G(x_\tau, \tau) d\beta . \quad (A.11)$$

A primeira integral é definida como uma integral média quadrática de Riemann, enquanto a segunda integral foi definida no sentido médio quadrático por Itô (Jazwinski, 1970) e é chamada de integral estocástica de Itô.

Assim, embora a Equação A.9 não possua sentido matemático, é formalmente equivalente à Equação A.10, cuja integral deve ser entendida no sentido médio quadrático, a qual desse modo possui sentido matemático. No entanto, neste trabalho, na Equação A.9 será utilizado apenas o caso em que no termo de perturbação aleatória tem-se ape

nas  $G(t)$ . Como consequência a correspondente integral de Itô na Equação A.11 pode ser tratada formalmente como uma integral de Riemann no sentido médio quadrático (Jazwinski, 1970).