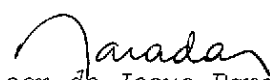



1. Classificação <i>INPE-COM.4/RPE</i> <i>C.D.U.: 517.518.45</i>	2. Período	4. Distribuição interna <input type="checkbox"/> externa <input checked="" type="checkbox"/>
3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor) <i>SÉRIE DE FOURIER</i> <i>MATEMÁTICA APLICADA</i>		
5. Relatório nº <i>INPE-1933-RPE/256</i>	6. Data <i>Outubro, 1980</i>	7. Revisado por <i>Plinio Tissi</i> <i>Plinio Tissi</i>
8. Título e Sub-Título <i>MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA V:</i> <i>SÉRIE DE FOURIER</i>		9. Autorizado por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> <i>Diretor</i>
10. Setor <i>DGA/DII</i>	11. Nº de cópias <i>06</i>	
12. Autoria <i>René A. Medrano-B</i>		14. Nº de páginas <i>74</i>
13. Assinatura Responsável 	15. Preço	
16. Sumário/Notas <p><i>Apresenta-se um estudo de Série de Fourier, dedicado a alunos de pós-graduação em Física e Engenharia como parte de sua formação matemática. Introduzindo-se o conceito de função harmônica, desenvolve-se a série de Fourier em termos das funções trigonométricas. São estudados os critérios de convergência (uniforme e quadrática) e as condições, sob as quais uma função pode ser expandida em série de Fourier. São também analisados o fenômeno de Gibbs e as implicações da diferenciação e integração destas séries. Depois de estudada a análise harmônica de uma função não periódica, apresenta-se o estudo de periodicidade em dados experimentais. Na parte final deste trabalho são deduzidas as propriedades mais importantes da forma complexa da série de Fourier, e sua aplicação na análise harmônica de funções bidimensionais. Este trabalho representa o Capítulo V do curso Métodos Matemáticos da Física, ministrado pelo autor nos cursos de pós graduação do INPE. Embora não seja necessário, é aconselhável familiarizar-se com a notação de Dirac desenvolvida no Capítulo II (INPE-1449-RPE/014, Mar. 1979)</i></p>		
17. Observações		

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Dr. Plinio Tissi pelas críticas e sugestões que contribuíram para melhorar a apresentação deste Capítulo. O trabalho de datilografia foi eficientemente realizado por Regina Lucia de Souza Bruno.

ÍNDICE

RESUMO	<i>iv</i>
ABSTRACT	<i>v</i>
LISTA DE FIGURAS	<i>vi</i>

CAPÍTULO V

SÉRIE DE FOURIER	1
5.1 - Série de Fourier	1
5.2 - Funções com propriedades de Simetria	8
5.3 - Aproximação de uma Função Periódica por uma Série de Fourier Finita	16
5.4 - Convergência Uniforme da Série de Fourier	20
5.5 - Convergência na Média	25
5.6 - Condições de Dirichlet	28
5.7 - Fenômeno de Gibbs	30
5.8 - Integração da Série de Fourier	35
5.9 - Diferenciação da Série de Fourier	40
5.10 - Série de Fourier para uma Função de Período Arbitrário	45
5.11 - Análise Harmônica de uma Função Definida num Dado Intervalo	46
5.12 - Periodicidades em Dados Experimentais	51
5.13 - Forma Complexa da Série de Fourier	57
5.14 - Fórmula de Parseval	64
5.15 - Série de Fourier em Duas Dimensões	65
AGRADECIMENTOS	69
BIBLIOGRAFIA	71

RESUMO

Apresenta-se um estudo de Sêrie de Fourier, dedicado a alunos de pós-graduação em Física e Engenharia como parte de sua formação matemática. Introduzindo-se o conceito de função harmônica, desenvolve-se a sêrie de Fourier em termos das funções trigonométricas. São estudados os critérios de convergência (uniforme e quadrática) e as condições sob as quais uma função pode ser expandida em sêrie de Fourier. São também analisados o fenômeno de Gibbs e as implicações da diferenciação e integração destas sêries. Depois de estudar a análise harmônica de uma função não periódica, apresenta-se o estudo de periodicidades em dados experimentais. Na parte final deste trabalho são deduzidas as propriedades mais importantes da forma complexa da sêrie de Fourier, e sua aplicação na análise harmônica de funções bidimensionais. Este trabalho representa o Capítulo V do curso Métodos Matemáticos da Física, ministrado pelo autor nos cursos de pós-graduação do INPE. Embora não seja necessário, é aconselhável familiarizar-se com a notação de Dirac desenvolvida no Capítulo II (INPE-1449-RPE/014, Mar. 1979).

ABSTRACT

A study of the Fourier series addressed to graduate students of physics and engineering is presented. With the definition of harmonic functions, the Fourier series in terms of the trigonometric functions is defined. The convergence criteria (uniform and quadratic in the mean) and the conditions under which a function can be Fourier analyzed are studied. Then, an analysis of the Gibbs phenomenon and the implications of differentiating or integrating the Fourier series are performed. It follows, a Fourier analysis of a non periodic function and an introduction to the study of periodicities in experimental data. At the end, the complex form of the Fourier series is presented and its application to the two-dimensional Fourier analysis of a function with two independent variables is introduced. This work is the Chapter V of the course on Mathematical Methods of Physics that is taught by the author in the graduate program of INPE. Although not necessary, it is advisable to be familiar with the Dirac's notation developed in Chapter II (INPE-1449-RPE/014, Mar., 1979).

LISTA DE FIGURAS

V.1 - Onda senoidal semi-retificada	7
V.2 - Função $f(\theta)$ para o exemplo 5.2	11
V.3 - Exemplo de uma função par com simetria em $\frac{\pi}{2}$	13
V.4 - A linha contínua grossa é a representação gráfica da função "dente de serra". As outras curvas são representações respectivamente da soma dos primeiro dois termos (linha tracejada longa), três termos (tracejada curta) e quatro termos (traço-ponto-traço) da série de Fourier correspondente	18
V.5 - Função periódica contendo três discontinuidades (linha contínua grossa). As outras curvas são aproximações desta função tomando, respectivamente, os três primeiros (linha contínua leve), os quatro primeiros (linha tracejada longa) e os cinco primeiros harmônicos da série de Fourier correspondente	19
V.6 - "Vista microscópica" do fenômeno de Gibbs para a função onda quadrada	33
V.7 - Função definida no intervalo $0 < x < 4b$, e sua imagem para os efeitos da análise harmônica	50
V.8 - Valores normalizados dos coeficientes de Fourier correspondentes à função definida em (V.11.5)	51
V.9 - Amostragem de dados medidos numa base contínua entre os instantes $t = 0$ e $t = t_N$	53
V.10 - Conjunto de dados experimentais :.....	55
V.11 - Espectro de harmônicos correspondente ao conjunto de dados na Figura V.10	56

CAPÍTULO V

SÉRIE DE FOURIER

5.1 - SÉRIE DE FOURIER

A série de Fourier é uma das séries mais importantes dentro da Física, especialmente porque facilita o estudo de fenômenos de recorrência periódica. Pensando apenas em termos de expressão em série de funções, a série de Fourier é, às vezes, mais útil que o desenvolvimento em série de potências, estudado no Capítulo IV. Por exemplo, a de Fourier permite a expressão em série de funções que apresentam descontinuidades, o que não é possível com a série de Taylor.

Uma das maiores aplicações das séries de Fourier, se encontra na análise de dados físicos, particularmente no estudo de periodicidades, ou recorrência de eventos, procedentes de dados experimentais. Este tipo de tratamento é chamado, comumente, de análise harmônica.

A função trigonométrica

$$h(x) = A \sin(\omega x + \phi), \quad (\text{V.1.1})$$

é chamada de *função harmônica* de amplitude A , frequência ω e fase ϕ . Esta função pode também ser representada (depois de definir $M = A \sin \phi$ e $N = A \cos \phi$) por:

$$h(x) = M \cos \omega x + N \sin \omega x \quad (\text{V.1.2})$$

A expressão de uma função em série de funções harmônicas é chamada de *série de Fourier*. Fica evidente que a função em questão de verá estar definida no mesmo intervalo que as funções harmônicas, e também que as funções harmônicas deverão formar um espaço vetorial de funções mutuamente ortogonais, conforme foi estabelecido no Capítulo II. Assim, em princípio uma função $f(x)$, definida no mesmo intervalo que as funções harmônicas, pode ser expressa mediante a seguinte expansão:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\omega_n x + \phi), \quad (\text{V.1.3})$$

ou também

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (M_k \cos \omega_k x + N_k \sin \omega_k x). \quad (\text{V.1.4})$$

A seguir, suponha-se que $f(\theta)$ seja uma função periódica (de período 2π), definida no intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Pode-se ver que, para este caso, a expansão (V.1.4) pode ser colocada na forma:

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta), \quad (\text{V.1.5})$$

onde o termo independente ($k = 0$) foi colocado na forma indicada, apenas para simplificar a notação, conforme será visto logo mais. A expressão (V.1.5) é a forma mais conhecida da série de Fourier. Os coeficientes A_k e B_k são chamados de *Coefficientes de Fourier*.

A seguir, e para efeitos de simplificação na notação, recorre-se à notação dos "kets" e "bras", introduzida no Capítulo II. Assim, chamando-se

$$|f\rangle = f(\theta), \quad |C_k\rangle = \cos k\theta \quad \text{e} \quad |S_k\rangle = \sin k\theta,$$

a série de Fourier (V.1.5) pode ser escrita na forma

$$|f\rangle = \frac{A_0}{2} |C_0\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k |C_k\rangle + B_k |S_k\rangle). \quad (\text{V.1.6})$$

O que resta por demonstrar, para justificar a expansão em série de funções harmônicas, do vetor $|f\rangle$, é que a sequência infinita de vetores $|C_k\rangle$ e $|S_k\rangle$, formam um espaço infinito de vetores mutuamente ortogonais, no contexto do Capítulo II. Assim, de acordo com a definição de produto interno (chamado também de escalar) tem-se:

$$\langle C_\ell | C_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \ell \theta \cos k \theta d\theta = \frac{\text{sen}(k-\ell)\theta}{2(k-\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\text{sen}(k+\ell)\theta}{2(k+\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

Fica evidente que, quando $k \neq \ell$, todos os termos se anulam para os dois limites. Logo,

$$\langle C_\ell | C_k \rangle = 0 \quad k \neq \ell.$$

Quando $k = \ell$,

$$\langle C_k | C_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 k \theta \, d\theta = \pi.$$

Portanto, e utilizando a definição do delta de Kronecker, tem-se:

$$\langle C_k | C_\ell \rangle = \pi \delta_{k\ell}. \quad (\text{V.1.7})$$

De uma maneira análoga pode-se provar que

$$\langle S_k | S_\ell \rangle = \pi \delta_{k\ell}. \quad (\text{V.1.8})$$

Por outro lado,

$$\langle S_\ell | C_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } \ell \theta \cos k \theta \, d\theta = 0 \quad (\text{V.1.9})$$

O resultado anterior é evidente uma vez que o integrando é uma função ímpar e a integração abrange intervalos iguais em ambos os lados da origem.

Pode-se ainda demonstrar que:

$$\left. \begin{aligned} \langle C_k | C_0 \rangle &= \langle S_k | C_0 \rangle = 0 \\ \langle C_0 | C_0 \rangle &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.1.10})$$

Pelos resultados anteriores, fica evidente que as funções trigonométricas pertencem ao espaço de Hilbert. A seguir, são calculados dos coeficientes da série (V.1.6).

$$\langle C_0 | f \rangle = \frac{A_0}{2} \langle C_0 | C_0 \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \langle C_0 | C_k \rangle + B_k \langle C_0 | S_k \rangle] = \pi A_0$$

de onde

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \langle C_0 | f \rangle \quad (V.1.11)$$

Pode-se ver que o termo independente da série \bar{e} :

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \text{valor médio de } f(\theta) \quad (V.1.12)$$

Analogamente, fazendo-se o produto interno da equação (V.1.16) com $|C_k\rangle$ tem-se:

$$\begin{aligned} \langle C_\ell | f \rangle &= \frac{A_0}{2} \langle C_\ell | C_0 \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \langle C_\ell | C_k \rangle + B_k \langle C_\ell | S_k \rangle] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \pi \delta_{\ell k} = \pi A_\ell \end{aligned}$$

Logo,

$$A_\ell = \frac{1}{\pi} \langle C_\ell | f \rangle, \quad (V.1.13)$$

ou seja

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos k \theta \, d\theta. \quad (\text{V.1.14})$$

De uma maneira similar, pode-se demonstrar que

$$B_k = \frac{1}{\pi} \langle S_k | f \rangle, \quad (\text{V.1.15})$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} k \theta \, d\theta \quad (\text{V.1.16})$$

Com os valores dos coeficientes de Fourier (V.1.11), (V.1.13) e (V.1.15), a s\u00e9rie de Fourier (V.1.16) pode ser escrita na seguinte forma:

$$|f\rangle = \frac{1}{2\pi} \langle C_0 | f \rangle |C_0\rangle + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [\langle C_k | f \rangle |C_k\rangle + \langle S_k | f \rangle |S_k\rangle] \quad (\text{V.1.17})$$

EXEMPLO 5.1

Seja a fun\u00e7\u00e3o peri\u00f3dica

$$f(\theta) = \begin{cases} \operatorname{sen} \theta & 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

mostrada na Figura V.1.

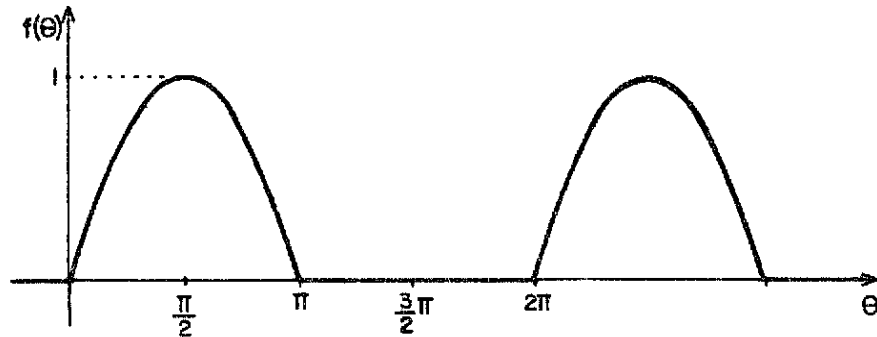


Fig. V.1 - Onda senoidal semi-retificada

A série de Fourier para esta função é encontrada calculando-se os coeficientes de Fourier (V.1.12), (V.1.14) e (V.1.16):

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } \theta \, d\theta = \frac{1}{\pi}$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } \theta \cos k \theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(k-1)\theta}{2(k-1)} \Big|_0^{\pi} - \frac{\cos(k+1)\theta}{2(k+1)} \Big|_0^{\pi} \right]$$

Portanto, para $k > 1$, vem:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{k+1} - 1}{2(k-1)} - \frac{(-1)^{k+1} - 1}{2(k+1)} \right] = \frac{1}{\pi(k^2 - 1)} [(-1)^{k+1} - 1],$$

de onde tem-se que:

$$A_k = 0 \quad \text{para } k = 3, 5, 7, \dots$$

$$A_k = \frac{-2}{\pi(k^2 - 1)} \quad \text{para } k = 2, 4, 6, \dots$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } \theta \cos \theta \, d\theta = 0$$

Da mesma maneira, pode-se verificar que:

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \text{sen } \theta \text{sen } k \theta \, d\theta = 0 \quad k > 1$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \text{sen}^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} .$$

Assim,

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\cos k \theta}{k^2 - 1} + \frac{1}{2} \text{sen } \theta$$

ou também:

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} + \frac{\text{sen } \theta}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2 k \theta}{4k^2 - 1}$$

5.2 - FUNÇÕES COM PROPRIEDADES DE SIMETRIA

Quando a função periódica $f(\theta)$ apresenta propriedades de simetria, em relação a algum eixo dentro do período, a expressão da série fica simplificada. Considerar-se-ão os dois casos mais importantes:

a) $f(\theta)$ é tal que $f(\theta) = f(-\theta)$.

Este é o caso de uma função simétrica, em relação ao eixo das ordenadas que passa pela origem de coordenadas, comumente chamada de função par. As integrais das relações (V.1.12) e (V.1.14) podem ser efetuadas integrando apenas na metade do intervalo uma vez que os integrandos são funções pares. Assim:

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos k \theta \, d\theta. \quad (V.2.1)$$

Por outro lado, a função dentro do símbolo de integração da expressão (V.1.16) resulta ser uma função ímpar, de onde se segue que

$$B_k = 0 \quad (V.2.2)$$

Desta maneira, a série de Fourier, para uma função simétrica em relação à origem, fica reduzida à forma:

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k \theta \quad (V.2.3)$$

b) $f(\theta)$ é tal que $f(-\theta) = -f(\theta)$.

O gráfico $f(\theta)$ vs. θ , desta função apresenta uma anti-simetria em relação à origem; um exemplo é mostrado na Figura V.2. Funções deste tipo são chamadas de funções ímpares. Para este caso, o integrando da relação (V.1.14) é uma função ímpar, de onde se segue que

$$A_k = 0. \tag{V.2.4}$$

Por outro lado,

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} k \theta \, d\theta \tag{V.2.5}$$

Assim, a s\u00e9rie de Fourier, para este caso, fica

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sen} k \theta \tag{V.2.6}$$

\u00c9 interessante observar nas express\u00f5es (V.2.3) e (V.2.6), que quando a fun\u00e7\u00e3o $f(\theta)$ \u00e9 uma sim\u00e9trica, ou anti-sim\u00e9trica, em rela\u00e7\u00e3o ao eixo das ordenadas que passa pela origem, as fun\u00e7\u00f5es trigonom\u00e9tricas das s\u00e9ries s\u00e3o, tamb\u00e9m, fun\u00e7\u00f5es pares ou \u00edmpares, respectivamente. Este fato, evidentemente simplifica muito as an\u00e1lises de Fourier de fun\u00e7\u00f5es que possuem estas propriedades.

EXEMPLO 5.2

Considere-se a fun\u00e7\u00e3o representada na Figura V.2, e que se encontra definida por:

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \theta & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2} \pi \end{cases}$$

$$f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$$

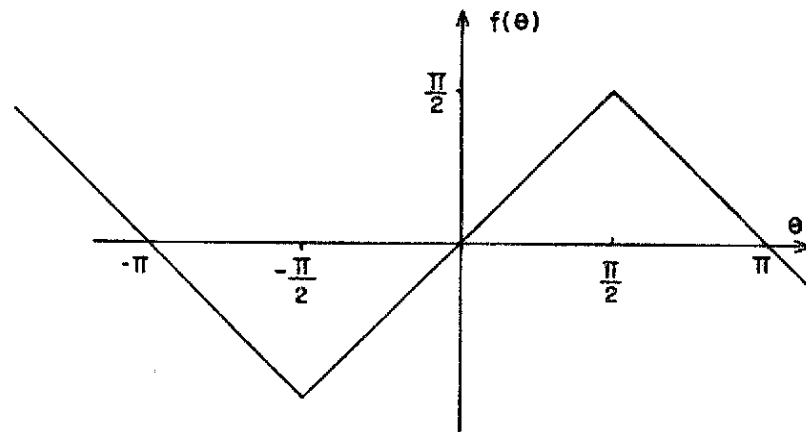


Fig. V.2 - Função $f(\theta)$ para o exemplo 5.2

Por ser $f(\theta)$ uma função ímpar, a série de Fourier correspondente é dada por (V.1.19).

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \theta \operatorname{sen} k\theta \, d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - \theta) \operatorname{sen} k\theta \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi k^2} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} - \frac{k\pi}{2} \cos \frac{k\pi}{2} \right) + \frac{2}{k} \left(-\cos k\pi + \cos \frac{k\pi}{2} \right) + \\ &\quad + \frac{2}{\pi k^2} \left[\operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} + k\pi \left(\cos k\pi - \frac{1}{2} \cos \frac{k\pi}{2} \right) \right] = \frac{4}{\pi k^2} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2}, \end{aligned}$$

de onde vem:

$$B_k = \frac{4}{\pi k^2} (-1)^{\frac{k+3}{2}} \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

$$B_k = 0 \quad k = 2, 4, 6, \dots$$

Assim,

$$f(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^2} (-1)^{\frac{k+3}{2}} \text{sen } k \theta$$

ou, substituindo-se k por $2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$), tem-se que

$$f(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)^2} \text{sen } (2k + 1) \theta \quad (\text{V.2.7})$$

EXEMPLO 5.3

Encontre-se a *série de Fourier* de uma função par, que ao mesmo tempo apresenta simetria em relação ao eixo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Um exemplo deste tipo de função é representado na Figura V.3. Observe-se que fazendo a troca (que em si consiste numa translação de origem)

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \phi$$

tem-se que

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \quad (\text{V.2.8})$$

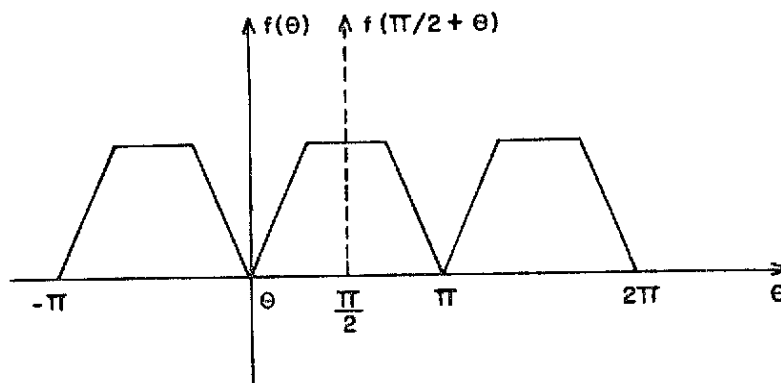


Fig. V.3 - Exemplo de uma função par com simetria em $\frac{\pi}{2}$

Dado que $f(\theta)$ é uma função par (simétrica em relação ao eixo $\theta = 0$), vê-se que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k \left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi}{2} \cos k\phi - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{2} \sin k\phi. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi}{2} \cos k\phi + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{2} \sin k\phi$$

Em vista da identidade (V.2.8), e comparando-se os dois últimos resultados, conclui-se que:

$$A_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} = 0$$

Esta condição é satisfeita de duas maneiras, a saber:

$$A_k \neq 0 \quad \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} = 0 \quad k = 2, 4, 6, \dots$$

$$A_k = 0 \quad \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \neq 0 \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

Por outro lado, $\cos \frac{k\pi}{2} = (-1)^{k/2}$ para $k = 2, 4, 6, \dots$

Logo,

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{k/2} A_k \cos k\phi$$

Voltando ao sistema original de variável θ , e substituindo-se k por $2k$ (onde o novo índice do somatório k tem agora valores numéricos $k = 1, 2, 3, \dots$), tem-se a série

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \cos 2k\theta \quad (\text{V.2.9})$$

Note-se que esta nova série, é praticamente uma reprodução da expansão em série de Fourier de uma função par, exceto que os índices, dentro do somatório, são unicamente números pares. Os coeficientes de Fourier da série (V.2.9) são calculados de uma maneira análoga ao feito para o caso geral, observando-se, apenas, que o período das funções $\cos 2k\theta$, é $\frac{\pi}{2}$. Logo,

$$A_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \cos 2k\theta \, d\theta \quad (\text{V.2.10})$$

De uma maneira análoga pode-se obter a *série de Fourier* de uma função ímpar que apresenta simetria em relação ao eixo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

A série de Fourier para este caso é:

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k+1} \operatorname{sen}(2k+1)\theta, \quad (\text{V.2.11})$$

onde os coeficientes de Fourier são calculados mediante

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \operatorname{sen}(2k+1)\theta \, d\theta \quad (\text{V.2.12})$$

EXEMPLO 5.4

Seja calcular a série de Fourier da função mostrada na Figura V.2. Esta função apresenta características que permitem a aplicação da série (V.2.11). Logo,

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \theta \operatorname{sen}(2k+1)\theta \, d\theta = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

Observe-se que este é o mesmo resultado (V.2.7) do Exemplo 5.2, obtido agora de uma maneira mais simples

$$f(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \operatorname{sen}(2k+1)\theta$$

Aproveitando-se esta s\u00e9rie, e observando-se na Figura V.2 que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, \u00e9 poss\u00edvel obter uma s\u00e9rie infinita para o n\u00famero $\frac{\pi^2}{8}$. Assim,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \operatorname{sen}(2k+1) \frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos k\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \quad (\text{V.2.13})$$

Ressalta-se que a s\u00e9rie de Fourier de fun\u00e7\u00f5es peri\u00f3dicas \u00e9 o m\u00e9todo mais comum de se obter s\u00e9ries infinitas do tipo (V.2.13).

5.3 - APROXIMA\u00c7\u00c3O DE UMA FUN\u00c7\u00c3O PERI\u00d3DICA POR UMA S\u00c9RIE DE FOURIER FINITA

Esta se\u00e7\u00e3o tem por objeto chamar a aten\u00e7\u00e3o, no que diz respeito ao grau de aproxima\u00e7\u00e3o que se obt\u00eam, quando um fun\u00e7\u00e3o peri\u00f3dica \u00e9 representada por um n\u00famero finito de termos da s\u00e9rie de Fourier. Este enfoque permite dar uma id\u00e9ia clara, quanto ao significado de converg\u00eancia da s\u00e9rie de Fourier que ser\u00e1 assunto a ser estudado nas pr\u00f3ximas se\u00e7\u00f5es.

A quest\u00e3o \u00e9 saber, quando \u00e9 que uma fun\u00e7\u00e3o peri\u00f3dica $f(\theta)$ pode ser substitu\u00edda por um n\u00famero finito de termos da s\u00e9rie de Fourier. Assim, tomando-se os primeiros termos de s\u00e9rie de Fourier, ter-se-ia que:

$$f(\theta) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos k\theta + B_k \operatorname{sen} k\theta).$$

Por exemplo, suponha-se as funções periódicas

$$f(\theta) = \theta \quad -\pi < \theta < \pi$$

$$g(\theta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi \\ -\frac{\pi}{2} & \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (\text{V.3.2})$$

ambas de período 2π . As séries de Fourier correspondentes a $f(\theta)$ e $g(\theta)$, respectivamente, são:

$$f(\theta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen} k\theta \quad (\text{V.3.3})$$

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} [\operatorname{sen} 2(2k+1)\theta + \operatorname{sen} (2k+1)\theta] \quad (\text{V.3.4})$$

A Figura V.4, mostra a representação gráfica da função $f(\theta)$ definida mediante a relação (V.3.1). Sobreposto neste mesmo gráfico, são mostradas as funções

$$f_n(\theta) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen} k\theta,$$

para $n = 2, 3$ e 4 , respectivamente. O interessante nesta figura é que, quanto maior o número de termos tomados da série de Fourier, $f_n(\theta)$ se

aproxima mais de $f(\theta)$ nos pontos onde esta função é contínua. É de se esperar, que no limite quando $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\theta) = f(\theta) \quad (\text{V.3.5})$$

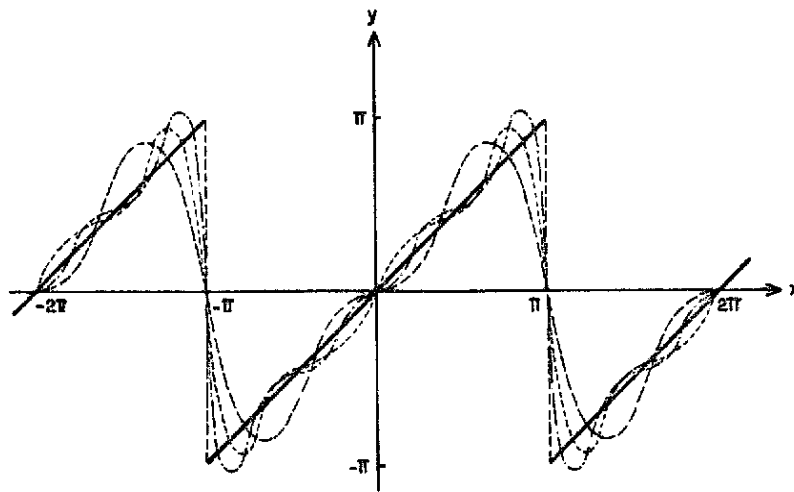


Fig. V.4 - A linha contínua grossa é a representação gráfica da função "dente de serra". As outras curvas são representações respectivamente da soma dos primeiro dois termos (linha tracejada longa), três termos (tracejada curta) e quatro termos (traço-ponto-traço) da série de Fourier correspondente.

É importante ressaltar que a relação anterior é válida apenas onde $f(\theta)$ é contínua, uma vez que nos pontos de descontinuidade ($-\pi$, π , 2π , etc.), o valor do polinômio $f_n(\theta)$ não se aproxima de nenhum dos dois lados da descontinuidade, mesmo porque $f_n(\theta)$ é uma função descontínua.

Na Figura V.5 são mostrados as representações gráficas de $g(\theta)$, definido por (V.3.2), e dos polinômios:

$$\text{sen } \theta + \text{sen } 2 \theta + \frac{1}{3} \text{ sen } 3 \theta$$

$$\text{sen } \theta + \text{sen } 2 \theta + \frac{1}{3} \text{ sen } 3 \theta + \frac{1}{3} \text{ sen } 5 \theta \quad \text{e,}$$

$$\text{sen } \theta + \text{sen } 2 \theta + \frac{1}{3} \text{ sen } 3 \theta + \frac{1}{5} \text{ sen } 5 \theta + \frac{1}{6} \text{ sen } 6 \theta,$$

que representam os primeiros três, quatro e cinco termos, respectivamente, da série de Fourier de $g(\theta)$.

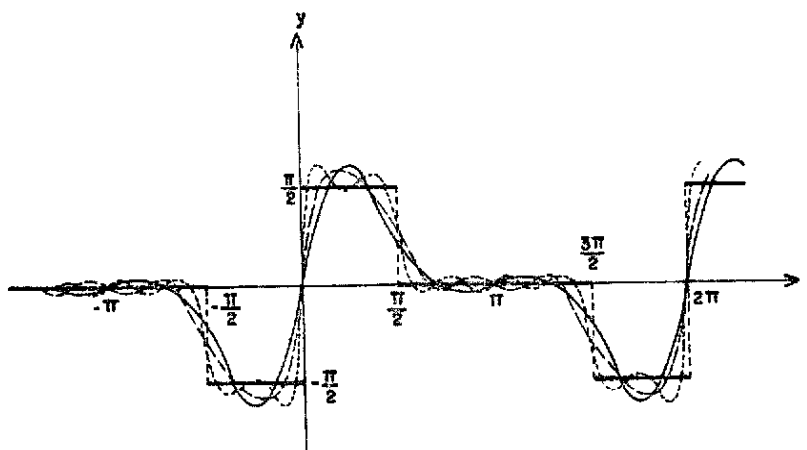


Fig. V.5 - Função periódica contendo três descontinuidades (linha contínua grossa). As outras curvas são aproximações desta função tomando, respectivamente, os três primeiros (linha contínua leve), os quatro primeiros (linha tracejada longa) e os cinco primeiros harmônicos da série de Fourier correspondente.

Aqui também pode-se ver que, quanto maior o número de harmônicos tomados da série de Fourier, melhor a aproximação obtida para $g(\theta)$, nos pontos onde $g(\theta)$ é contínua. Esta propriedade de se reproduzir uma função contínua pela soma de uma série infinita, é chamada de *convergência*. Isto é, nos pontos onde uma função periódica, sujeita a condições a serem estabelecidas logo mais, é contínua, a série de Fourier converge ao valor de função.

Observa-se, no entanto, que este não é o caso para pontos onde a função periódica é descontínua. De fato, neste pontos, a série não converge a nenhum dos valores da função nos dois lados da descontinuidade. Pode-se notar, contudo, que a série converge a um valor fixo que resulta ser o ponto médio da descontinuidade.

5.4 - CONVERGÊNCIA UNIFORME DA SÉRIE DE FOURIER

Nesta seção, serão estudadas as condições de convergência da série de Fourier de uma função periódica, cujo conceito qualitativo fora mencionado na Seção 3.

Considere-se os n primeiros termos da série de Fourier de uma função periódica $f(\theta)$, de período 2π

$$f_n(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos k \theta + B_k \sen k \theta) \quad (\text{V.4.1})$$

A questão é saber sob que condições é satisfeita a relação:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(\theta) - f_n(\theta)] = 0 \quad (\text{V.4.2})$$

Substituindo-se na s\u00e9rie de Fourier (V.1.5), os coeficientes dados por (V.1.12) e (V.1.13) respectivamente, vem:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \sum_{k=1}^{\infty} (\cos kt \cos k\theta + \sin kt \sin k\theta) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k(t - \theta) \right]. \end{aligned}$$

Desta s\u00e9rie infinita, que supostamente reproduz $f(\theta)$, toma-se a soma dos primeiros $n+1$ termos

$$f_n(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - \theta) \right]. \quad (\text{V.4.3})$$

Chamando-se de S_n ao polin\u00f4mio entre colchetes e fazendo-se $t - \theta = \phi$, tem-se

$$S_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\phi.$$

Multiplicando-se esta express\u00e3o por $2 \sin \frac{\phi}{2}$, e notando-se que

$$2 \cos k\phi \sin \frac{\phi}{2} = \sin \left(k\phi + \frac{\phi}{2} \right) - \sin \left(k\phi - \frac{\phi}{2} \right)$$

pode-se verificar que

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} S_n &= \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{sen} \frac{2k+1}{2} \phi - \operatorname{sen} \frac{2k-1}{2} \phi \right] \\ &= \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} + \operatorname{sen} \frac{3}{2} \phi - \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} + \operatorname{sen} \frac{5}{2} \phi - \operatorname{sen} \frac{3}{2} \phi + \dots \\ &\quad \dots + \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \phi - \operatorname{sen} \frac{2n-1}{2} \phi . \end{aligned}$$

Observe-se que nesta última expressão, todos os termos vão-se cancelando, ficando apenas o termo $\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} \phi$. Logo,

$$S_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - \theta) = \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} (t - \theta)}{2 \operatorname{sen} \frac{t - \theta}{2}} \quad (\text{V.4.4})$$

Com este resultado, a soma dos primeiros $n + 1$ termos, $f_n(\theta)$, fica:

$$f_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t) \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} (t - \theta)}{\operatorname{sen} \frac{t - \theta}{2}} dt$$

Em seguida, faz-se a mudança $t - \theta = 2u$, de onde vem que

$$f_n(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} f(\theta + 2u) \frac{\operatorname{sen}(2n+1) u}{\operatorname{sen} u} du$$

$$f_n(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi-\theta}{2}} f(\theta+2n) \frac{\text{sen}(2n+1)u}{\text{sen } u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi+\theta}{2}} f(\theta-2n) \frac{\text{sen}(2n+1)u}{\text{sen } u} du$$

(V.4.5)

A primeira integral

$$\int_0^{\frac{\pi-\theta}{2}} f(\theta+2u) \frac{u}{\text{sen } u} \frac{\text{sen}(2n+1)u}{u} du$$

é da forma

$$I_m = \int_0^a \phi(u) \frac{\text{sen } m u}{u} du$$

onde

$$\phi(u) = \frac{u}{\text{sen } u} f(\phi+2u), \text{ e } m = 2n+1.$$

Pode-se demonstrar (ver problema proposto), que, quando o ponto $u = 0$ é um descontinuidade e m tende a infinito, a integral I_m tem o valor

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^a \phi(u) \frac{\text{sen } m u}{u} du = \frac{\pi}{2} \phi(0^+),$$

onde $\Phi(0^+)$ significa que u se aproxima de 0 pelo lado positivo de u .

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi - \theta}{2}} f(\theta + 2u) \frac{u}{\text{sen } u} \frac{\text{sen}(2n+1)u}{u} du = \frac{\pi}{2} \lim_{u \rightarrow 0^+} f(\theta + 2u) \frac{u}{\text{sen } u}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi - \theta}{2}} f(\theta + 2u) \frac{\text{sen}(2n+1)u}{\text{sen } u} du = \frac{\pi}{2} f(\theta^+). \quad (\text{V.4.6})$$

De uma maneira similar também pode ser provado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi + \theta}{2}} f(\theta - 2u) \frac{\text{sen}(2n+1)u}{\text{sen } u} du = \frac{\pi}{2} \lim_{u \rightarrow 0^+} f(\theta - 2u) \frac{u}{\text{sen } u}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi + \theta}{2}} f(\theta - 2u) \frac{\text{sen}(2n+1)u}{\text{sen } u} du = \frac{\pi}{2} f(\theta^-). \quad (\text{V.4.7})$$

Substituindo-se os resultados (V.4.6) e (V.4.7) na relação (V.4.5) para o limite $n \rightarrow \infty$, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\theta) = \frac{1}{2} [f(\theta^+) + f(\theta^-)] \quad (\text{V.4.8})$$

Esta expressão indica que a série de Fourier converge uniformemente, ao valor da função $f(\theta)$, em todos os pontos onde $f(\theta)$ é contínuo. Entretanto, nos pontos onde $f(\theta)$ é descontínuo, a série de Fourier converge ao valor médio dos valores da função em ambos os lados da descontinuidade. Este tipo de convergência, que é chamada de *convergência uniforme* ou também de *convergência ponto a ponto*, foi ilustrado mediante exemplos na seção anterior.

5.5 - CONVERGÊNCIA NA MÉDIA

Um outro critério de convergência da série de Fourier, que independe da função periódica ser contínua ou não, é a *convergência na média*, chamada também de *convergência quadrática*. O que se tenta demonstrar, neste caso, é que o *erro quadrático médio* Δ_n definido por

$$\Delta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - f_n(\theta)]^2 d\theta, \quad (V.5.1)$$

tende a zero à medida que $n \rightarrow \infty$. Para demonstrar isto, toma-se a soma dos primeiros $n + 1$ termos $f_n(\theta)$ dado por (V.4.3) e que escrita na forma dos kets (V.1.6), fica:

$$|f_n\rangle = \frac{A_0}{2} |C_0\rangle + \sum_{k=1}^n (A_k |C_k\rangle + B_k |S_k\rangle).$$

Definindo-se o valor $|\epsilon_n\rangle$ por

$$|\epsilon_n\rangle = |f\rangle - |f_n\rangle$$

tem-se que o erro quadrático médio, fica

$$\Delta_n = \frac{1}{\pi} \langle \varepsilon_n | \varepsilon_n \rangle = \frac{1}{\pi} (\langle f | f \rangle - \langle f | f_n \rangle - \langle f_n | f \rangle + \langle f_n | f_n \rangle).$$

Porém, como os vetores $|f\rangle$ e $|f_n\rangle$ são funções reais, tem-se que

$$\langle f | f_n \rangle = \langle f_n | f \rangle,$$

logo,

$$\pi \Delta_n = \langle f | f \rangle - 2 \langle f_n | f \rangle + \langle f_n | f_n \rangle. \quad (V.5.2)$$

O segundo termo do segundo membro, da relação anterior, tem o seguinte valor:

$$\langle f_n | f \rangle = \frac{A_0}{2} \langle C_0 | f \rangle + \sum_{k=1}^n (A_k \langle C_k | f \rangle + B_k \langle S_k | f \rangle).$$

Porém, segundo (V.1.11), (V.1.13) e (V.1.15), tem-se que

$$\langle f_n | f \rangle = \frac{\pi}{2} A_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2)$$

Por outro lado, não é difícil verificar que o terceiro termo de (V.5.2), é também

$$\langle f_n | f_n \rangle = \frac{\pi}{2} A_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2) .$$

Assim, a relação (V.5.2) fica:

$$\pi \Delta_n = \langle f | f \rangle - \langle f_n | f_n \rangle, \quad (\text{V.5.3})$$

ou também, de uma maneira mais explícita:

$$\Delta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\theta) d\theta - \frac{A_0^2}{2} - \sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2). \quad (\text{V.5.4})$$

Pode-se ver que, tanto a integral como os coeficientes A_k^2 e B_k^2 são quantidades positivas. Escrevendo-se a relação (V.5.4) para $n+2$ termos

$$\Delta_{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\theta) d\theta - \frac{A_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{n+1} (A_k^2 + B_k^2),$$

verifica-se que:

$$\Delta_{n+1} < \Delta_n$$

Assim, acrescentando-se mais termos, o valor do erro quadrático médio que, segundo sua definição (V.5.1), é também uma quantidade positiva, tende a diminuir ainda mais. Desta maneira tem-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0. \quad (\text{V.5.5})$$

Este resultado implica em um novo tipo de convergência da série de Fourier, conforme pode-se inferir da definição do erro quadrático

tico médio (V.5.1). Segundo a versão (V.5.1) de Δ_n , esta convergência significa que os quadrados das normas, da função periódica e da sua expressão em série de Fourier, são iguais.

O resultado (V.5.5), aplicado à expressão (V.5.4), fornece uma relação muito importante, a saber:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\theta) d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2) \right] \quad (\text{V.5.6})$$

Esta relação, que em si significa que a soma dos quadrados dos coeficientes de Fourier forma uma série convergente, é conhecida como a *fórmula de Parseval*. Observe-se, ainda, que de acordo com o teste do termo n (ver Capítulo IV), a condição necessária para que a série infinita (V.5.6) seja convergente, é que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = 0 \quad (\text{V.5.7})$$

5.6 - CONDIÇÕES DE DIRICHLET

Das análises sobre convergência da série de Fourier, e de outras restrições da função periódica $f(\theta)$ que serão apontadas a seguir, podem ser estabelecidas as condições mais importantes, sob as quais uma função (periódica ou não) pode ser expandida em série de Fourier.

Primeiramente, observe-se que para que o coeficiente A_0 exista, é necessário segundo (V.1.12) que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \text{finito} \quad (\text{V.6.1})$$

Esta condição pode ser generalizada lembrando-se do cálculo integral que se uma função $f(\theta)$ *bem comportada* (função que tem um número finito de descontinuidades e de máximos e mínimos) é *integrável em valor absoluto*, i.e.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta = \text{finito} \quad (\text{V.6.2})$$

então, a integral (V.6.1) também existe.

Por outro lado, a fórmula de Parseval também impõe uma outra restrição a $f(\theta)$. Isto é, a função deve ser *quadraticamente integrável*, i.e.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \text{finito} \quad (\text{V.6.3})$$

Esta restrição é uma consequência da condição de que o quadrado dos coeficientes de Fourier formem uma série convergente.

Quando uma função satisfaz às condições de ser bem comportada, integrável em valor absoluto e quadraticamente integrável, diz-se que satisfaz às *condições de Dirichlet*. Assim, finalmente, che

ga-se à conclusão que para que uma função tenha série de Fourier convergente, é suficiente que satisfaça as condições de Dirichlet. Embora estas condições sejam suficientes para que tal série exista, elas não são necessárias, uma vez que, em determinados casos, existem séries de Fourier para funções que não satisfazem todas as condições de Dirichlet.

5.7 - FENÔMENO DE GIBBS

Nesta seção, estudar-se-á a questão da convergência da série de Fourier em pontos muito próximos aos pontos de descontinuidade. (Não na descontinuidade em si, onde demonstrou-se que a série converge ao ponto médio). Nas Figuras V.4 e V.5 observa-se que a forma dos primeiros termos da série, em ambos os casos, apresenta um máximo do lado positivo de $f(\theta)$ na descontinuidade (e um mínimo do outro lado) que, a medida que se acrescentam mais termos, resulta ser maior que o próprio valor da função. Isto é, nas vizinhanças das descontinuidades, a série de Fourier converge a valores diferentes dos da função. De fato, conforme será mostrado nesta seção, e chamando $\theta = \theta_d$ ao ponto da descontinuidade, a série de Fourier converge a um valor tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(\theta_d^+)| > |f(\theta_d)|$$

onde o sinal (+) indica o ponto que se encontra logo após a descontinuidade.

Considere-se a função "onda quadrada" definida por

$$f(\theta) = \begin{cases} +1 & -\pi \leq \theta < 0 \\ -1 & 0 \leq \theta < \pi \end{cases} \quad (\text{V.7.2})$$

A série de Fourier que corresponde à função definida anteriormente é:

$$f(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(2k+1)\theta}{2k+1} \quad (\text{V.7.3})$$

Considere-se a soma dos primeiro $n+1$ termos desta série

$$f_n(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\text{sen}(2k+1)\theta}{2k+1} \quad (\text{V.7.4})$$

A Figura V.6 mostra a representação gráfica de $f_n(\theta)$ para $n = 20, 40, 60, 80$ e 100 em regiões próximas a $\theta = 0^+$. Observe-se que o primeiro máximo de $f_n(\theta)$ tende a convergir a um valor de $1 + \delta_n$ independentemente do número de termos n que se toma. O acréscimo δ_n é conhecido como "overshoot", e o fato de existir este acréscimo, em todas as descontinuidades, é conhecido como *fenômeno de Gibbs*.

No que se segue, calcular-se-á o valor do overshoot. Dado que o overshoot se encontra em correspondência com o primeiro máximo, é natural que o problema seja atacado deste ponto de vista. Assim,

$$\frac{d}{d\theta} f_n(\theta) = f'_n(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \cos(2k+1)\theta.$$

Para encontrar os valores de θ onde ocorrem os máximos (ou mínimos) utiliza-se o resultado obtido (V.4.4) para uma soma de cosenos. O resultado é:

$$\sum_{k=0}^n \cos(2k+1)\theta = \frac{\text{sen } 2(n+1)\theta}{2 \text{ sen } \theta} \quad (\text{V.7.5})$$

Assim, os pontos onde se encontram os máximos e mínimos são dados por:

$$f'_n(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{\text{sen } 2(n+1)\theta}{\text{sen } \theta} = 0,$$

de onde,

$$\text{sen } 2(n+1)\theta_m = \text{sen } m\pi,$$

ou seja,

$$\theta_m = \frac{m\pi}{2(n+1)} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Os diversos valores de θ_m correspondem aos diversos máximos e mínimos da função $f_n(\theta)$. Fica evidente que o ponto de interesse é o primeiro máximo correspondente a $m = 1$, ou seja o ponto $\theta_1 = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

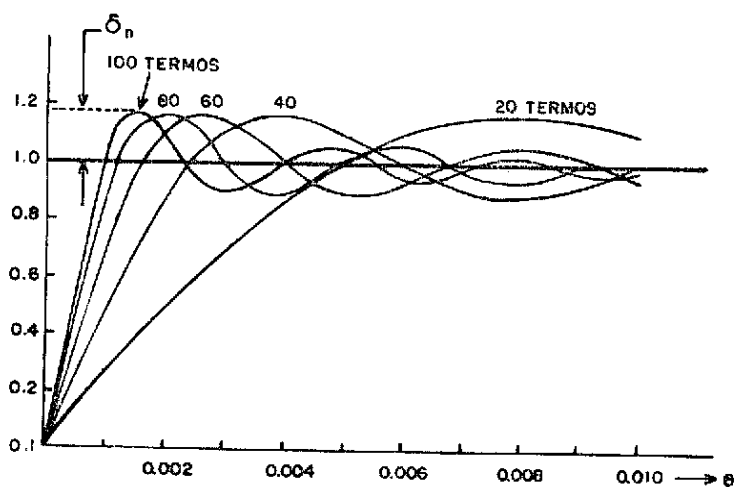


Fig. V.6 - "Vista microscópica" do fenômeno de Gibbs para a função onda quadrada.

Para encontrar o valor do polinômio $f_n(\theta_1)$ poderia ser utilizada a relação (V.7.4), porém, esta fórmula conduz a uma outra série. Uma maneira mais conveniente é integrar $f'_n(\theta)$, uma vez que

$$f'_n(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{\text{sen } 2(n+1)\theta}{\text{sen } \theta}$$

Integrando-se a relação anterior entre os limites 0 e um ponto arbitrário θ , tem-se

$$f_n(\phi) \Big|_0^\theta = f_n(\theta) - f_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\text{sen } 2(n+1)\phi}{\text{sen } \phi} d\phi$$

Observe-se que, segundo (V.7.4), $f_n(0) = 0$. Logo,

$$f_n(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\text{sen } 2(n+1)\phi}{\text{sen } \phi} d\phi$$

Efetuada-se a integração indicada, e fazendo que o limite superior da integral seja $\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{2(n+1)}$, ter-se-á calculado o valor de $f_n(\theta)$ no overshoot.

$$f_n(\theta_1) = f_n\left[\frac{\pi}{2(n+1)}\right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_1} \frac{\text{sen } 2(n+1)\phi}{\text{sen } \phi} d\phi$$

Neste intervalo de integração, os valores de ϕ são muito pequenos

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2(n+1)},$$

e à medida que se aumenta o valor de n , tem-se que $\text{sen } \phi \approx \phi$. Desta maneira,

$$f_n\left[\frac{\pi}{2(n+1)}\right] \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_1} \frac{\text{sen } 2(n+1)\phi}{\phi} d\phi.$$

Finalmente, fazendo-se $2(n+1)\phi = t$, tem-se que

$$f_n\left[\frac{\pi}{2(n+1)}\right] \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } t}{t} dt = \frac{2}{\pi} \times 1.8515 = 1.178979.$$

O valor da última integral, que é uma função integral seno, mencionada no final do Capítulo IV, foi obtido de tabelas apropriadas. É importante notar que quanto maior o número n de termos da série de Fourier, a aproximação $\text{sen } \phi = \phi$ fica mais exata e, portanto, o valor de $f_n(\theta_1)$ se aproxima mais do valor numérico encontrado.

Assim, chega-se à conclusão que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = f_{\infty}(0^+) - f(0^+) = 0,178979.$$

É interessante mencionar que, o fenômeno de Gibbs, pode ser observado visualmente num osciloscópio onde aparecem sinais procedentes de um oscilador eletrônico que gera ondas com descontinuidades, por exemplo ondas quadradas.

5.8 - INTEGRAÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER

A questão da integração da série de Fourier é muito importante especialmente nos casos onde não se conhece a forma explícita de $f(\theta)$, e sim apenas sua série de Fourier. Isto acontece comumente quando se faz a análise de um conjunto de dados experimentais.

Para encontrar a série de Fourier da função,

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} f(\theta) d\theta, \quad (V.8.1)$$

onde,

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k \theta + B_k \operatorname{sen} k \theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

define-se a função:

$$\Phi(\theta) = \int_0^\theta \left[f(\theta) - \frac{A_0}{2} \right] d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\theta (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) d\theta \quad (\text{V.8.2})$$

Observe-se que

$$\Phi(\theta + 2\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\theta + 2\pi} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) d\theta$$

Porém,

$$\int_0^{\theta + 2\pi} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) d\theta = \int_0^\theta (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta) d\theta,$$

uma vez que

$$\int_0^{\theta + 2\pi} = \int_0^\theta + \int_\theta^{\theta + 2\pi} = \int_0^\theta + \int_{-\pi}^\pi = \int_0^\theta .$$

Logo:

$$\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta), \quad (\text{V.8.3})$$

de onde vem que a função $\Phi(\theta)$ é uma função periódica. Assim, esta função pode ser expandida em série de Fourier,

$$\phi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \theta + b_k \sin k \theta) \quad (\text{V.8.4})$$

onde os coeficientes de Fourier encontram-se dados por

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \cos k \theta \, d\theta \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \sin k \theta \, d\theta \end{aligned} \right\} \quad k \neq 0$$

Integrando-se por partes, a primeira destas relações, tem-se:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\phi(\theta) \frac{\sin k \theta}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \phi'(\theta) \frac{\sin k \theta}{k} \, d\theta \right].$$

Observe-se que o primeiro termo se anula em ambos os limites. Por outro lado, de (V.8.2) tem-se que:

$$\phi'(\theta) = f(\theta) - \frac{A_0}{2}.$$

Logo,

$$a_k = \frac{-1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(\theta) - \frac{A_0}{2} \right] \sin k \theta \, d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A_k \cos k \theta + B_k \sin k \theta) \sin k \theta \, d\theta$$

$$a_k = \frac{-B_k}{k}.$$

Analogamente, pode-se verificar que

$$b_k = \frac{A_k}{k} .$$

O coeficiente a_0 é obtido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\theta} dt \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k t + B_k \operatorname{sen} k t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} k \theta}{k} d\theta - \frac{B_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos k \theta - 1}{k} d\theta \right] . \end{aligned}$$

As integrações sobre as funções trigonométricas são identicamente nulas. Assim, tem-se que

$$\frac{a_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k} .$$

A série (V.8.4), com estes resultados e com a definição (V.8.2), pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_0^{\theta} f(\theta) d\theta = \frac{A_0 \theta}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{B_k}{2} - \frac{B_k}{k} \cos k \theta + \frac{A_k}{k} \operatorname{sen} k \theta \right]$$

$$\pi \leq \theta \leq \pi \quad (V.8.5)$$

Por outro lado, a expressão em série de Fourier de função periódica $\frac{\theta}{2}$, é dada pela expressão (V.3.3),

$$\frac{\theta}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen} k \theta.$$

Substituindo-se esta expressão na (V.8.5) finalmente tem-se:

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} f(\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ B_k (1 - \cos k \theta) + [A_0 (-1)^{k+1} + A_k] \operatorname{sen} k \theta \right\}$$

- $\pi \leq \theta \leq \pi$ (V.8.6)

É interessante observar nesta série, ou melhor, na fórmula de Parseval correspondente (V.5.6)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F(\theta)]^2 d\theta = 2 \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \frac{B_k B_{\ell}}{k\ell} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\{ B_k^2 + [A_0 (-1)^{k+1} + A_k]^2 \right\},$$

que o quadrado dos coeficientes de Fourier, se aproximam de zero muito mais rapidamente do que os coeficientes de Fourier de $f(\theta)$. Isto devido à presença dos fatores k^{-2} . Isto significa que a convergência da série de Fourier, correspondente a $F(\theta)$, é mais rápida do que a da função $f(\theta)$. Em outras palavras, para se ter o mesmo grau de aproximação para $F(\theta)$ e $f(\theta)$, precisar-se-ão maior número de termos da série de Fourier que corresponde a $f(\theta)$, do que para $F(\theta)$, respectivamente. Assim, conclui-se que uma série de Fourier pode sempre ser integrada sem se ter problemas de convergência da série resultante.

5.9 - DIFERENCIAÇÃO DAS SÉRIES DE FOURIER

Para se obter a derivada de uma função, cuja série de Fourier é dada, pode parecer que a derivação pode ser encontrada simplesmente derivando-se termo a termo a série de Fourier da função primitiva. Entretanto, deve-se alertar que isto, em geral, não é verdade, uma vez que na série resultante aparecem problemas de convergência. Por exemplo, a série de Fourier da função "dente de serra", definida em (V.3.1), é dada por (V.3.3),

$$f(\theta) = \theta = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen} k \theta \quad - \pi < \theta < \pi$$

Pode-se verificar que esta série é convergente na média, uma vez que, segundo a relação (V.5.6), a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} (-1)^{2k+2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

evidentemente, é uma série numérica convergente. No entanto, a derivada desta série,

$$f'(\theta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cos k \theta,$$

é uma série que não converge na média, conforme o leitor, poderá verificar. Isto naturalmente faz sentido, uma vez que a função dente de serra apresenta singularidades. Portanto, fica evidente que para que a derivada de uma função periódica tenha uma série de Fourier convergente, é necessário que a derivada da função exista em todos os pontos dentro do período.

A seguir serão obtidas relações para a série de Fourier da derivada de uma função em termos dos coeficientes de Fourier da função primitiva. Para isto consideram-se dois casos:

a) A função $f(\theta)$ é contínua dentro do intervalo $0 < \theta < 2\pi$.

Observe-se que, neste caso não são incluídos os pontos 0 e 2π (que podem ser pontos de descontinuidade). Suponha-se que $f(\theta)$ é tal que possui uma série de Fourier uniformemente convergente:

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \operatorname{sen} k\theta). \quad 0 < \theta < 2\pi$$

Havendo suposto que $f(\theta)$ é contínua, sua derivada será uma função definida neste mesmo intervalo. Portanto, $f'(\theta)$ terá também uma série de Fourier que será designada por

$$f'(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \operatorname{sen} k\theta). \quad (\text{V.9.1})$$

O coeficiente α_0 neste caso é:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)]$$

Porém

$$f(-\pi) = f(-\pi + 2\pi) = f(\pi),$$

logo

$$\alpha_0 = 0 \quad (V.9.2)$$

Por outro lado, os coeficientes α_k ($k \neq 0$) são calculados da seguinte maneira:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) \cos k \theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} f(\theta) \cos k \theta \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin k \theta \, d\theta,$$

onde se fez uma integração por partes. O primeiro termo, desta expressão, é identicamente nulo devido a que $f(-\pi) = f(\pi)$. A integral do segundo termo é identificado com o coeficiente B_k da série de Fourier de $f(\theta)$. Assim,

$$\alpha_k = k B_k \quad (V.9.3)$$

De uma maneira análoga, pode-se obter a seguinte relação:

$$\beta_k = k A_k \quad (V.9.4)$$

A série de Fourier, para este caso, fica:

$$f'(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} k(B_k \cos k \theta - A_k \sin k \theta). \quad (V.9.5)$$

Nota-se que para estes casos (i.e. quando $f(\theta)$ é contínua em todos os pontos dentro do intervalo $0 < \theta < 2\pi$), a série de Fourier da derivada da função $f'(\theta)$, pode ser obtida derivando diretamente a série de Fourier da função primitiva $f(\theta)$.

b) A função $f(\theta)$ é contínua dentro do intervalo $-\pi < \theta < \pi$.

Este é um caso diferente do anterior, uma vez que os pontos $-\pi$ e π podem ser pontos de descontinuidade. Este fato faz uma grande diferença, conforme será visto a seguir.

Supondo-se que a série de Fourier de $f'(\theta)$ seja dada por (V.9.1), o coeficiente α_0 é dado por

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] \quad (\text{V.9.6})$$

Note-se que, neste caso, $\alpha_0 \neq 0$ uma vez que os pontos π e $-\pi$, são pontos de descontinuidade. Os outros coeficientes a_k ($k \neq 0$), são obtidos, como antes por uma integração por partes

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} [f(\pi) \cos k\pi - f(-\pi) \cos k\pi] + k B_k \\ &= \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] (-1)^k + k B_k \\ \alpha_k &= \alpha_0 (-1)^k + k B_k \end{aligned} \quad (\text{V.9.7})$$

Os coeficientes β_k são obtidos de uma maneira similar com o seguinte resultado:

$$\beta_k = -k A_k \quad (V.9.8)$$

Assim, a série de Fourier correspondente \bar{a} derivada de uma função periódica definida dentro do intervalo $-\pi < \theta < \pi$, é:

$$f'(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [\alpha_0 (-1)^k + k B_k] \cos k\theta - k A_k \sin k\theta \right\}, \quad (V.9.9)$$

onde α_0 é dado por (V.9.6).

É interessante notar que quando $f'(\theta)$ satisfaz às condições de Dirichlet, e de acordo com as relações (V.5.7), tem-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$$

Estes dois resultados implicam, para o caso (a), que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k B_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B_k}{1/k} = 0 \quad (V.9.10)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k}{1/k} = 0 \quad (V.9.11)$$

Isto é, os coeficientes B_k e A_k se aproximam de zero mais rapidamente do que $1/k$ quando $k \rightarrow \infty$. Isto significa que o quadrado dos coeficientes α_k e β_k tem uma convergência mais lenta que os similares A_k e B_k , respectivamente.

Por outro lado, para o caso (b), tem-se que

$$\alpha_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{k+1} k B_k \quad (\text{V.9.12})$$

Esta é uma forma alternativa de calcular o coeficiente α_0 .

5.10 - SÉRIE DE FOURIER PARA UMA FUNÇÃO DE PERÍODO ARBITRÁRIO

Até agora as séries de Fourier têm sido estudadas considerando funções periódicas de período 2π . A seguir, serão generalizados os resultados obtidos, nas seções anteriores, para funções periódicas de um período (finito) arbitrário.

Na realidade, esta generalização se reduz a relacionar o período arbitrário da função periódica $f(x)$, com o período 2π das funções de período angular, mediante uma simples regra de três. Assim, se o período L da função periódica $f(x)$, é dado, por exemplo, em unidades de comprimento, então

$$\frac{L}{2\pi} = \frac{x}{\theta},$$

de onde $\theta = \frac{2\pi}{L} x$. Ou, se este período é dado em unidades de tempo, tem-se que: $\theta = \frac{2\pi}{T} t = \omega t$. Portanto, a generalização consiste apenas numa troca de variável. Assim, a série de Fourier (V.1.5) fica:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{2k\pi}{L} x + B_k \sin \frac{2k\pi}{L} x \right), \quad (V.10.1)$$

onde

$$A_k = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos \frac{2k\pi}{L} x \, dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2k\pi}{L} x \, dx \quad (V.10.2)$$

$$B_k = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin \frac{2k\pi}{L} x \, dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2k\pi}{L} x \, dx \quad (V.10.3)$$

Fica evidente que todas as propriedades da série de Fourier, desenvolvidas para funções de período 2π , são também válidas para as de período arbitrário. O que se tem que fazer, para a utilização das expressões matemáticas destas propriedades, é a troca de θ por $\frac{2\pi}{L}x$, e onde aparecer o número π (como limites de integração, coeficientes, etc.) substituir pelo semiperíodo $\frac{L}{2}$.

5.11 - ANÁLISE HARMÔNICA DE UMA FUNÇÃO DEFINIDA NUM DADO INTERVALO

Uma função $f(x)$, definida apenas no intervalo $0 \leq x \leq a$, pode ser expandida em série de Fourier. Para isto, é necessário supor que $f(x)$ é uma função periódica. Isto suposto, então será necessário a

tribuir a $f(x)$ um período, cujo valor dependerá apenas de um bom juízo, isto é, tem-se a liberdade de escolher o período que seja mais conveniente.

Uma escolha para o período, até certo ponto natural, seria supor que o próprio intervalo, dentro do qual é definida a função, represente o período da função artificialmente feita, periódica, isto é, $L = a$. Para este caso, as relações (V.10.1) e (V.10.2) e (V.10.3) são válidas, apenas com a substituição de L pelo intervalo a .

Uma outra escolha, que por sinal é muito mais conveniente, é supor que o intervalo $0 < x < a$, é apenas o semiperíodo, (i.e. $L = 2a$), e que $f(x)$ possui propriedades de simetria em relação ao eixo $x = 0$. Desta maneira, pode-se supor que $f(x)$ é uma função par (simétrica) ou ímpar (anti-simétrica), e assim poder-se calcular apenas um tipo dos coeficientes de Fourier.

Por exemplo, considerando-se

$$f(x) = f(-x), \quad -a < x < a$$

tem-se que

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi}{a} x, \quad (\text{V.11.1})$$

onde

$$A_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{k\pi}{a} x \, dx. \quad (\text{V.11.2})$$

Alternativamente, no caso de ser suposto que

$$f(-x) = -f(x)$$

ter-se-ia que:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{a} x, \quad (\text{V.11.3})$$

onde

$$B_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{a} x \, dx. \quad (\text{V.11.4})$$

Da discussão anterior depreende-se que uma função, definida dentro de um intervalo determinado, pode ser expandida em série de Fourier, onde os termos podem conter funções harmônicas com senos e cossenos, apenas senos, ou somente cossenos. Nestes dois últimos casos, a série é chamada de *série de Fourier-seno* e *Fourier-cosseno*, respectivamente.

O procedimento de encontrar a expansão em série de Fourier, de uma função $f(x)$ definida num dado intervalo, é chamado de *análise harmônica* ou também de *análise de Fourier*. Neste tipo de análise

se, o coeficiente $\frac{A_0}{2}$ é chamado de componente contínua; o harmônico correspondente a $k = 1$, de componente fundamental (ou primeiro harmônico); o correspondente a $k = 2$, de segundo harmônico, etc.

Muitas vezes, ao se fazer a análise harmônica de uma função, o que realmente interessa não é a série de Fourier em si, senão o valor dos coeficientes de Fourier, uma vez que encontrando-se os valores dos coeficientes, a série de Fourier fica completamente definida. Assim, uma maneira alternativa de apresentar os resultados de uma análise harmônica (de uma função definida num intervalo determinado) é, por exemplo, plotar os valores de A_k e (ou) B_k como uma função dos números inteiros k . Estes gráficos são chamados de *espectro dos harmônicos* da função, ou também de *espectro de frequências*.

EXEMPLO 5.5

Seja fazer a análise harmônica da função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 2b \\ 1 & 2b < x < 4b \end{cases} \quad (\text{V.11.5})$$

Para efeitos de análise de Fourier, suponha-se que $f(x)$ é periódica, simétrica em relação ao eixo $x = 0$, e de período $L = 4b$. Assim, os coeficientes da maneira mostrada na Figura V.7 de Fourier são.

$$A_0 = \frac{2}{4b} \int_{2b}^{4b} dx = 1$$

$$A_k = \frac{2}{4b} \int_{2b}^{4b} \cos \frac{k\pi}{4b} x dx = -\frac{2}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2}$$

$$A_k = 0 \quad k = 2, 4, 6, \dots$$

$$A_k = \frac{2}{k\pi} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \quad k = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Os valores destes coeficientes são mostrados na Figura V.8. Contudo, é mais comum plotar os valores do quadrado dos coeficientes de Fourier, i.e. A_k^2 . Neste caso, o gráfico A_k^2 vs. k é chamado de espectro dos harmônicos da função.

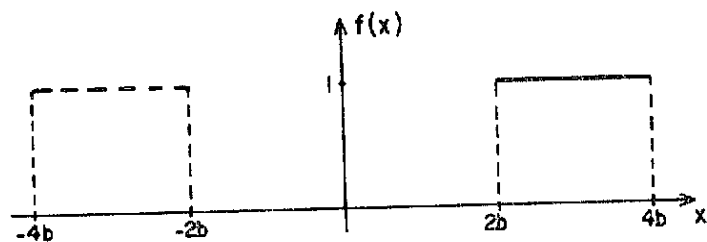


Fig. V.7 - Função definida no intervalo $0 < x < 4b$, e sua imagem para efeitos da análise harmônica.

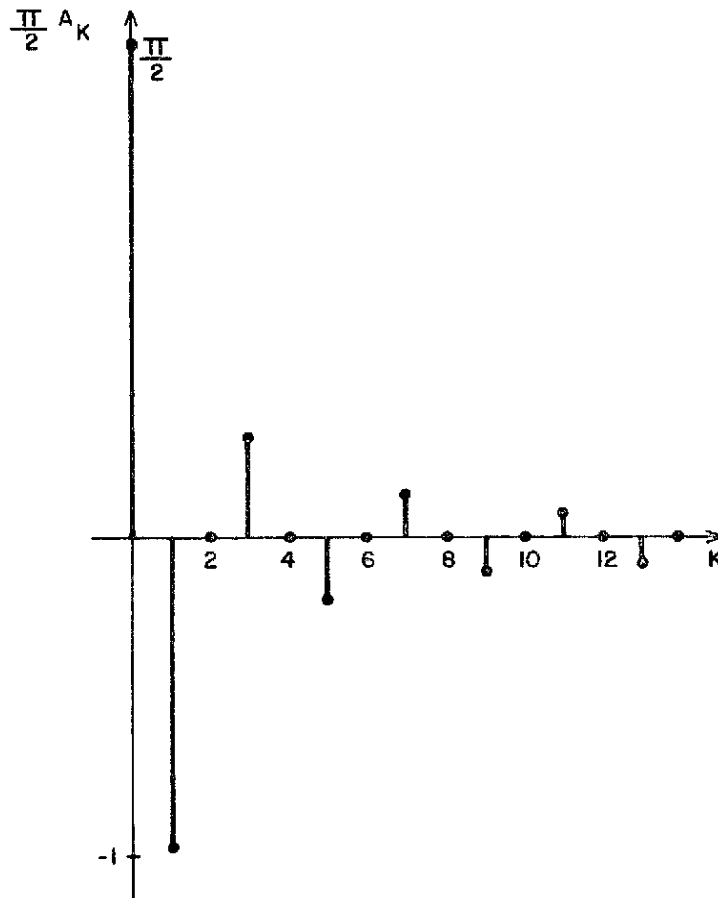


Fig. V.8 - Valores normalizados dos coeficientes de Fourier correspondentes à função definida em (V.11.5).

5.12 - PERIODICIDADES EM DADOS EXPERIMENTAIS

Suponha-se que, no transcurso de um experimento, tenham sido feitas medidas de uma certa grandeza física durante um tempo relativamente grande, em relação à duração dos fenômenos que se suspeitam estarem presentes, ou que são esperados que aconteçam. Suponha-se também que, após uma análise visual dos dados, chega-se a descobrir que os dados apresentam ter certa periodicidade. Isto é, devido a algum processo físico, e por cima de outros efeitos contínuos ("background"), os

dados mostram certa recorrência periódica. Inclusive, pode ser que os dados escondam outras periodicidades não evidentes, ou, de uma maneira geral, pode ser que de imediato não se consiga identificar nenhuma periodicidade.

O assunto desta seção é procurar um método que permita determinar se, de fato, existam periodicidades nos dados experimentais, e depois identificar o período destas recorrências.

Considere-se o conjunto de dados experimentais

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$$

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_N$$

Onde $f_n = f(t_n)$ pode ser uma grandeza física, medida no instante t_n . As medições podem ser efetuadas de maneira discreta (por exemplo dados provenientes de detetores de radiação onde as medidas são feitas a intervalos de tempo iguais) ou de uma forma contínua (conforme é o caso do registro contínuo da pressão atmosférica nos barógrafos), tal como a mostrada na Figura V.9.

O procedimento consiste em fazer a análise harmônica da função, em geral, discreta

$$f_n = f(t_n), \quad 0 \leq t \leq t_n \quad (V.12.1)$$

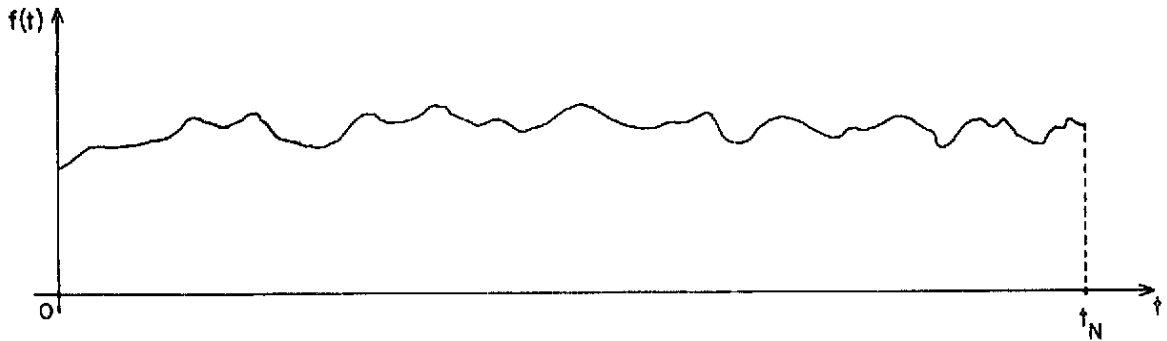


Fig. V.9 - Amostragem de dados medidos numa base contínua entre os instantes $t = 0$ e $t = t_N$

Este tipo de análise foi estudado na Seção anterior. Assim por exemplo, fazendo-se que $f(t_n)$ seja uma função par, periódica, de período $T = 2t_N$, os coeficientes de Fourier a_k são obtidos diretamente de (V.11.2):

$$a_k = \frac{2}{t_N} \int_0^{t_N} f_n(t) \cos \frac{k\pi}{t_N} t \, dt.$$

Naturalmente, esta integral é calculada de maneira aproximada mediante uma integração numérica uma vez que a função $f(t)$ é discreta (e mesmo sendo contínua, a integração será também aproximada). Assim, efetuando-se a integração numérica mediante a aproximação do trapézide, tem-se que:

$$a_k \approx \frac{1}{t_N} \left[f_0 + (-1)^k f_N + 2 \sum_{n=1}^{N-1} f_n \cos \frac{k\pi}{t_N} t_n \right] \Delta t \quad (V.12.2)$$

Ao plotar os valores de a_k^2 como uma função de k , observar-se-ão as seguintes características, dependendo da natureza dos dados.

i) Se o conjunto de dados não apresentar nenhuma periodicidade, dentro do intervalo todo de observação, então os coeficientes a_k^2 diminuirão de valor, *monotonicamente*, de maneira a satisfazer o critério $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k^2}{k} = 0$.

ii) Se no conjunto de dados existir uma periodicidade, então, o coeficiente a_k^2 , correspondente ao harmônico $\cos \frac{k\pi}{t_N} t$, terá um valor comparativamente grande, em relação ao comportamento genérico dos outros coeficientes, permitindo assim a identificação do período de recorrência existente no conjunto de dados.

EXEMPLO 5.6

Suponha-se que um determinado experimento produz dados de forma mostrada na Figura V.10. Mediante uma análise harmônica, pede-se encontrar a periodicidade do conjunto de dados.

Primeiramente, observa-se que o conjunto de dados fica dentro do intervalo $0 \leq t \leq 10b$. Para facilitar sua análise de Fourier, supõe-se que este intervalo é o semiperíodo de uma função periódica que, por sua vez, é anti-simétrica em relação ao eixo $t = 0$. Desta maneira, a análise de Fourier é feita em termos de:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{10b} t.$$

$$B_k = \frac{1}{5b} \int_0^{10b} f(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{10b} t dt$$

$$= \frac{1}{5b} \left[\int_b^{2b} + \int_{3b}^{4b} + \dots + \int_{9b}^{10b} \right] \operatorname{sen} \frac{k\pi}{10b} t dt$$

$$= \frac{1}{5b} \sum_{n=1,3,5}^9 \int_{nb}^{(n+1)b} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{10b} t dt = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3}^9 \frac{1}{k} \left[\cos \frac{kn\pi}{10} - \cos \frac{k(n+1)\pi}{10} \right]$$

$$\frac{\pi}{2} B_k = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^4 \left[\cos \frac{(2n+1)k\pi}{10} - \cos \frac{2(n+1)k\pi}{10} \right]$$

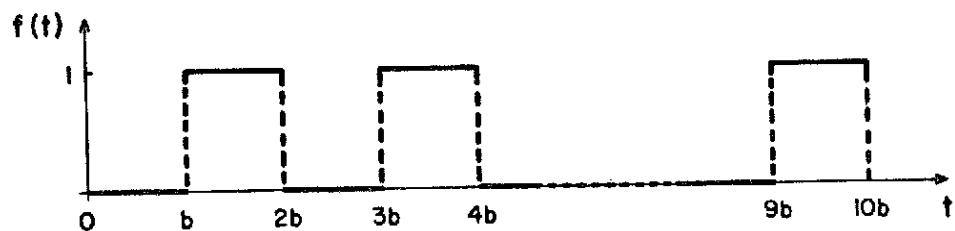


Fig. V.10 - Conjunto de dados experimentais

A Figura V.11 mostra os primeiros 40 coeficientes $(\pi B_k)^2$ calculados mediante a fórmula anterior. Observe-se que o valor dos coeficientes decresce monotonicamente. Entretanto, para $k = 10$, este coeficiente, possui um valor muito grande em comparação ao comportamento geral. Portanto, o harmônico correspondente $\text{sen } \frac{\pi}{b} t$, é o mais importante. O período deste harmônico resulta ser $2b$.

Outros picos, como o que aparece em $k = 30$, são apenas produto da análise harmônica

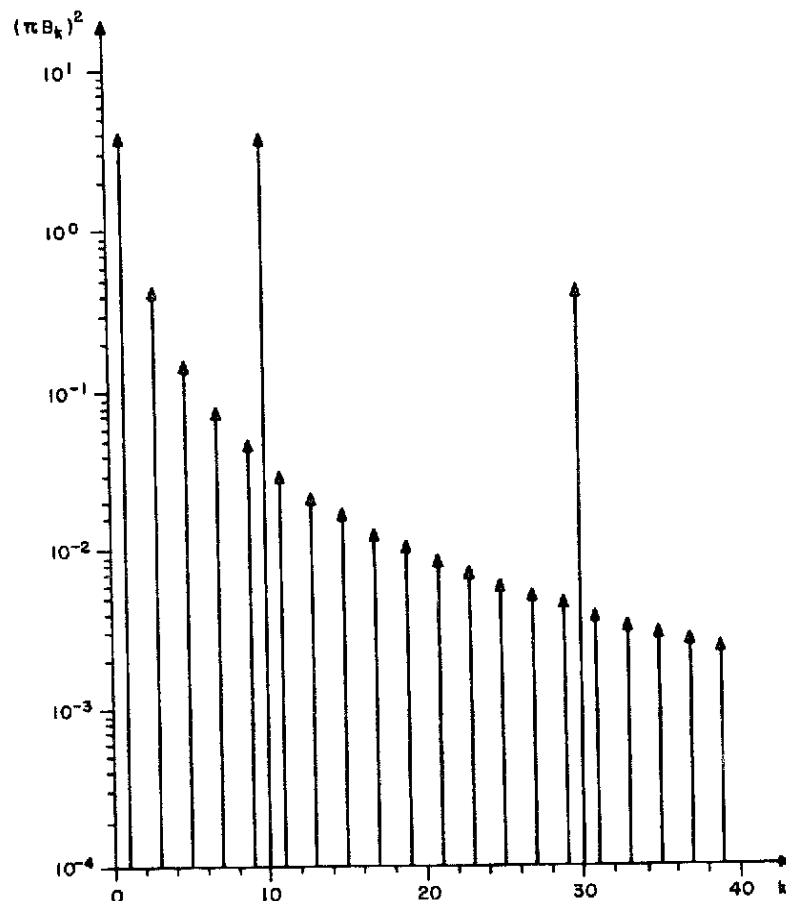


Fig.V.11 - Espectro de harmônicos correspondente ao conjunto de dados na Figura V.10.

5.13 - FORMA COMPLEXA DA SÉRIE DE FOURIER

A seguir ver-se-á uma maneira alternativa de representar a série de Fourier. Dado que esta série envolve as funções trigonométricas, seno e cosseno e tendo em mente a fórmula de Euler (Capítulo IV) que também envolve estas funções, é de se esperar que a série de Fourier seja também possível de ser representada numa forma complexa. Para isto, lembra-se que

$$\cos \frac{2k\pi}{L} x = \frac{1}{2} \left(e^{i \frac{2k\pi}{L} x} + e^{-i \frac{2k\pi}{L} x} \right)$$

$$\sin \frac{2k\pi}{L} x = \frac{1}{2} \left(e^{i \frac{2k\pi}{L} x} - e^{-i \frac{2k\pi}{L} x} \right).$$

Substituindo-se estas expressões na relação (V.10.1), e rearranjando-se termos, tem-se:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (A_k - i B_k) e^{i \frac{2k\pi}{L} x} + \frac{1}{2} (A_k + i B_k) e^{-i \frac{2k\pi}{L} x} \right].$$

Chamando-se

$$\left. \begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2} (A_k - i B_k) \\ C_0 &= \frac{A_0}{2} \\ C_{-k} &= \frac{1}{2} (A_k + i B_k), \end{aligned} \right\} \quad (V.13.1)$$

tem-se que

$$f(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{i \frac{2k\pi}{L} x} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{-k} e^{-i \frac{2k\pi}{L} x}$$

Trocando-se, ainda, k por $-k$ no índice do último somatório, observa-se que o conjunto das duas séries semi-infinitas, com mais o termo C_0 , formam uma única série infinita, a saber:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i \frac{2k\pi}{L} x}, \quad (V.13.2)$$

onde os coeficientes C_k , são também chamados de coeficientes de Fourier.

Esta é a forma complexa da série de Fourier de uma função periódica de período L . A expressão (V.13.2), pode ainda ser escrita, de uma maneira mais simplificada, em termos dos vetores $|e_k\rangle = e^{i \frac{2k\pi}{L} x}$, que são parte de uma sequência infinita de vetores. Assim,

$$|f\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k |e_k\rangle, \quad (V.13.9)$$

onde

$$|f\rangle = f(x).$$

Em seguida verifica-se a ortogonalidade dos vetores $|e_k\rangle$.

$$\langle e_\ell | e_k \rangle = \int_0^L e^{-i \frac{2 \ell \pi}{L} x} e^{i \frac{2 k \pi}{L} x} dx = \int_{-L/2}^{L/2} e^{i \frac{2 \pi}{L} x(k - \ell)} dx.$$

Para $\ell = k$, tem-se que

$$\langle e_k | e_k \rangle = L.$$

Para $\ell \neq k$.

$$\langle e_\ell | e_k \rangle = 2 \int_0^{L/2} \cos \frac{2 \pi (k - \ell)}{L} x dx = 0.$$

Logo,

$$\langle e_\ell | e_k \rangle = L \delta_{k\ell}. \quad (V.13.4)$$

Assim, os vetores $|e_k\rangle$ formam um espaço vetorial infinito de funções mutuamente ortogonais, em correspondência com o espaço das funções trigonométricas.

Com o resultado (V.13.4) agora podem ser calculados os coeficientes C_k da série de Fourier complexa (V.13.3), mediante o procedimento normal.

$$\langle e_\ell | f \rangle = \sum_k C_k \langle e_\ell | e_k \rangle = L C_\ell,$$

de onde

$$C_k = \frac{1}{L} \langle e_k | f \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i \frac{2k\pi}{L} x} dx. \quad (V.13.5)$$

Portanto, a série (V.13.3) pode, ainda ser reescrita da seguinte maneira:

$$| f \rangle = \frac{1}{L} \sum_k | e_k \rangle \langle e_k | f \rangle. \quad (V.13.6)$$

Algumas propriedades dos coeficientes de Fourier, para este caso, ressaltam diretamente das relações (V.13.1) e (V.13.5). Por exemplo, da (V.13.1) tem-se que:

$$C_k^* = C_{-k} \quad (V.13.7)$$

$$C_0 = \frac{1}{L} \langle e_0 | f \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx = \text{valor médio de } f(x). \quad (V.13.8)$$

Quando $f(-x) = f(x)$, observa-se que

$$C_k^* = \frac{1}{L} \langle e_k | f \rangle^* = \frac{1}{L} \langle f | e_k \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{i \frac{2k\pi}{L} x} dx.$$

Trocando a variável de integração, x por $-x$, vê-se que:

$$C_k^* = - \frac{1}{L} \int_{L/2}^{-L/2} f(-x) e^{-i \frac{2k\pi}{L} x} dx = \frac{1}{L} \langle e_k | f \rangle = C_k,$$

de onde se deduz que, quando $f(x)$ é uma função par, os coeficientes de Fourier, da série complexa, são números reais. De uma maneira similar demonstra-se que, se $f(-x) = -f(x)$, os coeficientes de Fourier são números imaginários

Das relações (V.13.1) verifica-se que

$$|C_k|^2 = C_k C_{-k} = \frac{1}{4} (A_k^2 + B_k^2) \quad (\text{V.13.9})$$

É necessário ter em mente que, embora, a série (V.13.2) tenha termos contendo fatores complexos, esta série é de termos reais, conforme deve-se lembrar na sua dedução. Isto significa que quando se faz a expansão de uma determinada função, em série de Fourier, utilizando a versão complexa, será necessário um trabalho algébrico adicional para colocá-la na sua forma real. A vantagem da forma complexa, é que pode ser mais fácil, e elegantemente, manipulada em análises teóricas.

EXEMPLO 5.7

Seja a função definida na relação (V.3.2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{para } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3}{2}\pi \\ -\frac{\pi}{2} & \text{para } \frac{3}{2}\pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

Os coeficientes da s̄erie na forma complexa, segundo a equāo (V.13.5), s̄ao dados por:

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} e^{-ikx} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \frac{\pi}{2} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{i}{4k} \left[e^{-i\frac{k\pi}{2}} - 1 - e^{-i2k\pi} + e^{-i\frac{3}{2}k\pi} \right] \end{aligned}$$

$$C_k = \frac{i}{4k} \left(\cos \frac{k\pi}{2} + \cos \frac{3}{2} k\pi \right) + \frac{1}{4k} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{3}{2} k\pi \right) - \frac{i}{2k} .$$

Todavia,

$$\cos \frac{k\pi}{2} = \cos \frac{3}{2} k\pi = \begin{cases} (-1)^{k/2} & \text{para } k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \\ 0 & \text{para } k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} = -\operatorname{sen} \frac{3}{2} k\pi \quad \text{para } k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

$$\operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} = \operatorname{sen} \frac{3}{2} k\pi = 0 \quad \text{para } k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots,$$

de onde vem que:

$$\operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{3}{2} k\pi = 0.$$

Portanto,

$$C_k = \begin{cases} \frac{i}{2k} (-1)^{k/2} - \frac{i}{2k} & \text{para } k = \pm 2, \pm 4, \dots \\ -\frac{i}{2k} & \text{para } k = \pm 1, \pm 3, \dots \end{cases}$$

Conforme era de esperar os coeficientes C_k são imaginários, uma vez que $f(x)$ é uma função ímpar. O coeficiente C_0 é:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\pi}{2} dx = 0.$$

Logo, a série complexa de Fourier fica:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx} = \frac{i}{2} \sum_{k=\pm 2, \pm 4, \dots} \frac{1}{k} [(-1)^{k/2} - 1] e^{ikx} - \frac{i}{2} \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \dots} \frac{1}{k} e^{ikx}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{i}{2} (e^{i2x} + e^{-i2x} + 0 - 0 - \frac{2}{6} e^{i6x} + \frac{2}{6} e^{-i6x} + \dots) - \\ &\quad - \frac{i}{2} (e^{ix} - e^{-ix} + \frac{1}{3} e^{i3x} - \frac{1}{3} e^{-i3x} + \frac{1}{5} e^{i5x} - \frac{1}{5} e^{-i5x} + \dots) \\ &= \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} + \frac{1}{3} \frac{e^{i6x} - e^{-i6x}}{2i} + \dots + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} + \dots \end{aligned}$$

$$f(x) = \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 6x + \dots \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots$$

Esta s\u00e9rie \u00e9 exatamente a (V.3.4).

5.14 - F\u00f3rmula de Parseval

Considere-se novamente a fun\u00e7\u00e3o peri\u00f3dica $f(x) = f(x+L)$. De uma maneira similar ao feito para obter a rela\u00e7\u00e3o (V.5.6), o que vai se fazer \u00e9 encontrar a rela\u00e7\u00e3o entre o valor m\u00e9dio do quadrado do m\u00f4dulo da fun\u00e7\u00e3o $f(x)$, e os seus coeficientes de Fourier. Isto \u00e9, calcular a express\u00e3o:

$$\frac{1}{L} \langle f | f \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L [f(x)]^2 dx.$$

Substituindo-se (V.13.3) nesta express\u00e3o, tem-se:

$$\frac{1}{L} \langle f | f \rangle = \frac{1}{L} \left(\sum_{\ell} c_{\ell}^* \langle e_{\ell} | \right) \left(\sum_k c_k | e_k \rangle \right) = \frac{1}{L} \sum_{\ell} \sum_k c_{\ell}^* c_k \langle e_{\ell} | e_k \rangle$$

Por\u00eam, segundo (V.13.4) tem-se que:

$$\frac{1}{L} \langle f | f \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L |f(x)|^2 dx = \sum_k |c_k|^2 \quad (V.14.1)$$

Conforme foi visto na Seção 5.5, esta relação implica que a série de Fourier converge na média à função $f(x)$. Esta relação, de uma maneira alternativa, é também tida como uma prova de que a família infinita de vetores $|e_k\rangle$ é completa, no sentido de que esta sequência de vetores é suficiente (não precisa de nenhuma outra função a mais) para reproduzir (dentro dos critérios de convergência estabelecidos) qualquer função definida neste espaço.

5.15 - SÉRIE DE FOURIER EM DUAS DIMENSÕES

Suponha-se a função $f(x, y)$, definida dentro do retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$. (Esta função pode inclusive ser uma função periódica, nas variáveis x e y , com períodos a e b , respectivamente). A função $f(x, y)$, assim definida, pode ser expandida em série de Fourier, ou melhor, pode-se fazer uma análise harmônica da função, da seguinte maneira: Primeiro se faz a expansão de Fourier da função em uma das variáveis, por exemplo de x , i.e.

$$f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(y) e^{i \frac{2k\pi}{a} x}, \quad (\text{V.15.1})$$

e depois, separadamente, a expansão de Fourier dos coeficientes $C_k(y)$, isto é:

$$C_k(y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{kl} e^{i \frac{2l\pi}{a} y}. \quad (\text{V.15.2})$$

Portanto, a expansão de Fourier de $f(x, y)$ é obtida substituindo-se (V.15.2) em (V.15.1):

$$f(x, y) = \sum_k \sum_\ell C_{k\ell} e^{i2\pi\left(\frac{kx}{a} + \frac{\ell y}{b}\right)} \quad (\text{V.15.3})$$

Chamando-se

$$|k, \ell\rangle = e^{i2\pi\left(\frac{kx}{a} + \frac{\ell y}{b}\right)}$$

à sequência infinita de vetores, tem-se que a expansão de Fourier da função $|f\rangle = f(x, y)$, pode ser escrita na forma simplificada:

$$|f\rangle = \sum_{k,\ell} C_{k\ell} |k, \ell\rangle \quad (\text{V.15.4})$$

Observe-se que os vetores $|k, \ell\rangle$ (e portanto o $|f\rangle$), correspondem a dois espaços vetoriais diferentes. O leitor pode verificar que estes vetores são mutuamente ortogonais, i. e.:

$$\langle k', \ell' | k, \ell \rangle = ab \delta_{kk'} \delta_{\ell\ell'} \quad (\text{V.15.5})$$

Desta maneira, evidencia-se que:

$$C_{k\ell} = \frac{1}{ab} \langle k, \ell | f \rangle \quad (\text{V.15.6})$$

ou de uma forma mais explicita:

$$C_{k\ell} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) e^{-i2\pi \left(\frac{kx}{a} + \frac{\ell y}{b} \right)} dx dy \quad (\text{V.15.7})$$

BIBLIOGRAFIA

- CARSLAW, H.S. *Introduction to the theory of fourier's series and integrals*. 3 ed. New York, Dover, 1950. (Dover Books on Intermediate and Advanced Mathematics).
- CHURCHILL, R.V. *Fourier series and boundary value problems*. 2 ed. New York, MacGraw-Hill, 1963.
- LANCZOS, C. *Discourse on fourier series*. New York, HAFNER, c 1966.
- SAGAN, H. *Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics*. New York, John Wiley, c 1961.
- SANSONE, G. *Orthogonal functions*. New York, Interscience, 1959.
- TOLSTOV, G.P. *Fourier series*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1962.