

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA - MCT  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS - INPE

**MANUTENÇÃO ORBITAL DE CONSTELAÇÕES  
SIMÉTRICAS DE SATÉLITES UTILIZANDO MANOBRAS  
IMPULSIVAS ÓTIMAS COM VÍNCULO DE TEMPO**

Evandro Marconi Rocco

Tese de Doutorado do Curso de Engenharia e Tecnologia Espaciais - ETE  
Divisão de Mecânica Espacial e Controle - DMC

Orientadores:

Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado

INPE  
São José dos Campos  
Outubro de 2002



Aprovada pela Banca Examinadora em cumprimento a requisito exigido para a obtenção do Título de **Doutor** em **Engenharia e Tecnologia Espaciais / Mecânica Espacial e Controle**.

Dr. Atair Rios Neto



Presidente/INPE-SJCampos-SP

Dr. Marcelo Lopes de Oliveira e Souza



Orientador/INPE-SJCampos-SP

Dr. Antonio F. Bertachini de Almeida Prado



Orientador/INPE/SJCampos-SP

Dr. Valcir Orlando



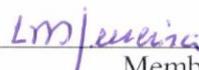
Membro da Banca/INPE/SJCampos-SP

Dr<sup>ª</sup> Ana Paula Marins Chiaradia



Membro da Banca  
Convidada ITA/IEF/SJCampos-SP

Dr. Luiz Danilo Damasceno Ferreira



Membro da Banca  
Convidado UFPR/Curitiba-PR

Candidato: Evandro Marconi Rocco

São José dos Campos, 4 de outubro de 2002.



“Não nos perguntamos qual o propósito útil dos pássaros cantarem, pois o canto é o seu prazer, uma vez que foram criados para cantar. Similarmente, não devemos perguntar por que a mente humana se inquieta com a extensão dos segredos dos céus ... A diversidade do fenômeno da Natureza é tão vasta e os seus tesouros escondidos nos céus tão ricos, precisamente para que a mente humana nunca tenha falta de alimento.”

Johannes Kepler - *Mysterium Cosmographicum*



À minha esposa Fernanda,  
por ser uma verdadeira amiga e companheira.



## AGRADECIMENTOS

À Divisão de Mecânica Espacial e Controle do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais pela oportunidade de desenvolver este trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP, que financiou este estudo.

Aos membros da banca examinadora pelas sugestões para o enriquecimento deste trabalho.

Aos meus orientadores cuja orientação não se restringiu apenas a este trabalho. Posso hoje com certeza, chamá-los de amigos pois somente entre amigos essa preocupação sincera com o bem estar do outro ocorre.

Aos colegas de curso pelo apoio e cooperação.

Aos amigos e familiares pelo apoio e incentivo.

Aos meus pais que com seus preciosos ensinamentos tornaram possível a realização deste sonho.

À minha esposa que com sua compreensão tornou tudo mais fácil e agradável. Sem o seu apoio a realização deste trabalho iria tornar-se uma tarefa árdua, senão impossível.



## **RESUMO**

Neste trabalho estudamos o problema de manutenção orbital de constelações simétricas de satélites com mínimo consumo de combustível, usando manobras impulsivas com vínculo de tempo. Esse vínculo de tempo impõe uma característica nova ao problema, fazendo com que grande parte dos métodos de manobras orbitais existentes na literatura não mais se apliquem. Assim sendo, esses métodos devem ser estudados e adaptados a esse novo vínculo. E ainda, devido a natureza multiobjetivo do problema da manutenção orbital de constelações, foi desenvolvida uma metodologia de otimização multiobjetivo capaz de considerar vários objetivos simultaneamente, sem reduzir o problema ao caso da otimização de apenas um objetivo, como acontece na maioria dos trabalhos existentes na literatura. Essa metodologia pode ser aplicada não apenas ao problema da manutenção orbital de uma constelação de satélites mas também a todos os problemas de otimização onde a abordagem multiobjetivo seja necessária. Neste trabalho, testamos essa metodologia aplicada a uma constelação de satélites e obtivemos resultados claramente superiores aos resultados obtidos por outras metodologias de otimização.

Palavras-chave: Constelações de Satélites; Manutenção Orbital; Astrodinâmica; Transferência Orbital; Manobras Ótimas; Vínculo de Tempo; Otimização Multiobjetivo.



# **STATION KEEPING OF SATELLITE CONSTELLATIONS WITH TIME CONSTRAINT USING OPTIMAL IMPULSIVE MANEUVERS**

## **ABSTRACT**

In this work we study the problem of orbital station keeping maneuvers of symmetrical constellations of satellites with minimum fuel consumption using impulsive maneuvers with time constraint. This time constraint imposes a new characteristic to the problem, that rules out the majority of the transfer methods available in the literature. And, due to the satellites constraints the station keeping of satellite constellations can be defined as a multi-objective problem. Thus, a methodology of multi-objective optimization was developed, capable to consider several objectives simultaneously, without reducing the problem to the case of the optimization of only one objective, as most of the existent works in the literature. This methodology, can be applied to the problem of the station keeping of satellite constellations and also in all the optimizations problems where the multi-objective approach be necessary. In this work, we tested this methodology applied to a satellite constellation and we obtained results clearly superiors than the results obtained by other optimizations methodologies.

**Keywords:** Satellite Constellations; Station Keeping; Astrodynamics; Orbital Transfer; Optimal Maneuvers; Time Constraint; Multi-Objective Optimization



## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO</b> .....	27
1.1- Introdução .....	27
1.2- Objetivos .....	28
1.3- Motivação .....	29
1.4- Contribuições do Trabalho .....	31
1.5- Organização do Trabalho .....	33
<b>CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	35
2.1- Trajetórias e Transferências Orbitais Ótimas .....	35
2.2- Transferências Orbitais com Mínimo Consumo de Combustível .....	37
2.3- Transferências Orbitais com Vínculo de Tempo .....	41
2.4- Constelações de Satélites .....	43
2.5- Métodos de Otimização Indiretos .....	46
2.6- Métodos de Otimização Diretos (Sub-Ótimos) .....	48
2.7- Métodos de Otimização Híbridos .....	48
2.8- Métodos de Otimização Multiobjetivo .....	51
<b>CAPÍTULO 3 – MANUTENÇÃO ORBITAL DE CONSTELAÇÕES DE SATÉLITES</b> .....	55
3.1- Tipos de Constelações de Satélites .....	56
3.1.1- Constelações Geossíncronas .....	56
3.1.2- Constelações Polares .....	57
3.1.3- Constelações do Tipo Elipso .....	58
3.1.4- Constelações do Tipo Molniya .....	58
3.1.5- Constelações do Tipo Poliedro .....	59
3.1.6- Constelações do Tipo Rosette .....	60
3.2- Definição do Problema e Soluções Existentes na Literatura .....	61
3.3- Solução Proposta Para o Problema .....	65
3.4- Descrição do Algoritmo Utilizado Para a Solução do Problema .....	67

<b>CAPÍTULO 4 – METODOLOGIA APLICADA NO CÁLCULO DA MANOBRA ÓTIMA DE TRANSFERÊNCIA ORBITAL</b>	73
4.1- Método de Lawden .....	73
4.2- Método de Eckel e Vinh Adaptado ao Caso Coplanar .....	81
<b>CAPÍTULO 5 – METODOLOGIAS EXISTENTES NA LITERATURA PARA A TOMADA DE DECISÃO DO PROBLEMA MULTIOBJETIVO</b>	97
5.1- O Problema Multi-Objetivo .....	97
5.2- Critérios Existentes na Literatura Para a Escolha da Solução Ótima Para o Problema Multi-Objetivo .....	100
5.2.1- Critério da Combinação de Objetivos por Meio de Fatores de Influência ("Weighting Method") .....	100
5.2.2- Critério dos Objetivos Vinculados ("The Constraint Method") .....	101
5.2.3- Critério Baseado em Aproximações Locais ("The Surrogate Worth Tradeoff Method") .....	102
5.2.4- Método Simplex Multi-Objetivo .....	103
5.2.5- Critério Baseado em Definições Geométricas com Relação a Uma Solução Ideal .....	103
5.2.6- Critério da Programação Objetiva ("Goal Programming") .....	105
5.2.7- Critério de Pareto (Não Inferioridade) .....	106
<b>CAPÍTULO 6 - METODOLOGIA PROPOSTA PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA MULTIOBJETIVO: CRITÉRIO DA MENOR PERDA</b>	113
<b>CAPÍTULO 7 - RESULTADOS OBTIDOS COM A METODOLOGIA PROPOSTA PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA MULTIOBJETIVO</b>	127

<b>CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS</b> .....	157
<b>8.1- Conclusões</b> .....	157
<b>8.2- Sugestões Para Trabalhos Futuros</b> .....	159
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	161
<b>BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR</b> .....	177



## LISTA DE FIGURAS

2.1- Transferência de Órbita .....	36
3.1- Tipos de Cobertura Terrestre .....	56
3.2- Constelação de Satélites Geossíncronos (Geoestacionários) .....	57
3.3- Constelação de Satélites com Órbitas Polares .....	57
3.4- Constelação de Satélites do Tipo Ellipso .....	58
3.5- Órbita do Tipo Molniya .....	59
3.6- Constelações do Tipo Poliedro .....	59
3.7- Geometria de um Par de Satélites em uma Constelações do Tipo Rosette ...	60
3.8- Constelações do Tipo Rosette .....	61
3.9- Diagrama de Fluxo .....	66
4.1- Geometria da Manobra .....	75
4.2- Geometria da Manobra Quando $\Omega_2 > \Omega_1$ e $i_2 > i_1$ .....	84
4.3- Geometria da Manobra Quando $\Omega_1 > \Omega_2$ e $i_1 > i_2$ .....	84
4.4- Geometria da Manobra Quando $\Omega_2 > \Omega_1$ e $i_1 > i_2$ .....	85
4.5- Geometria da Manobra Quando $\Omega_1 > \Omega_2$ e $i_2 > i_1$ .....	85
4.6- Caso 1: Impulso $I_1$ Aplicado Antes do Ponto $N$ e $I_2$ Após $N$ .....	87
4.7- Triângulo Esférico Referente ao Caso 1 .....	87
4.8- Caso 2: Ambos os Impulsos Aplicados Após o Ponto $N$ .....	88
4.9- Triângulo Esférico Referente ao Caso 2 .....	88
4.10- Caso 3: Ambos os Impulsos Aplicados Antes do Ponto $N$ .....	89
4.11- Triângulo Esférico Referente ao Caso 3 .....	89
5.1- Critério dos Objetivos Vinculados .....	101
5.2- Solução Ideal Para um Problema com Dois Objetivos .....	103
5.3- Distância com Relação à Solução Ideal .....	104
6.1- Soluções Para os Níveis 1 e 2 do 5º Exemplo .....	114
6.2- Soluções Para os Níveis 1, 2 e 3 do 5º Exemplo .....	114
6.3- Critério de Menor Perda .....	116
6.4- Posicionamento Nominal dos Satélites da Constelação .....	119

<b>6.5-</b> Distribuição de Soluções Não Normalizadas do 6º Exemplo .....	124
<b>6.6-</b> Distribuição de Soluções Normalizadas do 6º Exemplo .....	124
<b>7.1-</b> Posicionamento dos Satélites do 7º Exemplo Para $\theta_1 = 0$ .....	128
<b>7.2-</b> Distribuição de Soluções Para o Satélite 1 do 7º Exemplo .....	131
<b>7.3-</b> Posicionamento dos Satélites do 7º Exemplo Para $\theta_3 = 0$ .....	132
<b>7.4-</b> Distribuição de Soluções Para o Satélite 3 do 7º Exemplo .....	135
<b>7.5-</b> Posicionamento dos Satélites do 7º Exemplo Para $\theta_2 = 0$ .....	136
<b>7.6-</b> Distribuição de Soluções Para o Satélite 2 do 7º Exemplo .....	139
<b>7.7-</b> Comparação entre $\delta\theta_{MULTIOBJETIVO}$ e $\delta\theta_{NOMINAL}$ do 7º Exemplo .....	140
<b>7.8-</b> Comparação entre $\Delta v_{MULTIOBJETIVO}$ e $\Delta v_{NOMINAL}$ do 7º Exemplo .....	140
<b>7.9-</b> Comparação entre $\Delta t_{MULTIOBJETIVO}$ e $\Delta t_{NOMINAL}$ do 7º Exemplo .....	141
<b>7.10-</b> Posicionamento dos Satélites do 8º Exemplo Para $t = 0$ e $\theta_1 = 0$ .....	142
<b>7.11-</b> Posicionamento dos Satélites do 8º Exemplo Para $t = 5337,4941$ s e $\theta_1 = 0$ .....	143
<b>7.12-</b> Distribuição de Soluções Para o Satélite 1 do 8º Exemplo .....	146
<b>7.13-</b> Posicionamento dos Satélites do 8º Exemplo Para $\theta_3 = 0$ .....	147
<b>7.14-</b> Distribuição de Soluções Para o Satélite 3 do 8º Exemplo .....	150
<b>7.15-</b> Posicionamento dos Satélites do 8º Exemplo Para $t = 8893,1298$ s e $\theta_2 = 0$ .....	151
<b>7.16-</b> Distribuição de Soluções Para o Satélite 2 do 8º Exemplo .....	154
<b>7.17-</b> Comparação entre $\delta\theta_{MULTIOBJETIVO}$ e $\delta\theta_{NOMINAL}$ do 8º Exemplo .....	155
<b>7.18-</b> Comparação entre $\Delta v_{MULTIOBJETIVO}$ e $\Delta v_{NOMINAL}$ do 8º Exemplo .....	155
<b>7.19-</b> Comparação entre $\Delta t_{MULTIOBJETIVO}$ e $\Delta t_{NOMINAL}$ do 8º Exemplo .....	156

## LISTA DE TABELAS

<b>5.1-</b> 1º Exemplo de Aplicação da Metodologia de Pareto .....	107
<b>5.2-</b> 2º Exemplo de Aplicação da Metodologia de Pareto .....	108
<b>5.3-</b> 3º Exemplo de Aplicação da Metodologia de Pareto .....	110
<b>5.4-</b> Procedimento de Busca da Solução <i>Inferior</i> .....	111
<b>5.5-</b> Manobras Ótimas do 5º Exemplo .....	112
<b>6.1-</b> Manobras Ótimas Normalizadas do 5º Exemplo .....	117
<b>6.2-</b> Manobras Ótimas Não Normalizadas do 6º Exemplo .....	122
<b>6.3-</b> Manobras Ótimas Normalizadas do 6º Exemplo .....	123
<b>7.1-</b> Escolha da Melhor Manobra Para o Satélite 1 do 7º Exemplo .....	130
<b>7.2-</b> Escolha da Melhor Manobra Para o Satélite 3 do 7º Exemplo .....	134
<b>7.3-</b> Escolha da Melhor Manobra Para o Satélite 2 do 7º Exemplo .....	138
<b>7.4-</b> Escolha da Melhor Manobra Para o Satélite 1 do 8º Exemplo .....	145
<b>7.5-</b> Escolha da Melhor Manobra Para o Satélite 3 do 8º Exemplo .....	149
<b>7.6-</b> Escolha da Melhor Manobra Para o Satélite 2 do 8º Exemplo .....	153



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Método de Lawden

$a$	semi-eixo maior
$e$	excentricidade
$l$	semi-latus rectum
$r$	raio (distância do centro de atração ao satélite)
$\vec{v}_1$	vetor velocidade do veículo com relação a órbita inicial no local onde é aplicado o primeiro impulso
$\vec{v}_i$	vetor velocidade do veículo com relação a órbita de transferência no local onde é aplicado o primeiro impulso
$\vec{v}_f$	vetor velocidade do veículo com relação a órbita de transferência no local onde é aplicado o segundo impulso
$\vec{v}_2$	vetor velocidade do veículo com relação a órbita final no local onde é aplicado o segundo impulso
$\omega$	longitude do periapside
$\phi$	ângulo formado entre a direção circunferencial (direção perpendicular a reta que liga o centro de atração ao satélite) e a direção do impulso
$\theta$	ângulo de posição do satélite (coordenada polar). Ângulo formado entre a reta que liga o centro de atração ao nodo ascendente e a reta que liga o centro de atração ao satélite. Portanto $\theta = \omega + f$ , onde $f$ é a anomalia verdadeira
$\mu$	constante gravitacional, que para a Terra vale $398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$
$\Delta\vec{v}_r$	vetor impulso na direção radial
$\Delta\vec{v}_s$	vetor impulso na direção circunferencial
$\Delta v_1$	magnitude do primeiro impulso
$\Delta v_2$	magnitude do segundo impulso

## Método de Eckel e Vinh

$a$	semi-eixo maior
$e$	excentricidade
$p$	semi-latus rectum
$i$	inclinação
$M$	anomalia média
$E$	anomalia excêntrica.
$I_1$	localização do primeiro impulso
$I_2$	localização do segundo impulso
$V_1$	magnitude do primeiro impulso
$V_2$	magnitude do segundo impulso
$V$	velocidade característica
$T$	tempo gasto na manobra
$r_1$	distância radial do ponto $I_1$
$r_2$	distância radial do ponto $I_2$
$f_1$	anomalia verdadeira do ponto $I_1$ medida no plano da órbita de transferência
$f_2$	anomalia verdadeira do ponto $I_2$ medida no plano da órbita de transferência
$x_1$	componente radial do primeiro impulso
$x_2$	componente radial do segundo impulso
$y_1$	componente transversal do primeiro impulso
$y_2$	componente transversal do segundo impulso
$z_1$	componente do primeiro impulso na direção ortogonal ao plano da órbita de transferência
$z_2$	componente do segundo impulso na direção ortogonal ao plano da órbita de transferência
$h_i$	componente horizontal de $V_i$
$\omega$	argumento do periapside
$\Omega$	longitude do nodo ascendente

- $\phi$  ângulo entre os planos das órbitas inicial e final
- $\beta_1$  anomalia verdadeira da linha dos nodos  $FN$  medida no plano da órbita inicial
- $\beta_2$  anomalia verdadeira da linha dos nodos  $FN$  medida no plano da órbita final
- $\Delta$  ângulo de transferência, medido no plano da órbita de transferência
- $\gamma_1$  ângulo de mudança de plano gerado pelo primeiro impulso
- $\gamma_2$  ângulo de mudança de plano gerado pelo segundo impulso
- $\alpha_1$  anomalia verdadeira do ponto  $I_1$  medida no plano da órbita inicial
- $\alpha_2$  anomalia verdadeira do ponto  $I_2$  medida no plano da órbita final



# CAPÍTULO 1

## APRESENTAÇÃO

### 1.1 - INTRODUÇÃO

Uma boa parte dos veículos espaciais colocados em órbita ao redor da Terra utiliza os conceitos básicos de manobras orbitais pois, quando o veículo é lançado, ele é colocado em uma órbita que nem sempre é a órbita ideal para a qual o veículo foi projetado. Dessa maneira, deve-se efetuar uma transferência de órbita para que o veículo possa atingir a órbita final desejada. Mesmo quando o veículo já é injetado na órbita final, existem erros de injeção que, em muitos casos, devem ser corrigidos. Além disto, para ele permanecer nesta órbita, devem ser executadas correções de órbita periódicas para eliminar os efeitos gerados pelas perturbações que agem sobre o veículo. Isto se agrava quando o veículo compõe uma constelação ao invés de estar isolado, pois as suas posições e velocidades em relação a todos os demais são mais relevantes que a sua posição e velocidade absolutas. Estas podem ser corrigidas a mais, totalmente ou a menos para economizar combustível, tempo, número de manobras, etc.

Como exemplos de aplicação destas manobras (de transferência ou de correção) a satélites isolados podemos citar a colocação de um satélite em órbita geoestacionária, a manutenção da órbita de um satélite, o envio de sondas interplanetárias, missões de “rendezvous”, missões de interceptação, etc. Para o Brasil temos importantes aplicações na ocasião do lançamento dos dois satélites de sensoriamento remoto (SSR 1 e SSR 2), que fazem parte da MECB (Missão Espacial Completa Brasileira), e dos dois satélites sino-brasileiros de Recursos Terrestres (“China-Brazil Earth Resources Satellites” CBERS 1 e CBERS 2), também de sensoriamento remoto, que necessitarão de manobras de transferência e de correção de órbita para atingirem e se manterem nas órbitas desejadas.

Como exemplos de aplicação destas manobras (de transferência ou de correção) a constelações podemos citar as manobras de manutenção efetuadas nos satélites das constelações INMARSAT, GLOBALSTAR, NAVSTAR/GPS, que são constelações já

em desenvolvimento e necessitam destas manobras para manter o sistema operando. Além das manobras de manutenção, novos satélites devem ser agregados e, ao mesmo tempo, outros retirados da constelação, pois os satélites tem uma vida útil menor que a constelação, tornando periódicas estas manobras de colocação e retirada de satélites. Podemos também citar o caso de satélites similares operando simultaneamente. Apesar de não formarem uma constelação, a manutenção das órbitas destes satélites é bastante parecida com o caso de constelações, devido à semelhança das missões desempenhadas por eles, como será o caso dos satélites brasileiros SSR 1 e SSR 2; e sino-brasileiros CBERS 1 e CBERS 2. Estes satélites devem ser mantidos como se formassem uma constelação, pois apresentam elementos orbitais semelhantes e desempenham o mesmo tipo de missão; portanto seria vantajoso manter os satélites afastados uns dos outros de forma a não ter dois satélites ao mesmo tempo cobrindo o mesmo ponto da superfície terrestre.

Dessa forma, podemos ver que temos duas manobras básicas possíveis: as transferências de órbita e as correções de órbita. Nelas, freqüentemente, minimizam-se por inúmeros métodos: 1) o combustível gasto (por não ser renovável no espaço); 2) o tempo gasto (por consumir energia das baterias e/ou por ser feita em visibilidade). Contudo, poucos deles consideram 1 e 2 simultaneamente. Para constelações estas manobras podem corrigir as posições e/ou velocidades relativas ou absolutas. E podem corrigi-las totalmente, a mais, ou a menos visando economizar tempo e/ou combustível, número de manobras por satélite e totais, duração e custos do uso dos centros de controle, estações de solo (principais ou auxiliares) durante a vida da constelação e de cada um dos seus satélites. Portanto, pretendemos realizar uma otimização com múltiplos objetivos, que denominamos, otimização multiobjetivo.

## **1.2 - OBJETIVO**

O objetivo deste trabalho é estudar o problema da manutenção orbital (transferências e correções) de constelações simétricas de satélites, com consumo mínimo de combustível, utilizando manobras impulsivas com vínculo de tempo, considerando: manobras com pontos terminais parcialmente livres ou não e dinâmica

kepleriana ou perturbada. Esse vínculo de tempo impõe uma característica nova ao problema, fazendo com que grande parte dos métodos de manobras orbitais existentes na literatura não mais se aplique. Assim sendo, esses métodos devem ser estudados e adaptados a esse novo vínculo. E ainda, devido a natureza multiobjetivo do problema da manutenção orbital de constelações, desenvolver uma metodologia de otimização capaz de considerar múltiplos objetivos simultaneamente.

### **1.3 - MOTIVAÇÃO**

Essa linha de pesquisa é importante, pois em muitas missões existem vínculos dessa natureza. Em certos casos existem vínculos temporais diretos (a manobra tem que ser completada antes de um determinado instante); em outros, esses vínculos podem decorrer de situações como, por exemplo, a necessidade de efetuar uma manobra em visibilidade, que pode ser transformada em um vínculo de tempo.

No caso de constelações de  $n$  satélites temos ainda o problema da otimização das manobras para os  $n$  satélites simultaneamente. Em outras palavras, temos que otimizar as  $n$  manobras simultaneamente utilizando recursos escassos. Como exemplo, podemos citar a situação na qual o Centro de Controle de Satélites do INPE irá enfrentar em breve com o lançamento dos próximos satélites. O INPE dispõe de apenas um centro de controle, mas deveremos controlar vários satélites, o que é uma situação bastante parecida ao caso de constelações de satélites. Dessa forma deve ser adotada uma política adequada para o controle dos  $n$  satélites visando minimizar o consumo de combustível e o tempo despendido pelo centro de controle para a execução de manobras para cada satélite. Assim, podemos ver que o limite de tempo passa a ter importância na solução do problema. Nestes casos, sabemos qual é a forma ótima para manobrar cada satélite individualmente, porém quando consideramos todos os satélites da constelação ao mesmo tempo não é possível determinar a estratégia de manobra ótima que minimiza o gasto de combustível e o tempo para toda constelação. Dessa forma este trabalho pretende formular e estudar estratégias de manobra que, de alguma forma, mesmo sub-ótima, tornem possível obter soluções com o menor gasto de combustível possível considerando todos satélites da constelação.

Quando consideramos que todos os satélites da constelação devem permanecer o mais próximo possível de suas posições nominais, que chamaremos aqui de posições absolutas, devemos manobrá-los periodicamente para eliminar a deriva causada pelas perturbações. Mas, se considerarmos que todos os satélites (no caso de constelações simétricas) sofrem as mesmas perturbações e, portanto, apresentam a mesma deriva, então a posição relativa entre os satélites permanece constante. Assim, a cobertura terrestre permanece praticamente constante, para o caso de pequenas derivas, e dessa forma não é necessário manobrar os satélites. Por outro lado se um dos satélites for manobrado então a posição relativa desse satélite com relação aos outros mudará e assim todos os satélites deverão ser manobrados. Portanto, a decisão de quando manobrar os satélites passa a ter grande importância para o caso de constelações. Além disso, quando as manobras forem realizadas, pode ser mais econômico colocar os satélites um pouco além de suas posições absolutas, pois assim aumentamos o intervalo de tempo entre manobras. Todas estas questões devem ser levadas em conta quando lidamos com constelações de satélites, assim, uma abordagem multiobjetivo torna-se necessária.

A literatura foi pesquisada e os trabalhos publicados que levam em conta esses fatores individualmente são muito poucos. Combinando os fatores podemos encontrar ainda menos trabalhos, mas, por este ser um campo novo e extenso ainda tem muito a ser pesquisado, pois até hoje ainda não sabemos como obter a solução ótima a partir da combinação de duas ou mais políticas ótimas. Sendo assim, esse campo representa um grande potencial a ser explorado, com a possibilidade de aplicação em médio prazo em missões brasileiras e internacionais. Além disso existem alguns poucos centros no mundo onde esse tipo de problema está sendo estudado, portanto existe a possibilidade de intercâmbio com esses centros.

Esse trabalho vem estender às constelações de satélites outros trabalhos de pesquisa, que foram ou vêm sendo, desenvolvidos na Divisão de Mecânica Espacial e Controle – DMC do INPE na área de transferências de órbitas, tais como Prado (1989), Rodrigues (1991), Schulz (1997), Rocco (1997), Santos (1997), Jesus (2000), Souza (2000) e Chiaradia (2002).

De certa forma, já tivemos a oportunidade de expor partes deste trabalho para a apreciação da comunidade científica internacional em duas ocasiões por meio da apresentação dos trabalhos Rocco et al. (2000) no “51<sup>st</sup> International Astronautical Congress” realizado no Rio de Janeiro, e Rocco et al. (2001 e 2002) no AIAA/AAS “Astrodynamics Specialist Conference” realizado em Quebec. Nessas ocasiões foi possível entrar em contato com pesquisadores do mais alto nível, o que foi muito produtivo pois vários deles demonstraram interesse pelo critério de otimização multiobjetivo desenvolvido neste trabalho, em especial os Doutores Paul Cefola e Ronald Proulx, pesquisadores da Divisão de Astrodinâmica do “Charles Stark Draper Laboratory” - CSDL - Cambridge - MA - EUA, que trabalharam com otimização multiobjetivo e orientaram o trabalho de Shah (1997) no “Massachusetts Institute of Technology” – MIT, que utiliza uma constelação de satélites que deve ser controlada (“station-keeping”) por meio de um controle autônomo. A abordagem de Shah (1997) não utilizou uma otimização multiobjetivo, embora o problema seja multiobjetivo. Portanto, a utilização de um critério capaz de ser aplicado em problemas de otimização multiobjetivo despertou muito interesse por parte desses pesquisadores.

#### **1.4 - CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO**

As principais contribuições desse trabalho foram: 1) abordagem (formulação e resolução) do problema de controle de uma constelação de satélites como um problema de otimização multiobjetivo. Essa abordagem foi necessária, pois o problema da manutenção orbital de constelações de satélites é por natureza um problema multiobjetivo; 2) desenvolvimento de uma metodologia de otimização multiobjetivo diferente de todas as metodologias existentes na literatura; 3) utilização de um algoritmo para o cálculo de manobras orbitais com mínimo combustível desenvolvido em Rocco (1997).

A metodologia de otimização multiobjetivo desenvolvida neste trabalho (Critério da Menor Perda) considera todos objetivos igualmente e não reduz o problema ao caso da otimização de apenas um objetivo, como acontece na maioria dos trabalhos. Para ilustrar isso podemos citar um trecho do trabalho de Cohon (1978): “A very active

research area among mathematical programmers is the development of generating techniques that do not depend on the conversion of a multiobjective optimization problem into a single-objective optimization problems. Algorithms have been developed that operate directly on the multiobjective problem. The development of such techniques is a complex and intriguing mathematical problem that is not yet entirely solved.” Portanto, a formulação do problema de controle de uma constelação como um problema multiobjetivo, o desenvolvimento do Critério de Menor Perda e a sua aplicação na resolução do problema, são contribuições originais deste trabalho.

Essa metodologia desenvolvida pode ser aplicada não apenas ao problema da manutenção orbital de uma constelação de satélites mas também a todos os problemas de otimização onde a abordagem multiobjetivo seja necessária, como nas áreas de Engenharia, Economia, Sociologia, Biologia, Medicina e etc. Assim, essa metodologia pode ser muito útil já que a maioria dos problemas reais existentes na Natureza são problemas multiobjetivos. Portanto uma metodologia de otimização como a que foi desenvolvida, é capaz de ser aplicada nas mais diversas áreas do conhecimento humano.

Outra contribuição secundária, mas funcional, deste trabalho, foi a adaptação ao caso coplanar e circular, eliminando as singularidades que surgem neste caso, das equações apresentadas por Eckel e Vinh (1984), que fornecem a manobra de transferência entre duas órbitas terminais.

E ainda, neste trabalho foi desenvolvido e implementado (em linguagem FORTRAN e MATLAB) um programa capaz de simular a manutenção orbital de uma constelação de satélites minimizando: 1) o consumo de combustível para toda constelação; 2) o tempo gasto com manobras; 3) os erros de posicionamento entre os satélites. Para isto, o programa desenvolvido simula a operação e interação entre diversos elementos do controle de missão de uma constelação de satélites, tais como: estação de rastreamento; centro de controle; dinâmica de vôo, etc. Assim, foram desenvolvidas sub-rotinas para determinação de órbita, propagação de órbita, cálculo de transferência de órbita, cálculo do arrasto atmosférico e cálculo do tempo gasto na manobra, entre outras.

## **1.5 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

Este trabalho está dividido em oito Capítulos.

O Capítulo 1 apresentou inicialmente uma breve introdução ao problema da manutenção orbital de constelações de satélites, a seguir apresentou os objetivos e as motivações que levaram ao desenvolvimento deste trabalho. Por fim, as contribuições do trabalho foram citadas.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura relacionada ao problema da manutenção orbital de constelações de satélites.

O Capítulo 3 inicialmente menciona os tipos de constelações de satélites existentes e, a seguir, apresenta e define o problema tratado neste trabalho. O algoritmo utilizado para a solução do problema é apresentado e descrito.

O Capítulo 4 descreve dois métodos utilizados para o cálculo das manobras ótimas de transferência orbital: O Método de Lawden e o Método de Eckel e Vinh.

O Capítulo 5 comenta as metodologias existentes na literatura para otimização multiobjetivo e apresenta exemplos de utilização dessas metodologias.

O Capítulo 6 apresenta o Critério da Menor Perda desenvolvido neste trabalho para otimização de problemas multiobjetivos.

O Capítulo 7 apresenta alguns resultados obtidos por meio da aplicação da metodologia de otimização multiobjetivo desenvolvida neste trabalho, baseada no Critério da Menor Perda.

O Capítulo 8 apresenta as conclusões e algumas sugestões para trabalhos futuros.



## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 2.1 - TRAJETÓRIAS E TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS ÓTIMAS

O primeiro a estudar o problema da trajetória ótima de um veículo espacial foi R. H. Goddard (1919), que propôs soluções ótimas aproximadas para o problema de enviar um foguete a grandes altitudes da forma mais econômica possível. Depois dele, vários pesquisadores contribuíram no desenvolvimento das manobras orbitais ótimas (Gobet e Doll, 1964).

O movimento de um veículo espacial através de um campo gravitacional  $\vec{g}(\vec{r}, t)$  e sujeito à força propulsiva  $\vec{F}$ , é descrito pela equação diferencial abaixo:

$$m(t) \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t) + m(t) \vec{g}(r(t); t) \quad (2.1)$$

onde  $m(t)$  é a massa instantânea do veículo e  $\vec{r}(t)$  o vetor posição.

A força  $\vec{F}$  resulta da ejeção de massa a uma taxa  $q$  dada por:

$$q = -\frac{dm}{dt} \geq 0 \quad (2.2)$$

Sendo  $\vec{W}$  a velocidade de ejeção de massa temos:

$$\vec{F} = q\vec{W} \quad (2.3)$$

Assim, define-se que a transferência de um veículo espacial de uma órbita inicial para uma órbita desejada, consiste (Marec, 1979) em se alterar o estado (posição, velocidade e massa) de um veículo espacial das condições  $\vec{r}_0, \vec{v}_0$  e  $m_0$  no instante  $t_0$  para  $\vec{r}_f, \vec{v}_f$  e  $m_f$  no instante  $t_f$  ( $t_f \geq t_0$ ) usualmente com o menor gasto de combustível ( $m_0 - m_f$ ) possível. A Figura 1 ilustra esta definição.

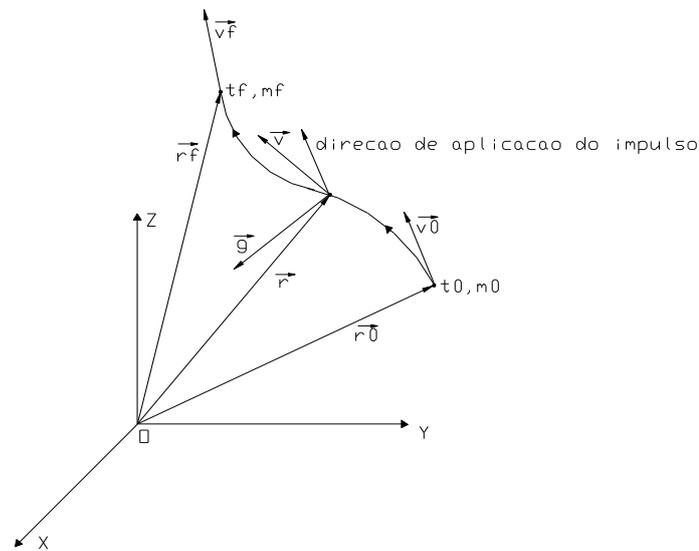


Fig. 2.1 - Transferência de Órbita.

FONTE: modificado de Marec (1979, p. 3).

Podemos ainda classificar as transferências da seguinte forma:

Transferência parcialmente livre: Neste caso pelo menos um dos parâmetros da transferência é livre. Por exemplo: o tempo de execução da manobra é livre; ou deseja-se somente interceptar um corpo celeste, mas sem a necessidade de permanecer junto a ele; etc.

Transferência completamente vinculada: Nesta transferência todos os parâmetros são vinculados, deseja-se que o veículo mude de sua órbita para uma outra órbita específica em um ponto específico desta órbita. Este é o caso de manobras de “rendezvous”, onde um veículo espacial tem o objetivo de encontrar com outro e permanecer ao lado dele.

Quanto aos vínculos dinâmicos podemos apresentar quatro categorias básicas:

Na modelagem com dois corpos temos a presença de um astro massivo e de um veículo espacial de massa desprezível orbitando em torno deste astro. Assume-se os dois corpos envolvidos como pontos materiais e não se considera nenhuma perturbação (de outros corpos ou de outras fontes). Assume-se também, que em todas as fases sem propulsão o veículo descreve uma órbita kepleriana. Este é, sem dúvida, o modelo mais

estudado devido à sua simplicidade, rapidez no fornecimento de resultados, existência de soluções analíticas e boa precisão na maioria das situações. Dessa maneira, esta modelagem é sempre o ponto de partida para uma análise de missão, independente da complexidade da mesma.

Na modelagem com dois corpos perturbados adotamos o modelo matemático do caso anterior e acrescentamos uma ou mais perturbações ao sistema. Como exemplo de perturbações podemos citar o efeito da não esfericidade da Terra, o arrasto atmosférico, a pressão de radiação, a presença de outros corpos, etc. Para este tipo de modelagem não existem soluções analíticas, sendo a integração numérica a ferramenta mais utilizada.

Na modelagem com três corpos considera-se a presença de apenas três corpos que são tratados como pontos materiais. A versão mais adequada à Astronáutica (já que um veículo espacial nunca tem massa planetária) essa modelagem também é conhecida como “problema restrito de três corpos” (Szebehely, 1967) que considera o movimento de um ponto de massa desprezível movendo-se guiado exclusivamente pela força gravitacional gerada pelos outros dois corpos (por exemplo um veículo espacial viajando através do sistema Terra-Lua). Esta modelagem é muito usada para o estudo de trajetórias lunares e interplanetárias, mas possui solução analítica de difícil obtenção, sendo portanto, usualmente solucionada por integração numérica.

Na modelagem com N corpos assume-se a presença de um número arbitrário N de corpos celestes, que são tratados como pontos materiais e geralmente livres de perturbações além daquelas geradas pelos seus próprios campos gravitacionais. Tem como aplicação missões multi-planetárias, como por exemplo as missões Pioneer, Voyager, Cassini, etc. Em geral essa modelagem é utilizada para melhorar resultados obtidos por outra modelagem mais simples.

## **2.2 - TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS COM MÍNIMO CONSUMO DE COMBUSTÍVEL**

A transferência entre órbitas circulares e coplanares foi o primeiro e, por muitos anos, o único problema de transferência orbital estudado. Em 1925, Hohmann obteve a

solução ótima (com mínimo combustível) do problema de transferência de um veículo espacial entre duas órbitas circulares e coplanares em um campo gravitacional newtoniano (que atua com uma lei do inverso do quadrado da distância). A transferência ótima ocorre por meio de uma órbita de transferência elíptica tangente nos apses às órbitas inicial e final. Esta manobra, conhecida como transferência de Hohmann, é uma manobra bi-impulsiva entre duas órbitas circulares e coplanares com tempo livre.

No final da década de 50, Hoelker e Silber (1959 e 1961) e Shternfeld (1959) mostraram que a solução de Hohmann era a solução ótima apenas quando a razão entre os raios das órbitas final e inicial é menor que 11,94. Quando esta razão é maior ou igual a 11,94 a transferência tri-impulsiva (bi-elíptica) é mais econômica. Esta foi a primeira solução multi-impulsiva que obteve um resultado melhor que a transferência bi-impulsiva. Além do mais, foi demonstrado por Haynes (1960) que quatro ou mais impulsos tangentes às órbitas de transferência nunca poderão obter resultados melhores que a transferência bi-elíptica.

Para o caso de transferências bi-impulsivas entre órbitas não coplanares Hoelker e Silber (1959) mostraram que a mudança de plano deve ser dividida entre dois impulsos tangenciais aplicados nos apses. Mas a maior parte desta mudança deve ocorrer no segundo impulso, já que o impulso inicial nunca deve resultar em uma mudança de plano superior a  $6^\circ$ . Esta transferência é conhecida como transferência de Hohmann generalizada.

Já para o caso da transferência tri-impulsiva entre órbitas não coplanares, temos uma extensão da transferência bi-elíptica plana. A mudança de plano é dividida em três partes; dessa forma cada impulso resulta em uma mudança de plano bem como em uma mudança no periapside e no apoapside. Roth (1967) mostrou que as mudanças de plano resultantes do primeiro e do terceiro impulsos devem ser pequenas e nunca exceder a  $5,3^\circ$ . Portanto, se toda mudança de plano fosse efetuada no impulso intermediário teríamos um pequeno valor de  $\Delta v$ .

Quando consideramos o caso da transferência entre órbitas circulares e elípticas coplanares que não se interceptam Horner (1962) mostrou que a transferência ótima

sempre utiliza o maior apoapside. Já quando as órbitas se interceptam, a órbita de transferência conecta a órbita circular ao apoapside da órbita elíptica. Neste caso o primeiro impulso é aplicado na direção do movimento e o segundo impulso é aplicado no sentido contrário ao movimento. A otimalidade dos impulsos tangenciais aplicados nos apsides para o caso coplanar foi confirmada por Moyer (1965) e por Winn (1966), onde se definem as transferências em dois tipos: bi-impulsivas (do tipo Hohmann), e as transferências através do infinito.

De forma diferente do caso da transferência entre órbitas circulares não coplanares, o caso da transferência entre uma órbita circular e outra elíptica não coplanares não é um caso especial da transferência entre órbitas coaxiais, pois a linha dos nodos e o eixo maior das órbitas não são necessariamente coincidentes. Esta complicação torna este caso mais difícil para o tratamento analítico. Dois estudos numéricos de transferências bi-impulsivas foram feitos por Eckel (1963), cada um para um par particular de órbitas. Um estudo detalhado de diferentes casos é encontrado em Brunk (1960), que determinou que a transferência com mínimo impulso não se inicia (ou termina) em um dos apsides, mas a chegada na órbita final deve sempre ocorrer no ponto nodal ou próximo dele. Esta conclusão está de acordo com os resultados obtidos por Eckel (1963). Como era esperado, o  $\Delta v$  aumenta com a inclinação, embora o tamanho e a forma da órbita de transferência não mudem com a variação da inclinação. Tanto o  $\Delta v$  quanto o tempo de transferência diminuem quando a excentricidade da elipse diminui.

Se assumirmos que a transferência será entre órbitas coaxiais coplanares, teremos que a transferência ótima será sempre do tipo de Hohmann, isto é, com impulsos tangenciais aplicados nos apsides. Inicialmente sugeriu-se o cálculo numérico do  $\Delta v$  e a comparação direta para determinar a melhor escolha. Porém, posteriormente, Plimmer (1959) mostrou que quando os eixos são alinhados é sempre melhor usar a órbita de transferência que tem como ponto final o apside mais distante e como ponto inicial o periapside da órbita inicial. A generalização desta transferência foi apresentada por Lawden (1962), que trata do caso de órbitas que se interceptam, desconsiderando a orientação dos eixos. Se os eixos são opostos e as órbitas não se interceptam, nenhuma órbita de transferência pode ser excluída pois, dependendo da excentricidade das

órbitas, os dois tipos de transferência podem apresentar o menor  $\Delta v$ .

Um outro modo de transferência que frequentemente é ótimo para transferências entre órbitas coplanares coaxiais é a transferência através do infinito. Segundo Marchal (1965), são aplicados dois impulsos tangenciais, um no periapside da órbita inicial e outro no apoapside (infinito) da órbita parabólica de transferência. Este segundo impulso tem uma magnitude infinitesimal, pois o veículo se encontra muito longe do centro de atração. Marchal (1965) também determinou condições para prever o modo de transferência ótimo para diversas configurações.

A transferência entre órbitas circulares e hiperbólicas tem recebido considerável atenção devido à sua importância nas manobras de escape e captura. Estas manobras podem utilizar um, dois ou três impulsos. A manobra com dois impulsos foi inicialmente considerada por Oberth (1929); mais tarde foi comparada com a manobra com um único impulso por Lawden (1952) que mostrou que, para valores baixos de  $v_\infty$ , a manobra com um único impulso é superior. Quando  $v_\infty$  é igual à velocidade de escape na órbita circular, as manobras com um e com dois impulsos apresentam o mesmo  $\Delta v$ . Para valores maiores de  $v_\infty$ , a manobra bi-impulsiva é sempre superior à manobra com um único impulso. A manobra tri-impulsiva foi apresentada por Edelbaum (1959) e pode ser melhor tanto em relação à manobra com um único impulso quanto em relação à manobra com dois impulsos, dependendo do raio  $r_i$  que deve ser escolhido o maior possível. Para o caso em que as órbitas não se cruzam e não são tangentes, foi determinado por Munick (1962) que o primeiro impulso deve ser tangente e a órbita de transferência é uma hipérbole que se inicia no periapside. O segundo impulso deve ser aplicado o mais longe possível do foco. No limite, a transferência bi-impulsiva ótima é equivalente à transferência com um único impulso já que o segundo impulso é infinitesimal.

No caso da transferência entre órbitas elípticas e hiperbólicas, Anthony e Sasaki (1963) formularam o problema para um único impulso a partir de uma órbita elíptica com pequena excentricidade para uma órbita hiperbólica coplanar à órbita elíptica. Neste trabalho o  $\Delta v$  é definido como função da excentricidade, de  $v_\infty$  e do ângulo entre

$v_{\infty}$  e o eixo da elipse. O impulso aplicado é praticamente tangencial (no caso de órbita circular o impulso tangencial é ótimo) mas não exatamente no periapside. Já a manobra bi-impulsiva consiste na partida tangencial da órbita elíptica seguida por um ajuste no infinito para colocar o veículo na órbita hiperbólica desejada. Para a maioria dos casos, a transferência com um único impulso é melhor, porém para pequenos excessos de velocidade hiperbólica (velocidade do veículo quando ele atinge o infinito) a transferência bi-impulsiva é melhor.

A grande maioria dos trabalhos sobre transferências orbitais impulsivas concentra-se na minimização do  $\Delta v$  com tempo livre. O problema da transferência orbital com tempo fixo ou a minimização do tempo foi apresentado em alguns poucos trabalhos, como veremos a seguir.

### **2.3 - TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS COM VÍNCULO DE TEMPO**

O problema da minimização do tempo na transferência bi-impulsiva entre órbitas circulares e coplanares com um específico  $\Delta v$  total pode ser encontrado em Lee e Florence (1961) e Wang (1963). O menor  $\Delta v$  necessário é o da transferência de Hohmann, que gasta um determinado tempo de transferência. Para obter um tempo menor a transferência bi-impulsiva requer obrigatoriamente um maior  $\Delta v$ . Baseado neste fato, Wang (1963) afirmou que impulsos aproximadamente radiais resultam em um mínimo tempo de transferência e que os impulsos são praticamente iguais em magnitude.

Vários trabalhos sobre transferências orbitais em tempo mínimo utilizam a teoria do “primer-vector” (a ser definido adiante) desenvolvida por Lawden (1953, 1954). Entre eles, podemos citar os trabalhos mostrados abaixo.

Em Lion e Handelsman (1968), a definição do “primer-vector” foi estendida ao caso de trajetórias não ótimas e ótimas. Nesse trabalho, foram desenvolvidos testes para avaliar o quanto uma dada trajetória pode ser melhorada por meio da aplicação de mais um impulso. Em Jezewski e Rozendaal (1968), uma nova técnica para calcular trajetórias de transferências ótimas foi mostrada. O método desenvolvido determina a

solução N-impulsiva ótima com tempo fixo, usando a teoria do “primer-vector” para determinar o número de impulsos e o vetor de estado do veículo espacial nos impulsos correspondentes. Já em Prussing (1969, 1970), as manobras de “rendezvous” com mínimo consumo de combustível e múltiplos impulsos foram estudadas para o caso onde o tempo gasto na transferência é especificado. O método desenvolvido foi aplicado em manobras de “rendezvous” ou em transferências orbitais entre órbitas elípticas com baixa excentricidade. Nesse método a solução ótima foi obtida satisfazendo as condições necessárias para o “primer-vector”. Assumiu-se que as órbitas são suficientemente próximas de uma órbita circular de referência o que permite descrever a transferência por meio de equações lineares de movimento. Gross e Prussing (1974), apresentaram um estudo para manobras impulsivas com mínimo consumo de combustível e tempo fixo, onde o veículo parte da superfície do planeta. Mostrou-se que para certos casos a transferência tri-impulsiva é mais econômica que a bi-impulsiva. Em Ivashkin e Skorokhodov (1981), um algoritmo numérico foi desenvolvido para determinar a trajetória ótima com vínculo de tempo para o caso da transferência tri-impulsiva, tomando como primeira aproximação a trajetória tri-impulsiva ótima com tempo livre mas com limitação para a distância do veículo ao planeta. Em Eckel (1982), a teoria do “primer-vector” foi aplicada para resolver o problema da transferência impulsiva ótima não coplanar com um número arbitrário de impulsos, para o caso de transferências orbitais com vínculo de tempo ou para o caso de manobras de “rendezvous”. A solução foi obtida por meio de um conjunto formado por  $m$  equações onde  $m$  é igual ao grau de liberdade do problema. Em Eckel e Vinh (1984), a teoria de máximos e mínimos foi aplicada para obter as condições ótimas para o problema da transferência orbital bi-impulsiva não coplanar entre órbitas elípticas com tempo fixo. Foi mostrado que todos os elementos da transferência podem ser expressos em termos de três variáveis: o semi-latus rectum da órbita de transferência e as anomalias verdadeiras dos pontos de aplicação dos impulsos medidas com relação às órbitas inicial e final. Em termos destas três variáveis, o problema pode ser resolvido para o caso de mínimo consumo de combustível e tempo fixo e para o caso de mínimo tempo e consumo de combustível fixo. Em Prussing e Chiu (1986), foi apresentado um estudo para manobras de “rendezvous” entre órbitas circulares utilizando múltiplos impulsos,

mínimo consumo de combustível e tempo fixo. O caso coplanar e uma classe restrita de casos não coplanares foram analisados. Lawden (1993), apresentou um método para encontrar a solução ótima para o problema da transferência orbital impulsiva entre órbitas elípticas coplanares com vínculo de tempo. O método considera ainda, as posições para o início e para o final da manobra (pontos terminais), dessa forma, podemos ter o caso em que o veículo espacial percorre um arco na órbita inicial, antes de ser aplicado o primeiro impulso, e um outro na órbita final, após a aplicação do segundo impulso. Utilizou-se a teoria do “primer-vector” para obter as condições necessárias para otimalidade resultando em um sistema de equações cuja solução fornece os instantes de aplicação dos impulsos, a magnitude dos impulsos e os elementos keplerianos da órbita de transferência. Em Taur et al. (1995), foram obtidas soluções para o problema das manobras de “rendezvous” e das manobras de interceptação para o caso impulsivo de mínimo consumo de combustível com tempo fixo mas com vínculo de posição. A teoria do “primer-vector” foi estendida a este caso de forma a capacitar o método a fornecer o número ótimo de impulsos, os instantes e as posições de aplicação desses impulsos.

## **2.4 - CONSTELAÇÕES DE SATÉLITES**

Outro tópico que nas últimas décadas tem recebido atenção é das constelações de satélites. Geralmente estuda-se o problema da minimização do número de satélites necessários para obter uma cobertura global ou zonal e ainda o controle de órbita que deve ser empregado para controlar a constelação, como veremos a seguir.

Gobet (1963) tratou do problema de uma constelação de satélites posicionados de tal forma que pelo menos um satélite seja visível a partir de qualquer ponto da superfície da Terra, utilizando o menor número possível de satélites. Easton e Brescia (1969) estudaram o mesmo problema mas considerando mais de um satélite visível simultaneamente. Nos trabalhos de Walker (1970, 1971, 1973, 1977, 1978, 1982), Mozhaev (1972, 1973) e Ballard (1980), buscou-se encontrar constelações de satélites com órbitas circulares de mesma altitude que propiciem uma cobertura de toda a superfície terrestre. As soluções encontradas por eles utilizaram constelações com cinco

a vinte e um satélites, com órbitas em um arranjo onde todos os planos orbitais são simétricos em relação ao eixo polar, resultando em uma cobertura global. Já Adams e Rider (1987) estudaram constelações de satélites utilizando órbitas polares, tanto para o caso de cobertura global quanto para o caso de cobertura contínua de apenas um hemisfério. Eles desenvolveram constelações com seis a mil satélites em órbitas polares circulares. Draim (1985) apresentou uma solução para o problema da cobertura global ou parcial utilizando órbitas elípticas. Ele mostrou que quatro satélites com órbitas elípticas podem fornecer uma cobertura global enquanto que quatro satélites em órbitas circulares não podem; e que três satélites com órbitas elípticas podem fornecer uma cobertura contínua de apenas um hemisfério. Em Lang (1987), um método que utiliza o cálculo do tempo entre duas passagens consecutivas sobre um mesmo ponto da superfície terrestre foi usado para desenvolver uma constelação simétrica de satélites com órbitas circulares. Em Lamy e Pascal (1993), encontramos um estudo de uma estratégia de manutenção de órbita de uma constelação de satélites. Ela consiste em controlar a posição relativa entre os satélites ao invés de controlar a posição absoluta de cada satélite individualmente. Já Königsmann et al. (1996), apresentaram um estudo de um sistema autônomo para o controle de órbita de uma constelação. Perrota et al. (1997) descreveram uma constelação de satélites para um sistema de navegação. Em Kluever e Tanck (1997) encontramos um estudo do controle de órbita utilizando um sistema autônomo com propulsores elétricos de magnitude constante. Draim e Castiel (1997) descreveram o sistema de comunicação ELLIPSO, que foi desenvolvido para operar com telefonia celular usando uma constelação de satélites com órbitas circulares e elípticas. No trabalho de Shah et al. (1997) temos um estudo de um sistema de controle de órbita aplicado à análise de constelações do tipo ELLIPSO. Eles utilizaram uma rede de computadores para simular a constelação e a estação de rastreamento e testar um “software” de manutenção de órbita. George (1997) utilizou um algoritmo genético para obter constelações com cobertura descontínua analisando o máximo tempo entre duas passagens consecutivas sobre um mesmo ponto e o tipo de cobertura para quatro, cinco e seis satélites. Ulivieri et al. (1997) descreveram o uso das Constelações Homogêneas Uniformemente Fasadas (“Uniformly Phased Homogeneous Constellations” - UPHC) que utiliza pequenos satélites de sensoriamento remoto para garantir uma cobertura de

uma determinada zona de interesse. Kantsiper e Weiss (1997) apresentaram uma forma alternativa, mais rápida que a forma convencional, de calcular a porcentagem de cobertura de uma constelação de satélites. Em Folta et al. (1998), foi apresentado um método de controle para a manutenção de órbita de constelações e formações de satélites que utiliza um controle autônomo de navegação em três eixos em malha fechada. Em Ely et al. (1998), uma metodologia para aplicação de um algoritmo genético na seleção de órbitas para constelações com cobertura zonal foi mostrado. Castronuovo et al. (1998) consideraram pequenos satélites em órbitas multi-síncronas que oferecem uma cobertura contínua de regiões tropicais. O comportamento dinâmico da constelação foi simulado para poder analisar a configuração da constelação e a evolução da área de cobertura quando são considerados os efeitos das perturbações agindo na constelação. Em Concha e DeFanzio (1998) foram apresentados estudos com relação à constelação de satélites NANOSAT para o desenvolvimento, determinação de órbita e análise de erros. Foi mostrado ainda, um estudo preliminar que determinou os parâmetros orbitais que respeitam os limites de tempo na sombra e propiciam um adequado rastreamento por meio de três estações de rastreamento. Brochet et al. (1998) apresentaram vários modelos de otimização para o problema da manutenção de órbita e reposicionamento de constelações de satélites. Neste trabalho, a otimização consiste em minimizar o consumo individual de combustível, o que leva em consideração a trajetória de cada satélite e sua posição. Outro vínculo considerado, é o limite no número de satélites que podem ser controlados simultaneamente. Em Kechichian (1998), a dinâmica e o controle de órbita de uma constelação com cinco satélites geosíncronos com plano orbital inclinado foram analisados. Estratégias de manutenção de órbita que confinam cada satélite em uma banda predefinida foram desenvolvidas usando uma solução analítica aproximada bem como soluções mais exatas obtidas por meio de integrações numéricas. Brousse et al. (1998) apresentaram os resultados de um estudo feito para a manutenção de órbita da constelação de satélites SkyBridge desenvolvida pela empresa Alcatel em parceria com o CNES. O primeiro passo do trabalho consistiu em provar a possibilidade de atingir as severas restrições no controle de órbita dos satélites. Assim, inicialmente, definiu-se as órbitas dos satélites. Feito isto, foi possível detalhar as perturbações nas órbitas reais e definir o tipo de controle de

órbita a ser empregado. A última parte do trabalho consistiu em analisar qual seria a melhor estratégia a ser adotada com relação à robustez do controle e à carga de trabalho das estações de rastreamento. Agnèse e Brousse (1998) descreveram algumas técnicas de otimização na solução de problemas de sincronização que surgem na escolha das janelas de visibilidade dos satélites de uma constelação quando dispomos de apenas um conjunto de antenas sendo que cada antena pode acompanhar apenas um satélite por vez e necessita de um certo tempo de reconfiguração para poder rastrear outro satélite.

A maioria desses métodos considera o controle aplicado como consistindo de impulsos que alteram a velocidade do veículo espacial instantaneamente. Uma outra possibilidade existente na literatura é a de considerar o controle como sendo uma força de magnitude finita e aplicada durante um intervalo finito de tempo. Dentro desse modelo, existem diversos tipos de soluções, que serão descritas a seguir.

## 2.5 - MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO INDIRETOS

Uma opção para a propulsão em pesquisas de trajetórias é o de considerar o empuxo aplicado no veículo espacial como finito e contínuo. Isso significa que uma força finita é aplicada durante um intervalo finito e não nulo de tempo; e que é necessário integrá-la ao longo do tempo para conhecer os seus efeitos. Existem muitos resultados na literatura, começando com os trabalhos de Tsien (1953) e Lawden (1955). Uma coleção de resultados e referências pode ser obtida em Prado (1989) e Prado e Rios-Neto (1993). O método mais usado nesse modelo é a chamada "teoria do primer-vector" e foi desenvolvida por Lawden (1953, 1954). Para mostrá-la brevemente, definimos o estado do veículo como sendo posição ( $\vec{r}$ ), velocidade ( $\vec{v}$ ) e velocidade característica ( $c = \int \Gamma dt$ , onde  $\Gamma$  é a aceleração causada pelo atuador), que substitui a massa. As equações de movimento ficam então:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} \quad (2.4a)$$

$$\dot{\vec{v}} = -\frac{\mu \vec{r}}{r^3} + \vec{\Gamma} \quad (2.4b)$$

$$\dot{c} = \Gamma \quad (2.4c)$$

onde  $\mu$  é a constante gravitacional.

As condições necessárias de primeira ordem do problema de controle ótimo associado são dadas pela Hamiltoniana:

$$H = \mathbf{p}^T \mathbf{f}^T = \mathbf{p}_r^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \left( \Gamma - \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} \right) + p_c \Gamma, \quad (2.5)$$

sendo que  $\Gamma^* = \Gamma_{\max}(c) \cdot U(p_v + p_c)$  para o empuxo ótimo (Princípio de Máximo de Pontryagin), onde:  $U(x) = (1 + \text{sign}(x))/2$  é 1 se  $p_v + p_c > 0$  e 0 se  $p_v + p_c < 0$ .

Essas equações formulam o controle do tipo "bang-bang", que consiste em alternar arcos de máximo empuxo com arcos balísticos, dependendo do sinal de  $p_v + p_c$ . É então necessário estudar as equações adjuntas, que são:

$$\dot{\mathbf{p}}_r = - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \right)^T = - (\mathbf{p}_v \mathbf{G})^T \quad (2.6a)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_v = - \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} \right)^T = - \mathbf{p}_r \quad (2.6b)$$

$$\dot{p}_c = - \frac{\partial H}{\partial c} = - \left( \frac{\Gamma^*}{W} \right) (p_v + p_c) \quad (2.6c)$$

onde  $\mathbf{G}$  é o tensor gradiente de gravidade ( $\partial \bar{\mathbf{g}} / \partial \bar{\mathbf{r}}$ ),  $\bar{\mathbf{g}}$  é a aceleração da gravidade e  $\bar{\mathbf{v}}$  a velocidade de ejeção dos gases dos propulsores.

As duas primeiras equações podem ser combinadas em  $\ddot{\mathbf{p}}_v = (\mathbf{p}_v \mathbf{G})^T$ , onde  $\bar{\mathbf{p}}_v$  (é o multiplicador de Lagrange associado à velocidade) é o chamado "primer-vector". O problema fica então reduzido a integração das equações adjuntas para verificar o sinal de  $p_v + p_c$  em cada instante. Mais detalhes sobre esse tópico podem ser encontrados em Marec (1979). Um exemplo numérico desse método, aplicado em uma transferência Terra-Lua, está disponível em Prado (1990).

A teoria do "primer-vector" também é usada para o estudo de manobras impulsivas,

conforme pode ser visto em Marec (1979). Esse método é válido tanto para manobras coplanares quanto para manobras em três dimensões.

## **2.6 - MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO DIRETOS (SUB-ÓTIMOS)**

É possível o emprego de métodos de busca direta para estudar o problema de transferências com empuxo contínuo. Para isso uma opção é parametrizar a função de controle (força aplicada em cada instante) de alguma forma. Um exemplo simples dessa abordagem é assumir um empuxo de magnitude constante e com uma forma linear para as direções de queima, do tipo  $\alpha = \alpha_0 + \alpha'(s - s_0)$  e  $\beta = \beta_0 + \beta'(s - s_0)$  onde  $\alpha$  é o ângulo de arfagem ("pitch": ângulo entre a direção do empuxo e a perpendicular ao raio vetor do veículo espacial),  $\beta$  é o ângulo de guinada ("yaw": ângulo entre a direção de empuxo e o plano orbital),  $\alpha_0, \alpha', \beta_0, \beta'$  são constantes a serem determinadas pelo processo de otimização,  $s$  é o ângulo entre o raio vetor e uma linha adotada como referência e  $s_0$  o valor de  $s$  em  $t = 0$ . O problema agora fica transformado na busca de parâmetros que satisfaçam as condições terminais e que minimizem um funcional que representa o combustível gasto na manobra. Um bom exemplo do uso dessa técnica está em Biggs (1978). Esse método é conhecido como "abordagem sub-ótima" do problema, pois ao invés de buscar a melhor função de controle que resolve o problema, busca-se a melhor das retas (ou outra forma parametrizada qualquer). Essa técnica fornece excelentes resultados, porque gera resultados rapidamente e é de fácil implementação com relação ao "hardware" e com consumo de combustível muito próximo do obtido pelo método ótimo, conforme documentado em Prado (1989).

## **2.7 - MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO HÍBRIDOS**

Existem métodos de otimização chamados de híbridos por apresentarem uma característica mista entre os diretos e os indiretos. Nesses métodos, as condições necessárias de primeira ordem do problema de controle ótimo associado são escritas e a sua solução é obtida através de uma busca direta de parâmetros. Um bom exemplo é o método proposto por Biggs (1978). Ele considera o problema de minimizar o combustível gasto em uma transferência de órbitas executada com um motor que

fornece um empuxo de magnitude constante e cujo controle são os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  definidos anteriormente. Para isso define-se o estado do veículo como um vetor  $\vec{X}$  de nove componentes (alguns redundantes) livres de singularidades. O problema de controle ótimo associado fica então sendo:

$$\text{Máx } J(\cdot) = m(t_f) - m(t_0) \quad (2.7)$$

onde  $m(t_f)$  é a massa final do veículo e  $m(t_0)$  é massa inicial do veículo.

Sujeito aos vínculos dinâmicos:

$$\dot{X}_i = f_i(\vec{X}, s, \alpha, \beta), \quad i = 1, \dots, 9 \quad (2.8)$$

e aos vínculos dados pelas condições de contorno:

$$V_j(\vec{X}(s_f)) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

onde  $s$  é o ângulo entre o raio vetor e uma linha de referência arbitrária.

Para a solucionar esse problema, escreve-se a função Hamiltoniana:

$$H = \sum_{j=1}^9 p_j f_j, \quad i = 1, \dots, 9 \quad (2.10)$$

obtêm-se as equações adjuntas:

$$\frac{dp_i}{ds} = - \sum_{j=1}^9 p_j \frac{\partial f_j}{\partial X_i}, \quad i = 1, \dots, 9 \quad (2.11)$$

e a seguir as equações de transversalidade:

$$p_i(s_f) = \frac{\partial J}{\partial X_f} + \bar{\lambda} \left( \frac{\partial V}{\partial X_f} \right) \quad (2.12)$$

onde  $\bar{\lambda}$  é o multiplicador de Lagrange associado aos vínculos.

O Princípio de Máximo de Pontryagin exige para  $\forall t \in [t_0; t_f]$  :

$$\text{MAX}_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^9 p_i \cdot f_i = p_i^*(t) f_i(\vec{X}^*(t), s^*(t), \alpha^*(t), \beta^*(t)) \quad (2.13)$$

Com isso o procedimento para a solução do problema passa a ser: 1) Escolher valores iniciais para  $s_0, s_f, p_i(s_0)$ ; 2) Integrar as equações de movimento e as adjuntas simultaneamente, obtendo os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  em cada instante pelo Princípio de Máximo de Pontryagin; 3) No final da manobra verifica-se a satisfação ou não dos vínculos. Caso os vínculos não sejam satisfeitos, deve-se alterar os valores escolhidos no passo 1 através de algum método numérico, como, por exemplo, o método da projeção do gradiente. Esses passos devem ser repetidos até que exista uma satisfação dos vínculos pedidos, dentro de uma tolerância especificada. É possível efetuar essa manobra com o uso de um número maior de arcos com propulsão e/ou com vínculos no atuador e/ou no estado. Uma aplicação desse método, estudando todas essas possibilidades, pode ser encontrada em Prado (1989).

Mais recentemente foram, ou vêm sendo, desenvolvidos na Divisão de Mecânica Espacial e Controle do INPE, trabalhos relacionados diretamente com o objetivo deste trabalho. Em Schulz (1997), o problema da transferência bi-impulsiva ótima de um veículo espacial entre duas órbitas elípticas não coplanares dadas foi resolvido para dois casos: 1) considerando uma dinâmica kepleriana; e 2) considerando uma dinâmica não kepleriana, sendo que neste último caso o problema foi resolvido transformando-o no Problema de Valor de Contorno em Dois Pontos (“Two Point Boundary Value Problem” TPBVP). Em Rocco (1997) o problema da transferência orbital com mínimo consumo de combustível, mas com limite de tempo para essa transferência foi estudado e resolvido, estendendo-se os métodos apresentados em Lawden (1993) e Eckel e Vinh (1984). O método de Lawden fornece a solução algébrica completa para o caso da transferência bi-impulsiva coplanar, com os dois pontos terminais fixos mas com qualquer posição relativa das órbitas. Já o método de Eckel e Vinh fornece a solução algébrica parcial para o caso da transferência bi-impulsiva não coplanar, com os dois pontos terminais livres, mas com uma única posição relativa das órbitas. Porém, tanto Lawden quanto Eckel e Vinh não apresentaram a resolução numérica dos métodos desenvolvidos por eles e nem estudaram os vários casos possíveis do problema em questão: pontos terminais livres ou outras posições relativas das órbitas. A extensão dos métodos a estes casos, a sua implementação e solução numérica de todos os casos

possíveis, são contribuições do trabalho de Rocco (1997). Outros dois trabalhos relacionados são Santos (1997) e Jesus (2000). Em Santos (1997) temos o estudo da influência dos erros dos propulsores em manobras tridimensionais ótimas considerando o caso impulsivo com tempo livre. Em Jesus (2000) temos o estudo da influência dos erros dos propulsores em manobras ótimas considerando o caso de empuxo contínuo e tempo livre.

## **2.8 - MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVOS**

A otimização multiobjetivo consiste na busca de soluções ótimas para um problema onde deseja-se otimizar pelo menos dois objetivos conflitantes. Neste caso, a medida que otimizamos um objetivo, deixamos de otimizar o outro. Problemas multiobjetivo podem ser encontrados em praticamente todas as áreas do conhecimento humano, pois os problemas do mundo real são em sua maioria problemas multiobjetivo. Entretanto, não é possível lidar com problemas deste tipo utilizando os métodos de otimização clássicos citados anteriormente.

Os principais métodos de otimização utilizados até hoje na tomada de decisão de problemas multiobjetivos podem ser encontrados em Cohon (1978). O desenvolvimento de métodos multiobjetivos ocorreu, principalmente, nas seguintes áreas: Economia; Sociologia; Psicologia; e Pesquisa Operacional.

Na Economia e na Sociologia a análise de problemas multiobjetivos iniciou-se com Pareto (1896, 1906, 1909 e 1916) que definiu a satisfação econômica (“welfare economic”) como um problema multiobjetivo e desenvolveu uma metodologia para resolvê-lo e, posteriormente, com Bentham (1948) que definiu a satisfação social como sendo um problema multiobjetivo semelhante ao definido por Pareto (1909). Koopmans (1951) estudou a forma mais eficiente para a alocação de recursos. Mais tarde, Marglin (1962, 1967) e Major (1969) usaram uma abordagem multiobjetivo como alternativa para a análise de custo/benefício para investimento no setor público aplicando um critério de combinação de objetivos por meio de fatores de Influência (“Weighting Method”). Marglin (1967) aplicou, ainda, um critério utilizando objetivos vinculados (“The Constraint Method”).

Na Psicologia podemos encontrar o trabalho de Torgerson (1958) que analisa o mecanismo de escolha de um indivíduo a partir de um conjunto multi-dimensional de alternativas.

Na Pesquisa Operacional destacamos o trabalho de Kuhn e Tucker (1951) que permitiu o desenvolvimento de algoritmos de Programação Matemática. Com base nele Gass e Saaty (1955) desenvolveram uma forma aplicável aos problemas de programação multiobjetivo.

Porém, o desenvolvimento de métodos para lidar com problemas multiobjetivos também ocorreu, em outras áreas: Charnes e Cooper (1961) apresentaram o método da Programação Objetiva (“Goal Programming”). Holl (1973), Evans e Steuer (1973) e Zeleny (1974) desenvolveram o método Simplex Multiobjetivo. Haurie (1973) aplicou o conceito de otimalidade de Pareto para gerar uma nova definição de otimalidade em jogos, onde é possível a coalizão de jogadores. Yu (1973) e Zeleny (1974) utilizaram um método baseado em definições geométricas com relação a uma solução ideal para resolver problemas multiobjetivos. Haimes e Hall (1974) e Haimes et al. (1975) aplicaram um método baseado em aproximações locais (“The Surrogate Worth Tradeoff Method”) no planejamento de recursos hídricos. Cohon et al. (1973) desenvolveram um método que utiliza a estimação de um conjunto de soluções *não inferiores* (“The Noninferior Set Estimation Method”) baseado na definição de solução *não dominada* apresentada por Pareto (1909).

Mais recentemente podemos encontrar trabalhos, onde basicamente temos aplicações dos conceitos de otimização multiobjetivo apresentados nos trabalhos citados anteriormente, com pequenas variações ou extensões: Verkama et al. (1994), Hamacher e Nickel (1996), Marett e Wright (1996), Henig e Buchanan (1996), Murata et al. (1996), Osyczka e Kundu (1996), Tian (1996), Vorob’ev (1996), Metev e Markova (1997), Balasko (1997), Marks (1997), Galperin (1997), Daniilidis et al. (1997), Aragone e Gonzalez (1997), Rangan e Poolla (1997), Janiak (1998), Hapke et al. (1998), Yu e Yuan (1998), Höffler (1999), Tamiz et al. (1999), Barbanel (1999), Jaszkievicz e Slowinski (1999), Zhou e Gen (1999), Jaszkievicz e Ferhat (1999),

Pietrzak (1999), Sprumont (2000), Ergin (2000), Mishra (2000), Viana e Sousa (2000) e Ding (2000).

A relação e a utilidade das referências revisadas neste Capítulo com este trabalho serão mostradas e detalhadas nos Capítulos 3, 4 e 5.



### CAPÍTULO 3

## MANUTENÇÃO ORBITAL DE CONSTELAÇÕES DE SATÉLITES

Conforme já citado anteriormente, este trabalho pretende estudar o problema da manutenção orbital de constelações de satélites com consumo mínimo de combustível e com limite de tempo para que as manobras sejam realizadas. Este problema é muito pouco abordado na literatura, e sempre com modelagens simplificadas demais em termos de dinâmica e sistema de controle. Ele já foi abordado para um satélite isolado ( $n = 1$ ) em Rocco (1997), onde aplicaram-se os métodos de Lawden (1993) e de Eckel e Vinh (1984) no problema da manobra orbital ótima com limite de tempo. No caso de constelações temos que abordar  $n$  satélites ( $n > 1$ ), se possível aplicando e estendendo tais métodos; e no caso do Brasil, utilizando recursos escassos, ou seja temos um único Centro de Controle de Satélites (CCS) e duas antenas de rastreamento (Cuiabá e Alcântara), sendo que cada antena pode rastrear apenas um satélite por vez e ainda necessita de um certo tempo de reconfiguração para poder rastrear outro satélite. Como os satélites precisam ser rastreados e controlados seqüencialmente e periodicamente o problema transforma-se, inicialmente, em manobrar cada um dos satélites da constelação, quando em visibilidade, da forma mais econômica e rápida possível, reduzindo os desvios relativos de posição entre todos os satélites.

Podemos definir constelação de satélites como sendo um conjunto de satélites que realiza uma determinada missão. O exemplo mais conhecido é o Sistema de Posicionamento Global NAVSTAR/GPS (“Global Positioning System”), que é composto por um conjunto simétrico de 24 satélites, a aproximadamente 20.121,861 km de altitude, que enviam sinais de forma que um receptor possa determinar sua posição precisa, utilizando para isso as posições de três ou mais satélites GPS. O método de determinação da posição necessita que o receptor obtenha simultaneamente sinais de vários satélites; assim, somente uma constelação é capaz de realizar este tipo de missão instantaneamente.

### 3.1 - TIPOS DE CONSTELAÇÕES DE SATÉLITES

Geralmente, as constelações são desenvolvidas de forma que seja possível obter as seguintes formas de cobertura terrestre: global contínua, zonal contínua, contínua regional ou parcial com revisitação (Figura 3.1).

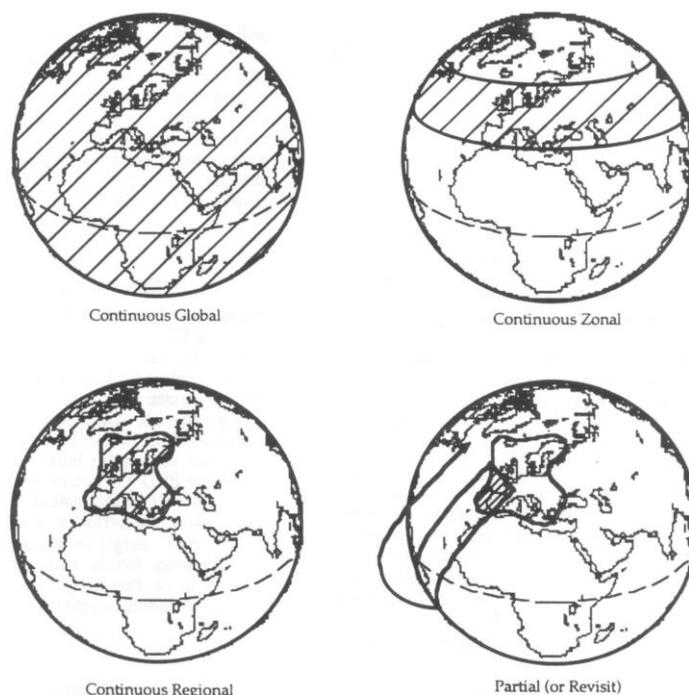


Fig. 3.1 – Tipos de cobertura terrestre.  
FONTE: Matossian (1997).

Quanto à geometria, ou distribuição dos satélites em torno da Terra, as constelações podem ser dos seguintes tipos:

- Geossíncrona;
- Polar;
- Elipso;
- Molniya;
- Poliedro;
- Rosette.

#### 3.1.1 - CONSTELAÇÕES GEOSSÍNCRONAS

Por definição, o período de uma órbita geossíncrona deve ser comensurável com o período necessário para a Terra executar uma volta em torno de seu eixo de rotação. Particularmente, quando esses períodos estiverem na razão de 1:1 um satélite em órbita circular equatorial geossíncrona também pode ser chamado de geostacionário, pois

permanece parado com relação a um ponto na superfície do planeta. Na Figura 3.2, podemos ver que bastam apenas três destes satélites para obter uma cobertura global.

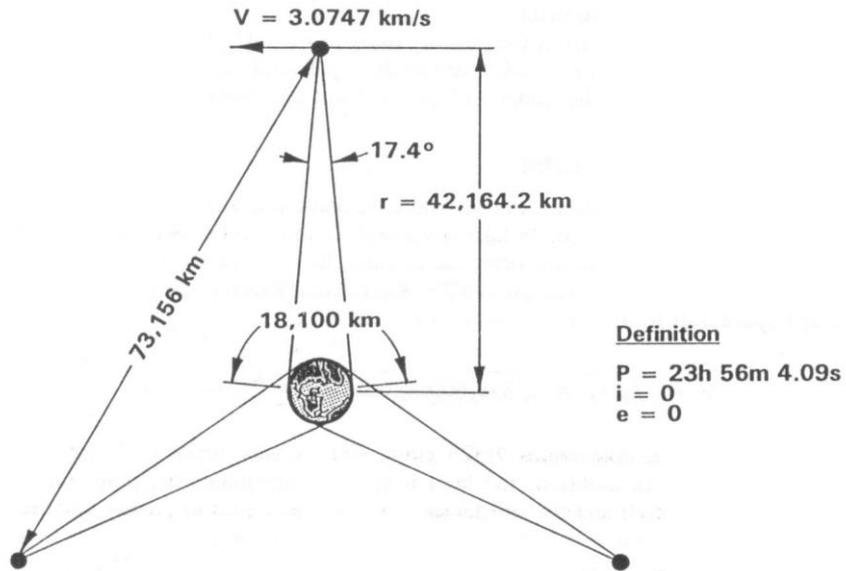


Fig. 3.2 – Constelação de satélites geossíncronos (geoestacionários).  
 FONTE: Brown (1992).

### 3.1.2 - CONSTELAÇÕES POLARES

As constelações do tipo polar são formadas por várias órbitas que se interceptam em dois pontos afastados de 180 graus. Devido às perturbações do potencial gravitacional terrestre estes pontos estão normalmente sobre os pólos, pois assim anula-se a deriva na longitude do nodo ascendente (Figura 3.3).

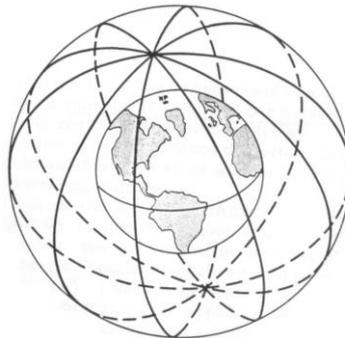


Fig. 3.3 - Constelação de satélites com órbitas polares.  
 FONTE: Gobetz (1963).

### 3.1.3 - CONSTELAÇÕES DO TIPO ELLIPSO

Este tipo de constelação foi desenvolvido por Castiel, Draim e Brosius (1996) com o objetivo de fornecer maior cobertura das regiões do planeta de maior demanda em termos de telecomunicações. A constelação é composta por duas órbitas elípticas hélio-síncronas congeladas com 5 satélites cada, chamadas de Borealis, e uma órbita circular equatorial com 7 satélites, chamada de Concordia (Figura 3.4).

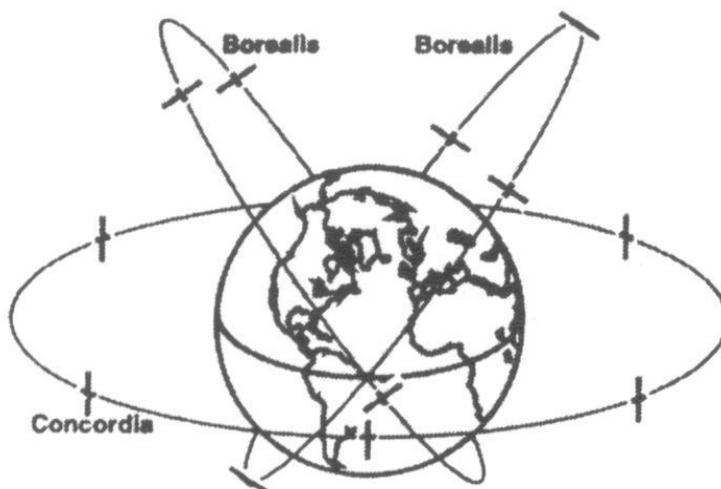


Fig. 3.4 - Constelação de satélites do tipo Elipso.  
FONTE: Shah et al. (1997).

### 3.1.4 - CONSTELAÇÕES DO TIPO MOLNIYA

As órbitas Molniya foram desenvolvidas na antiga União Soviética com o objetivo de propiciar cobertura do hemisfério norte da Terra a um custo mais baixo com relação a utilização de satélites geostacionários. Os satélites deste tipo de constelação descrevem órbitas bastante excêntricas ( $e = 0,73$ ), com semi-eixo maior da ordem de 26562 km, período de 12 h e inclinação crítica ( $i = 63,4^\circ$ ), com o apogeu sobre o hemisfério norte e perigeu sobre o hemisfério sul da Terra. Dessa forma, os satélites passam a maior parte do tempo (aproximadamente 8h para cada órbita) sobre o hemisfério norte, como pode ser visto na Figura 3.5. Assim, uma constelação com apenas três satélites é capaz de efetuar uma cobertura contínua desse hemisfério.

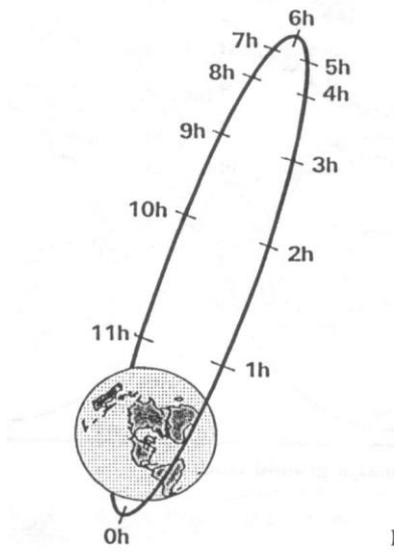


Fig. 3.5 – Órbita do tipo Molniya.  
 FONTE: Brown (1992).

### 3.1.5 - CONSTELAÇÕES DO TIPO POLIEDRO

As constelações de satélites do tipo poliedro são constituídas por satélites dispostos nos centros das faces de um poliedro regular (Figura 3.6).

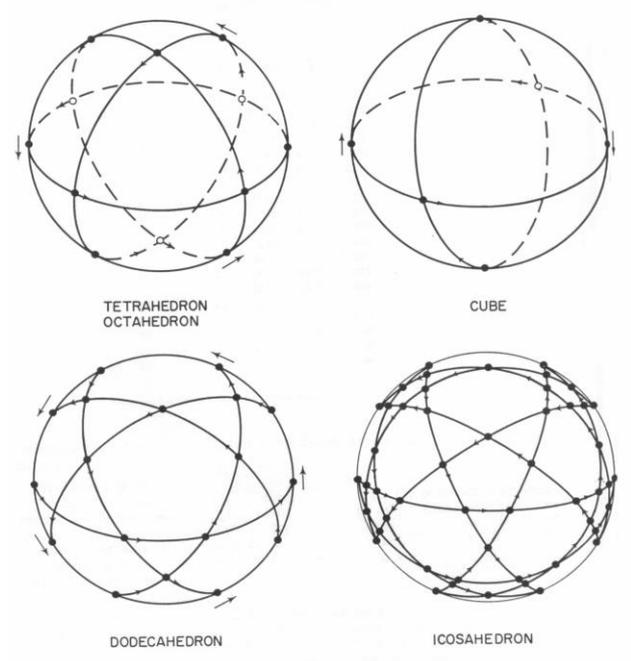


Fig. 3.6 – Constelações do tipo Poliedro.  
 FONTE: Gobetz (1963).



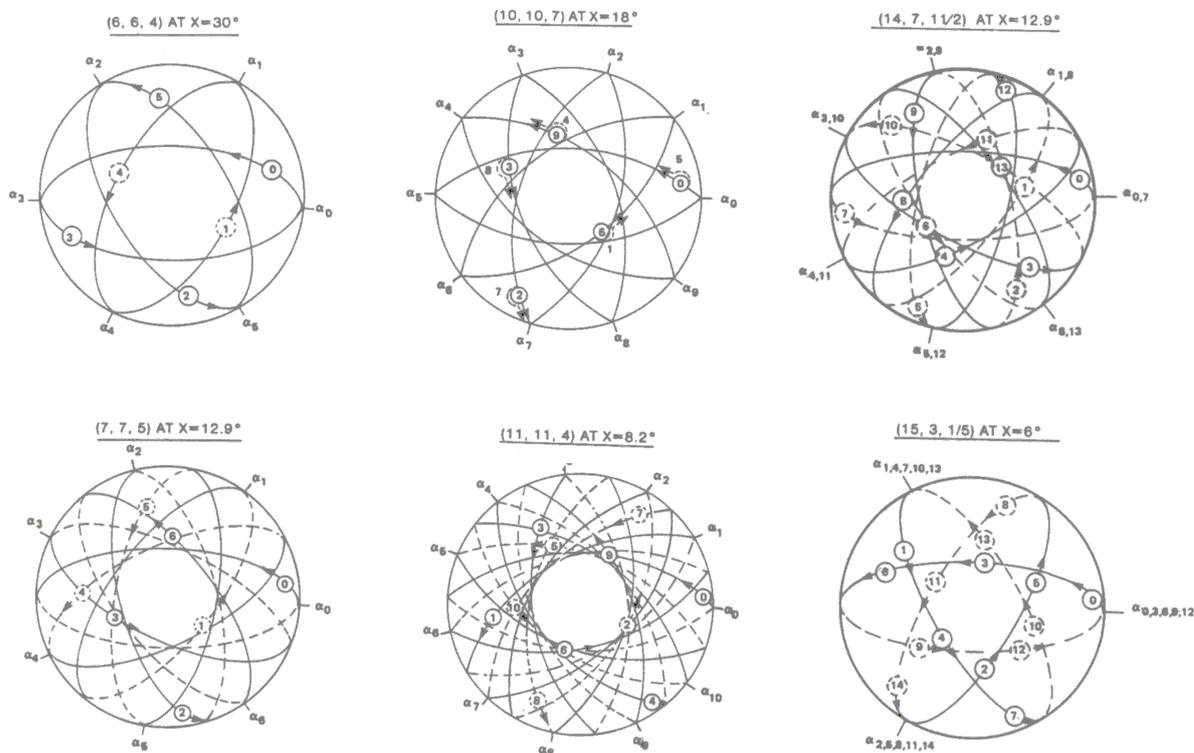


Fig. 3.8 – Constelações do tipo Rosette.  
 FONTE: Ballard (1980).

Neste trabalho, consideramos constelações simétricas de satélites do tipo Rosette.

### 3.2 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E SOLUÇÕES EXISTENTES NA LITERATURA

O problema pode ser definido originalmente como o de encontrar uma forma de controle que, aplicado a uma constelação de satélites, seja capaz de controlar os  $n > 1$  satélites e faça com que estes se desloquem de uma condição inicial até uma condição final, em um determinado tempo, de forma que o consumo de combustível do conjunto todo seja o mínimo possível.

Assim, temos um sistema dinâmico que pode ser descrito por um conjunto de  $6n$  variáveis que constituem o estado do sistema. Teríamos  $7n$  ou  $8n$  variáveis, se considerarmos os vínculos geométricos referentes aos erros em relação às posições absolutas dos satélites e/ou relativas entre os satélites. Tais variáveis são denominadas

variáveis de estado. A evolução temporal do estado é descrita por um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, para  $\forall t \in [t_0; t_f]$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.1)$$

onde as variáveis  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T$  constituem as variáveis de controle. Estas equações são denominadas de equações de estado.

Uma vez conhecidas as variáveis de controle em um intervalo de tempo  $[t_0, t_f]$  e dadas as condições iniciais:

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad i = 1, \dots, k \quad (3.2)$$

a solução de (3.1) é unicamente determinada, se os componentes de  $\mathbf{f}$ ,  $f_i(\cdot, \cdot, \cdot)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , satisfizerem as condições de Lipschitz quanto à existência e unicidade da solução:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t)\| \leq K \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \quad (3.3)$$

par

a todo  $\mathbf{x}$  e  $\tilde{\mathbf{x}}$  em uma dada região e todo  $t$  em um intervalo de tempo  $[t_0, t_f]$ , onde  $K$  é uma constante e  $\|\cdot\|$  representa a norma Euclideana de um vetor.

Consideramos que os propulsores utilizados são capazes de aplicar empuxos instantâneos e de magnitude infinita e que a manobra para cada satélite será efetuada por meio de duas mudanças impulsivas de velocidade com magnitudes  $\Delta v_1$  e  $\Delta v_2$ . Dessa forma, temos que a velocidade característica é dada por:

$$V = \Delta v_1 + \Delta v_2 = J(\mathbf{u}(\cdot)) \quad (3.4)$$

O tempo de transferência para cada satélite é dado por:

$$T = G(\mathbf{u}(\cdot)) \quad (3.5)$$

Portanto, o problema originalmente consiste em: minimizar a soma  $V$  para um

dados  $T = t_f - t_0$ . Assim, se o tempo de transferência é dado e é igual a  $T_0$ , temos a seguinte relação de vínculo:

$$T - T_0 = 0 \quad (3.6)$$

Uma solução para este problema, para  $n = 1$ , foi feita por Rocco (1997). Seria desejável estender esse problema e essa solução para  $n > 1$  para podermos aplicá-la ao caso de constelações de satélites, onde devemos considerar  $n$  índices de performance, um para cada satélite. Assim, um primeiro modo de estender esse problema e essa solução a uma constelação com  $n > 1$  satélites seria escrever os índices de performance para cada um dos satélites, eventualmente considerando um fator de influência  $w_i$ , e somá-los de forma a obter um único índice que representasse a performance de toda constelação, que é dado por:

$$J = \sum_{i=1}^n w_i J_i \quad \text{onde } J_i = V_i = \Delta v_{1i} + \Delta v_{2i} \quad (3.7)$$

Nesta formulação poderíamos considerar o caso mais geral possível onde os instantes de início  $t_{0n}$  e fim  $t_{fn}$  da manobra não são iguais para todos os  $n$  satélites da constelação, ou seja, os satélites não seriam manobrados simultaneamente o que geraria uma solução sequencial para o problema. Entretanto, esta formulação, onde  $t_{01} \neq t_{02} \neq \dots \neq t_{0n}$  e  $t_{f1} \neq t_{f2} \neq \dots \neq t_{fn}$  não é a mais usual e sua solução é bastante complexa pois teria vínculos  $(t_{fi} - t_{0i}) - T_i = 0$  e o correspondente índice de performance estendido:

$$J_a = \sum_{i=1}^n w_i J_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i [(t_{fi} - t_{0i}) - T_i] \quad (3.8)$$

que exigiria variáveis de estado adicionais.

Outra formulação, um pouco menos geral que a formulação apresentada na Equação 3.8, considera que as manobras para todos os satélites serão efetuadas simultaneamente, e neste caso  $t_{01} = t_{02} = \dots = t_{0n} = t_0$  e  $t_{f1} = t_{f2} = \dots = t_{fn} = t_f$ . Assim, o problema original é dado por:

$$\text{Minimizar globalmente } J = \sum_{i=1}^n w_i J_i \quad (3.9)$$

em relação a  $\mathbf{u} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbf{u} \subset \mathbf{R}^m$ , contínuas por partes

sujeito a:  $\forall t \in [t_0, t_f]$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t); \mathbf{u}(t); t)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t); t) \leq 0 \quad (\text{incluindo vínculos geométricos absolutos e/ou relativos})$$

$$T = (t_f - t_0) = T_0$$

dados:  $\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), T_0, \mathbf{f}(\cdot, \cdot, \cdot), \mathbf{g}(\cdot, \cdot, \cdot)$

Este problema pode ser tratado de forma analítica e/ou numérica, aplicando-se o Princípio Máximo de Pontryagin (PMP) e fazendo uso de rotinas de integração numérica e da solução iterativa para o problema de contorno em dois pontos (“Two Point Boundary Value Problem”) resultante do PMP. Entretanto, devido à complexidade do índice de performance quando consideramos todos os satélites da constelação, a obtenção da solução simultânea e ótima deste problema torna-se bastante difícil. Ainda mais, se considerarmos além dos vínculos de tempo também vínculos de posição, o que certamente deve ser considerado para o caso de constelações, pois além das posições absolutas temos as posições relativas entre os satélites, que devem ser consideradas. Sendo que esses vínculos de posição dependem ainda do tipo de constelação estudado (Rosette, Elipso, Poliedro, etc.). Portanto, estamos diante de um problema 6n, 7n ou 8n dimensional (multiobjetivo), com objetivos conflitantes e acoplados por meio dos vínculos de posição relativa entre os satélites, ou seja, alterando a posição absoluta de um satélite alteramos o posicionamento de toda a constelação. E ainda, se considerarmos a Equação 3.7 como o índice de performance para toda a constelação teríamos que otimizar apenas o índice  $J$  o que já seria difícil se conhecêssemos os fatores de influência (ou pesos) para cada satélite  $w_i$ . Mas esses fatores podem não ser conhecidos a priori, e sua determinação torna-se um problema de otimização por si só dependente, provavelmente, de um processo iterativo empírico onde um especialista

deve decidir os valores de  $w_i$  em função, por exemplo, do estado do satélite, do combustível restante em cada satélite e etc. Dessa forma a solução passa a depender diretamente do especialista. Em Cohon (1978), encontramos uma ilustração disto: “The development of iterative techniques for the solution of multiobjective problems has been one of the most active areas of research in recent years. Several techniques have been developed; among them are the step method (Benayoun et al., 1971), interactive goal programming (Dyer, 1972), the method developed by Geoffrion et al. (1972), the sequential multiobjective programming system (Monarchi et al., 1973), Belenson and Kapur’s (1973) method, and the approach of Zionts and Wallenius (1975). Wallenius (1975) reviewed these methods and reported on experiments with some of the iterative techniques. All of the iterative approaches are based on a formal mechanism by which the decision maker interacts either with the computer directly or with the analyst as intermediary. The methods operate in an iterative fashion by moving from one noninferior solution to another in directions defined by the decision maker. Termination occurs when the decision maker is satisfied or when further iterations cannot be handled by the solution procedure.” Como podemos ver, nestes processos iterativos a solução depende na verdade dos conhecimentos e/ou das preferências do especialista (“decision maker”) e, portanto, não podemos afirmar que a solução obtida é a solução ótima, já que para cada especialista obteríamos uma solução diferente para o mesmo problema. Assim, a redução do problema multiobjetivo original, que considera igualmente os índices de performance de cada satélite em um problema de otimização de apenas um índice de performance para toda a constelação (Equação 3.9 para  $w_1 \neq w_2 \neq \dots \neq w_n$ ) não é uma formulação útil (quando os  $w_i$  são desconhecidos), pois não é realmente capaz de fornecer a solução ótima para o problema. Por fim, tal solução simultânea pode exigir que acionemos os controles de vários satélites ao mesmo tempo o que usualmente é custoso e até perigoso.

### **3.3 - SOLUÇÃO PROPOSTA PARA O PROBLEMA**

Diante dessas dificuldades, a obtenção de uma solução sub-ótima multiobjetivo seqüencial torna-se mais viável. Uma alternativa possível seria a utilização de

algoritmos capazes de considerar toda a constelação e encontrar uma solução sub-ótima para o problema. Na literatura podemos encontrar alguns trabalhos que utilizam algoritmos deste tipo (com soluções sub-ótimas e sequenciais), mas não para o problema original: Shah et al. (1997); Folta et al. (1998); Brochet et al. (1998); Kechichian (1998); Brousse et al. (1998); Agnèse e Brousse (1998); Carroll e Mason (2000); Krasilshikov (2000). Por tudo isso, neste trabalho propomos e utilizamos o algoritmo mostrado na Figura 3.9 para minimizar  $J(\mathbf{u}(\cdot); T_0; \mathbf{x}(t_f))$ . Esta proposta para solução do problema é uma primeira contribuição importante deste trabalho, pelas razões anteriormente citadas.

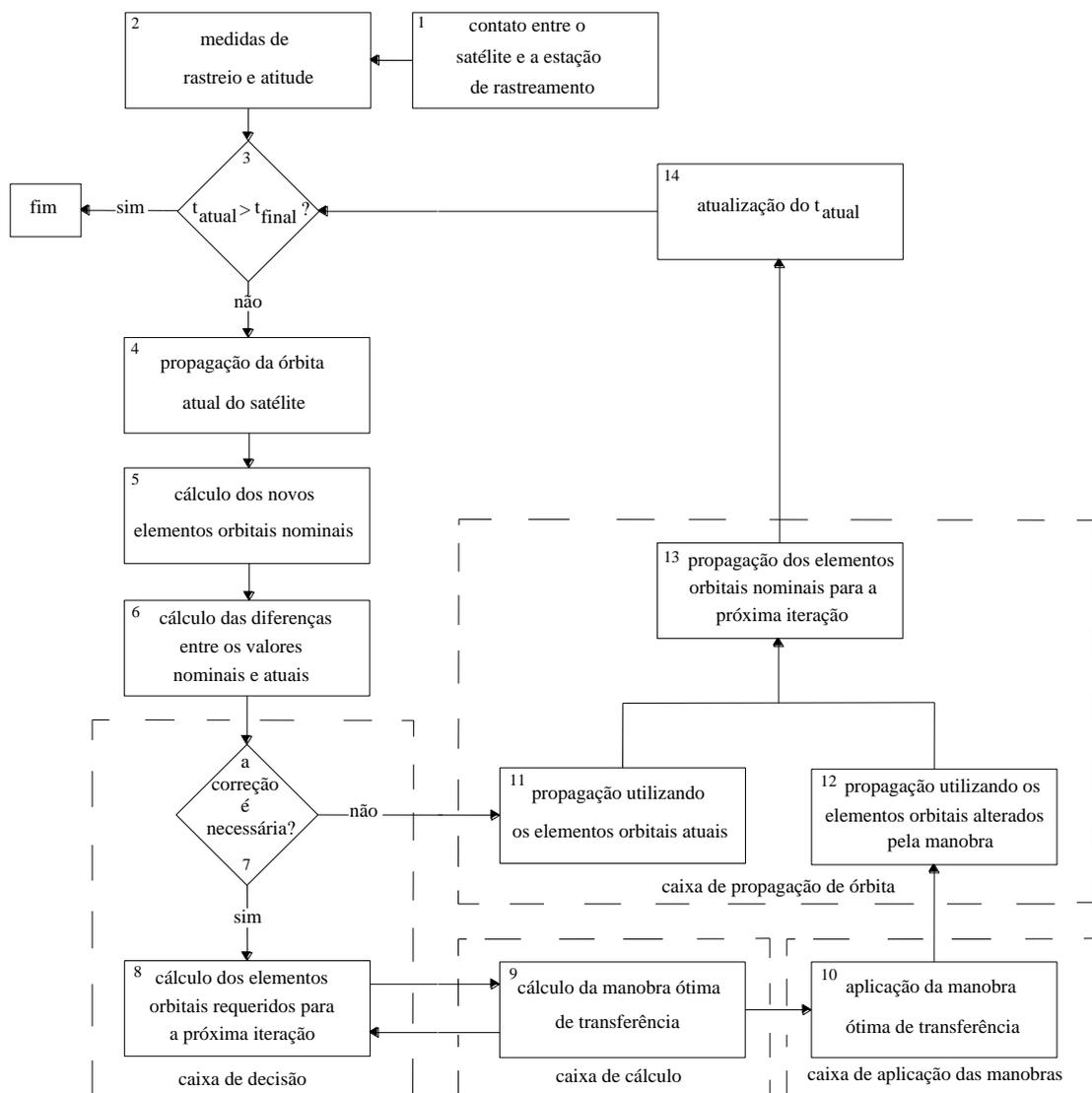


Figura 3.9 – Diagrama de fluxo.

Podemos dividir o problema em três partes principais: a escolha de quando e quais satélites devem ser manobrados; o cálculo da manobra ótima (de mínimo consumo de combustível) com vínculo de tempo para cada satélite; e a propagação da órbita de cada satélite; como pode ser visto no diagrama da Figura 3.9.

Uma segunda contribuição importante deste trabalho é o desenvolvimento da caixa de decisão, onde o problema multiobjetivo é solucionado (módulos 7 e 8), conforme apresentado nos Capítulos 5 e 6. A caixa de cálculo foi desenvolvida em Rocco (1997), utilizando o método de Lawden (1993) ou o método de Eckel e Vinh (1984), que serão apresentados resumidamente no Capítulo 4. Entretanto, para poder testar a caixa de decisão, desenvolvemos uma versão simples, mas funcional, das demais caixas.

### 3.4 - DESCRIÇÃO DO ALGORITMO UTILIZADO PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA

O algoritmo inicia-se quando é estabelecido o contato entre a estação de rastreamento e o satélite que entra na região de visibilidade (módulo 1 do diagrama da Figura 3.9). Estabelecido o contato, as medidas de posição e velocidade são efetuadas, ou seja, as coordenadas cartesianas no referencial inercial  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $\dot{X}$ ,  $\dot{Y}$  e  $\dot{Z}$  são determinadas no módulo 2. Verifica-se, então, se o satélite já foi manobrado na presente iteração do programa de controle por meio da verificação do *tempo atual* do satélite (módulo 3). Se o *tempo atual* é menor que o *tempo final*, a órbita do satélite é determinada no módulo 4, utilizando as medidas de posição e velocidade efetuadas pela estação de rastreamento (Schulz, 1997):

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (3.10)$$

$$v = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2} \quad (3.11)$$

$$a = \frac{r - \mu}{2\mu - v^2 r} \quad (3.12)$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.13)$$

$$e = \sqrt{\left(\frac{X \dot{X} + Y \dot{Y} + Z \dot{Z}}{n a}\right)^2 + \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2} \quad (3.14)$$

$$u = \arctan\left(\frac{X \dot{X} + Y \dot{Y} + Z \dot{Z}}{n a (a - R)}\right) \quad (3.15)$$

$$M = u - e \operatorname{sen} u \quad (3.16)$$

$$i = \arccos\left(\frac{X \dot{Y} - Y \dot{X}}{\sqrt{(Y \dot{Z} - Z \dot{Y})^2 + (Z \dot{X} - X \dot{Z})^2 + (X \dot{Y} - Y \dot{X})^2}}\right) \quad (3.17)$$

$$\Omega = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y \dot{Z} - Z \dot{Y}}{X \dot{Z} - Z \dot{X}}\right) \quad (3.18)$$

$$f = \arccos\left(\frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}\right) \quad (3.19)$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{-X \cos i \cos \Omega + Y \cos i \cos \Omega + Z \operatorname{sen} i}{X \cos \Omega + Y \operatorname{sen} \Omega}\right) \quad (3.20)$$

$$\omega = \theta - f \quad (3.21)$$

Neste trabalho, optamos por considerar uma única passagem devido às seguintes razões: 1) o desenvolvimento de procedimentos para determinação de órbita não faz parte do objetivo do trabalho; 2) como estamos lidando com uma constelação de satélites, considerar mais de uma passagem por satélite para a determinação de órbita, representa uma complicação adicional que não afeta o processo de otimização multiobjetivo, definido anteriormente, que é o principal objetivo deste trabalho. Entretanto, em uma aplicação real, para haver precisão na determinação de órbita é necessário que sejam coletadas medidas de rastreio de várias passagens do satélite pela estação de rastreamento. Utilizando as medidas de uma única passagem, não será possível observar um arco de órbita suficiente para efetuar, com precisão, uma determinação de órbita que permita executar uma manobra orbital.

Após a determinação da órbita atual, verificam-se os elementos orbitais nominais para o satélite (módulo 5) e calculam-se as diferenças entre os elementos orbitais atuais

e nominais (módulo 6). Baseado nestas diferenças toma-se a decisão se uma manobra de correção é necessária ou não. Se for definido que a manobra é necessária, define-se quais são os elementos orbitais que devem ser estabelecidos após a aplicação da manobra (módulo 8), esta informação é enviada para a caixa de cálculo, detalhada no Capítulo 4, onde um número arbitrário de manobras ótimas de transferência orbital com vínculo de tempo são calculadas para vários valores de tempo, precisão e estado final do satélite (módulo 9). Uma vez calculadas, essas manobras são analisadas novamente na caixa de decisão (módulo 8), onde toma-se a decisão de qual manobra deverá ser aplicada, segundo uma metodologia multiobjetivo descrita no Capítulo 5. Tomada essa decisão aplica-se a manobra (módulo 10), e após a aplicação da manobra determina-se a nova órbita do satélite repetindo o procedimento dado pelas Equações 3.10 a 3.21.

Voltando ao módulo 7, caso seja definido que não é necessário aplicar uma manobra de correção, consideram-se os elementos orbitais atuais do satélite, determinados no módulo 4, seguindo no fluxograma diretamente para o módulo 11.

A partir dos elementos orbitais do satélite, determinados no módulo 11 ou 12, propaga-se a órbita do satélite (módulo 13) para prever qual será o estado do satélite na próxima passagem sobre a estação de rastreamento. Para isto desenvolvemos um propagador de órbita simplificado considerando as perturbações orbitais geradas pelos termos do potencial gravitacional terrestre  $J_2$  e  $J_4$  (Lerch, 1979) e um modelo simplificado do arrasto atmosférico, como pode ser visto nas Equações 3.22 a 3.35. Um propagador mais preciso poderia facilmente ser acoplado ao algoritmo, mas o desenvolvimento de propagadores orbitais mais precisos foge dos objetivos deste trabalho.

A variação dos elementos orbitais  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $M$  devido aos termos  $J_2$  e  $J_4$  do potencial gravitacional terrestre são dadas por (Brouwer, 1961):

$$L_T = \frac{R_T}{a(1-e^2)} \quad (3.22)$$

$$G_{J_2} = \frac{1}{2} J_2 L_T^2 \quad (3.23)$$

$$G_{J_4} = -\frac{3}{8} J_4 L_T^4 \quad (3.24)$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.25)$$

$$\dot{\Omega} = n \cos i \left\{ 3 G_{J_2} \left[ -1 + \frac{1}{8} G_{J_2} \left( 9(1-e^2) + 12\sqrt{1-e^2} - 5 - (5(1-e^2) + 36\sqrt{1-e^2} + 35) \cos^2 i \right) \right] + \frac{5}{4} G_{J_4} \left[ 5 - 3(1-e^2) \right] (-3 - 7 \cos^2 i) \right\} \quad (3.26)$$

$$\dot{\omega} = n \left\{ \frac{3}{2} G_{J_2} \left[ (5 \cos^2 i - 1) + \frac{1}{16} G_{J_2} \left( 25(1-e^2) + 24\sqrt{1-e^2} - 35 + (90 - 126(1-e^2)) \cos^2 i + (385 + 360\sqrt{1-e^2} + 45(1-e^2)) \cos^4 i \right) \right] + \frac{5}{16} G_{J_4} \left[ 21 - 9(1-e^2) + (-270 + 126(1-e^2)) \cos^2 i + (385 - 180(1-e^2)) \cos^4 i \right] \right\} \quad (3.27)$$

$$\dot{M} = n \left\{ 1 + \sqrt{1-e^2} \left[ \frac{3}{2} G_{J_2} \left( (3 \cos^2 i - 1) + \frac{1}{16} G_{J_2} \left( 16\sqrt{1-e^2} + 25(1-e^2) - 15 + (30 - 96\sqrt{1-e^2} - 90(1-e^2)) \cos^2 i + (105 + 144\sqrt{1-e^2} + 25(1-e^2)) \cos^4 i \right) \right) \right] + \frac{15}{16} G_{J_4} e^2 (3 - 30 \cos^2 i + 35 \cos^4 i) \right] \right\} \quad (3.28)$$

O arrasto atmosférico é uma perturbação não conservativa que faz com que o satélite perca energia orbital, portanto causa, principalmente, um decaimento no semi-eixo maior da órbita. Essa variação do semi-eixo maior devido ao arrasto atmosférico pode ser obtida pela seguinte equação (Rocco, 1999):

$$\dot{a} = -C_D \frac{A}{m} \rho \frac{a^2 V^3}{\mu} \quad (3.29)$$

onde  $C_D$  é o coeficiente de arrasto atmosférico que depende de parâmetros como as propriedades da superfície do satélite, o ângulo de incidência do fluxo atmosférico, a velocidade do fluxo e a temperatura da superfície;  $A$  é a área efetiva do satélite (área projetada);  $V$  é a velocidade relativa do satélite com relação a atmosfera;  $a$  é o semi-

eixo maior da órbita;  $\rho$  é a densidade local do ar.

Assim, para poder calcular a razão de decaimento do semi-eixo maior devemos fazer uma estimativa da densidade atmosférica local. Mas, a densidade atmosférica é função da altitude, da longitude, da latitude, da atividade solar, do índice geomagnético, da temperatura da atmosfera, entre outros fatores. Portanto o cálculo da densidade torna-se muito difícil. Dessa forma, adotamos um modelo simplificado, função da altitude do satélite, para o cálculo da densidade (Dobrzelecki, 1973) dado pelas equações abaixo.

$$\rho = \frac{1,225}{DB} \quad (3.30)$$

$$DB = (1 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 + B_8 + B_9 + B_{10} + B_{11})^4 \quad (3.31)$$

$$z = r - R_T \quad (3.32)$$

$$B_1 = 10Y_1 SA_1$$

$$B_2 = 100Y_2 SA_2$$

$$B_3 = 1000Y_3 SA_3$$

$$B_4 = 10000Y_4 SA_4$$

$$B_5 = 100000Y_5 SA_5$$

$$B_6 = 100000Y_6 SA_6 \quad (3.33)$$

$$B_7 = 100000Y_7 SA_7$$

$$B_8 = 100000Y_8 SA_8$$

$$B_9 = 100000Y_9 SA_9$$

$$B_{10} = 10000Y_{10} SA_{10}$$

$$B_{11} = 1000Y_{11} SA_{11}$$

$$SA_1 = 0,3393495800$$

$$SA_2 = -0,3433553057$$

$$SA_3 = 0,5497466428 \quad (3.34a)$$

$$SA_4 = -0,3228358326$$

$$SA_5 = 0,1106617734$$

$$\begin{aligned}
SA_6 &= -0,2291755793 \\
SA_7 &= 0,2902146443 \\
SA_8 &= -0,2230070938 \\
SA_9 &= 0,1010575266 \\
SA_{10} &= -0,2482089627 \\
SA_{11} &= 0,2548769715
\end{aligned}
\tag{3.34b}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{z}{100} \\
Y_2 &= Y_1 Y_1 \\
Y_3 &= Y_2 Y_1 \\
Y_4 &= Y_3 Y_1 \\
Y_5 &= Y_4 Y_1 \\
Y_6 &= Y_5 Y_1 \\
Y_7 &= Y_6 Y_1 \\
Y_8 &= Y_7 Y_1 \\
Y_9 &= Y_8 Y_1 \\
Y_{10} &= Y_9 Y_1 \\
Y_{11} &= Y_{10} Y_1
\end{aligned}
\tag{3.35}$$

Com  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{M}$  e  $\dot{a}$  calculados, determinam-se os valores desses elementos orbitais na próxima passagem do satélite sobre a estação de rastreamento prevendo assim o posicionamento da antena na próxima passagem.

Nos módulos 14 atualiza-se o *tempo atual*. Quando o próximo satélite da constelação entrar na região de visibilidade da antena da estação de rastreamento o algoritmo se inicia novamente (módulo 1).

## **CAPÍTULO 4**

### **METODOLOGIA APLICADA NO CÁLCULO DA MANOBRA ÓTIMA DE TRANSFERÊNCIA ORBITAL**

#### **4.1 - MÉTODO DE LAW DEN**

Uma versão da caixa de cálculo (módulo 9) do diagrama mostrado na Figura 3.9 pode ser encontrada em Rocco (1997) e foi desenvolvida com base nas equações apresentadas por Lawden (1993) originadas a partir da teoria do “primer-vector”. Ela fornece a órbita de transferência entre duas órbitas elípticas coplanares, que executa a transferência com mínimo consumo de combustível e tempo fixo. Este método será resumidamente descrito a seguir.

Dadas duas órbitas coplanares, podemos encontrar com relativa facilidade a órbita de transferência ótima entre elas quando não consideramos limitações de tempo nem de posição dos pontos terminais nas órbitas de partida e de chegada. Porém, quando consideramos o problema com tempo fixo, a posição dos pontos terminais passa a ter importância. Da definição dos pontos terminais podemos ter quatro problemas diferentes.

Quando consideramos os pontos terminais fixos desejamos partir de um determinado ponto em um determinado instante da órbita inicial e atingir um outro determinado ponto em um outro determinado instante da órbita final. Dessa forma, deseja-se obter uma órbita de transferência que inicie no ponto terminal inicial ou após ele, e termine no ponto terminal final ou antes dele. Neste caso o tempo total gasto será dado pela soma do tempo gasto na órbita de partida a partir do ponto terminal inicial até o ponto onde é aplicado o primeiro impulso, mais o tempo gasto na órbita de transferência propriamente dita, mais o tempo gasto na órbita de chegada do ponto onde é aplicado o segundo impulso até o ponto terminal final. Deseja-se também, que a solução obtida seja a de menor consumo de combustível, ou seja, podemos obter várias soluções onde a soma dos tempos gastos nas órbitas de partida, de transferência e de chegada, apresentam o mesmo valor, mas o gasto de combustível deve ser diferente pois

as posições onde os impulsos são aplicados são diferentes para cada solução; portanto estes impulsos terão magnitudes diferentes de uma solução para outra. Este tipo de problema pode ter como aplicação manobras de “rendezvous”, pois o tempo de transferência e as posições inicial e final são considerados como vínculos.

Outros dois tipos de problemas ocorrem quando apenas um dos pontos terminais é fixado. Neste caso o problema apresenta um vínculo a menos que o caso anterior. Quando o ponto inicial é fixado temos que o tempo total da manobra é a soma dos tempos gastos na órbita inicial (do ponto terminal inicial até o ponto onde é aplicado o primeiro impulso), e na órbita de transferência (do ponto onde é aplicado o primeiro impulso até o ponto onde é aplicado o segundo impulso). Já quando o ponto terminal final que é fixado, o tempo total da manobra é dado pela soma do tempo gasto na órbita de transferência (do ponto terminal inicial onde é aplicado o primeiro impulso até o ponto onde é aplicado o segundo impulso), mais o tempo gasto na órbita final (do ponto onde é aplicado o segundo impulso até o ponto terminal final).

O caso onde o ponto terminal inicial é fixado pode ter como aplicação transferências orbitais com tempo fixo, em que o local onde a manobra é realizada é determinado. Por exemplo, a necessidade da manobra ser realizada em visibilidade pode ser enquadrada neste caso. Já quando o ponto terminal final é determinado, podemos ter como aplicação manobras de “rendezvous”, ou então manobras onde seja necessário ter visibilidade no momento da aplicação do segundo impulso.

Um último tipo de problema ocorre quando os pontos terminais são livres e apenas o tempo total é fixado. Nesta situação o foco de interesse não é onde o veículo vai efetuar a manobra, mas quanto tempo ele vai permanecer na órbita de transferência. Dessa forma, a solução a ser encontrada deve fornecer a órbita de transferência com menor consumo de combustível que transfere o veículo espacial da órbita inicial para a órbita final em um tempo pré-determinado. Uma aplicação para este caso é a transferência de satélites de sensoriamento remoto, onde a manobra de transferência deve ocorrer o mais rápido possível, pois enquanto o satélite estiver na órbita de transferência os dados não são coletados, ou então, serão de baixa qualidade.

A Figura 4.1 mostra um esquema dessa transferência para o caso de uma manobra impulsiva. Chamaremos o ponto de junção da órbita de transferência com a órbita inicial de  $J$ , onde é aplicado o primeiro impulso, e o ponto de junção da órbita de transferência com a órbita final de  $K$ , local onde é aplicado o segundo impulso. Dessa maneira, assumiremos que o tempo gasto entre o ponto terminal inicial  $I$  e o ponto de junção  $J$  é dado por  $\Delta t_1$ , o tempo gasto na órbita de transferência é  $\Delta t$ , e o tempo gasto entre o ponto de junção  $K$  e o ponto terminal final  $F$  é  $\Delta t_2$ . Assim, para o caso onde os pontos terminais são fixados, o vínculo de tempo é dado por:  $\Delta t_1 + \Delta t + \Delta t_2 = T$ , onde  $T$  é o tempo total gasto na manobra. Para o caso onde apenas o ponto terminal inicial é fixado o vínculo de tempo é dado por:  $\Delta t_1 + \Delta t = T$ , pois neste caso  $\Delta t_2$  é zero. Para o caso onde é o ponto terminal final que é fixado, o vínculo de tempo é dado por:  $\Delta t + \Delta t_2 = T$ , pois agora  $\Delta t_1$  que é zero. Para o caso onde ambos os pontos terminais não são fixados o vínculo de tempo é dado por:  $\Delta t = T$  pois  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$  são iguais a zero.

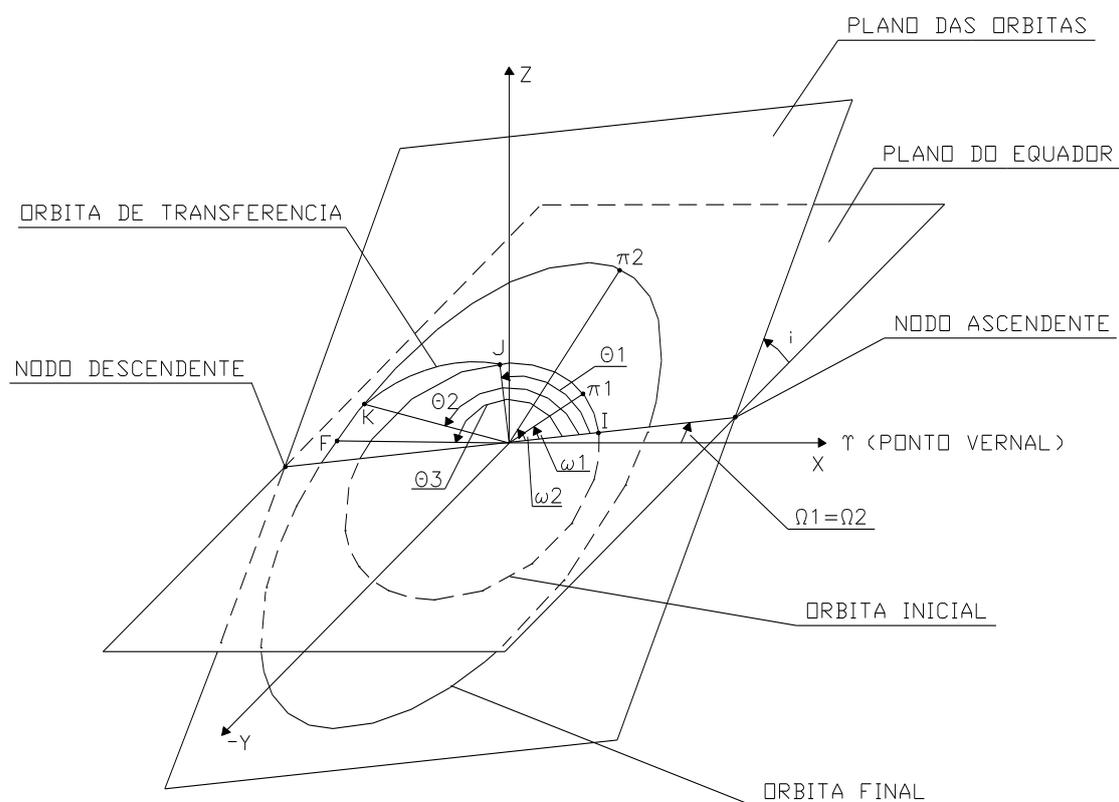


Fig. 4.1 - Geometria da manobra.

As órbitas elípticas são especificadas pelos valores de seus elementos keplerianos dados por (índice 1: órbita inicial; índice 2: órbita final; sem índice: órbita de transferência):

- $a$  = semi-eixo maior;
- $e$  = excentricidade;
- $l$  = semi-latus rectum;
- $\omega$  = longitude do periapside;
- $s = 1/r$  ;
- $r$  = raio (distância do centro de atração ao satélite);
- $z = 1/\mu^{1/2} \sin \phi$ , sendo que  $\mu^{1/2} z \sin \phi$  é a componente da velocidade perpendicular ao impulso que não é afetada pela propulsão;
- $\phi$  = ângulo formado entre a direção circunferencial (direção perpendicular a reta que liga o centro de atração ao satélite) e a direção do impulso;
- $\theta$  = ângulo de posição do satélite. Ângulo formado entre a reta que liga o centro de atração ao nodo ascendente e a reta que liga o centro de atração ao satélite. Portanto  $\theta = \omega + f$ , onde  $f$  é a anomalia verdadeira;
- $\alpha = (l^2 C)/e$ , onde  $C$  é uma constante definida em Lawden (1963). Se  $C = 0$  temos que a solução obtida é a mesma para tempo livre;
- $\mu$  = constante gravitacional, que para a Terra vale  $39860064 \text{ km}^3/\text{s}^2$  ;
- $\vec{v}_1$  = vetor velocidade do veículo com relação a órbita inicial no local onde é aplicado o primeiro impulso;
- $\vec{v}_i$  = vetor velocidade do veículo com relação a órbita de transferência no local onde é aplicado o primeiro impulso;
- $\vec{v}_f$  = vetor velocidade do veículo com relação a órbita de transferência no local onde é aplicado o segundo impulso;
- $\vec{v}_2$  = vetor velocidade do veículo com relação a órbita final no local onde é aplicado o segundo impulso;
- $\Delta v_1 = |\vec{v}_i - \vec{v}_1|$  = magnitude do primeiro impulso;

- $\Delta v_2 = |\vec{v}_2 - \vec{v}_f| = \text{magnitudo do segundo impulso};$
- $\Delta \vec{v}_q = \text{vetor impulso na direção radial};$
- $\Delta \vec{v}_s = \text{vetor impulso na direção circunferencial (transversal)}.$

Com estas definições, temos que:

$$\Delta \vec{v}_1 = \Delta v_{q_1} \vec{q} + \Delta v_{s_1} \vec{s} \quad (4.1)$$

$$\Delta \vec{v}_2 = \Delta v_{q_2} \vec{q} + \Delta v_{s_2} \vec{s} \quad (4.2)$$

$$\Delta v_t = |\Delta \vec{v}_1| + |\Delta \vec{v}_2| \quad (4.3)$$

Assim, a equação polar da órbita de transferência pode ser escrita da forma:

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos(\theta - \omega) \quad (4.4)$$

Supondo que o movimento do veículo na órbita no ponto  $J$  tem uma aceleração  $\mu/r^2$  na direção de  $O$  (centro de atração) e é sujeito a uma propulsão impulsiva  $I$  em um ângulo  $\phi$  em relação à direção circunferencial, temos que os elementos  $(l, e, \omega)$  desta nova órbita devem continuar a satisfazer a Equação 4.8. Entretanto é mostrado em Lawden (1962) que estes novos elementos também satisfazem a equação:

$$e \sin(\theta - \omega) = \left( \frac{l}{r} - l^{1/2} z \right) \text{tg } \phi \quad (4.5)$$

em que  $\mu^{1/2} z \text{sen } \phi$  representa a componente da velocidade perpendicular ao impulso que não é afetada pela propulsão. Assim, todas as possíveis órbitas que podem ser utilizadas pela aplicação de um impulso na direção  $\phi$  devem satisfazer as Equações 4.4 e 4.5.

Se  $l_1, e_1, \omega_1$  e  $l, e, \omega$  são dois grupos de elementos que satisfazem as Equações 4.4 e 4.5, temos que o incremento de velocidade necessário para mover o veículo da órbita inicial para uma outra é dado por:

$$\Delta v = \mu^{1/2} \frac{l^{1/2} - l_1^{1/2}}{r \cos \phi} \quad (4.6)$$

como é mostrado em Lawden (1993).

Temos ainda, as seguintes equações conhecidas da Mecânica Orbital:

$$\cos u = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f} \quad (4.7)$$

$$\cos f = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \quad (4.8)$$

$$a = \frac{l}{1 - e^2} \quad (4.9)$$

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (4.10)$$

$$t = \frac{a^{3/2} (u - e \sin u)}{\mu^{1/2}} \quad (4.11)$$

em que:  $u$  = anomalia excêntrica;  $f$  = anomalia verdadeira;  $t$  = tempo gasto para atingir a anomalia excêntrica  $u$  partir do periapside.

O problema da transferência de um veículo espacial entre um par de órbitas terminais em um dado campo gravitacional com o mínimo gasto de combustível e tempo livre, foi resolvido por Lawden (1963) em termos do “primer-vector” definido ao longo de sua trajetória. Se assumirmos que não existem arcos intermediários de propulsão, a trajetória ótima consiste de arcos de balísticos separados por pontos de junção onde a propulsão impulsiva é aplicada. Para garantir a otimalidade, a magnitude do “primer-vector” deve assumir o valor máximo em ambas as junções, e nestes pontos o “primer-vector” e o vetor propulsão devem estar alinhados. Além disso, em cada junção o “primer-vector” e sua primeira derivada devem ser contínuas.

A partir de Lawden (1993) obtemos um sistema de doze equações com doze incógnitas, que expressam as condições necessárias para otimalidade, dadas a seguir:

$$\Delta t_1 + \Delta t + \Delta t_2 = T \quad (4.12a)$$

$$\text{ou } \Delta t_1 + \Delta t = T \quad (4.12b)$$

$$\text{ou } \Delta t + \Delta t_2 = T \quad (4.12c)$$

$$\text{ou } \Delta t = T \quad (4.12d)$$

$$e_1 \cos(\theta_1 - \omega_1) = l_1 s_1 - 1 \quad (4.13)$$

$$e \cos(\theta_1 - \omega) = l s_1 - 1 \quad (4.14)$$

$$e_1 \text{sen}(\theta_1 - \omega_1) = \left( l_1 s_1 - l_1^{1/2} z_1 \right) \text{tg } \phi_1 \quad (4.15)$$

$$e \text{sen}(\theta_1 - \omega) = \left( l s_1 - l^{1/2} z_1 \right) \text{tg } \phi_1 \quad (4.16)$$

$$L_1 = L_2 \quad (4.17)$$

$$M_1 = M_2 - \frac{3\mu^{1/2} \alpha e^2 t}{l^{3/2} (1 - e^2)} \quad (4.18)$$

$$N_1 = N_2 + \frac{3\mu^{1/2} \alpha e t}{l^{3/2} (1 - e^2)} \quad (4.19)$$

$$e_2 \cos(\theta_2 - \omega_2) = l_2 s_2 - 1 \quad (4.20)$$

$$e \cos(\theta_2 - \omega) = l s_2 - 1 \quad (4.21)$$

$$e_2 \text{sen}(\theta_2 - \omega_2) = \left( l_2 s_2 - l_2^{1/2} z_2 \right) \text{tg } \phi_2 \quad (4.22)$$

$$e \text{sen}(\theta_2 - \omega) = \left( l s_2 - l^{1/2} z_2 \right) \text{tg } \phi_2 \quad (4.23)$$

em que,

$$L_1 = \left( z_1 - \frac{s_1}{z_1} \right) \text{sen } \phi_1 - \frac{e \alpha}{l^2 s_1 z_1} \quad (4.24)$$

$$L_2 = \left( z_2 - \frac{s_2}{z_2} \right) \text{sen } \phi_2 - \frac{e \alpha}{l^2 s_2 z_2} \quad (4.25)$$

$$M_1 = \cos(\theta_1 - \omega - \phi_1) + \frac{1}{l^{1/2} z_1} \cos(\theta_1 - \omega) \cos \phi_1 + \alpha \left\{ \frac{\cotg(\theta_1 - \omega)}{l^{3/2} s_1 z_1} + \frac{1}{1 - e^2} \left[ \frac{2e}{l s_1 \text{sen}(\theta_1 - \omega)} - \cotg(\theta_1 - \omega) \right] \right\} \quad (4.26)$$

$$M_2 = \cos(\theta_2 - \omega - \phi_2) + \frac{1}{l^{1/2} z_2} \cos(\theta_2 - \omega) \cos \phi_2 + \alpha \left\{ \frac{\cotg(\theta_2 - \omega)}{l^{3/2} s_2 z_2} + \frac{1}{1 - e^2} \left[ \frac{2e}{l s_2 \text{sen}(\theta_2 - \omega)} - \cotg(\theta_2 - \omega) \right] \right\} \quad (4.27)$$

$$N_1 = \cos \phi_1 \left( 1 + \frac{l s_1 + 1}{l^{1/2} z_1} \right) + \alpha \left\{ \frac{l s_1 + 1}{l^{3/2} s_1 z_1 \text{sen}(\theta_1 - \omega)} + \frac{1}{1 - e^2} \left[ e \cotg(\theta_1 - \omega) - \frac{2}{l s_1 \text{sen}(\theta_1 - \omega)} \right] \right\} \quad (4.28)$$

$$N_2 = \cos \phi_2 \left( 1 + \frac{l s_2 + 1}{l^{1/2} z_2} \right) + \alpha \left\{ \frac{l s_2 + 1}{l^{3/2} s_2 z_2 \text{sen}(\theta_2 - \omega)} + \frac{1}{1 - e^2} \left[ e \cotg(\theta_2 - \omega) - \frac{2}{l s_2 \text{sen}(\theta_2 - \omega)} \right] \right\} \quad (4.29)$$

Calculado os parâmetros  $s_1$ ,  $\theta_1$ ,  $z_1$ ,  $\phi_1$ ,  $s_2$ ,  $\theta_2$ ,  $z_2$ ,  $\phi_2$ ,  $l$ ,  $e$ ,  $\omega$  e  $\alpha$ , temos ainda de Lawden (1993) que estes parâmetros devem satisfazer as seguintes inequações para que a velocidade característica para a manobra seja um mínimo local:

$$|z_1| \geq \frac{|C r_1^2 - \text{sen } \phi_1|}{r_1^{1/2} |\text{sen } \phi_1| \sqrt{(1 - 3 \text{sen}^2 \phi_1)}} \quad (4.30)$$

$$|z_2| \geq \frac{|C r_2^2 - \text{sen } \phi_2|}{r_2^{1/2} |\text{sen } \phi_2| \sqrt{(1 - 3 \text{sen}^2 \phi_2)}} \quad (4.31)$$

Se estas condições não forem satisfeitas temos, segundo Lawden (1993), que a solução obtida pode ser apenas a solução ótima para o caso bi-impulsivo, sendo provável que existam soluções mais econômicas para três ou mais impulsos. Lawden (1993) ainda afirma, que a não satisfação dessas condições de fato ocorrem. Como o escopo deste trabalho é limitado a manobras bi-impulsivas, a busca dessas manobras mais econômicas não é feita neste trabalho.

Para a implementação deste método foram utilizadas rotinas encontradas em Press et al. (1992) que utilizam o método de Newton-Raphson para resolver o sistema de equações não lineares dado pelas Equações 4.12 a 4.23, como pode ser visto em Rocco (1997). Entretanto, devido ao fato do método de Lawden apresentar um sistema de equações composto por doze equações não lineares e doze incógnitas a serem determinadas, a sua solução não é uma tarefa simples. E, como foi utilizado um método numérico para resolver o sistema, dependendo dos valores iniciais pode-se não encontrar a solução ou então, a solução encontrada é apenas uma solução numérica impossível de ser aplicada (por exemplo, excentricidade ou semi-eixo maior negativos). Portanto, este método de transferência orbital não foi implementado na caixa de cálculo para o caso de constelações, porém, sua implementação pode ser realizada facilmente.

#### **4.2 - MÉTODO DE ECKEL E VINH ADAPTADO AO CASO COPLANAR**

Outra versão da caixa de cálculo do diagrama mostrado na Figura 3.9 também pode ser encontrada em Rocco (1997) para o caso de manobras não coplanares. Este método foi desenvolvido com base nas equações apresentadas por Eckel e Vinh (1984) que fornecem a órbita de transferência entre duas órbitas elípticas não coplanares, de mínimo consumo de combustível e tempo fixo ou de tempo mínimo e consumo de combustível fixo, porém só será tratado aqui o caso com tempo fixo. Este método foi adaptado ao caso coplanar e implementado para ser utilizado no caso de constelações.

Dadas duas órbitas  $O_1$  e  $O_2$  (Figura 4.2 a 4.5) em um campo central, deseja-se encontrar a órbita de transferência de mínimo consumo de combustível para um dado tempo de transferência pré-determinado.

Especificaremos as órbitas envolvidas pelos elementos keplerianos dados por (órbita inicial: índice 1; órbita final: índice 2; órbita de transferência: sem índice):

- $a$  = semi-eixo maior;
- $e$  = excentricidade;
- $p$  = semi-latus rectum;
- $i$  = inclinação;
- $\omega$  = argumento do periapside;
- $\Omega$  = longitude do nodo ascendente;
- $M$  = anomalia média;
- $E$  = anomalia excêntrica.

Utilizamos ainda os seguintes elementos:

- $\lambda$  = ângulo entre os planos das órbitas inicial e final;
- $\beta_1$  = anomalia verdadeira do nodo  $N$  medida no plano da órbita inicial;
- $\beta_2$  = anomalia verdadeira do nodo  $N$  medida no plano da órbita final;
- $I_1$  = localização do primeiro impulso;
- $I_2$  = localização do segundo impulso;
- $\Delta$  = ângulo de transferência medido no plano da órbita de transferência;
- $\gamma_1$  = ângulo de mudança de plano gerado pelo primeiro impulso;
- $\gamma_2$  = ângulo de mudança de plano gerado pelo segundo impulso;
- $\Delta v_1$  = magnitude do primeiro impulso;
- $\Delta v_2$  = magnitude do segundo impulso;
- $V$  = velocidade característica;
- $T$  = tempo gasto na manobra;

- $\alpha_1$  = anomalia verdadeira do ponto  $I_1$  medida na órbita inicial;
- $\alpha_2$  = anomalia verdadeira do ponto  $I_2$  medida na órbita final;
- $r_1$  = distância radial do ponto  $I_1$ ;
- $r_2$  = distância radial do ponto  $I_2$ ;
- $f_1$  = anomalia verdadeira do ponto  $I_1$  medida na órbita de transferência;
- $f_2$  = anomalia verdadeira do ponto  $I_2$  medida na órbita de transferência;
- $x_1$  = componente radial do primeiro impulso;
- $x_2$  = componente radial do segundo impulso;
- $y_1$  = componente transversal do primeiro impulso;
- $y_2$  = componente transversal do segundo impulso;
- $z_1$  = componente do primeiro impulso ortogonal à órbita inicial;
- $z_2$  = componente do segundo impulso ortogonal à órbita de transferência;
- $h_i$  = componente horizontal de  $V_i$ .

Dependendo do local onde ocorre a interseção dos planos das órbitas temos quatro geometrias possíveis e dessa maneira, quatro formas diferentes de calcular  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\lambda$ :

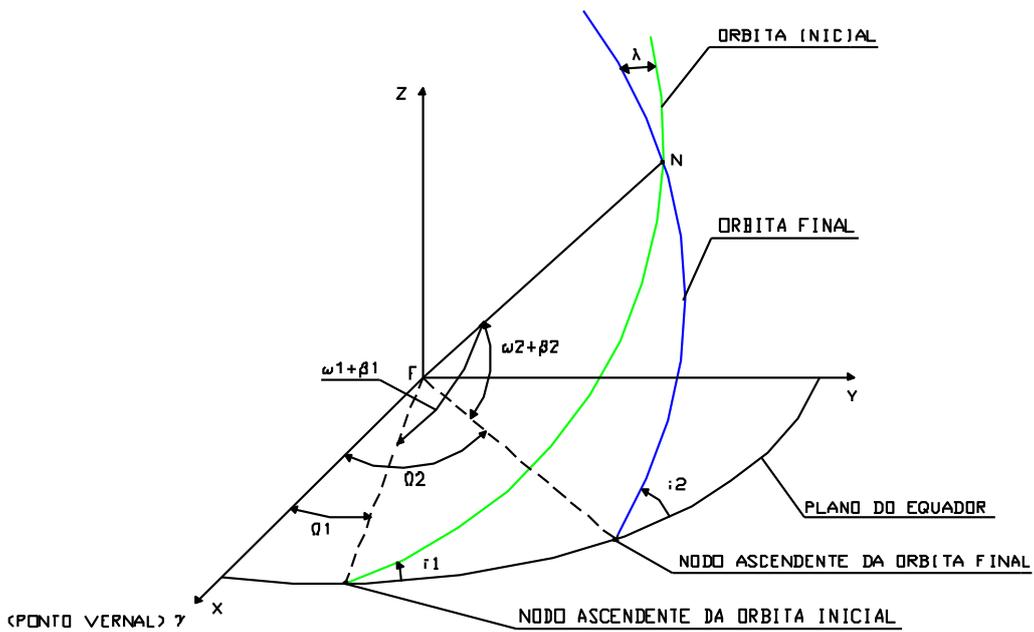


Fig. 4.2 - Geometria da manobra quando  $\Omega_2 > \Omega_1$  e  $i_2 > i_1$ .

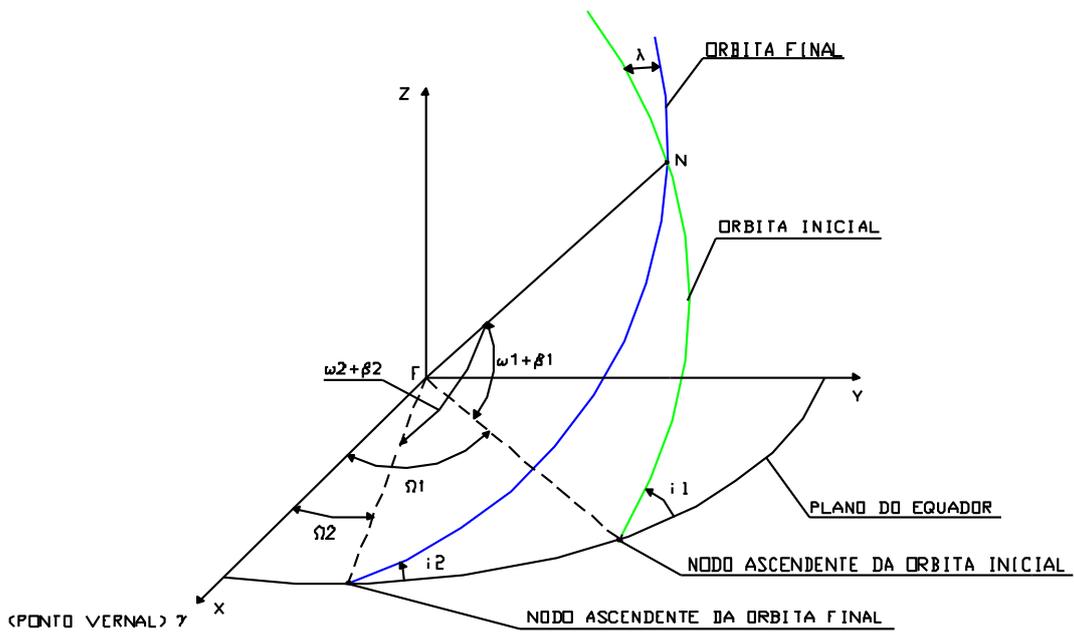


Fig. 4.3 - Geometria da manobra quando  $\Omega_1 > \Omega_2$  e  $i_1 > i_2$ .

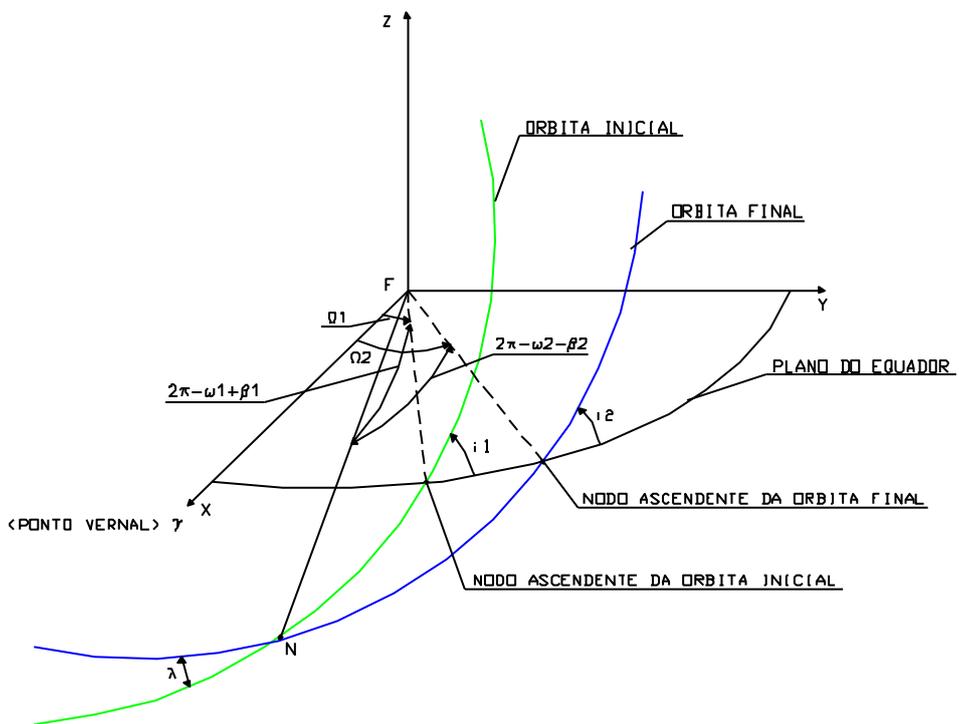


Fig. 4.4- Geometria da manobra quando  $\Omega_2 > \Omega_1$  e  $i_1 > i_2$ .

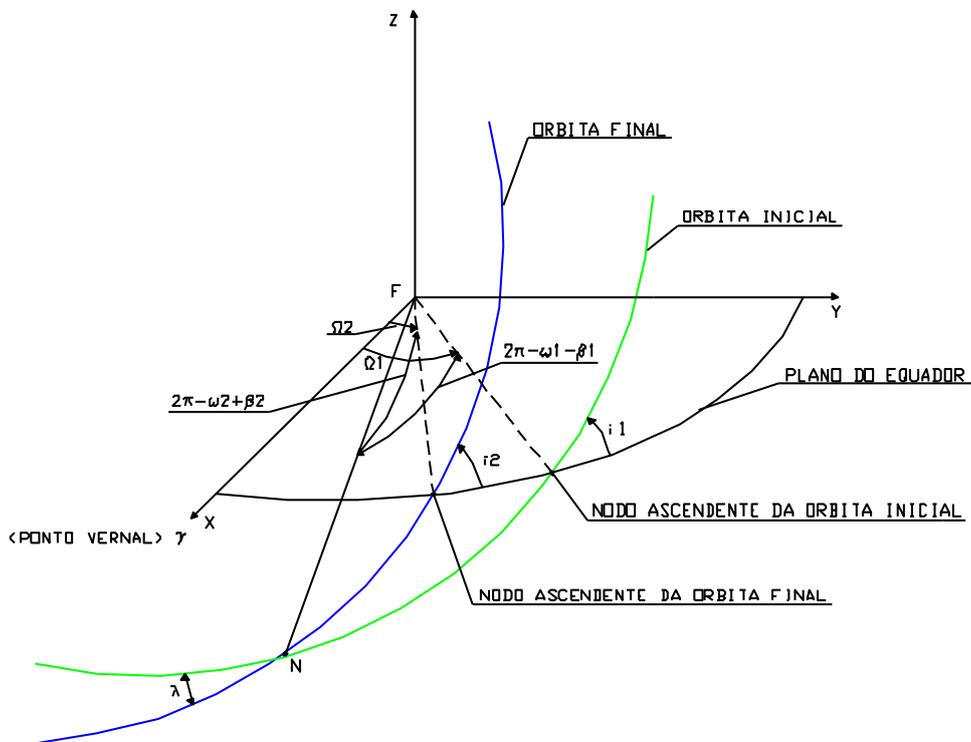


Fig. 4.5- Geometria da manobra quando  $\Omega_1 > \Omega_2$  e  $i_2 > i_1$ .

Das Figuras 4.2 a 4.5 obtemos as seguintes expressões:

$$\beta_1 = \arctan \left[ \frac{\sin(\Omega_2 - \Omega_1) \operatorname{tg}(180^\circ - i_2)}{\sin i_1 + \operatorname{tg}(180^\circ - i_2) \cos i_1 \cos(\Omega_2 - \Omega_1)} \right] - \omega_1 \quad (4.32)$$

$$\beta_2 = \arctan \left[ \frac{\sin(\Omega_2 - \Omega_1) \operatorname{tg} i_1}{\sin i_2 + \operatorname{tg} i_1 \cos(180^\circ - i_2) \cos(\Omega_2 - \Omega_1)} \right] - \omega_2 \quad (4.33)$$

$$\lambda = \arcsin \left[ \frac{\sin(\Omega_2 - \Omega_1) \sin i_1}{\sin(\omega_2 + \beta_2)} \right] = \arcsin \left[ \frac{\sin(\Omega_2 - \Omega_1) \sin i_2}{\sin(\omega_1 + \beta_1)} \right] \quad (4.34)$$

Entretanto, deve ser feita uma análise de quadrante pois o sinal de  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\lambda$  pode variar quando consideramos diferentes geometrias. Para o caso coplanar  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\lambda$  são iguais a zero.

Dependendo do local onde a manobra é realizada podemos ter ainda três casos possíveis. Quando a aplicação do primeiro impulso ocorre antes do ponto  $N$  e a aplicação do segundo impulso ocorre após o ponto  $N$ , como pode ser visto na Figura 4.6, o valor do ângulo de transferência  $\Delta$  pode ser calculado a partir do triângulo esférico mostrado na Figura 4.7.

Quando os dois impulsos são aplicados após o ponto  $N$ , como pode ser visto na Figura 4.8, o valor do ângulo de transferência  $\Delta$  pode ser calculado a partir do triângulo esférico mostrado na Figura 4.9.

Quando os dois impulsos são aplicados antes do ponto  $N$ , como pode ser visto na Figura 4.10, o valor do ângulo de transferência  $\Delta$  pode ser calculado a partir do triângulo esférico mostrado na Figura 4.11.

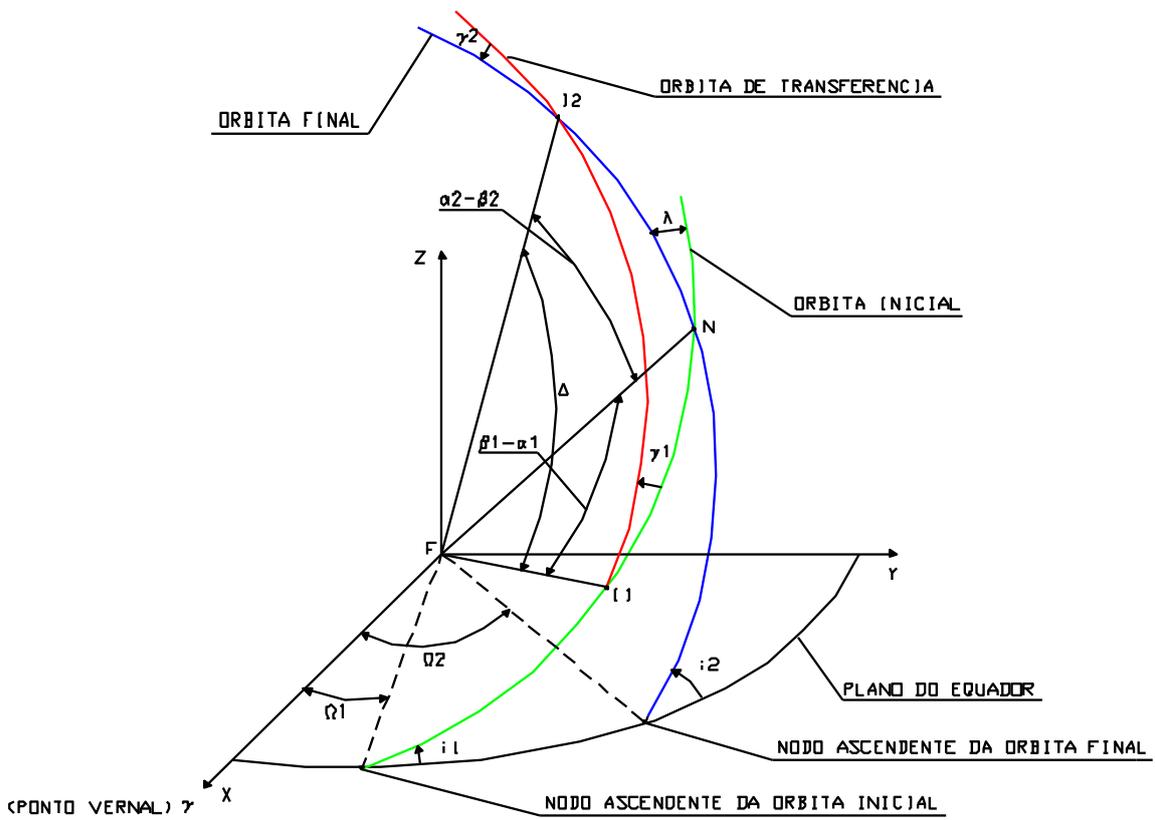


Fig. 4.6- Caso 1: impulso  $I_1$  aplicado antes do ponto  $N$  e  $I_2$  após  $N$ .

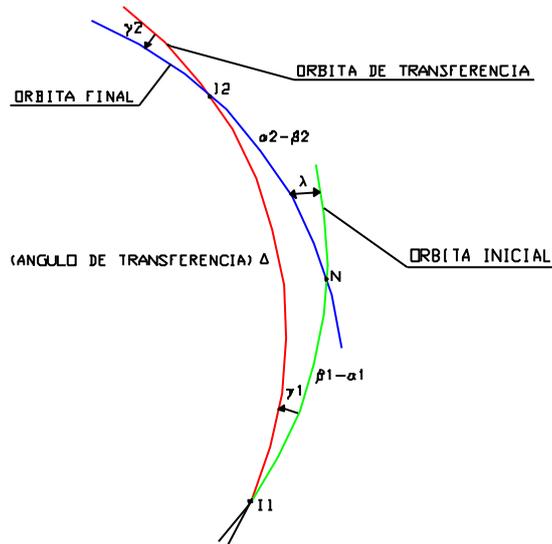


Fig. 4.7- Triângulo esférico referente ao caso 1.

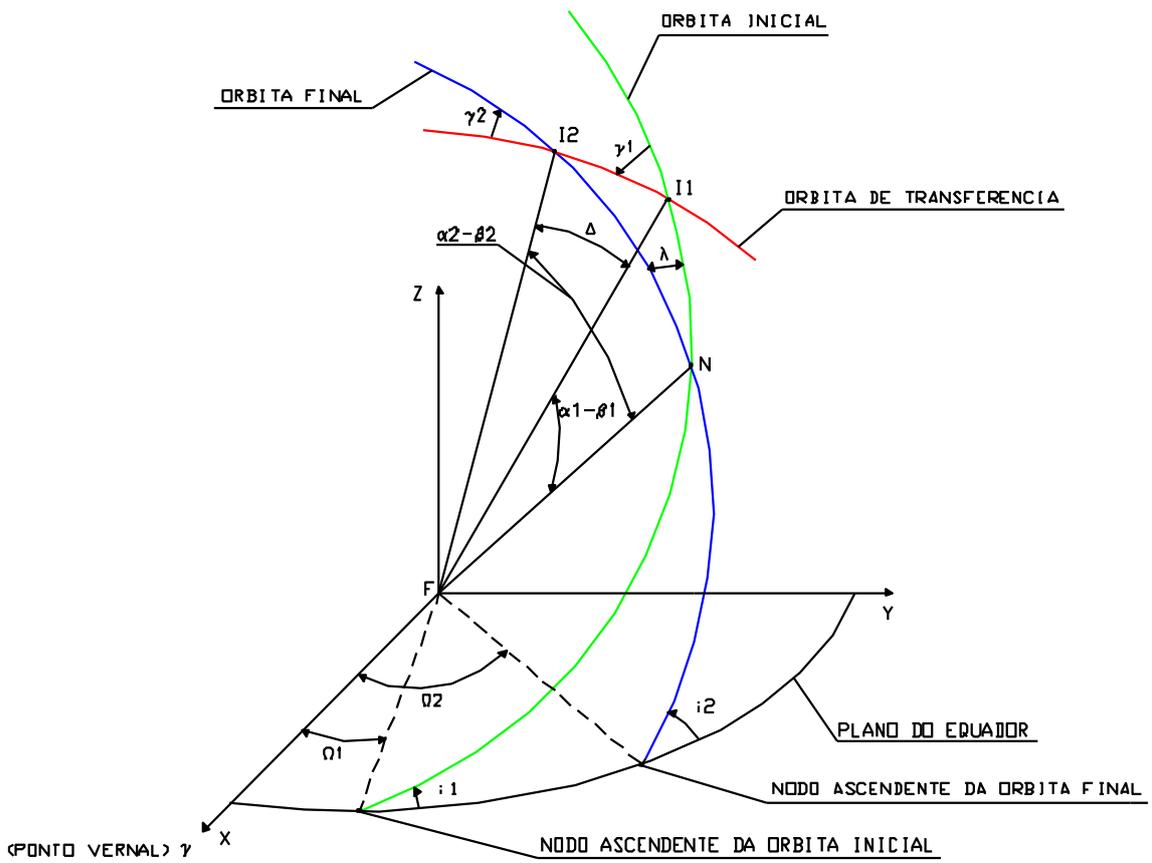


Fig. 4.8- Caso 2: ambos os impulsos aplicados após o ponto  $N$ .

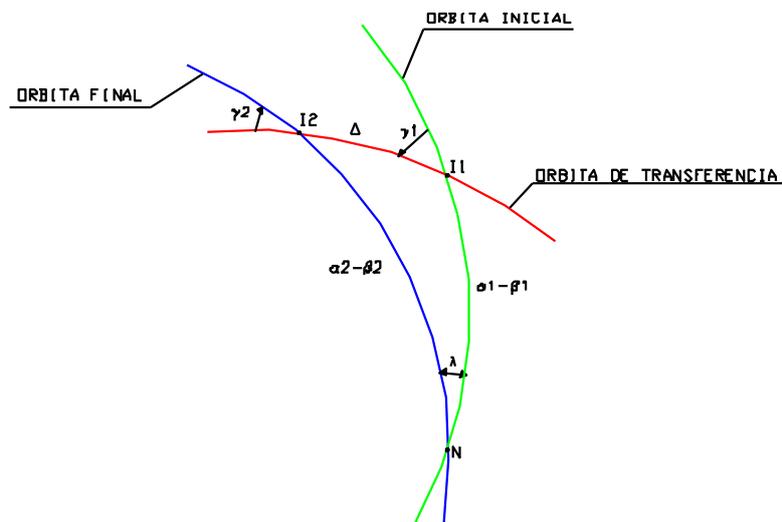


Fig. 4.9- Triângulo esférico referente ao caso 2.

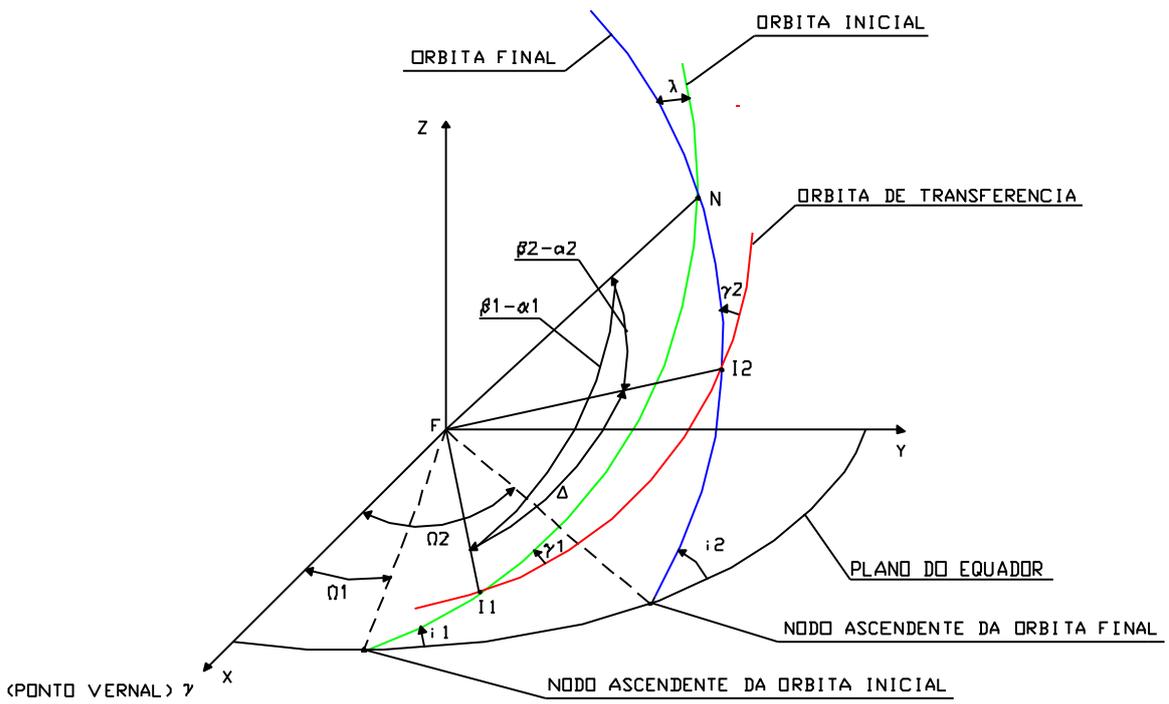


Fig. 4.10- Caso 3: ambos os impulsos aplicados antes do ponto  $N$ .

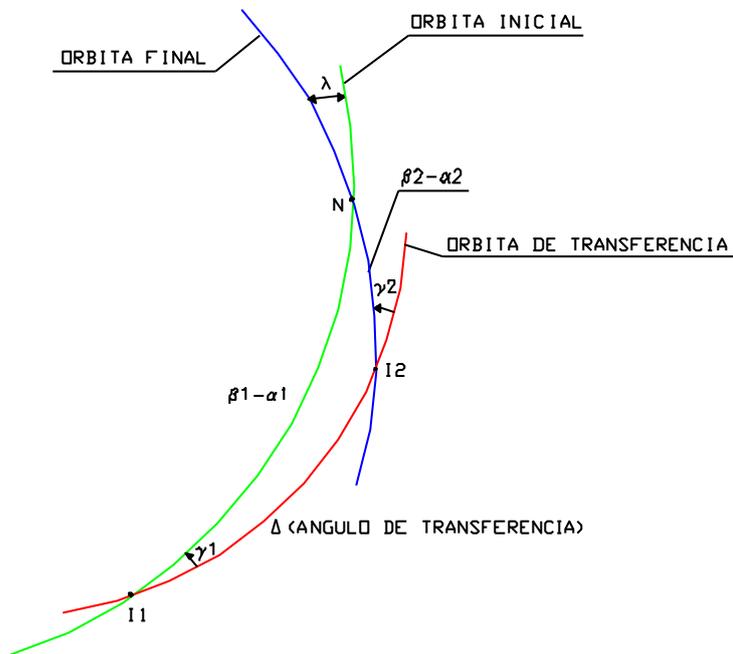


Fig. 4.11- Triângulo esférico referente ao caso 3.

Das Figuras 4.6 a 4.11 obtemos as seguintes expressões:

$$\cos \Delta = \cos(\beta_1 - \alpha_1) \cos(\alpha_2 - \beta_2) + \sin(\beta_1 - \alpha_1) \sin(\alpha_2 - \beta_2) \cos(180^\circ - \lambda) \quad (4.35)$$

$$\sin \Delta = \frac{\sin(\alpha_2 - \beta_2) \sin(180^\circ - \lambda)}{\sin B} \quad (4.36)$$

$$B = \arctg \left[ \frac{\sin(180^\circ - \lambda)}{\sin(\beta_1 - \alpha_1) \cotg(\alpha_2 - \beta_2) - \cos(\beta_1 - \alpha_1) \cos(180^\circ - \lambda)} \right] \quad (4.37)$$

Entretanto, novamente deve ser feita uma análise de quadrante para definir corretamente o ângulo de transferência  $\Delta$ . Para o caso coplanar o ângulo de transferência é calculado por:

$$\Delta = \theta_2 - \theta_1 \quad (4.38)$$

em que,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \omega_1 + f_1 \\ \theta_2 &= \omega_2 + f_2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Consideramos novamente as Equações 3.3 a 3.6 para o caso de propulsores capazes de aplicar empuxos instantâneos e de magnitude infinita e, considerando ainda, que a manobra será efetuada por meio de duas mudanças impulsivas de velocidade temos:

$$V = \Delta v_1 + \Delta v_2 = F(u(\cdot)) \quad (4.40)$$

$$T = G(u(\cdot)) \quad (4.41)$$

Portanto, devemos minimizar  $V$  para um dado  $T$  considerando a seguinte relação de vínculo:

$$T - T_0 = 0 \quad (4.42)$$

Dessa forma, devemos considerar o índice de performance dado por:

$$J = V + k(T - T_0) \quad (4.43)$$

em que  $k$  é constante. Se  $\xi$  é qualquer uma das variáveis independentes a minimização

de  $J$  conduz as condições necessárias dadas por:

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = k_1 \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \xi} + k_2 \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \quad (4.44)$$

A partir de Eckel e Vinh (1984) vemos que a solução do problema depende de três variáveis: o semi-latus rectum  $p$  da órbita de transferência e as anomalias verdadeiras  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  que definem a localização dos impulsos nas órbitas inicial e final. Portanto, temos as seguintes condições de otimalidade:

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p} + k \frac{\partial T}{\partial p} = 0 \quad (4.45a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \alpha_1} + k \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (4.45b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \alpha_2} + k \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (4.45c)$$

Eliminando o multiplicador de Lagrange temos:

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial T}{\partial p} = 0 \quad (4.46a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial T}{\partial p} = 0 \quad (4.46b)$$

Analisando as derivadas parciais e substituindo nas equações anteriores temos, após simplificações, as seguintes condições finais para a otimalidade.

$$(X_1 + Y Z e \operatorname{sen} f_2)(S_1 q_1 - T_1 e \operatorname{sen} f_1) + S_1 T_1 + \quad (4.47)$$

$$W_1 \left( \frac{W_1 - W_2}{\operatorname{sen} \Delta} q_2 - W_1 \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} \right) - \frac{W_1 Z e r_1 e_1 \operatorname{sen} \alpha_1}{q_1 p_1 \operatorname{sen} f_1 \operatorname{sen} \gamma_1} = 0$$

$$(X_2 + Y Z e \operatorname{sen} f_1)(S_2 q_2 - T_2 e \operatorname{sen} f_2) + S_2 T_2 + \quad (4.48)$$

$$W_2 \left( \frac{W_2 - W_1}{\operatorname{sen} \Delta} q_1 - W_2 \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} \right) + \frac{W_2 Z e r_2 e_2 \operatorname{sen} a_2}{q_2 p_2 \operatorname{sen} f_2 \operatorname{sen} \gamma_2} = 0$$

que utilizam as seguintes relações:

$$r_1 = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos \alpha_1} \quad (4.49)$$

$$r_2 = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos \alpha_2} \quad (4.50)$$

$$f_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \cot \Delta - \frac{r_1(p - r_2)}{r_2(p - r_1) \operatorname{sen} \Delta} \right] \quad (4.51)$$

$$f_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{r_2(p - r_1)}{r_1(p - r_2) \operatorname{sen} \Delta} - \cot \Delta \right] \quad (4.52)$$

$$p = \frac{r_1 r_2 (\cos f_1 - \cos f_2)}{r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2} \quad (4.53)$$

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos f_1 - r_2 \cos f_2} \quad (4.54)$$

$$\gamma_1 = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left[ -\frac{\operatorname{sen}(\beta_2 - \alpha_2)}{\operatorname{sen} \Delta} \operatorname{sen} \phi \right] \quad (4.55)$$

$$\gamma_2 = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left[ -\frac{\operatorname{sen}(\beta_1 - \alpha_1)}{\operatorname{sen} \Delta} \operatorname{sen} \phi \right] \quad (4.56)$$

$$x_1 = \sqrt{\mu} \left( \frac{e}{\sqrt{p}} \operatorname{sen} f_1 - \frac{e_1}{\sqrt{p_1}} \operatorname{sen} \alpha_1 \right) \quad (4.57)$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{r_1} (\sqrt{p} - \sqrt{p_1} \cos \gamma_1) \quad (4.58)$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{\mu p_1}}{r_1} \text{sen } \gamma_1 \quad (4.59)$$

$$x_2 = \sqrt{\mu} \left( \frac{e_2}{\sqrt{p_2}} \text{sen } \alpha_2 - \frac{e}{\sqrt{p}} \text{sen } f_2 \right) \quad (4.60)$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{\mu}}{r_2} (\sqrt{p_2} \cos \gamma_2 - \sqrt{p}) \quad (4.61)$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{\mu p_2}}{r_2} \text{sen } \gamma_2 \quad (4.62)$$

$$h_1 = (y_1^2 + z_1^2)^{1/2} \quad (4.63)$$

$$h_2 = (y_2^2 + z_2^2)^{1/2} \quad (4.64)$$

$$V_1 = (x_1^2 + h_1^2)^{1/2} \quad (4.65)$$

$$V_2 = (x_2^2 + h_2^2)^{1/2} \quad (4.66)$$

$$S_1 = \frac{x_1}{V_1} \quad (4.67)$$

$$S_2 = \frac{x_2}{V_2} \quad (4.68)$$

$$T_1 = \frac{y_1}{V_1} \quad (4.69)$$

$$T_2 = \frac{y_2}{V_2} \quad (4.70)$$

$$W_1 = \frac{z_1}{V_1} \quad (4.71)$$

$$W_2 = \frac{z_2}{V_2} \quad (4.72)$$

$$q_1 = \frac{p}{r_1} \quad (4.73)$$

$$q_2 = \frac{p}{r_2} \quad (4.74)$$

$$E_1 = \arccos\left(\frac{e + \cos f_1}{1 + e \cos f_1}\right) \quad (4.75)$$

$$E_2 = \arccos\left(\frac{e + \cos f_2}{1 + e \cos f_2}\right) \quad (4.76)$$

$$\text{sen } E_1 = \frac{\sqrt{1 - e^2} \text{sen } f_1}{1 + e \cos f_1} \quad (4.77)$$

$$\text{sen } E_2 = \frac{\sqrt{1 - e^2} \text{sen } f_2}{1 + e \cos f_2} \quad (4.78)$$

$$M_1 = E_1 - e \text{sen } E_1 \quad (4.79)$$

$$M_2 = E_2 - e \text{sen } E_2 \quad (4.80)$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (4.81)$$

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (M_2 - M_1 + 2\pi N) \quad (4.82)$$

$$X_1 = \frac{S_1 \cos \Delta - S_2}{\text{sen } \Delta} + T_1 \quad (4.83)$$

$$X_2 = \frac{S_1 - S_2 \cos \Delta}{\text{sen } \Delta} + T_2 \quad (4.84)$$

$$Y = \frac{1}{(1 - e^2) \text{sen } \Delta} \left[ 3e^2 T \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} - 2e \left( \frac{1}{q_2 \text{sen } f_2} - \frac{1}{q_1 \text{sen } f_1} \right) + \cotg f_2 - \cotg f_1 \right] \quad (4.85)$$

$$Z = \frac{q_2 X_2 - q_1 X_1 + (S_1 + S_2) \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2}}{\cotg f_1 - \cotg f_2 + Y \left[ (1 + e^2) \operatorname{sen} \Delta + 2e (\operatorname{sen} f_2 - \operatorname{sen} f_1) \right]} \quad (4.86)$$

Portanto, temos um sistema de três equações não lineares com três incógnitas formado pelas Equações 4.42, 4.47 e 4.48, cuja resolução fornece a solução para o problema da transferência orbital bi-impulsiva não coplanar com restrição de tempo e mínimo consumo de combustível.

Para o caso coplanar, no lugar das equações 4.47 e 4.48 devemos utilizar as equações 4.86 e 4.87 para obter as condições finais para a otimalidade.

$$(X_1 + YZ \operatorname{sen} f_2) (S_1 q_1 - T_1 e \operatorname{sen} f_1) + S_1 T_1 - \sqrt{\frac{\mu}{p_1}} \frac{Z e e_1 \operatorname{sen} \alpha_1}{q_1 V_1 \operatorname{sen} f_1} = 0 \quad (4.87)$$

$$(X_2 + YZ \operatorname{sen} f_1) (S_2 q_2 - T_2 e \operatorname{sen} f_2) + S_2 T_2 + \sqrt{\frac{\mu}{p_2}} \frac{Z e e_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{q_2 V_2 \operatorname{sen} f_2} = 0 \quad (4.88)$$

Para a implementação deste método, da mesma forma que o método anterior, inicialmente foram utilizadas rotinas encontradas em Press et al. (1992) que utilizam o método de Newton-Raphson para resolver o sistema de equações não lineares dado pelas Equações 4.41, 4.46 e 4.47, como pode ser visto em Rocco (1997). Entretanto, posteriormente utilizamos o método de mínimos quadrados por meio da função `leastsq(data,[x(1) x(2) x(3),opt])` do MATLAB para resolver o sistema de equações. Dessa forma foi possível obter resultados de forma mais rápida e precisa do que quando utilizamos o método Newton-Raphson. Outros métodos numéricos também podem ser utilizados, porém o método de mínimos quadrados forneceu resultados suficientemente satisfatórios.



## **CAPÍTULO 5**

### **METODOLOGIAS EXISTENTES NA LITERATURA PARA A TOMADA DE DECISÃO DO PROBLEMA MULTIOBJETIVO**

Na caixa de decisão, os satélites a serem manobrados devem ser selecionados. Para isto, devemos verificar se as diferenças entre os elementos nominais e atuais estão dentro da tolerância ou não, e se estas diferenças estão aumentando ou diminuindo com o passar do tempo. Além disso, deve ser verificado não apenas o consumo de combustível e o tempo gasto na manobra para cada satélite individualmente, mas também, o consumo e o tempo gasto por todos os satélites a serem manobrados; e ainda, como estas manobras afetam a missão (área de cobertura, interrupção da operação dos satélites, etc.). Para determinar o consumo de combustível devem ser efetuados cálculos para determinar a manobra ótima de transferência para cada satélite. Dessa forma, é necessária uma realimentação da caixa de decisão depois das manobras de transferências ótimas terem sido obtidas na caixa de cálculo. Essa realimentação se faz necessária pois podem ocorrer situações onde, penalizando o consumo de combustível ou o tempo gasto para um determinado satélite, podemos obter uma economia quando consideramos todo o conjunto. Assim, a caixa de decisão deve ter capacidade de comparar todas as possíveis combinações de manobras e escolher aquela que seja factível e que minimize o consumo de combustível de toda a constelação. Assim temos um problema multiobjetivo.

#### **5.1 - O PROBLEMA MULTIOBJETIVO**

A análise de problemas multiobjetivos se desenvolveu, principalmente, na Economia, na Sociologia, na Psicologia e na Pesquisa Operacional. Entretanto, é possível encontrar problemas multiobjetivos nas mais diversas áreas. Na verdade, lidamos com problemas multiobjetivos o tempo todo: quando tomamos a maioria das decisões do dia a dia estamos lidando com problemas desse tipo. O simples ato de escolher qual prato pedir durante o almoço poderia se tornar um grande problema se tentássemos otimizá-lo utilizando uma abordagem multiobjetivo: quais fatores devemos levar em consideração na escolha? O preço, o sabor, a aparência ou os nutrientes que

esse prato pode fornecer? Talvez o prato mais barato seja o menos saboroso, o mais caro o menos nutritivo e o mais saboroso o de pior aparência. Diante destas questões fica difícil escolher uma solução que otimize todos os fatores. Mas é claro que não perdemos todos os dias tanto tempo assim na escolha do nosso almoço, de alguma forma encontramos a solução para esse problema sem muito esforço. Mas não é possível afirmar que essa solução seja sempre ótima, simplesmente é a solução que naquele momento, por algum motivo, talvez externo ao problema, pareceu ser a melhor solução. Porém, para aplicações mais relevantes do que a escolha do melhor prato, seria bom se pudéssemos encontrar a solução ótima sistematicamente. Para aplicações em Engenharia por exemplo, não podemos escolher a solução para um problema de forma aleatória e incerta; seria conveniente aplicar uma metodologia capaz de encontrar a solução que atenda da melhor forma possível todos os objetivos, mas essa é uma tarefa muito complexa principalmente quando lidamos com problemas onde os objetivos são conflitantes, ou seja, para atender um determinado objetivo os outros objetivos obrigatoriamente serão penalizados. Segundo a Teoria de Jogos Diferenciais (Isaacs, 1965) podemos afirmar que temos um jogo do tipo perde-ganha: para um jogador ser vitorioso, o outro tem necessariamente que ser derrotado. No algoritmo desenvolvido neste trabalho consideramos um caso intermediário. Talvez para aplicações em Engenharia seja mais conveniente um empate entre os jogadores.

De acordo com Cohon (1978), a otimização estática de problemas com apenas um objetivo pode ser definida da seguinte forma:

$$\text{Maximizar } Z(\mathbf{x}) \text{ em relação a } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (5.1)$$

$$\text{Sujeito a } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\text{Dados } Z(\cdot), g_i(\cdot)$$

ou

$$\text{Maximizar } Z(\mathbf{x}) \text{ em relação a } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad (5.2)$$

$$\text{Sujeito a } \mathbf{x} \in \mathbf{F}_d$$

Dados  $Z(\cdot)$ ,  $F_d$

em que  $F_d$  é a área praticável do espaço de decisão e é definida por:

$$F_d = \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m; x \geq 0\} \quad (5.3)$$

Um problema multiobjetivo pode ser definido por:

$$\text{Maximizar } \mathbf{Z}(x) = [Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_p(x)] \quad (5.4)$$

Sujeito a  $x \in F_d$

Portanto, a função objetivo, neste caso, é um vetor com dimensão  $p$ .

Em problemas de otimização mono-objetivo, as soluções possíveis ( $x \in F_d$ ) podem ser comparadas com relação à função objetivo, ou seja, dadas duas soluções  $x^1$  e  $x^2$ , candidatas à solução ótima, podemos comparar  $Z(x^1)$  com  $Z(x^2)$  e determinar a solução ótima  $x^*$  de forma que não exista  $x \in F_d$  tal que  $Z(x) > Z(x^*)$ .

Em problemas de otimização multiobjetivo, em geral, não é possível comparar todas as possíveis soluções, pois a comparação com base em um determinado objetivo pode ser conflitante quando comparamos com base em outro objetivo. Dessa forma, supondo que:

$$\mathbf{Z}(x^1) = [Z_1(x^1), Z_2(x^1)] \text{ e } \mathbf{Z}(x^2) = [Z_1(x^2), Z_2(x^2)] \quad (5.5)$$

$x^1$  é melhor que  $x^2$  se e apenas se:

$$Z_1(x^1) > Z_1(x^2) \text{ e } Z_2(x^1) \geq Z_2(x^2) \quad (5.6)$$

ou

$$Z_1(x^1) \geq Z_1(x^2) \text{ e } Z_2(x^1) > Z_2(x^2). \quad (5.7)$$

Se  $Z_1(x^1) > Z_1(x^2)$  e  $Z_2(x^1) < Z_2(x^2)$  não podemos concluir nada a respeito de  $x^1$  e  $x^2$ , ou seja, as soluções  $x^1$  e  $x^2$  não podem ser comparadas.

## 5.2 - CRITÉRIOS EXISTENTES NA LITERATURA PARA A ESCOLHA DA SOLUÇÃO ÓTIMA PARA O PROBLEMA MULTIOBJETIVO

### 5.2.1 - CRITÉRIO DA COMBINAÇÃO DE OBJETIVOS POR MEIO DE FATORES DE INFLUÊNCIA (“WEIGHTING METHOD”)

Uma solução para o problema multiobjetivo poderia ser a combinação de todos os objetivos em um único objetivo formado pelos objetivos originais, onde cada um deles é multiplicado por um fator de influência (de peso ou de importância):

$$Z_{Médio}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n w_i Z_i(\mathbf{x}), \text{ para } w_i > 0 \quad (5.8)$$

$$w_i = \frac{\partial Z_{Médio}(\mathbf{x})}{\partial Z_i(\mathbf{x})} \quad (5.9)$$

em que  $w_i$  são multiplicadores de Lagrange, ou fatores de influência, e  $Z_{Médio}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  é uma função dependente de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{w}$  que substitui o conjunto de objetivos  $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ . Assim, o problema pode ser tratado como um problema de otimização com apenas um objetivo e portanto a formulação multiobjetivo não mais se aplica. Na prática, a maioria dos problemas multiobjetivos são tratados dessa maneira: inicialmente utiliza-se uma abordagem multiobjetivo e depois aplicam-se os fatores de influência fazendo com que o problema recaia em um problema com apenas um objetivo.

A utilização dos fatores de influência elimina a necessidade do uso de um algoritmo de otimização mais complexo, mas introduz novos parâmetros  $\mathbf{w}$  que devem ser encontrados e, até, otimizados. Dessa forma, a solução passa a depender da correta determinação desses fatores de influência, portanto, a determinação de  $\mathbf{w}$  torna-se um processo de otimização multiobjetivo por si só, ou seja, a utilização de fatores de influência pode não contribuir totalmente na solução do problema. Por outro lado, se em um determinado problema multiobjetivo os parâmetros  $\mathbf{w}$  forem conhecidos a priori, a utilização do critério da combinação dos objetivos por meio de fatores de influência torna-se muito eficiente, porém não se trata mais de uma otimização multiobjetivo já que, na realidade, temos apenas o objetivo  $Z_{Médio}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  a ser otimizado.

### 5.2.2 - CRITÉRIO DOS OBJETIVOS VINCULADOS (“THE CONSTRAINT METHOD”)

Neste critério a solução para o problema multiobjetivo é encontrada obtendo a solução ótima para um determinado objetivo quando os outros objetivos são vinculados. Para o caso da maximização de  $Z_n$  objetivos temos:

$$\text{Maximizar } \mathbf{Z}(\mathbf{x}) = [Z_1(\mathbf{x}), Z_2(\mathbf{x}), \dots, Z_p(\mathbf{x})] \quad (5.10)$$

$$\text{Sujeito a } \mathbf{x} \in \mathbf{F}_d$$

O problema vinculado é dado por:

$$\text{Maximizar } Z_h(\mathbf{x}) \quad (5.11)$$

$$\text{Sujeito a } \mathbf{x} \in \mathbf{F}_d$$

$$Z_k(\mathbf{x}) \geq L_k$$

em que  $k = 1, 2, \dots, h - 1$  e  $L_k$  é um valor determinado a priori.

O objetivo a ser maximizado é escolhido arbitrariamente. Para ilustrar este critério, considere a Figura 5.1 que representa um problema multiobjetivo de dimensão 2, onde pretendemos maximizar  $Z_1$  e  $Z_2$  simultaneamente.

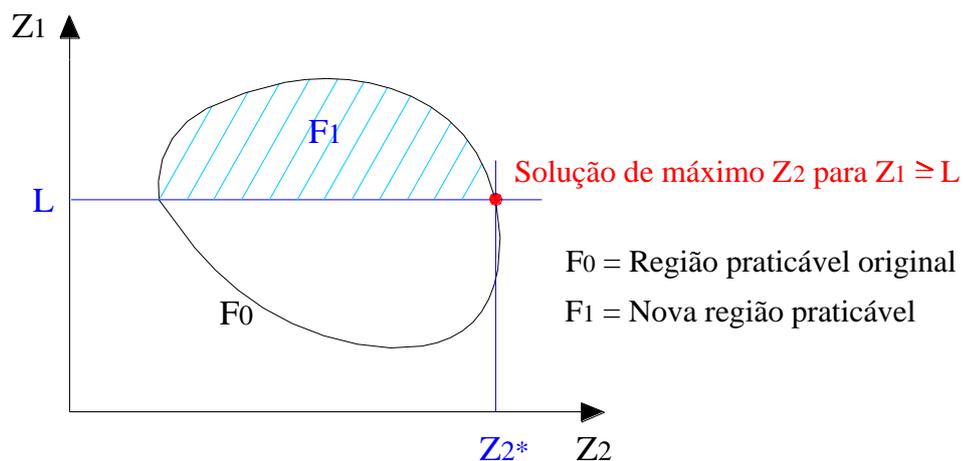


Fig. 5.1 - Critério dos objetivos vinculados.

Se o objetivo  $Z_1$  for vinculado, como mostra a Figura 5.1, temos uma redução do espaço praticável de soluções para o problema. Dessa forma, para um dado  $Z_1$  facilmente obtemos  $Z_2$ . Entretanto, esta formulação para o problema não é uma formulação multiobjetivo pois, a medida que escolhemos um dos objetivos para ser otimizado e vinculamos todos os outros, transformamos o problema em uma otimização com apenas um objetivo. Além do mais, este critério só pode ser utilizado se todos os  $L_k$  forem conhecidos a priori e, da mesma forma que no critério dos fatores de influência, a determinação de  $L_k$  pode ser um processo de otimização por si só.

### 5.2.3 - CRITÉRIO BASEADO EM APROXIMAÇÕES LOCAIS (“THE SURROGATE WORTH TRADEOFF METHOD”)

Este critério é baseado em aproximações locais efetuadas por um especialista (“decision maker”) enquanto o processo de otimização ocorre. O procedimento de otimização é uma variação do Critério dos Objetivos Vinculados (“The Constraint Method”) apresentado no item anterior. Dado um problema com  $n$  objetivos,  $n - 2$  objetivos são fixados em valores definidos a priori, e os outros dois são otimizados sendo que, na realidade, um desses objetivos varia de acordo com o especialista enquanto o outro é otimizado. Assumindo que  $Z_2$  deve ser maximizado e que  $Z_1$  pode assumir diferentes valores, o problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\text{Maximizar } Z_2(\mathbf{x}) \quad (5.12)$$

$$\text{Sujeito a } \mathbf{x} \in F_d$$

$$Z_1(\mathbf{x}) \geq L_1$$

$$Z_k(\mathbf{x}) = L_k$$

em que  $k = 3, 4, \dots, n$  e  $L_k$  é um valor determinado a priori.

Porém, este critério apresenta as mesmas deficiências do Critério dos Objetivos Vinculados; e ainda, temos neste caso que considerar a atuação de um especialista durante o processo de otimização, o que faz com que a solução para o problema seja

particular para cada especialista. Assim, não podemos afirmar que a solução obtida é a solução ótima para o problema.

#### 5.2.4 - MÉTODO SIMPLEX MULTIOBJETIVO

O Método Simplex Multiobjetivo é um algoritmo que fornece o conjunto de soluções *não inferiores* para um problema multiobjetivo, ou seja, o método na realidade não fornece a melhor solução, mas encontra a pior solução dentre todas as alternativas e classifica todas as outras como soluções *não inferiores*. Entretanto, ele só pode ser utilizado para o caso linear, portanto não pode ser utilizado no problema de otimização de manobras orbitais aplicadas em uma constelação de satélites, pois este problema não é linear.

#### 5.2.5 - CRITÉRIO BASEADO EM DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS COM RELAÇÃO A UMA SOLUÇÃO IDEAL

Este critério (Yu, 1973 e Zeleny, 1974) baseia-se na idéia de que a melhor solução é aquela que apresenta a menor distância com relação a uma solução ideal (solução utópica) definida a priori. Assim o critério inicia-se com a definição dessa solução ideal composta pelas soluções individuais, que geralmente é uma solução fora do espaço praticável de soluções mesmo para domínios convexos. A Figura 5.2 ilustra esse critério para o caso de um problema multiobjetivo, onde deseja-se maximizar  $Z_1$  e  $Z_2$  simultaneamente.

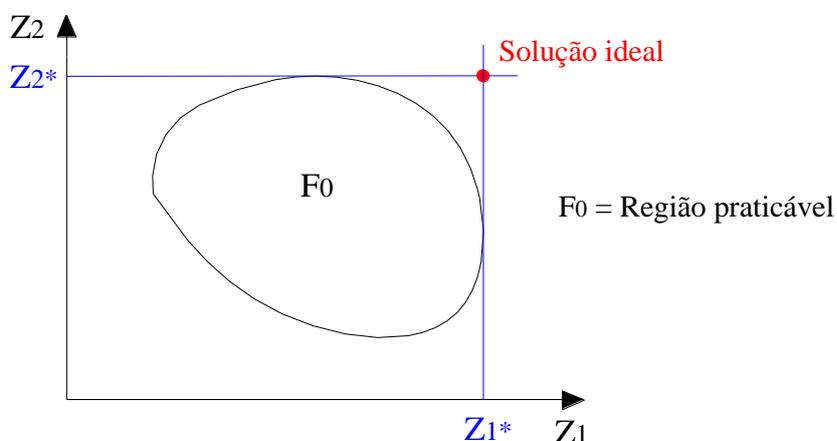


Fig. 5.2 – Solução ideal para um problema com dois objetivos.

A solução ótima seria a solução do espaço praticável de soluções que apresentasse a menor distância  $d$  com relação à solução ideal, como pode ser visto na Figura 5.3.

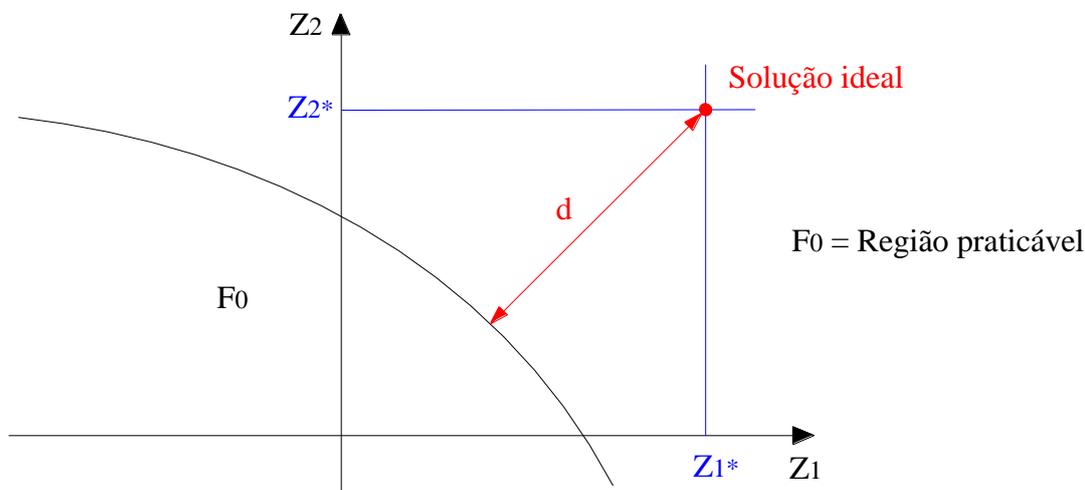


Fig. 5.3 – Distância com relação à solução ideal.

O cálculo da distância  $d$  entre dois pontos  $x_1, \dots, x_p$  e  $y_1, \dots, y_p$ , segundo este critério, é dado por:

$$d_\alpha = \left[ \sum_{k=1}^p |x_k - y_k|^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.13)$$

em que  $\alpha$  varia a partir de 1 até infinito, conforme a métrica escolhida, para  $\alpha = 2$  teríamos a definição de distância Euclideana entre dois pontos.

Entretanto, este critério apresenta três deficiências básicas: 1) não utiliza medidas normalizadas (adimensionais), assim, a solução passa a depender da dimensão de cada um dos objetivos; 2) a solução ideal composta pelas soluções individuais geralmente é uma solução fora do espaço praticável de soluções mesmo para domínios convexos, como mostrado na Figura 5.2; 3) em geral, a definição da solução ideal, que é o objetivo do problema, não é uma tarefa trivial, em alguns caso é praticamente impossível determiná-la sobretudo com objetivos conflitantes. Por exemplo, no caso de manobras orbitais, onde devemos minimizar o tempo da manobra e o consumo de combustível, chegaríamos à conclusão que a solução ideal seria (0;0). Mas essa solução além de utópica é também conceitualmente incorreta, pois os objetivos são conflitantes e

portanto seria impossível obter uma solução como essa ou mesmo próxima. E, supondo que a solução com tempo e consumo iguais a zero seja a solução ótima para o problema, se ela fosse aplicada facilmente notaríamos que simplesmente o satélite não seria manobrado. Portanto, deveríamos encontrar outra solução ideal, mas isso, da mesma forma que no Critério dos Objetivos Vinculados e no Critério Baseado em Aproximações Locais, vai depender de um especialista (“decision maker”) e dessa forma a solução para o problema seria particular para cada especialista.

### 5.2.6 - CRITÉRIO DA PROGRAMAÇÃO OBJETIVA (“GOAL PROGRAMMING”)

Este critério pode ser considerado como uma variação do critério apresentado no item anterior. Ele também se baseia na idéia de que a melhor solução é aquela que apresenta a menor distância com relação a uma solução ideal, porém neste caso, ela é definida a priori por um especialista (“decision maker”), com base na experiência pessoal ou por meio de qualquer outro método subjetivo definido pelo especialista. Dessa maneira, a solução ideal não é mais a solução que apresenta o máximo (ou mínimo) valor para cada um dos objetivos, portanto ela pode estar no interior do espaço praticável de soluções. Geralmente, a distância  $d$  é calculada pela Equação 5.13, mas com  $\alpha = 1$ . Assim, o problema é definido da forma:

$$\text{Minimizar } d_1 = \sum_{k=1}^p |G_k - Z_k(\mathbf{x})| \quad (5.14)$$

$$\text{Sujeito a } \mathbf{x} \in \mathbf{F}_d$$

em que  $G_k$  representa a solução ideal definida pelo especialista.

Mas além das deficiências 1 e 3 do método anterior, neste método a determinação da solução ideal já é um processo de otimização por si só e vai depender de cada especialista, dessa forma a solução para o problema torna-se particular para cada especialista.

### 5.2.7 - CRITÉRIO DE PARETO (NÃO INFERIORIDADE)

Outra tentativa para encontrar a solução ótima do problema multiobjetivo seria o uso do critério de otimização multiobjetivo de Pareto (Carroll e Mason, 2000). Esse algoritmo pode ser usado em problemas onde os objetivos competem entre si. A solução ótima é escolhida a partir de um grupo de soluções que são consideradas igualmente boas com relação ao vetor de objetivos. O algoritmo deve selecionar, a partir de um extenso conjunto de soluções candidatas à solução ótima, um grupo de soluções que atendam um critério predefinido. Isto pode ser feito por meio de uma metodologia que compara sistematicamente as soluções candidatas à solução ótima, quando isso for possível. Uma solução  $\mathbf{x}$  apenas pode ser considerada ótima para um determinado grupo de objetivos, se uma solução melhor  $\mathbf{y}$  em todos os objetivos não existir. Esta solução  $\mathbf{x}$  é chamada *não dominada* (ou *não inferior*). Uma solução  $\mathbf{x}$  é *não dominada* se não existir uma solução  $\mathbf{y}$  tal que:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{y}) \geq \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \quad (5.15)$$

ou

$$Z_k(\mathbf{y}) \geq Z_k(\mathbf{x}), \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (5.16)$$

Se  $\mathbf{y}$  existir, então  $\mathbf{x}$  é uma solução *dominada* (ou *inferior*) e dessa forma não é considerada como sendo uma solução ótima de Pareto, ou seja, não é a melhor solução em relação a nenhum objetivo.

De acordo com Kuhn-Tucker (1951), se  $\mathbf{x}$  é uma solução *não dominada*, então devem existir multiplicadores  $u_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$  e  $w_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, p$  tais que:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{F}_d \quad (5.17)$$

$$u_i g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.18)$$

$$\sum_{k=1}^p w_k \nabla Z_k(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.19)$$

As condições de Kuhn-Tucker (Equações 5.17 a 5.19) são as condições necessárias

para a solução  $x$  ser *não dominada* (ótima) com relação a um dado objetivo. São também suficientes se  $Z_k(x)$  são funções côncavas para  $k = 1, 2, \dots, p$ ,  $F_d$  é convexa, e  $w_k > 0$  para todo  $k$ .

**Exemplo 1:** Para ilustrar esse procedimento, considere o problema com dois objetivos apresentado na Tabela 5.1 onde temos algumas alternativas de solução para o problema. Devemos escolher a alternativa que maximiza  $Z_1$  e  $Z_2$  simultaneamente.

TABELA 5.1 – 1º Exemplo de Aplicação da Metodologia de Pareto

Alternativa	$Z_1$	$Z_2$
A	10	11
B	12	10
C	9	8

Da Tabela 5.1 podemos observar que a alternativa A é a solução ótima considerando apenas o objetivo  $Z_2$ , a alternativa B é a solução ótima considerando apenas o objetivo  $Z_1$  e a alternativa C não é solução ótima com relação a nenhum objetivo. Assim, temos que as alternativas A e B são soluções *não dominadas*, e a alternativa C é uma solução *dominada* ou *inferior*. Segundo Pareto, as alternativas A e B apresentam o mais alto grau de otimalidade na resolução do problema.

**Exemplo 2:** Outro exemplo, agora com três objetivos, é dado pela Tabela 5.2, onde devemos escolher a alternativa que maximiza simultaneamente os três objetivos.

Na tabela, temos a alternativa I que nitidamente é a solução ótima para o problema, pois apresenta o valor máximo para os três objetivos  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$ . Se em um problema multiobjetivo uma alternativa de solução como essa existir a abordagem multiobjetivo torna-se desnecessária, porém uma solução deste tipo só pode ser encontrada em problemas onde os objetivos não são conflitantes. Na maioria dos problemas isto não ocorre: geralmente quando maximizamos um objetivo deixamos de maximizar os outros.

TABELA 5.2 – 2º Exemplo de Aplicação da Metodologia de Pareto.

Alternativa	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$
<i>A</i>	5	8	7
<i>B</i>	4	9	2
<i>C</i>	4	4	4
<i>D</i>	3	10	6
<i>E</i>	2	9	8
<i>F</i>	5	10	1
<i>G</i>	5	3	8
<i>H</i>	1	10	8
<i>I</i>	5	10	8

Já as alternativas *F*, *G* e *H* maximizam dois objetivos simultaneamente. A alternativa *F* maximiza  $Z_1$  e  $Z_2$ . A alternativa *G* maximiza os objetivos  $Z_1$  e  $Z_3$ . E a alternativa *H* maximiza os objetivos  $Z_2$  e  $Z_3$ . Para este tipo de solução existir o problema tem que ter dois objetivos não conflitantes, o que geralmente é difícil de ocorrer. Porém, mesmo que ocorra, não podemos afirmar que uma solução que maximiza dois objetivos é melhor que outra que não maximiza nenhum objetivo ou maximiza apenas um, pois ao contrário do caso onde os três objetivos são maximizados, agora um dos objetivos não apresenta o valor máximo e sim um valor que pode ser muito pequeno para uma determinada aplicação prática. Por exemplo, em um experimento biológico onde desejamos que uma colônia de cobaias cresça o máximo possível, devemos fornecer os três elementos básicos para a manutenção da vida na colônia: água, alimento e oxigênio. Se considerarmos que  $Z_1$  representa o suprimento de água,  $Z_2$  representa o suprimento de alimento e  $Z_3$  representa o suprimento de oxigênio, podemos analisar as alternativas *F*, *G* e *H* quanto as chances de sobrevivência da colônia. A alternativa *F* fornece o máximo de água e alimentação propiciando condições necessárias para o crescimento da colônia, entretanto, a alternativa *F* fornece o mínimo suprimento de oxigênio; portanto, à medida que o crescimento da colônia ocorre é muito provável que o suprimento de oxigênio se torne insuficiente, o que causaria a morte de toda a colônia. O mesmo raciocínio pode ser aplicado às alternativas

*G* e *H*. Assim, as alternativas *F*, *G* e *H*, dependendo da aplicação e do valor do objetivo não otimizado, podem se tornarem as piores alternativas de solução.

Na prática soluções para problemas multiobjetivos, do tipo das soluções representadas pelas alternativas *I* e mesmo *F*, *G* e *H* são muito raras, ocorrendo apenas em alguns casos particulares onde temos objetivos não conflitantes. Dessa forma iremos desconsiderar essas alternativas neste exemplo de aplicação do Critério de Pareto.

Analisando novamente a Tabela 5.2, podemos observar que a alternativa *A* é a solução ótima considerando apenas o objetivo  $Z_1$ ; as alternativas *B* e *C* não são soluções ótimas com relação a nenhum objetivo; a alternativa *D* é a solução ótima considerando apenas o objetivo  $Z_2$  e a alternativa *E* é a solução ótima considerando apenas o objetivo  $Z_3$ . Assim, temos que as alternativas *A*, *D* e *E* são soluções *não dominadas*, e as alternativas *B* e *C* são soluções *dominadas* ou *inferiores*. Desconsiderando *I*, *F*, *G* e *H*, segundo Pareto, as alternativas *A*, *D* e *E* apresentam o mais alto grau de otimalidade na resolução do problema.

**Exemplo 3:** Entretanto, se tivéssemos uma quantidade maior de alternativas poderíamos notar que existem níveis de domínio diferentes. Uma solução *dominada* sempre será inferior com relação a alguma solução *não dominada*, porém uma solução *dominada* pode ser dominada por outra solução *dominada*. Esses níveis de domínio fornecem uma ordenação da região praticável do espaço de decisão classificando as soluções em categorias com níveis de otimalidade diferentes. A Tabela 5.3 ilustra esse caso.

As alternativas *A*, *D* e *E* são soluções *não dominadas* do nível 1. Eliminando essas alternativas e continuando o processo, determinamos que as alternativas *B*, *C* e *H* são soluções *não dominadas* do nível 2, pois são as soluções ótimas para cada um dos objetivos considerados separadamente quando excluímos as soluções do nível 1. Dessa forma, as alternativas *F* e *G* são soluções *não dominadas* do nível 3 e a alternativa *I* é uma solução do nível 4.

TABELA 5.3 – 3º Exemplo de Aplicação da Metodologia de Pareto.

Alternativa		$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$
A	Nível 1	5	8	7
B	Nível 2	4	9	2
C	Nível 2	4	4	4
D	Nível 1	3	10	6
E	Nível 1	2	9	8
F	Nível 3	1	7	5
G	Nível 3	2	5	3
H	Nível 2	3	3	7
I	Nível 4	1	6	1

Usando este procedimento, podemos verificar que o processo de otimização de Pareto pode ser descrito basicamente como sendo uma procura por soluções *não dominadas*. Esta procura consiste em classificar as candidatas a solução conforme os diversos níveis de otimalidade e dessa forma obter um grupo de soluções *não dominadas* que formam um conjunto de soluções para o problema da otimização multiobjetivo.

Uma variação do Critério de Pareto seria ao invés de buscar as soluções de nível 1 buscar a solução *inferior* e, dessa forma, determinar um conjunto de soluções *não inferiores*. Este procedimento, conhecido por Método de Estimação do Conjunto *Não Inferior* (“The Noninferior Set Estimation Method NISE”) foi desenvolvido por Cohon et al. (1973) e foi aplicado principalmente para problemas com dois objetivos.

**Exemplo 4:** O procedimento de busca pela solução *inferior* está ilustrado pela Tabela 5.4, onde desejamos maximizar os três objetivos  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$ .

Neste caso, todas as alternativas de solução devem ser comparadas, sendo *inferior* aquela que não é melhor que as outras em nenhum objetivo. Para facilitar a comparação adotaremos o seguinte critério: se duas alternativas apresentam o mesmo valor para um determinado objetivo cada uma recebe 1 ponto; se uma alternativa é melhor que a outra

a maior recebe 2 pontos e a menor nenhum. Assim, comparando as alternativas  $A$  e  $B$  quanto ao objetivo  $Z_1$   $A$  é maior que  $B$  portanto recebe 2 pontos; quanto ao objetivo  $Z_2$   $B$  é maior que  $A$  e agora  $B$  recebe 2 pontos; e quanto ao objetivo  $Z_3$   $A$  é maior que  $B$  e assim  $A$  recebe mais 2 pontos. Continuando este procedimento obtemos:  $A = 16$  pontos;  $B = 10$  pontos;  $C = 7$  pontos;  $D = 14$  pontos; e  $E = 13$  pontos. Portanto a alternativa de solução *inferior* é a alternativa  $C$ . Entretanto, esse critério é nitidamente pior que o Critério de Pareto pois ele fornece um conjunto de soluções *não inferiores* que é maior que o conjunto de soluções *não dominadas* de nível 1 do Critério de Pareto, ou seja, dado um conjunto de alternativas para solução de um problema multiobjetivo o Critério NISE apenas seleciona a pior alternativa, segundo Cohon et al. (1978).

TABELA 5.4 – Procedimento de Busca da Solução *Inferior*.

Alternativa		$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$
$A$	<i>Não Inferior</i>	5	8	7
$B$	<i>Não Inferior</i>	4	9	2
$C$	<i>Inferior</i>	4	4	4
$D$	<i>Não Inferior</i>	3	10	6
$E$	<i>Não Inferior</i>	2	9	8

**Exemplo 5:** Para ilustrar o Critério de Pareto aplicado às manobras orbitais, apresentamos na Tabelas 5.5 diversas manobras que podem ser executadas por um satélite. Cada uma das manobras requer uma variação de velocidade  $\Delta v$ , gasta um tempo  $T$  e gera um vínculo de posição  $\delta\theta$ . Desejamos encontrar uma manobra que minimiza  $\delta\theta$ ,  $\Delta v$  e  $T$ , porém estes objetivos são conflitantes. Portanto, não existe uma solução que minimize simultaneamente os três objetivos. Assim adotamos a metodologia de otimização de Pareto e selecionamos as soluções *não dominadas* para o problema.

Examinando a Tabela 5.5, podemos selecionar as manobras 4, 12, e 1 como soluções *não dominadas*, pois minimizam  $\delta\theta$ ,  $\Delta v$  e  $T$  respectivamente. Porém, podemos continuar a classificação das soluções e obter outros grupos com níveis diferentes de otimalidade: nível 1, manobras 4, 12 e 1; nível 2, manobras 5, 11 e 2; nível

3, manobras 6, 10 e 3; nível 4: manobras 7 e 9; nível 5: manobra 8. Com esta classificação podemos escolher a manobra que melhor satisfaz os vínculos. De acordo com Carroll e Mason (2000), nós poderíamos escolher qualquer uma das manobras do nível de otimalidade 1 que obteríamos o nível mais alto de otimalidade de Pareto na satisfação do problema.

Este critério vem sendo amplamente usado desde sua proposição por Pareto (1909), com poucas ou nenhuma alteração/aperfeiçoamento significativo. Alguns autores utilizam o Critério de Pareto para encontrar as soluções de nível 1 mas acabam adotando pesos ou fatores de influência para escolher uma das soluções do nível 1. Assim, a aplicação do Critério de Pareto perde sua função, já que na realidade o critério que esta sendo usado é o Critério da Combinação de Objetivos por Meio de Fatores de Influência, que foi apresentado no item anterior.

Portanto, o Critério de Pareto fornece um conjunto de soluções candidatas à solução ótima, mas não é capaz de encontrar a melhor solução dentro deste conjunto.

TABELA 5.5 – Manobras Ótimas do 5º Exemplo.

	$\delta\theta$	$\Delta v$	$T$
1	0,565637	1,07333	1660
2	0,445267	1,02667	1700
3	0,314329	0,99600	1800
4	0,118357	0,88733	2110
5	0,217551	0,85493	2250
6	0,241902	0,84267	2305
7	0,275673	0,80400	2550
8	0,278017	0,79867	2600
9	0,291305	0,78667	2705
10	0,289064	0,77867	2800
11	0,314594	0,76400	2910
12	0,337307	0,76212	2990

## CAPÍTULO 6

### METODOLOGIA PROPOSTA PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA

#### MULTIOBJETIVO: CRITÉRIO DA MENOR PERDA

Para aplicações práticas, como foi mencionado anteriormente, seria conveniente aplicar uma metodologia capaz de encontrar a solução que atenda da melhor forma possível todos os objetivos. O método de otimização de Pareto nos fornece um conjunto de soluções onde, segundo Pareto, cada uma das soluções apresenta o mesmo grau de otimalidade. O conjunto de soluções do nível de otimalidade 1 do 5º Exemplo do capítulo anterior é composto pelas manobras 4, 12 e 1. Mas qual das três manobras deveríamos escolher? Todas elas são soluções ótimas para um certo objetivo; na medida que otimizamos um dos objetivos pioramos os outros. Se escolhermos qualquer uma dessas soluções, também estaríamos escolhendo um certo objetivo como prioridade, e deste modo estaríamos voltando ao problema da escolha de fatores de influência para os objetivos, o que é um processo de otimização por si só. Deste modo, o algoritmo de otimização de Pareto torna-se incompleto e até desnecessário pois poderíamos ter selecionado os fatores de influência antes do processo de otimização e decidir qual é a melhor manobra a ser usada. Diante deste problema parece que a solução ótima não é possível de ser encontrada, a não ser que a definição de solução ótima, para o problema multiobjetivo, seja alterada. Assim a definição para solução ótima multiobjetivo poderia ser: a solução de menor perda para todos os objetivos envolvidos. Ou ainda, poderíamos chamar esta solução de solução sub-ótima do problema multiobjetivo, já que a solução ótima propriamente dita, utilizando a definição “clássica” de solução ótima, não é conhecida e talvez nem seja possível obtê-la.

Entretanto, se desenharmos em um gráfico tridimensional os pontos referentes às manobras 4, 12 e 1, e 5, 11 e 2, para os níveis 1 e 2, respectivamente, obtemos o gráfico mostrado na Figura 6.1, onde os triângulos azul e verde representam os níveis de otimalidade de Pareto. A Figura 6.2 mostra triângulos referentes aos níveis 1, 2 e 3. Os vértices dos triângulos representam soluções ótimas para cada um dos objetivos em cada um dos níveis. Estas soluções são soluções extremas, pois cada uma delas considera só

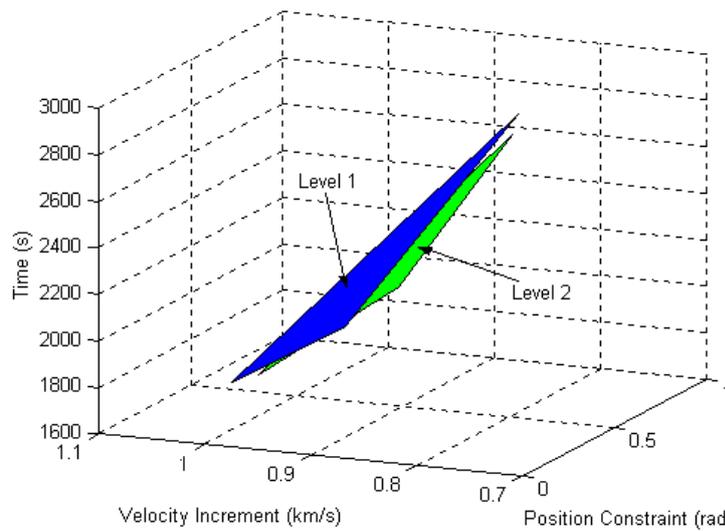


Fig. 6.1 – Soluções Para os Níveis 1 e 2 do 5º Exemplo.

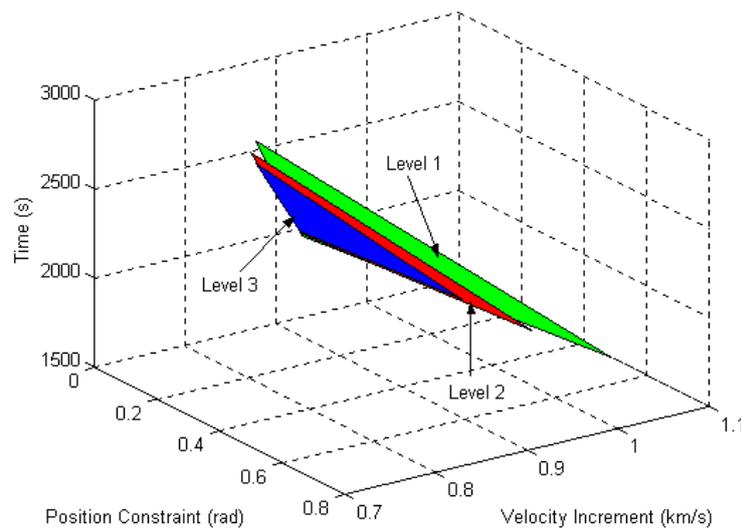


Fig. 6.2 – Soluções Para os Níveis 1, 2 e 3 do 5º Exemplo.

um objetivo como prioridade. Dessa forma, para obter uma solução que não seja extrema e portanto não assuma nenhum objetivo como prioridade, seria necessária a escolha de uma solução intermediária. Para isso, devemos adotar um critério para essa escolha, pois caso contrário, considerando igualmente os objetivos, a escolha seria aleatória. Este critério de escolha pode ser baseado no seguinte argumento:

**Argumento 1:** Podemos observar que a Natureza, em sua grande parte, apresenta soluções com uma acentuada simetria: os corpos dos seres vivos geralmente apresentam

uma simetria bilateral; o formato dos cristais; a simetria das partículas subatômicas; as estações do ano; a distribuição de massa nos planetas e nos sistemas planetários, são exemplos destas simetrias que são resultantes das interações entre os diversos elementos da Natureza. Estas interações geram inúmeros fenômenos que podem ser tratados como problemas multiobjetivos, que de alguma forma são solucionados gerando soluções que são as soluções ótimas encontradas pela Natureza após bilhões de anos de evolução e interações. Portanto, o problema multiobjetivo pode ser considerado como um problema bem posto e que tem solução. E ainda podemos inferir da observação da Natureza que talvez essa solução seja única. O maior exemplo disto é o nosso próprio corpo. Vivemos em um meio onde a nossa sobrevivência depende de inúmeros fatores que geram um complexo problema multiobjetivo quando consideramos a nossa evolução. No entanto, estamos perfeitamente adaptados a esse meio, o que nos torna capazes de sobreviver, ou seja somos a solução ótima do problema multiobjetivo da evolução humana.

Assim, é de se esperar que nos problemas multiobjetivos com aplicação em Engenharia devemos encontrar soluções que apresentem o mesmo tipo de simetria encontrado na Natureza. Por este motivo, em problemas multiobjetivos, uma solução extrema não pode ser considerada como a solução ótima. Somente uma solução intermediária é capaz de levar em consideração a simetria entre as possíveis soluções candidatas à solução ótima. Uma possibilidade para encontrar esta solução é dada pelo seguinte critério:

**Critério 1:** Uma tentativa para achar esta solução intermediária seria encontrar o baricentro do triângulo mostrado nas Figuras 6.1 e 6.2, porém normalizado pelos máximos dos objetivos. Essa normalização (Tabela 6.1) é necessária pois caso contrário a solução passa a depender da dimensão de cada um dos objetivos. O baricentro é a solução que gera a menor perda com relação a todos os objetivos. Assim, a solução ótima para o problema multiobjetivo seria o ponto central da figura que tem como vértices as soluções ótimas para cada objetivo. Portanto, para problemas com três objetivos a solução estaria no centro de um triângulo normalizado, para  $n$  objetivos a solução estaria no centro de uma figura  $n$  dimensional normalizada. Este critério para a escolha da solução ótima multiobjetivo chamaremos de Critério da Menor Perda. Na

Figura 6.3 temos um exemplo deste critério aplicado a um problema com três objetivos conflitantes. Neste exemplo  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  são as soluções ótimas para cada um dos objetivos considerados isoladamente,  $B$  é o baricentro do triângulo formado pelos segmentos  $\overline{S_1S_2}$ ,  $\overline{S_2S_3}$  e  $\overline{S_3S_1}$  que, pela definição de baricentro, equidista dos vértices do triângulo representados pelas soluções  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ . Assim, se o baricentro  $B$  for adotado como solução para o problema multiobjetivo, o segmento  $\overline{S_1B}$  representa a perda com relação ao objetivo 1, e da mesma forma, os segmentos  $\overline{S_2B}$  e  $\overline{S_3B}$  representam a perda com relação aos objetivos 2 e 3 respectivamente. Portanto, da Figura 6.3 conclui-se facilmente que se os três objetivos forem igualmente considerados a melhor solução a ser adotada é aquela que coincide com o baricentro do triângulo.

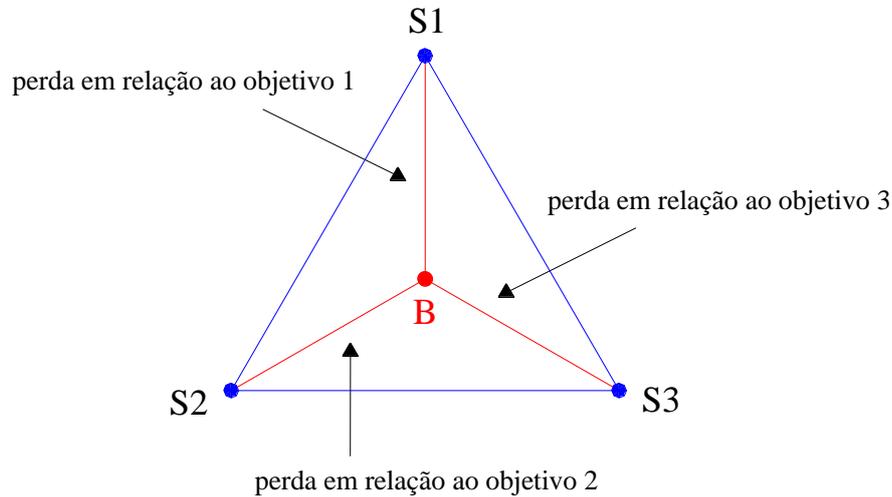


Fig. 6.3 – Critério de Menor Perda.

Voltando ao 5º Exemplo e utilizando o Critério de Menor Perda, a melhor solução considerando apenas o triângulo de nível 1 e efetuando os cálculos com medidas normalizadas conforme a Tabela 6.1, é dada por:  $\delta\theta = 0,340434$  rad;  $\Delta v = 0,907593$  km/s;  $t = 2233,333$  s (Critério 1). Porém, nós não temos esta manobra na Tabela 5.5, assim, a melhor manobra parece ser aquela cujos parâmetros são os mais próximos das coordenadas do baricentro (Critério 1A). Calculando as distâncias, usando a Tabela 6.1, entre o baricentro e os pontos que representam as manobras, concluímos que a melhor manobra a ser aplicada é a manobra 6. Outra possibilidade seria usar o programa que calcula as manobras ótimas novamente e com o tempo de 2233,333 s como entrada calcular uma manobra que se aproxime das coordenadas do baricentro (Critério 1B).

TABELA 6.1 – Manobras Ótimas Normalizadas do 5º Exemplo  
 Considerando  $\delta\theta_{m\acute{a}x} = 0,7$  rad,  $\Delta v_{m\acute{a}x} = 1,2$  km/s e  $T_{m\acute{a}x} = 3000$ s.

	$\delta\theta/\delta\theta_{m\acute{a}x}$	$\Delta v/\Delta v_{m\acute{a}x}$	$T/T_{m\acute{a}x}$
1	0,808053	0,894442	0,533333
2	0,636096	0,855558	0,566667
3	0,449041	0,830000	0,600000
4	0,169081	0,739442	0,703333
5	0,310787	0,712442	0,750000
6	0,345574	0,702225	0,768333
7	0,393819	0,670000	0,850000
8	0,397167	0,665558	0,866667
9	0,416150	0,655558	0,901667
10	0,412949	0,648892	0,933333
11	0,449420	0,636667	0,970000
12	0,481867	0,635100	0,996667

**Exemplo 6:** Para ilustrar este procedimento aplicado a uma constelação de satélites, usaremos como exemplo uma constelação composta por três satélites com órbitas nominais circulares e equatoriais. Assim, os elementos orbitais nominais dos satélites são dados por:

$$\begin{array}{ll}
 e & = 0,00000000 & a & = 7010,00000000 \text{ km} \\
 l & = 7010,00000000 \text{ km} & i & = 0,00000000 \text{ rad} \\
 \omega & = 0,00000000 \text{ rad} & \Omega & = 0,00000000 \text{ rad}
 \end{array}$$

Consideramos que, para atender as especificações da missão, os satélites devem ser posicionados tal que a diferença entre as longitudes verdadeiras dos satélites ( $\Delta\theta_1$ ,  $\Delta\theta_2$  e  $\Delta\theta_3$ ) deve ser igual a 2,09439435 rad (120 graus). Consideramos ainda, que no instante inicial o satélite 1 está entrando no cone de visibilidade da estação de rastreamento e que as medidas de  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $\dot{X}$ ,  $\dot{Y}$  e  $\dot{Z}$  no sistema de referência inercial são dadas por:

$$\begin{array}{ll}
X = 7000,00000000 & \dot{X} = 0,00000000 \\
Y = 0,00000000 & \dot{Y} = 7,54605517 \\
Z = 0,00000000 & \dot{Z} = 0,00000000
\end{array}$$

Assim determinamos os elementos atuais do satélite 1 onde  $M$  é a anomalia média,  $u$  é a anomalia excêntrica,  $f$  é a anomalia verdadeira e  $\theta$  é a longitude verdadeira.

Satélite 1:

$$\begin{array}{lll}
a_1 = 7000,00000000 & \Omega_1 = 0,00000000 & u_1 = 0,00000000 \\
e_1 = 0,00000000 & \omega_1 = 0,00000000 & f_1 = 0,00000000 \\
i_1 = 0,00000000 & M_1 = 0,00000000 & \theta_1 = 0,00000000
\end{array}$$

O semi-eixo maior  $a_1$  da órbita atual difere do semi-eixo maior da órbita nominal, e neste caso essa diferença é dada por:  $\Delta a_1 = -10$  km. Os outros elementos orbitais estão de acordo com a órbita nominal. Entretanto iremos considerar que a variação  $\Delta a_1$  é maior do que a variação permitida e portanto a órbita deve ser corrigida.

Por meio da propagação orbital podemos obter os elementos atuais dos outros satélites usando os elementos orbitais determinados na última passagem de cada satélite pela estação de rastreamento.

Satélite 2:

$$\begin{array}{lll}
a_2 = 7002,00000000 & \Omega_2 = 0,00000000 & u_2 = 1,91986218 \\
e_2 = 0,00000000 & \omega_2 = 0,00000000 & f_2 = 1,91986218 \\
i_2 = 0,00000000 & M_2 = 1,91986218 & \theta_2 = 1,91986218
\end{array}$$

Satélite 3:

$$\begin{array}{lll}
a_3 = 7005,00000000 & \Omega_3 = 0,00000000 & u_3 = 4,36332313 \\
e_3 = 0,00000000 & \omega_3 = 0,00000000 & f_3 = 4,36332313 \\
i_3 = 0,00000000 & M_3 = 4,36332313 & \theta_3 = 4,36332313
\end{array}$$

Com as longitudes verdadeiras atuais  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  podemos calcular os vínculos de

posição  $\delta\theta_1$ ,  $\delta\theta_2$ ,  $\delta\theta_3$  e  $\delta\theta$ , que representam o erro de posicionamento dos satélites, conforme mostra a Figura 6.4:

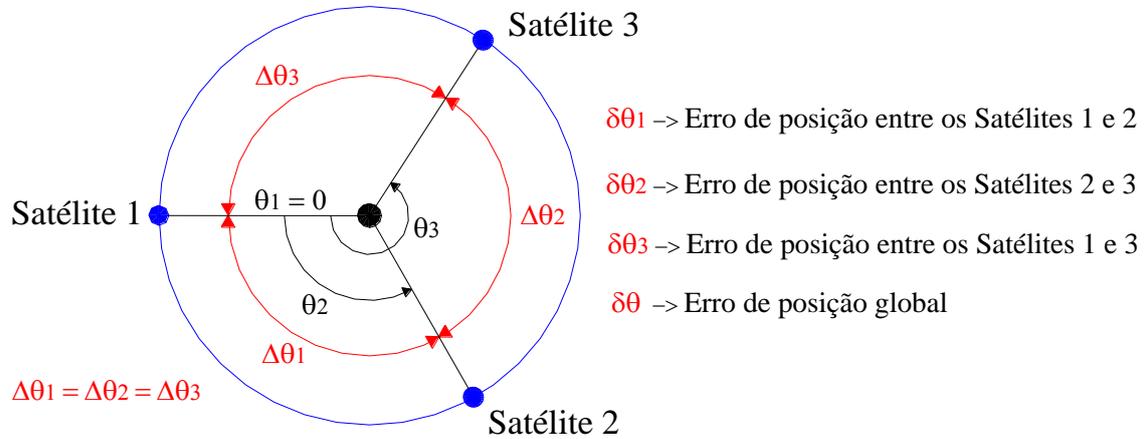


Fig. 6.4 – Posicionamento Nominal dos Satélites da Constelação.

Para  $\theta_1 \leq \theta_2$  temos:

$$\delta\theta_1 = (\theta_2 - \theta_1) - \frac{2\pi}{3} \quad (6.1)$$

Para  $\theta_2 < \theta_1$  temos:

$$\delta\theta_1 = (2\pi - \theta_1 + \theta_2) - \frac{2\pi}{3} \quad (6.2)$$

Para  $\theta_2 \leq \theta_3$  temos:

$$\delta\theta_2 = (\theta_3 - \theta_2) - \frac{2\pi}{3} \quad (6.3)$$

Para  $\theta_3 < \theta_2$  temos:

$$\delta\theta_2 = (2\pi - \theta_2 + \theta_3) - \frac{2\pi}{3} \quad (6.4)$$

Para  $\theta_3 \leq \theta_1$  temos:

$$\delta\theta_3 = (\theta_1 - \theta_3) - \frac{2\pi}{3} \quad (6.5)$$

Para  $\theta_1 < \theta_3$  temos:

$$\delta\theta_3 = (2\pi - \theta_3 + \theta_1) - \frac{2\pi}{3} \quad (6.6)$$

O erro de posição global é definido por:

$$\delta\theta = \frac{|\delta\theta_1| + |\delta\theta_2| + |\delta\theta_3|}{3} \quad (6.7)$$

Se a diferença entre os elementos nominais e atuais e o vínculo de posição  $\delta\theta$  não atenderem a tolerâncias previamente especificadas  $\delta\theta_{\max}$ , pelo menos uma manobra de correção será necessária, caso contrário consideramos os elementos atuais e propagamos a órbita do satélite 1 para prever quais serão os elementos orbitais desse satélite na próxima passagem sobre a estação de rastreamento. Feito isto, o programa de controle aguarda até que o próximo satélite entre na região de visibilidade da estação de rastreamento e dessa forma o processo descrito acima se repete.

Considerando que seja necessário executar uma manobra de correção, o programa calcula várias possíveis manobras, cada uma delas com valores diferentes do semi-eixo maior da órbita final e do tempo gasto na manobra. Assim, obtemos os valores dos elementos orbitais da órbita de transferência mostrados a seguir, onde:  $\alpha_1$  é a anomalia verdadeira do ponto de aplicação do primeiro impulso medida na órbita inicial (em radianos);  $\alpha_2$  é a anomalia verdadeira do ponto de aplicação do segundo impulso medida na órbita final (em radianos);  $\Delta v_1$  e  $\Delta v_2$  são os incrementos de velocidade gerados pelo primeiro e segundo impulsos (em km/s);  $\Delta v$  é o incremento de velocidade total (em km/s); e  $t$  é o tempo gasto na manobra (em segundos).

Manobra 1:  $a_{\text{final}} = a_{\text{nominal}} = 7010$  km

$a$	$=$	7006,23867081	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	0,09994003
$e$	$=$	0,01326311	$\alpha_2$	$=$	0,10768541	$\Delta v$	$=$	0,19987923
$\omega$	$=$	4,76633701	$\Delta v_1$	$=$	0,09993920	$t$	$=$	100,00000000

Manobra 2:  $a_{final} = 1,0001a_{nominal} = 7010,701$  km

$$\begin{array}{lll} a = 7006,63796680 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 0,10184694 \\ e = 0,01351801 & \alpha_2 = 0,11306121 & \Delta v = 0,20369289 \\ \omega = 4,76903787 & \Delta v_1 = 0,10184595 & t = 105,00000000 \end{array}$$

Manobra 3:  $a_{final} = 1,0002a_{nominal} = 7011,402$  km

$$\begin{array}{lll} a = 7007,44799235 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 0,11870527 \\ e = 0,01575290 & \alpha_2 = 0,10336250 & \Delta v = 0,23740951 \\ \omega = 4,76418552 & \Delta v_1 = 0,11870424 & t = 96,00000000 \end{array}$$

Manobra 4:  $a_{final} = 1,003a_{nominal} = 7012,103$  km

$$\begin{array}{lll} a = 7007,55340389 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 0,10994758 \\ e = 0,01459562 & \alpha_2 = 0,11842733 & \Delta v = 0,21989383 \\ \omega = 4,77174271 & \Delta v_1 = 0,10994625 & t = 110,00000000 \end{array}$$

Manobra 5:  $a_{final} = 1,0004a_{nominal} = 7012,804$  km

$$\begin{array}{lll} a = 7008,02403816 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 0,11423564 \\ e = 0,01516596 & \alpha_2 = 0,12057153 & \Delta v = 0,22846977 \\ \omega = 4,77282558 & \Delta v_1 = 0,11423413 & t = 112,00000000 \end{array}$$

Manobra 6:  $a_{final} = 1,0005a_{nominal} = 7013,50499999$  km

$$\begin{array}{lll} a = 7008,88406240 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 0,13103334 \\ e = 0,01739282 & \alpha_2 = 0,11087445 & \Delta v = 0,26206514 \\ \omega = 4,76797259 & \Delta v_1 = 0,13103180 & t = 103,00000000 \end{array}$$

Manobra 7:  $a_{final} = 1,006a_{nominal} = 7014,20599999$  km

$$\begin{array}{llll} a & = & 7010,12115852 & \alpha_1 & = & 0,00000000 & \Delta v_2 & = & 0,15603265 \\ e & = & 0,02070642 & \alpha_2 & = & 0,09794970 & \Delta v & = & 0,31206379 \\ \omega & = & 4,76149997 & \Delta v_1 & = & 0,15603114 & t & = & 91,00000000 \end{array}$$

Manobra 8:  $a_{final} = 1,0007a_{nominal} = 7014,90699999$  km

$$\begin{array}{llll} a & = & 7009,54050147 & \alpha_1 & = & 0,00000000 & \Delta v_2 & = & 0,12952373 \\ e & = & 0,01719814 & \alpha_2 & = & 0,12377333 & \Delta v & = & 0,25904536 \\ \omega & = & 0,01719814 & \Delta v_1 & = & 0,12952163 & t & = & 115,00000000 \end{array}$$

Manobra 9:  $a_{final} = 1,0008a_{nominal} = 7015,60799999$  km

$$\begin{array}{llll} a & = & 7010,17329534 & \alpha_1 & = & 0,00000000 & \Delta v_2 & = & 0,13801865 \\ e & = & 0,01832564 & \alpha_2 & = & 0,12161165 & \Delta v & = & 0,27603504 \\ \omega & = & 4,77338020 & \Delta v_1 & = & 0,13801639 & t & = & 113,00000000 \end{array}$$

Portanto, obtemos as Tabelas 6.2 e 6.3, considerando os valores máximos para cada objetivo dados por:  $\delta\theta_{m\acute{a}x} = 0,7$  rad;  $\Delta v_{m\acute{a}x} = 1,1$  km/s; e  $T_{m\acute{a}x} = 200$  s.

TABELA 6.2 – Manobras Ótimas Não Normalizadas do 6º Exemplo.

	$\delta\theta$	$\Delta v$	<i>Tempo</i>
1	0,23266396	0,19987923	100
2	0,23266165	0,20369289	105
3	0,23266580	0,23740951	96
4	0,23265934	0,21989383	110
5	0,23265842	0,22846977	112
6	0,23266257	0,26206514	103
7	0,23266811	0,31206379	91
8	0,23265704	0,25904536	115
9	0,23265796	0,27603504	113

TABELA 6.3 – Manobras Ótimas Normalizadas do 6º Exemplo.

	$\delta\theta/\delta\theta_{\max}$	$\Delta v/\Delta v_{\max}$	$T/T_{\max}$
1	0,33237709	0,18170839	0,5000000
2	0,33237378	0,18517535	0,5250000
3	0,33237971	0,21582683	0,4800000
4	0,33237048	0,19990348	0,5500000
5	0,33236917	0,20769979	0,5600000
6	0,33237510	0,23824104	0,5150000
7	0,33238301	0,28369435	0,4550000
8	0,33236720	0,23549578	0,5750000
9	0,33236851	0,25094094	0,5650000

Analisando a Tabela 6.2 selecionamos as manobras 8, 1 e 7 como sendo soluções *não dominadas* (que representam o nível 1) de todo o grupo de candidatas à solução ótima. As coordenadas do baricentro entre as manobras do nível 1, usando valores normalizados mostrados na Tabela 6.3, são (0,33237577; 0,23363284; 0,510) que equivalem a  $\delta\theta = 0,23266304$  rad;  $\Delta v = 0,25699613$  km/s;  $Tempo = 102$  s, como pode ser visto nas Figuras 6.5 e 6.6 considerando medidas não normalizadas e normalizadas, respectivamente. Os pontos em azul representam as soluções mostradas nas Tabelas 6.2 e 6.3, e o ponto em vermelho o baricentro calculado considerando apenas as manobras de nível 1. Podemos observar que o baricentro do triângulo formado pelas soluções de nível 1 parece ser uma solução adequada mesmo quando consideramos todas as soluções mostradas nas Tabelas 6.2 e 6.3, pois ele parece localizar-se próximo ao centro geométrico das Figuras 6.5 e 6.6.

Calculando as distâncias entre o baricentro e os pontos determinados pelas manobras (Critério 1A), temos:

$$\begin{aligned}
 d(\text{bar}, m1) &= 0,05287862 & d(\text{bar}, m2) &= 0,05072601 \\
 d(\text{bar}, m3) &= 0,03488630 & d(\text{bar}, m4) &= 0,05232275 \\
 d(\text{bar}, m5) &= 0,05632516 & d(\text{bar}, m6) &= 0,00678772 \\
 d(\text{bar}, m7) &= 0,07437173 & d(\text{bar}, m8) &= 0,06502669 \\
 d(\text{bar}, m9) &= 0,05765909 & &
 \end{aligned}$$

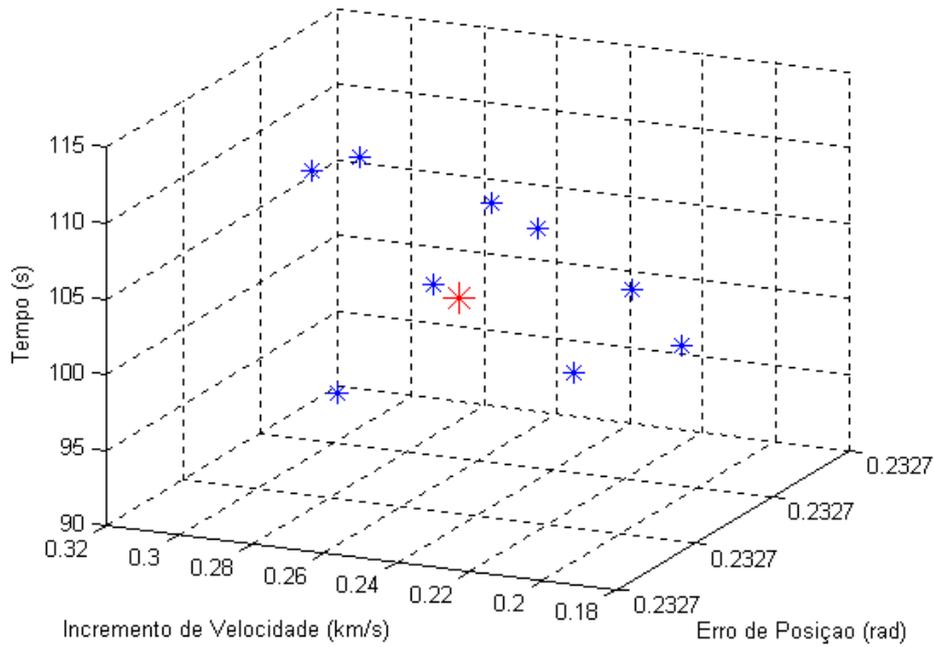


Fig. 6.5 – Distribuição de Soluções Não Normalizadas do 6º Exemplo.

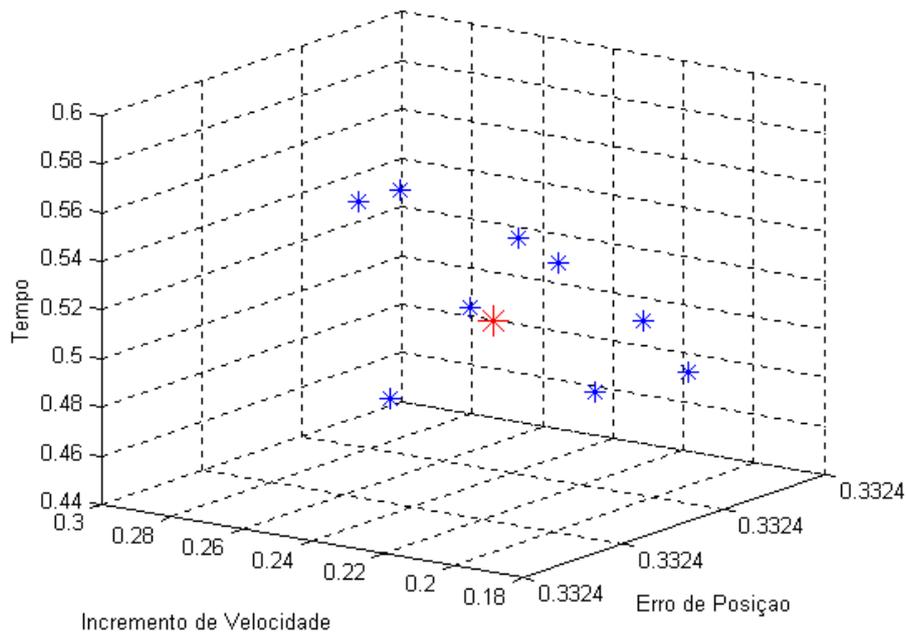


Fig. 6.6 – Distribuição de Soluções Normalizadas do 6º Exemplo.

Usando novamente o programa para calcular a manobra ótima com vínculo de tempo utilizando como entrada o tempo fixado em 102 s, que é o tempo da manobra equivalente ao baricentro (Critério 1B), obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{array}{lll}
a = 7008,92581157 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 0,13231961 \\
e = 0,01756316 & \alpha_2 = 0,10979799 & \Delta v = 0,26463768 \\
\omega = 4,76743295 & \Delta v_1 = 0,13231807 & t = 102,00000000
\end{array}$$

que resulta em um vínculo de posição  $\delta\theta/\delta\theta_{\max} = 0,22571391$ , em um incremento de velocidade  $\Delta v/\Delta v_{\max} = 0,24057971$  e em um tempo gasto na manobra  $T/T_{\max} = 0,510$ . Assim, a distância entre o baricentro e o ponto determinado pela manobra é dada por:  $d(\text{bar}, \text{m}) = 0,10688784$ .

Comparando todas as distâncias calculadas, podemos notar que a manobra que melhor se aproxima das coordenadas do baricentro é a manobra 6. Neste caso, mesmo calculando novamente a manobra de transferência, usando como entrada o tempo especificado pelo baricentro (Critério 1B), não foi possível obter uma manobra melhor do que as que já tinham sido calculadas (Critério 1A). Deste modo, escolhemos a manobra 6 como a manobra mais adequada para ser aplicada ao satélite.



## CAPÍTULO 7

### RESULTADOS OBTIDOS COM A METODOLOGIA PROPOSTA PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA MULTI OBJETIVO

Os resultados mostrados a seguir foram obtidos com a utilização do programa “Constellation” desenvolvido neste trabalho. Este programa aplica a metodologia de otimização multiobjetivo (Critério da Menor Perda) apresentada no capítulo anterior, para otimizar a manutenção orbital de uma constelação de satélites. Para poder testar o programa, adotamos uma constelação em órbita baixa de forma a acentuar o efeito do arrasto atmosférico e, dessa forma, acentuar o decaimento orbital dos satélites, submetendo o programa a uma situação de pior caso com relação a manutenção orbital dos satélites da constelação. Entretanto, é improvável que sejam projetadas constelações com características orbitais semelhantes às constelações apresentadas nos Exemplos 7 e 8 deste capítulo, pois devido a baixa altitude dos satélites a perturbação orbital gerada pelo arrasto atmosférico seria muito acentuada fazendo com que as manobras de correção tenham que ser aplicadas com uma frequência muito grande. Porém, para testar o programa desenvolvido essas constelações mostraram-se adequadas.

**Exemplo 7:** Manutenção orbital de uma constelação de satélites composta por três satélites em órbita baixa (altitude de 225 km), com órbitas nominais circulares e equatoriais. Assim, os elementos orbitais nominais dos satélites são dados por:

$$\begin{array}{ll} e = 0,00000000 & a = 6603,13900000 \text{ km} \\ l = 6603,13900000 \text{ km} & i = 0,00000000 \text{ rad} \\ \omega = 0,00000000 \text{ rad} & \Omega = 0,00000000 \text{ rad} \end{array}$$

Consideramos que no instante inicial o satélite 1 está em visibilidade ( $\theta_1 = 0$ ) e os satélites apresentam os seguintes elementos orbitais ( $a$  em km e ângulos em radianos):

Satélite 1:

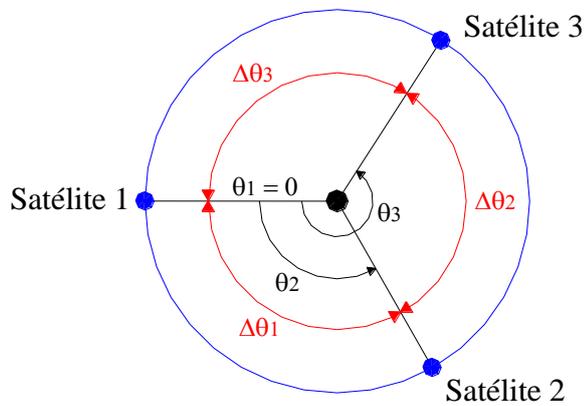
$$\begin{array}{lll} a_1 = 6600,88900000 & \Omega_1 = 0,00000000 & u_1 = 0,00000000 \\ e_1 = 0,00000000 & \omega_1 = 0,00000000 & f_1 = 0,00000000 \\ i_1 = 0,00000000 & M_1 = 0,00000000 & \theta_1 = 0,00000000 \end{array}$$

Satélite 2:

$$\begin{array}{lll}
 a_2 = 6603,139000000 & \Omega_2 = 0,00000000 & u_2 = 1,91986218 \\
 e_2 = 0,00000000 & \omega_2 = 0,00000000 & f_2 = 1,91986218 \\
 i_2 = 0,00000000 & M_2 = 1,91986218 & \theta_2 = 1,91986218
 \end{array}$$

Satélite 3:

$$\begin{array}{lll}
 a_3 = 6600,88900000 & \Omega_3 = 0,00000000 & u_3 = 4,18879020 \\
 e_3 = 0,00000000 & \omega_3 = 0,00000000 & f_3 = 4,18879020 \\
 i_3 = 0,00000000 & M_3 = 4,18879020 & \theta_3 = 4,18879020
 \end{array}$$



Erro em posição:

$$\delta\theta_1 = -0,17453292$$

$$\delta\theta_2 = 0,17453292$$

$$\delta\theta_3 = 0$$

$$\delta\theta = 0,11635528$$

Fig. 7.1 – Posicionamento dos satélites do 7º Exemplo para  $\theta_1 = 0$ .

Calculando um conjunto de manobras para o satélite 1, obtemos:

Manobra 1:  $a_{final} = a_{nominal} = 6603,139$  km

$$\begin{array}{lll}
 a = 3832,03030735 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,10945451 \\
 e = 0,83238139 & \alpha_2 = 0,32037169 & \Delta v = 10,22239796 \\
 \omega = 3,30200731 & \Delta v_1 = 5,11294345 & t = 700,00863114
 \end{array}$$

Manobra 2:  $a_{final} = 1,01 a_{nominal} = 6603,364$  km

$$\begin{array}{lll}
 a = 3779,05456689 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,36206255 \\
 e = 0,85832511 & \alpha_2 = 0,29028962 & \Delta v = 10,72799729 \\
 \omega = 3,28696500 & \Delta v_1 = 5,36593474 & t = 690,00681270
 \end{array}$$

Manobra 3:  $a_{final} = 1,02 a_{nominal} = 6602,914$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3815,04203961 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,16614487 \\ e = 0,83903334 & \alpha_2 = 0,21057835 & \Delta v = 10,33544193 \\ \omega = 3,29708400 & \Delta v_1 = 5,16929706 & t = 692,00833594 \end{array}$$

Manobra 4:  $a_{final} = 1,03 a_{nominal} = 6603,589$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3788,05902691 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,37538501 \\ e = 0,85801037 & \alpha_2 = 0,29595614 & \Delta v = 10,75497758 \\ \omega = 3,28981539 & \Delta v_1 = 5,37959257 & t = 704,00644856 \end{array}$$

Manobra 5:  $a_{final} = 1,04 a_{nominal} = 6602,689$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3822,24848298 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,12911155 \\ e = 0,83522988 & \alpha_2 = 0,31450549 & \Delta v = 10,26102225 \\ \omega = 3,29902787 & \Delta v_1 = 5,13191070 & t = 692,50865060 \end{array}$$

Manobra 6:  $a_{final} = 1,05 a_{nominal} = 6603,814$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3775,99989683 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,43181588 \\ e = 0,86367550 & \alpha_2 = 0,28865022 & \Delta v = 10,86820043 \\ \omega = 3,28617688 & \Delta v_1 = 5,43638455 & t = 700,67329655 \end{array}$$

Manobra 7:  $a_{final} = 1,06 a_{nominal} = 6602,464$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3825,67037022 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,13910760 \\ e = 0,83543312 & \alpha_2 = 0,31699797 & \Delta v = 10,28066005 \\ \omega = 3,30024999 & \Delta v_1 = 5,14155245 & t = 699,00842531 \end{array}$$

Manobra 8:  $a_{final} = 1,07 a_{nominal} = 6604,039$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3802,22682901 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,28351904 \\ e = 0,84951571 & \alpha_2 = 0,30402533 & \Delta v = 10,57193925 \\ \omega = 3,29390254 & \Delta v_1 = 5,28842021 & t = 702,00714637 \end{array}$$

Manobra 9:  $a_{final} = 0,996 a_{nominal} = 6602,239$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3816,65241901 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,16158654 \\ e = 0,83838635 & \alpha_2 = 0,30402533 & \Delta v = 10,32527376 \\ \omega = 3,29754958 & \Delta v_1 = 5,16368722 & t = 693,00835265 \end{array}$$

Aplicando o Critério da Menor Perda para selecionar a melhor manobra, utilizando medidas normalizadas com  $\delta\theta_{m\acute{a}x} = 0,7$  rad,  $\Delta v_{m\acute{a}x} = 11$  km/s e  $T_{m\acute{a}x} = 1000$ s no c\`alculo do baricentro e das dist\`ancias, obtemos a Tabela 7.1:

TABELA 7.1 – Escolha da Melhor Manobra Para o Sat\`elite 1 do 7<sup>o</sup> Exemplo.

	$\delta\theta$	$\Delta v$	Tempo	Classifica\`ao
<b>1</b>	0,33659079 2 <sup>o</sup>	10,22239796 1 <sup>o</sup>	700,00863114 6 <sup>o</sup>	5 <sup>o</sup>
<b>2</b>	0,34879580 6 <sup>o</sup>	10,72799729 7 <sup>o</sup>	690,00681270 1 <sup>o</sup>	7 <sup>o</sup>
<b>3</b>	0,33684083 3 <sup>o</sup>	10,33544193 5 <sup>o</sup>	692,00833594 2 <sup>o</sup>	1 <sup>o</sup>
<b>4</b>	0,35600542 8 <sup>o</sup>	10,75497758 8 <sup>o</sup>	704,00644856 9 <sup>o</sup>	8 <sup>o</sup>
<b>5</b>	0,33461540 1 <sup>o</sup>	10,26102225 2 <sup>o</sup>	692,50865060 3 <sup>o</sup>	4 <sup>o</sup>
<b>6</b>	0,35826008 9 <sup>o</sup>	10,86820043 9 <sup>o</sup>	700,67329655 7 <sup>o</sup>	9 <sup>o</sup>
<b>7</b>	0,33805495 5 <sup>o</sup>	10,28066005 3 <sup>o</sup>	699,00842531 5 <sup>o</sup>	3 <sup>o</sup>
<b>8</b>	0,34905685 7 <sup>o</sup>	10,57193925 6 <sup>o</sup>	702,00714637 8 <sup>o</sup>	6 <sup>o</sup>
<b>9</b>	0,33691532 4 <sup>o</sup>	10,32527376 4 <sup>o</sup>	693,00835265 4 <sup>o</sup>	2 <sup>o</sup>
<b>B</b>	0,34000066	10,40380583	694,17469815	

● V\`ertice      ● Manobra escolhida      ● Baricentro

Portanto, selecionamos a manobra 3, pois é a manobra mais próxima do baricentro, como pode ser visto na Figura 7.2.

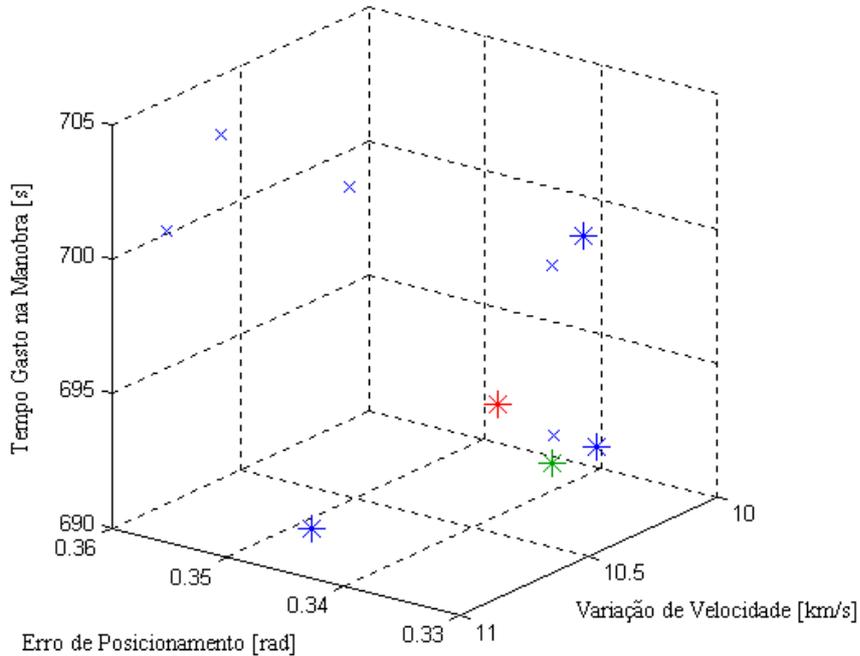


Fig. 7.2 – Distribuição de soluções para o satélite 1 do 7º Exemplo.

Consideramos agora que o satélite 3 está em visibilidade ( $\theta_3 = 0$ ). Portanto, os satélites apresentam os seguintes elementos orbitais ( $a$  em km e ângulos em radianos):

Satélite 1:

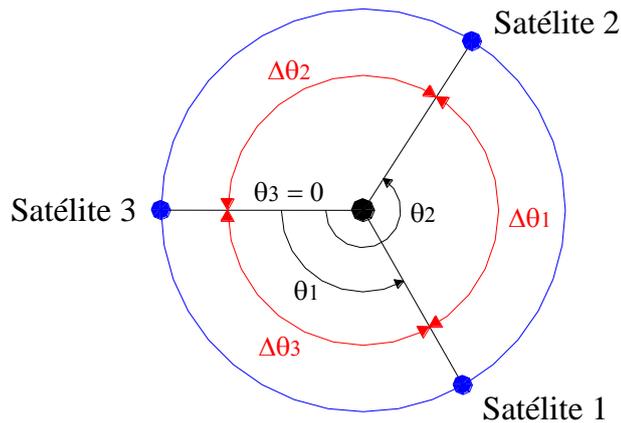
$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 6602,68166455 & \Omega_1 = 0,00000000 & u_1 = 1,58963713 \\
 e_1 = 0,00000000 & \omega_1 = 0,00000000 & f_1 = 1,58963713 \\
 i_1 = 0,00000000 & M_1 = 1,58963713 & \theta_1 = 1,58963713
 \end{array}$$

Satélite 2:

$$\begin{array}{lll}
 a_2 = 6603,00255150 & \Omega_2 = 0,00000000 & u_2 = 4,01431785 \\
 e_2 = 0,00000000 & \omega_2 = 0,00000000 & f_2 = 4,01431785 \\
 i_2 = 0,00000000 & M_2 = 4,01431785 & \theta_2 = 4,01431785
 \end{array}$$

Satélite 3:

$$\begin{array}{lll}
 a_3 = 6600,06425822 & \Omega_3 = 0,00000000 & u_3 = 0,00000000 \\
 e_3 = 0,00000000 & \omega_3 = 0,00000000 & f_3 = 0,00000000 \\
 i_3 = 0,00000000 & M_3 = 0,00000000 & \theta_3 = 0,00000000
 \end{array}$$



Erro em posição:

$$\begin{array}{l}
 \delta\theta_1 = -0,50475797 \\
 \delta\theta_2 = 0,33028562 \\
 \delta\theta_3 = 0,17447235 \\
 \delta\theta = 0,33650531
 \end{array}$$

Fig. 7.3 – Posicionamento dos Satélites do 7º Exemplo Para  $\theta_3 = 0$ .

Calculando um conjunto de manobras para o satélite 3, obtemos:

Manobra 1:  $a_{final} = a_{nominal} = 6603,139$  km

$$\begin{array}{lll}
 a = 3836,12484479 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,08619019 \\
 e = 0,83004830 & \alpha_2 = 0,32266300 & \Delta v = 10,17714598 \\
 \omega = 3,30200731 & \Delta v_1 = 5,09095579 & t = 700,00883294
 \end{array}$$

Manobra 2:  $a_{final} = 1,01 a_{nominal} = 6603,364$  km

$$\begin{array}{lll}
 a = 3826,86320493 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,09003430 \\
 e = 0,83173989 & \alpha_2 = 0,31662966 & \Delta v = 10,18520040 \\
 \omega = 3,30024800 & \Delta v_1 = 5,09516610 & t = 689,50907369
 \end{array}$$

Manobra 3:  $a_{final} = 1,02 a_{nominal} = 6602,914$  km

$a$	$=$	3825,17028668	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,111850613
$e$	$=$	0,83404175	$\alpha_2$	$=$	0,31629987	$\Delta v$	$=$	10,24144097
$\omega$	$=$	3,30003240	$\Delta v_1$	$=$	5,12293484	$t$	$=$	694,00870134

Manobra 4:  $a_{final} = 1,03 a_{nominal} = 6603,589$  km

$a$	$=$	3834,44440247	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,07359455
$e$	$=$	0,82941519	$\alpha_2$	$=$	0,32115826	$\Delta v$	$=$	10,15265909
$\omega$	$=$	3,30253665	$\Delta v_1$	$=$	5,07906454	$t$	$=$	695,00908079

Manobra 5:  $a_{final} = 1,04 a_{nominal} = 6602,689$  km

$a$	$=$	3829,88368792	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,08029951
$e$	$=$	0,83049051	$\alpha_2$	$=$	0,31847680	$\Delta v$	$=$	10,16467838
$\omega$	$=$	3,30110282	$\Delta v_1$	$=$	5,08437887	$t$	$=$	691,00913585

Manobra 6:  $a_{final} = 1,05 a_{nominal} = 6603,814$  km

$a$	$=$	3815,14917191	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,15545934
$e$	$=$	0,83833941	$\alpha_2$	$=$	0,31043740	$\Delta v$	$=$	10,31675803
$\omega$	$=$	3,29718767	$\Delta v_1$	$=$	5,16129869	$t$	$=$	690,00846706

Manobra 7:  $a_{final} = 1,06 a_{nominal} = 6602,464$  km

$a$	$=$	3827,21962733	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,13806495
$e$	$=$	0,83512761	$\alpha_2$	$=$	0,31814957	$\Delta v$	$=$	10,27985285
$\omega$	$=$	3,30090846	$\Delta v_1$	$=$	5,14178790	$t$	$=$	701,00835369

Manobra 8:  $a_{final} = 1,07 a_{nominal} = 6604,039$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3825,21757825 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,14488541 \\ e = 0,83610450 & \alpha_2 = 0,31672574 & \Delta v = 10,29593953 \\ \omega = 3,30035358 & \Delta v_1 = 5,15105412 & t = 700,00830498 \end{array}$$

Manobra 9:  $a_{final} = 0,996 a_{nominal} = 6602,239$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3816,53545502 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,16073100 \\ e = 0,83834103 & \alpha_2 = 0,31171494 & \Delta v = 10,32484624 \\ \omega = 3,29766762 & \Delta v_1 = 5,16411524 & t = 693,00835917 \end{array}$$

Aplicando o Critério da Menor Perda para selecionar a melhor manobra, utilizando medidas normalizadas com  $\delta\theta_{m\acute{a}x} = 0,7$  rad,  $\Delta v_{m\acute{a}x} = 11$  km/s e  $T_{m\acute{a}x} = 1000$ s no c\`alculo do baricentro e das dist\`ancias, obtemos a Tabela 7.2:

TABELA 7.2 – Escolha da Melhor Manobra Para o Sat\`elite 3 do 7<sup>o</sup> Exemplo.

	$\delta\theta$	$\Delta v$	Tempo	Classifica\`ao
<b>1</b>	0,22015032 1 <sup>o</sup>	10,17714598 3 <sup>o</sup>	700,00883294 8 <sup>o</sup>	3 <sup>o</sup>
<b>2</b>	0,22015093 6 <sup>o</sup>	10,18520040 4 <sup>o</sup>	689,50907369 1 <sup>o</sup>	4 <sup>o</sup>
<b>3</b>	0,22015067 3 <sup>o</sup>	10,24144097 5 <sup>o</sup>	694,00870134 5 <sup>o</sup>	5 <sup>o</sup>
<b>4</b>	0,22015061 2 <sup>o</sup>	10,15265909 1 <sup>o</sup>	695,00908079 6 <sup>o</sup>	1 <sup>o</sup>
<b>5</b>	0,22015084 4 <sup>o</sup>	10,16467838 2 <sup>o</sup>	691,00913585 3 <sup>o</sup>	2 <sup>o</sup>
<b>6</b>	0,22015089 5 <sup>o</sup>	10,31675803 8 <sup>o</sup>	690,00846706 2 <sup>o</sup>	9 <sup>o</sup>
<b>7</b>	0,22227738 8 <sup>o</sup>	10,27985285 6 <sup>o</sup>	701,00835369 9 <sup>o</sup>	6 <sup>o</sup>
<b>8</b>	0,22244212 9 <sup>o</sup>	10,29593953 7 <sup>o</sup>	700,00830498 7 <sup>o</sup>	7 <sup>o</sup>
<b>9</b>	0,22029154 7 <sup>o</sup>	10,32484624 9 <sup>o</sup>	693,00835917 4 <sup>o</sup>	2 <sup>o</sup>
<b>B</b>	0,22015062	10,17166849	694,84232914	

● V\`ertice      ● Manobra escolhida      ● Baricentro

Portanto, selecionamos a manobra 4, pois é a manobra mais próxima do baricentro, como pode ser visto na Figura 7.4.

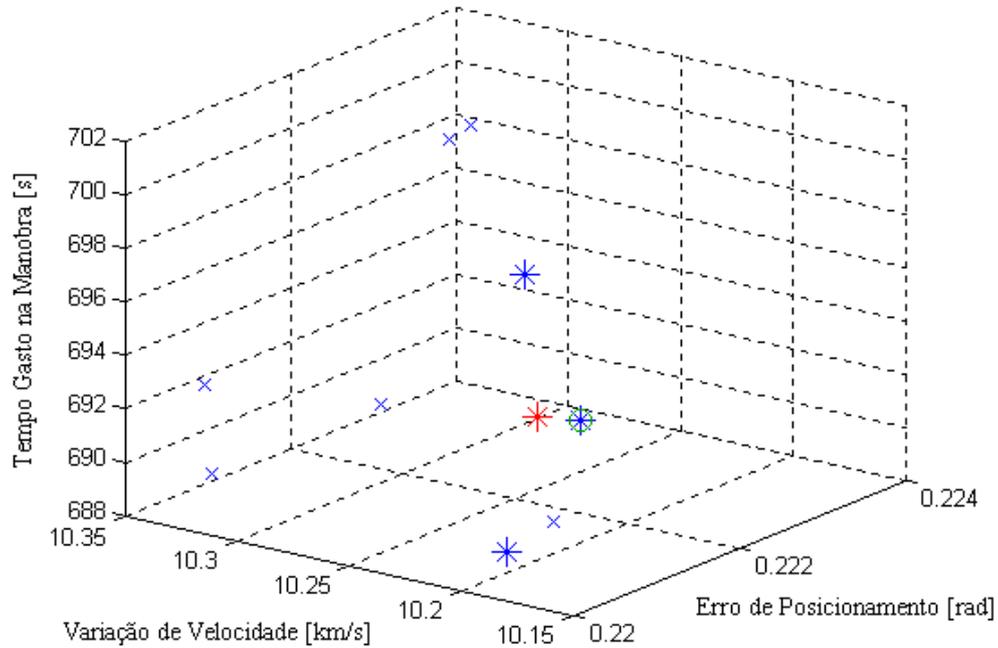


Fig. 7.4 – Distribuição de soluções para o satélite 3 do 7º Exemplo.

Consideramos agora que o satélite 2 está em visibilidade ( $\theta_2 = 0$ ). Portanto, os satélites apresentam os seguintes elementos orbitais ( $a$  em km e ângulos em radianos):

Satélite 1:

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 6602,21625640 & \Omega_1 = 0,00000000 & u_1 = 3,85985488 \\
 e_1 = 0,00000000 & \omega_1 = 0,00000000 & f_1 = 3,85985488 \\
 i_1 = 0,00000000 & M_1 = 3,85985488 & \theta_1 = 3,85985488
 \end{array}$$

Satélite 2:

$$\begin{array}{lll}
 a_2 = 6602,58961263 & \Omega_2 = 0,00000000 & u_2 = 0,00000000 \\
 e_2 = 0,00000000 & \omega_2 = 0,00000000 & f_2 = 0,00000000 \\
 i_2 = 0,00000000 & M_2 = 0,00000000 & \theta_2 = 0,00000000
 \end{array}$$

Satélite 3:

$$\begin{array}{lll}
 a_3 = 6603,38291626 & \Omega_3 = 0,00000000 & u_3 = 1,77198512 \\
 e_3 = 0,00000000 & \omega_3 = 0,00000000 & f_3 = 1,77198512 \\
 i_3 = 0,00000000 & M_3 = 1,77198512 & \theta_3 = 1,77198512
 \end{array}$$

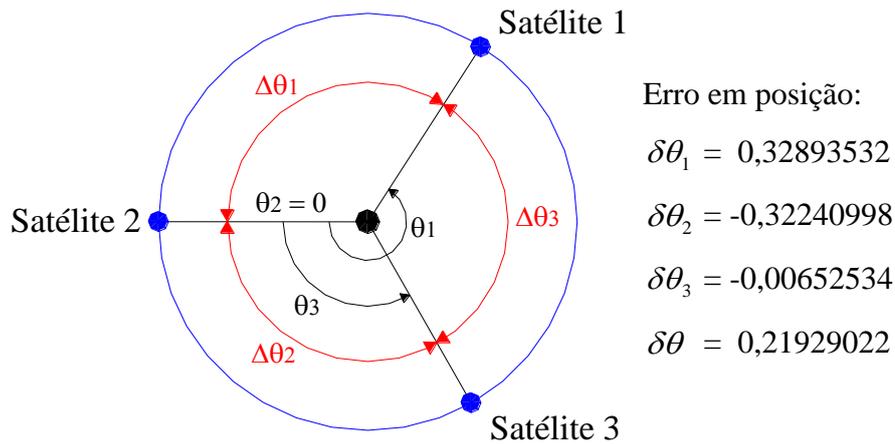


Fig. 7.5 – Posicionamento dos satélites do 7º Exemplo para  $\theta_2 = 0$ .

Calculando um conjunto de manobras para o satélite 2, obtemos:

Manobra 1:  $a_{final} = a_{nominal} = 6603,139$  km

$$\begin{array}{lll}
 a = 3834,95155015 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,10125764 \\
 e = 0,83134089 & \alpha_2 = 0,32174389 & \Delta v = 10,20336660 \\
 \omega = 3,30252065 & \Delta v_1 = 5,10210896 & t = 701,00868192
 \end{array}$$

Manobra 2:  $a_{final} = 1,01 a_{nominal} = 6603,364$  km

$$\begin{array}{lll}
 a = 3825,51822000 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,09956179 \\
 e = 0,83264441 & \alpha_2 = 0,31547071 & \Delta v = 10,20032806 \\
 \omega = 3,29940768 & \Delta v_1 = 5,10076627 & t = 689,00901987
 \end{array}$$

Manobra 3:  $a_{final} = 1,02 a_{nominal} = 6602,914$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3835,18660454 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,06978779 \\ e = 0,82894362 & \alpha_2 = 0,32113442 & \Delta v = 10,14007899 \\ \omega = 3,30219355 & \Delta v_1 = 5,07029120 & t = 694,02625291 \end{array}$$

Manobra 4:  $a_{final} = 1,03 a_{nominal} = 6603,589$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3835,95935068 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,08732631 \\ e = 0,83020915 & \alpha_2 = 0,32198932 & \Delta v = 10,17620167 \\ \omega = 3,30268997 & \Delta v_1 = 5,08887536 & t = 699,00886331 \end{array}$$

Manobra 5:  $a_{final} = 1,04 a_{nominal} = 6602,689$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3833,29941456 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,07153032 \\ e = 0,82932978 & \alpha_2 = 0,31997077 & \Delta v = 10,14321498 \\ \omega = 3,30158837 & \Delta v_1 = 5,07168466 & t = 692,12284117 \end{array}$$

Manobra 6:  $a_{final} = 1,05 a_{nominal} = 6603,814$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3821,68794039 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,12891928 \\ e = 0,83542744 & \alpha_2 = 0,31360185 & \Delta v = 10,25974301 \\ \omega = 3,29851782 & \Delta v_1 = 5,13082373 & t = 691,00872271 \end{array}$$

Manobra 7:  $a_{final} = 1,06 a_{nominal} = 6602,464$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3837,51373217 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,07887921 \\ e = 0,82921969 & \alpha_2 = 0,32298587 & \Delta v = 10,15756374 \\ \omega = 3,30307264 & \Delta v_1 = 5,07868453 & t = 699,01876685 \end{array}$$

Manobra 8:  $a_{final} = 1,07 a_{nominal} = 6604,039$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3812,75571512 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,21799880 \\ e = 0,84326871 & \alpha_2 = 0,30952215 & \Delta v = 10,43825030 \\ \omega = 3,29649457 & \Delta v_1 = 5,22025150 & t = 700,00771074 \end{array}$$

Manobra 9:  $a_{final} = 0,996 a_{nominal} = 6602,239$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3834,50959091 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,06883539 \\ e = 0,82889581 & \alpha_2 = 0,32077403 & \Delta v = 10,13712648 \\ \omega = 3,30194322 & \Delta v_1 = 5,06829109 & t = 693,00919828 \end{array}$$

Aplicando o Critério da Menor Perda para selecionar a melhor manobra, utilizando medidas normalizadas com  $\delta\theta_{m\acute{a}x} = 0,7$  rad,  $\Delta v_{m\acute{a}x} = 11$  km/s e  $T_{m\acute{a}x} = 1000$ s no c\`alculo do baricentro e das dist\`ancias, obtemos a Tabela 7.3:

TABELA 7.3 – Escolha da Melhor Manobra Para o Sat\`elite 2 do 7<sup>o</sup> Exemplo.

	$\delta\theta$	$\Delta v$	Tempo	Classifica\`ao
<b>1</b>	0,12120877 8 <sup>o</sup>	10,20336660 7 <sup>o</sup>	701,00868192 9 <sup>o</sup>	8 <sup>o</sup>
<b>2</b>	0,11597855 3 <sup>o</sup>	10,20032806 6 <sup>o</sup>	689,00901987 1 <sup>o</sup>	4 <sup>o</sup>
<b>3</b>	0,11613818 4 <sup>o</sup>	10,14007899 2 <sup>o</sup>	694,02625291 5 <sup>o</sup>	3 <sup>o</sup>
<b>4</b>	0,11947652 7 <sup>o</sup>	10,17620167 5 <sup>o</sup>	699,00886331 6 <sup>o</sup>	6 <sup>o</sup>
<b>5</b>	0,11542095 1 <sup>o</sup>	10,14321498 3 <sup>o</sup>	692,12284117 3 <sup>o</sup>	1 <sup>o</sup>
<b>6</b>	0,11879299 5 <sup>o</sup>	10,25974301 8 <sup>o</sup>	691,00872271 2 <sup>o</sup>	7 <sup>o</sup>
<b>7</b>	0,11881992 6 <sup>o</sup>	10,15756374 4 <sup>o</sup>	699,01876685 7 <sup>o</sup>	5 <sup>o</sup>
<b>8</b>	0,12857145 9 <sup>o</sup>	10,43825030 9 <sup>o</sup>	700,00771074 8 <sup>o</sup>	9 <sup>o</sup>
<b>9</b>	0,11558068 2 <sup>o</sup>	10,13712648 1 <sup>o</sup>	693,00919828 4 <sup>o</sup>	2 <sup>o</sup>
<b>B</b>	0,22015062	10,17166849	694,84232914	

● V\`ertice      ● Manobra escolhida      ● Baricentro

Portanto, selecionamos a manobra 5, pois é a manobra mais próxima do baricentro, como pode ser visto na Figura 7.6.

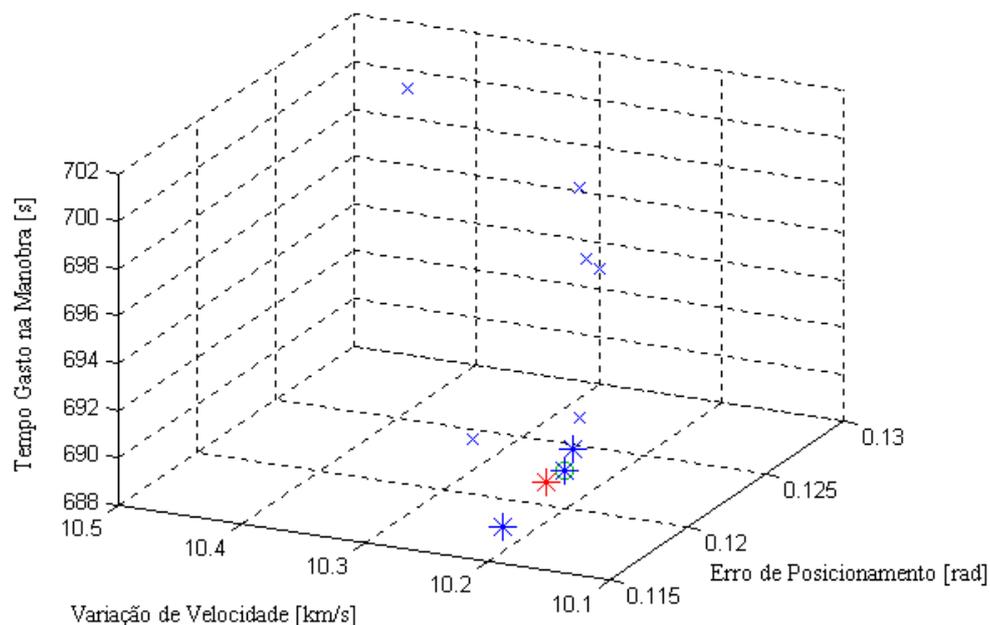


Fig. 7.6 – Distribuição de soluções para o satélite 2 do 7º Exemplo.

A comparação entre os resultados obtidos por meio da aplicação da metodologia de otimização multiobjetivo desenvolvida neste trabalho (Critério da Menor Perda) e os resultados obtidos por meio da aplicação de manobras nominais (onde manobra-se cada satélite de forma a atingir a órbita nominal), pode ser vista nas Figuras 7.7 a 7.9. A Figura 7.7 compara o erro de posição  $\delta\theta$ , após manobrar os três satélites da constelação, gerado pelas metodologias multiobjetivo e nominal. A Figura 7.8 compara a soma da variação de velocidade necessária  $\Delta v$  para manobrar os satélites da constelação, obtida por meio das metodologias multiobjetivo e nominal. A Figura 7.9 compara a soma do tempo gasto  $\Delta t$  para manobrar os satélites da constelação, obtido por meio das metodologias multiobjetivo e nominal.

Nas Figuras 7.7 a 7.9 podemos verificar que a metodologia multiobjetivo exigiu uma variação de velocidade praticamente igual, ou muito pouco maior, que a metodologia nominal, porém, o erro de posição obtido pela metodologia multiobjetivo foi significativamente menor do que o erro obtido pela metodologia nominal. O tempo

gasto para manobrar os satélites também foi menor quando aplicamos a metodologia multiobjetivo.

Portanto, para um pequeno aumento da variação de velocidade necessária, da ordem de 0,09 %, obtivemos uma melhora significativa no erro de posição, da ordem de 5 %, e do tempo gasto nas manobras, da ordem de 1 %. Esta melhora nestes parâmetros pode ser decisiva para determinadas missões onde, por exemplo, necessitamos de precisão no posicionamento entre os satélites da constelação.

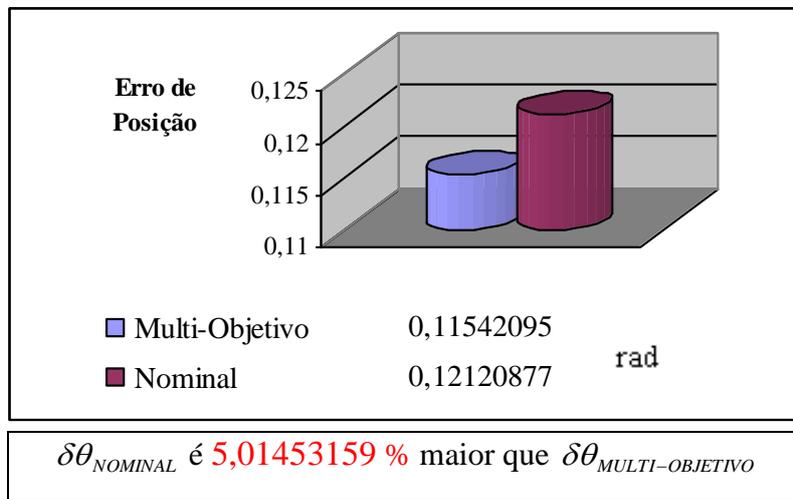


Fig. 7.7 – Comparação entre  $\delta\theta_{MULTI-OBJETIVO}$  e  $\delta\theta_{NOMINAL}$  do 7º Exemplo.

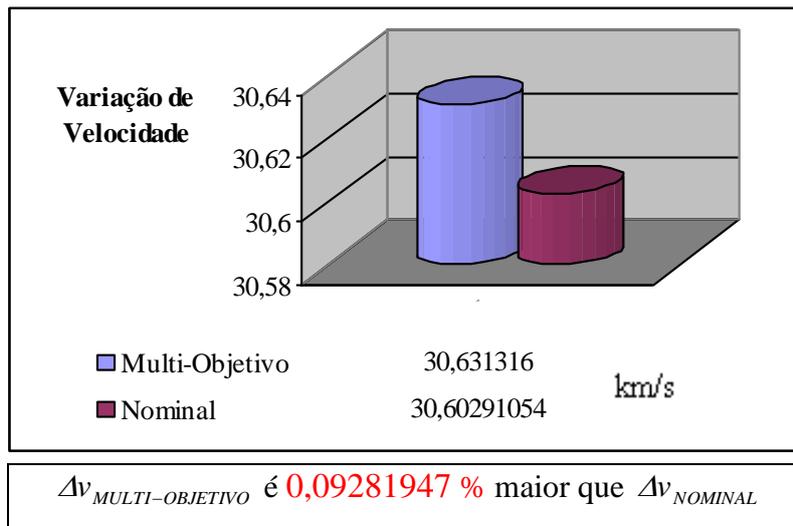


Fig. 7.8 – Comparação entre  $\Delta v_{MULTI-OBJETIVO}$  e  $\Delta v_{NOMINAL}$  do 7º Exemplo.

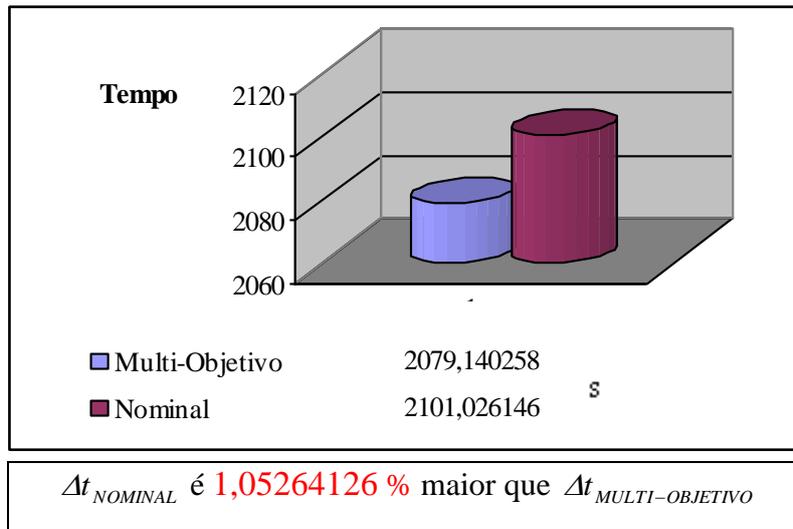


Fig. 7.9 – Comparação entre  $\Delta t_{MULTI-OBJETIVO}$  e  $\Delta t_{NOMINAL}$  do 7º Exemplo.

**Exemplo 8:** Manutenção orbital de uma constelação de satélites composta por três satélites em órbita baixa (altitude de 225 km), com órbitas nominais circulares e equatoriais. Assim, os elementos orbitais nominais dos satélites são dados por:

$$\begin{array}{ll}
 e = 0,00000000 & a = 6603,13900000 \text{ km} \\
 l = 6603,13900000 \text{ km} & i = 0,00000000 \text{ rad} \\
 \omega = 0,00000000 \text{ rad} & \Omega = 0,00000000 \text{ rad}
 \end{array}$$

Consideramos que no instante inicial ( $t = 0$ ) o satélite 1 está em visibilidade ( $\theta_1 = 0$ ) e os satélites apresentam os elementos orbitais nominais, mostrados abaixo ( $a$  em km e ângulos em radianos):

Satélite 1:

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 6603,13900000 & \Omega_1 = 0,00000000 & u_1 = 0,00000000 \\
 e_1 = 0,00000000 & \omega_1 = 0,00000000 & f_1 = 0,00000000 \\
 i_1 = 0,00000000 & M_1 = 0,00000000 & \theta_1 = 0,00000000
 \end{array}$$

Satélite 2:

$$\begin{array}{lll}
 a_2 = 6603,13900000 & \Omega_2 = & 0,00000000 & u_2 = & 2,09439510 \\
 e_2 = & 0,00000000 & \omega_2 = & 0,00000000 & f_2 = & 2,09439510 \\
 i_2 = & 0,00000000 & M_2 = & 2,09439510 & \theta_2 = & 2,09439510
 \end{array}$$

Satélite 3:

$$\begin{array}{lll}
 a_3 = 6603,13900000 & \Omega_3 = & 0,00000000 & u_3 = & 4,18879020 \\
 e_3 = & 0,00000000 & \omega_3 = & 0,00000000 & f_3 = & 4,18879020 \\
 i_3 = & 0,00000000 & M_3 = & 4,18879020 & \theta_3 = & 4,18879020
 \end{array}$$

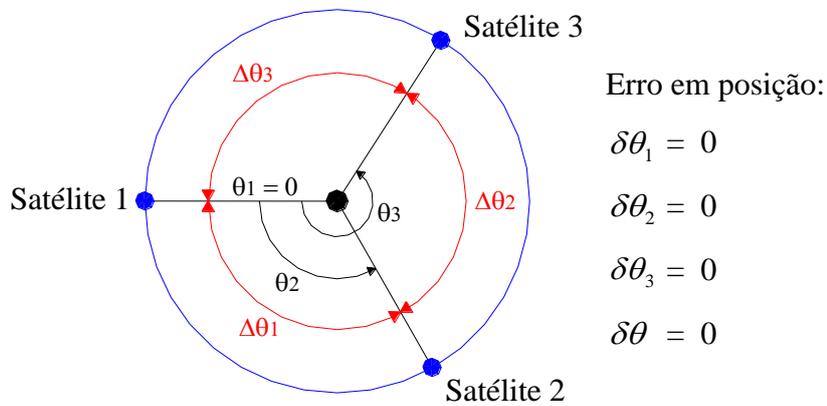


Fig. 7.10 – Posicionamento dos satélites do 8º Exemplo para  $t = 0$  e  $\theta_1 = 0$ .

Como  $a_1 = a_2 = a_3 = a_{nominal}$  e  $\delta\theta = 0$ , somente será necessário corrigir as órbitas dos satélites quando o efeito do arrasto atmosférico baixar as órbitas para um valor abaixo de 6602,239 km (limite inferior da tolerância do semi-eixo maior adotado neste exemplo), e isto irá ocorrer quando  $t = 5337,4941$  s. E neste caso, o satélite 1 está em visibilidade ( $\theta_1 = 0$ ) e os satélites apresentam os seguintes elementos orbitais:

Satélite 1:

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 6601,93044509 & \Omega_1 = & 0,00000000 & u_1 = & 0,00000000 \\
 e_1 = & 0,00000000 & \omega_1 = & 0,00000000 & f_1 = & 0,00000000 \\
 i_1 = & 0,00000000 & M_1 = & 0,00000000 & \theta_1 = & 0,00000000
 \end{array}$$

Satélite 2:

$$\begin{array}{lll}
 a_2 = 6601,93044509 & \Omega_2 = 0,00000000 & u_2 = 2,09439522 \\
 e_2 = 0,00000000 & \omega_2 = 0,00000000 & f_2 = 2,09439522 \\
 i_2 = 0,00000000 & M_2 = 2,09439522 & \theta_2 = 2,09439522
 \end{array}$$

Satélite 3:

$$\begin{array}{lll}
 a_3 = 6601,93044509 & \Omega_3 = 0,00000000 & u_3 = 4,18879042 \\
 e_3 = 0,00000000 & \omega_3 = 0,00000000 & f_3 = 4,18879042 \\
 i_3 = 0,00000000 & M_3 = 4,18879042 & \theta_3 = 4,18879042
 \end{array}$$

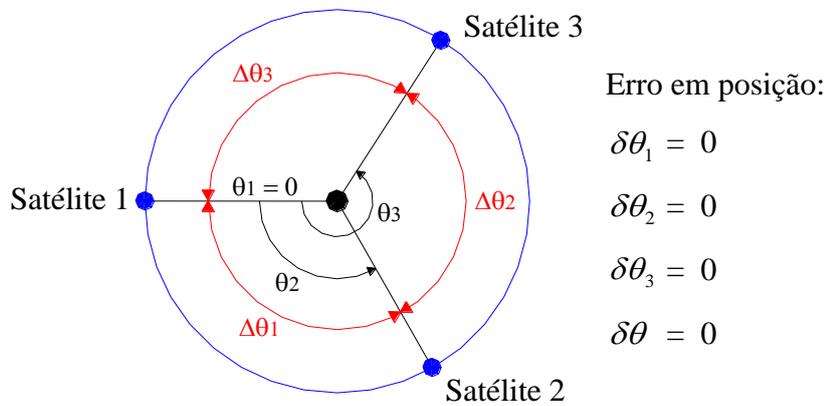


Fig. 7.11 – Posicionamento dos satélites do 8º Exemplo para  $t = 5337,4941$  s e  $\theta_1 = 0$ .

Calculando um conjunto de manobras para o satélite 1, obtemos:

Manobra 1:  $a_{final} = a_{nominal} = 6603,139$  km

$$\begin{array}{lll}
 a = 3813,50753965 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,21687909 \\
 e = 0,84297654 & \alpha_2 = 0,31026731 & \Delta v = 10,43563617 \\
 \omega = 3,29684376 & \Delta v_1 = 5,21875708 & t = 701,00770076
 \end{array}$$

Manobra 2:  $a_{final} = 1,01 a_{nominal} = 6603,364$  km

$$\begin{array}{lll}
 a = 3838,94341245 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,08329147 \\
 e = 0,82943908 & \alpha_2 = 0,32402131 & \Delta v = 10,16880281 \\
 \omega = 3,30375052 & \Delta v_1 = 5,08551134 & t = 702,00882124
 \end{array}$$

Manobra 3:  $a_{final} = 1,02 a_{nominal} = 6602,914$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3832,39271231 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,07469775 \\ e = 0,82972598 & \alpha_2 = 0,31955911 & \Delta v = 10,15092314 \\ \omega = 3,30147425 & \Delta v_1 = 5,07622539 & t = 692,00916737 \end{array}$$

Manobra 4:  $a_{final} = 1,03 a_{nominal} = 6603,589$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3826,99885076 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,14333171 \\ e = 0,83567624 & \alpha_2 = 0,31755317 & \Delta v = 10,28923606 \\ \omega = 3,30053543 & \Delta v_1 = 5,14590435 & t = 701,10831091 \end{array}$$

Manobra 5:  $a_{final} = 1,04 a_{nominal} = 6602,689$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3832,00577843 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,07884105 \\ e = 0,83006536 & \alpha_2 = 0,31945210 & \Delta v = 10,15886021 \\ \omega = 3,30139725 & \Delta v_1 = 5,08001916 & t = 692,50914418 \end{array}$$

Manobra 6:  $a_{final} = 1,05 a_{nominal} = 6603,814$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3836,77670075 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,10553678 \\ e = 0,83146479 & \alpha_2 = 0,32305907 & \Delta v = 10,21398945 \\ \omega = 3,30331350 & \Delta v_1 = 5,10845267 & t = 704,45390971 \end{array}$$

Manobra 7:  $a_{final} = 1,06 a_{nominal} = 6602,464$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3836,67153417 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,08212886 \\ e = 0,82958744 & \alpha_2 = 0,32264886 & \Delta v = 10,16508475 \\ \omega = 3,30297203 & \Delta v_1 = 5,08295589 & t = 699,00894038 \end{array}$$

Manobra 8:  $a_{final} = 1,07 a_{nominal} = 6604,039$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3834,28236173 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,10822185 \\ e = 0,83205939 & \alpha_2 = 0,32145327 & \Delta v = 10,21971060 \\ \omega = 3,30253352 & \Delta v_1 = 5,11148875 & t = 702,00859016 \end{array}$$

Manobra 9:  $a_{final} = 0,996 a_{nominal} = 6602,239$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3834,83954066 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,07022139 \\ e = 0,82894987 & \alpha_2 = 0,32116555 & \Delta v = 10,14092168 \\ \omega = 3,30220747 & \Delta v_1 = 5,07070029 & t = 694,00916232 \end{array}$$

Aplicando o Critério da Menor Perda para selecionar a melhor manobra, utilizando medidas normalizadas com  $\delta\theta_{m\acute{a}x} = 0,7$  rad,  $\Delta v_{m\acute{a}x} = 11$  km/s e  $T_{m\acute{a}x} = 1000$ s no c\`alculo do baricentro e das dist\`ancias, obtemos a Tabela 7.4:

TABELA 7.4 – Escolha da Melhor Manobra Para o Sat\`elite 1 do 8<sup>o</sup> Exemplo.

	$\delta\theta$	$\Delta v$	Tempo	Classifica\`ao
<b>1</b>	0,34398092 9 <sup>o</sup>	10,43563617 9 <sup>o</sup>	701,00770076 5 <sup>o</sup>	9 <sup>o</sup>
<b>2</b>	0,33559710 5 <sup>o</sup>	10,16880281 5 <sup>o</sup>	702,00882124 8 <sup>o</sup>	5 <sup>o</sup>
<b>3</b>	0,33072576 1 <sup>o</sup>	10,15092314 2 <sup>o</sup>	692,00916737 1 <sup>o</sup>	1 <sup>o</sup>
<b>4</b>	0,33920262 8 <sup>o</sup>	10,28923606 8 <sup>o</sup>	701,10831091 6 <sup>o</sup>	8 <sup>o</sup>
<b>5</b>	0,33118940 2 <sup>o</sup>	10,15886021 3 <sup>o</sup>	692,50914418 2 <sup>o</sup>	2 <sup>o</sup>
<b>6</b>	0,33815711 7 <sup>o</sup>	10,21398945 6 <sup>o</sup>	704,45390971 9 <sup>o</sup>	7 <sup>o</sup>
<b>7</b>	0,33415824 4 <sup>o</sup>	10,16508475 4 <sup>o</sup>	699,00894038 4 <sup>o</sup>	4 <sup>o</sup>
<b>8</b>	0,33730895 6 <sup>o</sup>	10,21971060 7 <sup>o</sup>	702,00859016 7 <sup>o</sup>	6 <sup>o</sup>
<b>9</b>	0,33122408 3 <sup>o</sup>	10,14092168 1 <sup>o</sup>	694,00916232 3 <sup>o</sup>	3 <sup>o</sup>
<b>B</b>	0,33122408	10,14092168	694,00916232	

● V\`ertice      ● Manobra escolhida      ● Baricentro

Portanto, selecionamos a manobra 3, pois é a manobra mais próxima do baricentro, como pode ser visto na Figura 7.12.

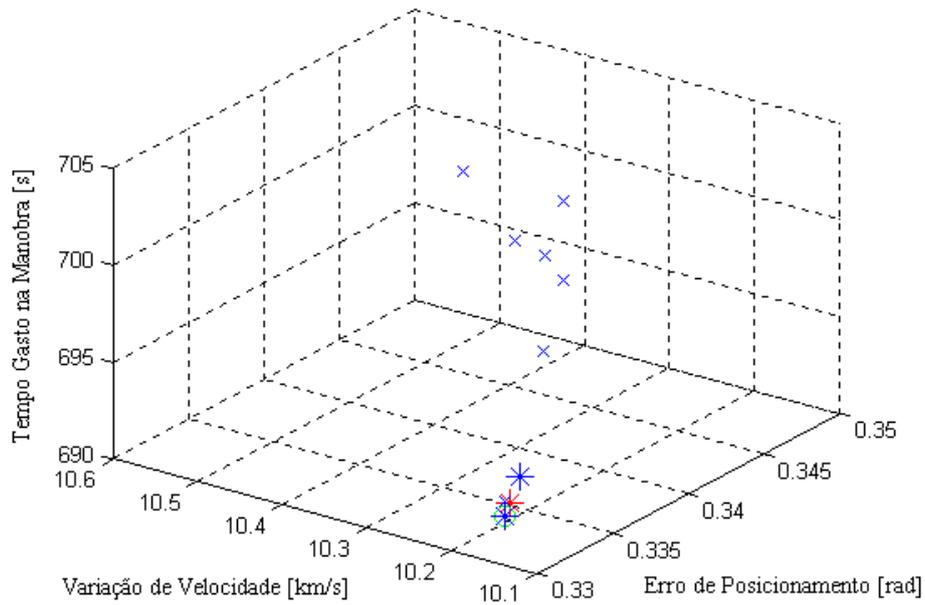


Fig. 7.12 – Distribuição de soluções para o satélite 1 do 8º Exemplo.

Consideramos agora que  $t = 7115,9325$  s e que o satélite 3 está em visibilidade ( $\theta_3 = 0$ ). Portanto, os satélites apresentam os seguintes elementos orbitais ( $a$  em km e ângulos em radianos):

Satélite 1:

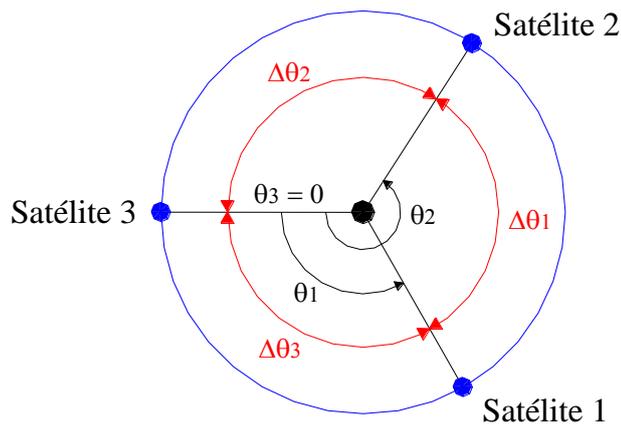
$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 6602,68166455 & \Omega_1 = 0,00000000 & u_1 = 1,59913823 \\
 e_1 = 0,00000000 & \omega_1 = 0,00000000 & f_1 = 1,59913823 \\
 i_1 = 0,00000000 & M_1 = 1,59913823 & \theta_1 = 1,59913823
 \end{array}$$

Satélite 2:

$$\begin{array}{lll}
 a_2 = 6601,36490371 & \Omega_2 = 0,00000000 & u_2 = 4,18996899 \\
 e_2 = 0,00000000 & \omega_2 = 0,00000000 & f_2 = 4,18996899 \\
 i_2 = 0,00000000 & M_2 = 4,18996899 & \theta_2 = 4,18996899
 \end{array}$$

Satélite 3:

$$\begin{array}{lll}
 a_3 = 6601,36490371 & \Omega_3 = 0,00000000 & u_3 = 0,00000000 \\
 e_3 = 0,00000000 & \omega_3 = 0,00000000 & f_3 = 0,00000000 \\
 i_3 = 0,00000000 & M_3 = 0,00000000 & \theta_3 = 0,00000000
 \end{array}$$



Erro em posição:

$$\begin{array}{l}
 \delta\theta_1 = 0,49643566 \\
 \delta\theta_2 = -0,00117879 \\
 \delta\theta_3 = -0,49525687 \\
 \delta\theta = 0,33095711
 \end{array}$$

Fig. 7.13 – Posicionamento dos satélites do 8º Exemplo para  $t = 7115,9325$  s  $\theta_3 = 0$ .

Calculando um conjunto de manobras para o satélite 3, obtemos:

Manobra 1:  $a_{final} = a_{nominal} = 6603,139$  km

$$\begin{array}{lll}
 a = 3820,10647821 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,18471129 \\
 e = 0,83967098 & \alpha_2 = 0,31407952 & \Delta v = 10,37217642 \\
 \omega = 3,29880702 & \Delta v_1 = 5,18746513 & t = 702,20795943
 \end{array}$$

Manobra 2:  $a_{final} = 1,01 a_{nominal} = 6603,364$  km

$$\begin{array}{lll}
 a = 3838,33164219 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,08465522 \\
 e = 0,82962949 & \alpha_2 = 0,32377260 & \Delta v = 10,17237866 \\
 \omega = 3,30368228 & \Delta v_1 = 5,08772344 & t = 701,80880615
 \end{array}$$

Manobra 3:  $a_{final} = 1,02 a_{nominal} = 6602,914$  km

$a$	$=$	3820,02868970	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,14121992
$e$	$=$	0,83647339	$\alpha_2$	$=$	0,31319606	$\Delta v$	$=$	10,28484948
$\omega$	$=$	3,29834695	$\Delta v_1$	$=$	5,14362956	$t$	$=$	692,32301320

Manobra 4:  $a_{final} = 1,03 a_{nominal} = 6603,589$  km

$a$	$=$	3831,09118064	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,11325343
$e$	$=$	0,83285319	$\alpha_2$	$=$	0,31967378	$\Delta v$	$=$	10,22995622
$\omega$	$=$	3,30165542	$\Delta v_1$	$=$	5,11670279	$t$	$=$	699,50860888

Manobra 5:  $a_{final} = 1,04 a_{nominal} = 6602,689$  km

$a$	$=$	3829,89510389	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,08686497
$e$	$=$	0,83097526	$\alpha_2$	$=$	0,31838899	$\Delta v$	$=$	10,17578723
$\omega$	$=$	3,30092382	$\Delta v_1$	$=$	5,08892226	$t$	$=$	692,00905341

Manobra 6:  $a_{final} = 1,05 a_{nominal} = 6603,814$  km

$a$	$=$	3801,74263575	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,29640678
$e$	$=$	0,85048278	$\alpha_2$	$=$	0,30380557	$\Delta v$	$=$	10,59662285
$\omega$	$=$	3,29372503	$\Delta v_1$	$=$	5,30021607	$t$	$=$	704,00701406

Manobra 7:  $a_{final} = 1,06 a_{nominal} = 6602,464$  km

$a$	$=$	3821,94279967	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,16020980
$e$	$=$	0,83753216	$\alpha_2$	$=$	0,31491770	$\Delta v$	$=$	10,32212647
$\omega$	$=$	3,29916105	$\Delta v_1$	$=$	5,16191667	$t$	$=$	699,00822263

Manobra 8:  $a_{final} = 1,07 a_{nominal} = 6604,039$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3827,14559359 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,14915144 \\ e = 0,83613392 & \alpha_2 = 0,31780477 & \Delta v = 10,30244922 \\ \omega = 3,30076197 & \Delta v_1 = 5,15329778 & t = 702,80820995 \end{array}$$

Manobra 9:  $a_{final} = 0,996 a_{nominal} = 6602,239$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3821,52887093 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,12499898 \\ e = 0,83498276 & \alpha_2 = 0,31391678 & \Delta v = 10,25135796 \\ \omega = 3,29863995 & \Delta v_1 = 5,12635898 & t = 690,50874504 \end{array}$$

Aplicando o Critério da Menor Perda para selecionar a melhor manobra, utilizando medidas normalizadas com  $\delta\theta_{m\acute{a}x} = 0,7$  rad,  $\Delta v_{m\acute{a}x} = 11$  km/s e  $T_{m\acute{a}x} = 1000$ s no c\`alculo do baricentro e das dist\`ancias, obtemos a Tabela 7.5:

TABELA 7.5 – Escolha da Melhor Manobra Para o Sat\`elite 3 do 8<sup>o</sup> Exemplo.

	$\delta\theta$	$\Delta v$	Tempo	Classifica\c{c}\~ao
<b>1</b>	0,34323784 8 <sup>o</sup>	10,37217642 8 <sup>o</sup>	702,20795943 7 <sup>o</sup>	8 <sup>o</sup>
<b>2</b>	0,33646255 4 <sup>o</sup>	10,17237866 1 <sup>o</sup>	701,80880615 6 <sup>o</sup>	4 <sup>o</sup>
<b>3</b>	0,33606968 3 <sup>o</sup>	10,28484948 5 <sup>o</sup>	692,32301320 3 <sup>o</sup>	5 <sup>o</sup>
<b>4</b>	0,33739004 5 <sup>o</sup>	10,22995622 3 <sup>o</sup>	699,50860888 5 <sup>o</sup>	3 <sup>o</sup>
<b>5</b>	0,33236134 1 <sup>o</sup>	10,17578723 2 <sup>o</sup>	692,00905341 2 <sup>o</sup>	1 <sup>o</sup>
<b>6</b>	0,35149893 9 <sup>o</sup>	10,59662285 9 <sup>o</sup>	704,00701406 9 <sup>o</sup>	9 <sup>o</sup>
<b>7</b>	0,34016808 6 <sup>o</sup>	10,32212647 7 <sup>o</sup>	699,00822263 4 <sup>o</sup>	6 <sup>o</sup>
<b>8</b>	0,34122538 7 <sup>o</sup>	10,30244922 6 <sup>o</sup>	702,80820995 8 <sup>o</sup>	7 <sup>o</sup>
<b>9</b>	0,33416546 2 <sup>o</sup>	10,25135796 4 <sup>o</sup>	690,50874504 1 <sup>o</sup>	2 <sup>o</sup>
<b>B</b>	0,33432978	10,19984128	694,77553487	

● V\`ertice      ● Manobra escolhida      ● Baricentro

Portanto, selecionamos a manobra 5, pois é a manobra mais próxima do baricentro, como pode ser visto na Figura 7.14.

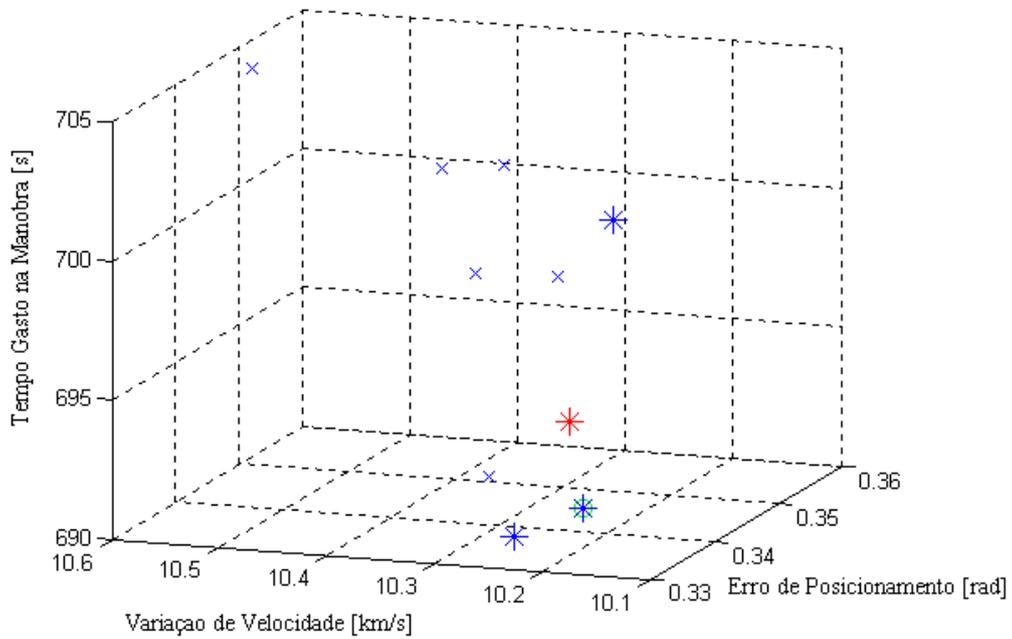


Fig. 7.14 – Distribuição de soluções para o satélite 3 do 8º Exemplo.

Consideramos agora que  $t = 8893,1298$  s e que o satélite 2 está em visibilidade ( $\theta_2 = 0$ ). Portanto, os satélites apresentam os seguintes elementos orbitais ( $a$  em km e ângulos em radianos):

Satélite 1:

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 6602,25313837 & \Omega_1 = 0,00000000 & u_1 = 3,69287951 \\
 e_1 = 0,00000000 & \omega_1 = 0,00000000 & f_1 = 3,69287951 \\
 i_1 = 0,00000000 & M_1 = 3,69287951 & \theta_1 = 3,69287951
 \end{array}$$

Satélite 2:

$$\begin{array}{lll}
 a_2 = 6600,67050929 & \Omega_2 = 0,00000000 & u_2 = 0,00000000 \\
 e_2 = 0,00000000 & \omega_2 = 0,00000000 & f_2 = 0,00000000 \\
 i_2 = 0,00000000 & M_2 = 0,00000000 & \theta_2 = 0,00000000
 \end{array}$$

Satélite 3:

$$\begin{array}{lll}
 a_3 = 6602,43722227 & \Omega_3 = 0,00000000 & u_3 = 1,59657315 \\
 e_3 = 0,00000000 & \omega_3 = 0,00000000 & f_3 = 1,59657315 \\
 i_3 = 0,00000000 & M_3 = 1,59657315 & \theta_3 = 1,59657315
 \end{array}$$

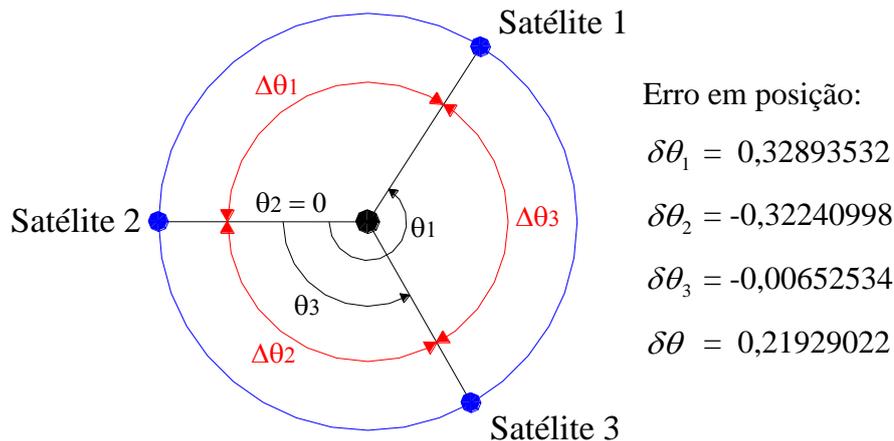


Fig. 7.15 – Posicionamento dos satélites do 8º Exemplo para  $t = 8893,1298$  s e  $\theta_2 = 0$ .

Calculando um conjunto de manobras para o satélite 2, obtemos:

Manobra 1:  $a_{final} = a_{nominal} = 6603,139$  km

$$\begin{array}{lll}
 a = 3772,37771504 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,45244845 \\
 e = 0,86553757 & \alpha_2 = 0,28660698 & \Delta v = 10,90875480 \\
 \omega = 3,28511293 & \Delta v_1 = 5,45630635 & t = 700,50599655
 \end{array}$$

Manobra 2:  $a_{final} = 1,01 a_{nominal} = 6603,364$  km

$$\begin{array}{lll}
 a = 3823,66473495 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,13570169 \\
 e = 0,83557977 & \alpha_2 = 0,31551319 & \Delta v = 10,27556023 \\
 \omega = 3,29961906 & \Delta v_1 = 5,13985854 & t = 695,80850117
 \end{array}$$

Manobra 3:  $a_{final} = 1,02 a_{nominal} = 6602,914$  km

$a$	$=$	3798,81533139	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,25620504
$e$	$=$	0,84792405	$\alpha_2$	$=$	0,30174007	$\Delta v$	$=$	10,51590970
$\omega$	$=$	3,29267829	$\Delta v_1$	$=$	5,25970466	$t$	$=$	692,00758398

Manobra 4:  $a_{final} = 1,03 a_{nominal} = 6603,589$  km

$a$	$=$	3813,45483938	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,20596206
$e$	$=$	0,84224231	$\alpha_2$	$=$	0,31022451	$\Delta v$	$=$	10,41646132
$\omega$	$=$	3,29699006	$\Delta v_1$	$=$	5,21049926	$t$	$=$	699,00782878

Manobra 5:  $a_{final} = 1,04 a_{nominal} = 6602,689$  km

$a$	$=$	3815,40470459	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,18148166
$e$	$=$	0,84007344	$\alpha_2$	$=$	0,31119727	$\Delta v$	$=$	10,36610269
$\omega$	$=$	3,29739101	$\Delta v_1$	$=$	5,18462103	$t$	$=$	696,00810762

Manobra 6:  $a_{final} = 1,05 a_{nominal} = 6603,814$  km

$a$	$=$	3822,87235742	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,17694575
$e$	$=$	0,83877470	$\alpha_2$	$=$	0,31574627	$\Delta v$	$=$	10,35876729
$\omega$	$=$	3,29977568	$\Delta v_1$	$=$	5,18182154	$t$	$=$	704,10794359

Manobra 7:  $a_{final} = 1,06 a_{nominal} = 6602,464$  km

$a$	$=$	3834,51473078	$\alpha_1$	$=$	0,00000000	$\Delta v_2$	$=$	5,07619412
$e$	$=$	0,82946812	$\alpha_2$	$=$	0,32133497	$\Delta v$	$=$	10,15517129
$\omega$	$=$	3,30244565	$\Delta v_1$	$=$	5,07897717	$t$	$=$	695,50905470

Manobra 8:  $a_{final} = 1,07 a_{nominal} = 6604,039$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3832,27494773 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,11452757 \\ e = 0,83282349 & \alpha_2 = 0,32054161 & \Delta v = 10,23427641 \\ \omega = 3,30220482 & \Delta v_1 = 5,11974884 & t = 701,50853489 \end{array}$$

Manobra 9:  $a_{final} = 0,996 a_{nominal} = 6602,239$  km

$$\begin{array}{lll} a = 3831,52178764 & \alpha_1 = 0,00000000 & \Delta v_2 = 5,07905494 \\ e = 0,83010164 & \alpha_2 = 0,31947391 & \Delta v = 10,16054631 \\ \omega = 3,30149199 & \Delta v_1 = 5,08149137 & t = 692,50911115 \end{array}$$

Aplicando o Critério da Menor Perda para selecionar a melhor manobra, utilizando medidas normalizadas com  $\delta\theta_{m\acute{a}x} = 0,7$  rad,  $\Delta v_{m\acute{a}x} = 11$  km/s e  $T_{m\acute{a}x} = 1000$ s no c\`alculo do baricentro e das dist\`ancias, obtemos a Tabela 7.6:

TABELA 7.6 – Escolha da Melhor Manobra Para o Sat\`elite 2 do 8<sup>o</sup> Exemplo.

	$\delta\theta$	$\Delta v$	Tempo	Classifica\`ao
<b>1</b>	0,02871318 9 <sup>o</sup>	10,90875480 9 <sup>o</sup>	700,50599655 7 <sup>o</sup>	9 <sup>o</sup>
<b>2</b>	0,00575679 3 <sup>o</sup>	10,27556023 4 <sup>o</sup>	695,80850117 4 <sup>o</sup>	1 <sup>o</sup>
<b>3</b>	0,01195674 7 <sup>o</sup>	10,51590970 8 <sup>o</sup>	692,00758398 1 <sup>o</sup>	8 <sup>o</sup>
<b>4</b>	0,01179272 6 <sup>o</sup>	10,41646132 7 <sup>o</sup>	699,00782878 6 <sup>o</sup>	6 <sup>o</sup>
<b>5</b>	0,00879068 5 <sup>o</sup>	10,36610269 6 <sup>o</sup>	696,00810762 5 <sup>o</sup>	3 <sup>o</sup>
<b>6</b>	0,01514568 8 <sup>o</sup>	10,35876729 5 <sup>o</sup>	704,10794359 9 <sup>o</sup>	7 <sup>o</sup>
<b>7</b>	0,00164066 2 <sup>o</sup>	10,15517129 1 <sup>o</sup>	695,50905470 3 <sup>o</sup>	5 <sup>o</sup>
<b>8</b>	0,00687667 4 <sup>o</sup>	10,23427641 3 <sup>o</sup>	701,50853489 8 <sup>o</sup>	2 <sup>o</sup>
<b>9</b>	0,0012963 1 <sup>o</sup>	10,16054631 2 <sup>o</sup>	692,50911115 2 <sup>o</sup>	4 <sup>o</sup>
<b>B</b>	0,00496478	10,27720910	693,34191661	

● V\`ertice      ● Manobra escolhida      ● Baricentro

Portanto, selecionamos a manobra 2, pois é a manobra mais próxima do baricentro, como pode ser visto na Figura 7.16.

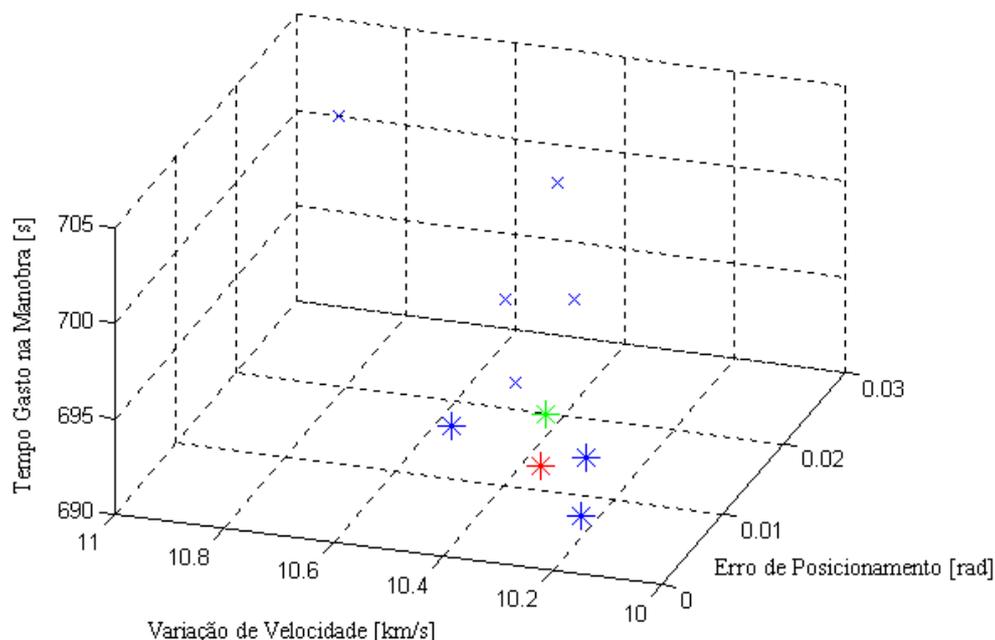


Fig. 7.16 – Distribuição de soluções para o satélite 2 do 8º Exemplo.

Assim como no exemplo anterior, a comparação entre os resultados obtidos por meio da aplicação da metodologia de otimização multiobjetivo desenvolvida neste trabalho (Critério da Menor Perda) e os resultados obtidos por meio da aplicação de manobras nominais, pode ser vista nas Figuras 7.17 a 7.19. A Figura 7.17 compara o erro de posição  $\delta\theta$ , após manobrar os três satélites da constelação, gerado pelas metodologias multiobjetivo e nominal. A Figura 7.18 compara a soma da variação de velocidade necessária  $\Delta v$  para manobrar os satélites da constelação, obtida por meio das metodologias multiobjetivo e nominal. A Figura 7.19 compara a soma do tempo gasto  $\Delta t$  para manobrar os satélites da constelação, obtido por meio das metodologias multiobjetivo e nominal.

Nas Figuras 7.17 a 7.19 podemos verificar que a metodologia multiobjetivo apresentou melhores resultados. O erro de posição obtido pela metodologia multiobjetivo foi expressivamente menor do que o erro obtido pela metodologia nominal. A variação de velocidade necessária e o tempo gasto para manobrar os

satélites também foram menores quando aplicamos a metodologia multiobjetivo.

Portanto, a aplicação da metodologia multiobjetivo gerou resultados claramente superiores aos resultados gerados pela aplicação da metodologia nominal, pois com a aplicação da metodologia multiobjetivo foi possível obter resultados melhores com relação aos três objetivos simultaneamente. Em uma aplicação real, a economia obtida com a aplicação desta metodologia pode ser extremamente relevante, como mostrou este exemplo.

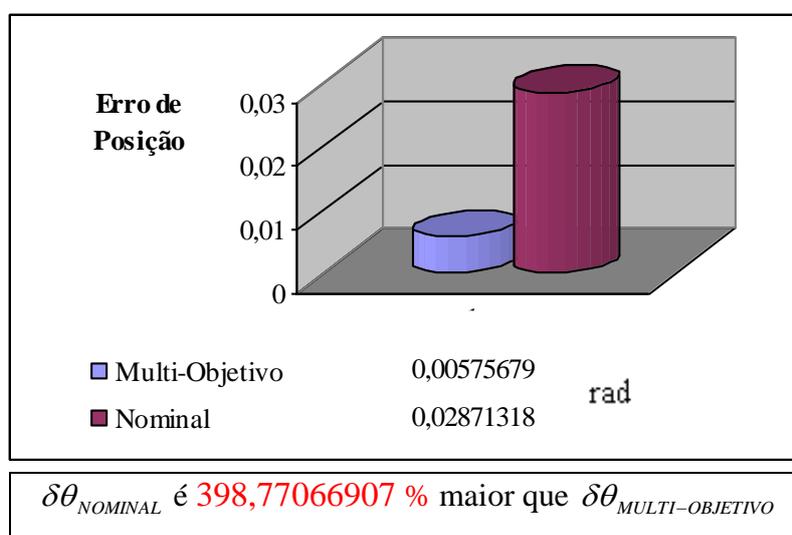


Fig. 7.17 – Comparação entre  $\delta\theta_{MULTI-OBJETIVO}$  e  $\delta\theta_{NOMINAL}$  do 8º Exemplo.

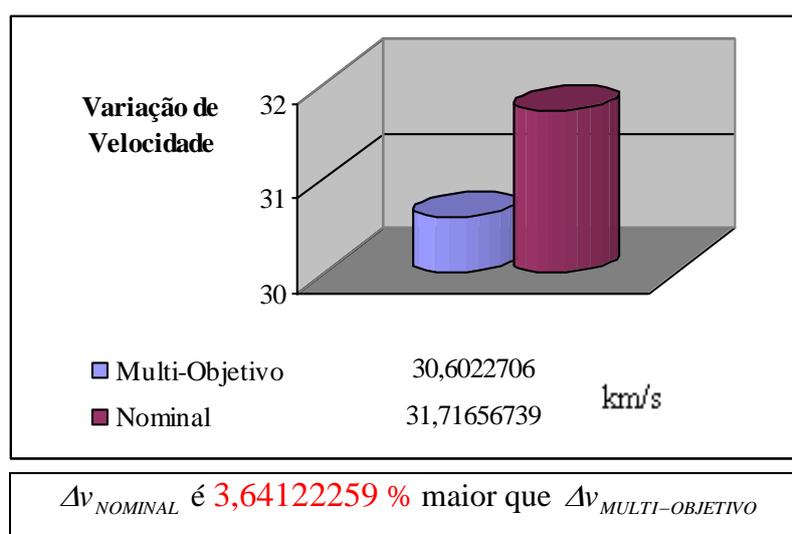


Fig. 7.18 – Comparação entre  $\Delta v_{MULTI-OBJETIVO}$  e  $\Delta v_{NOMINAL}$  do 8º Exemplo.

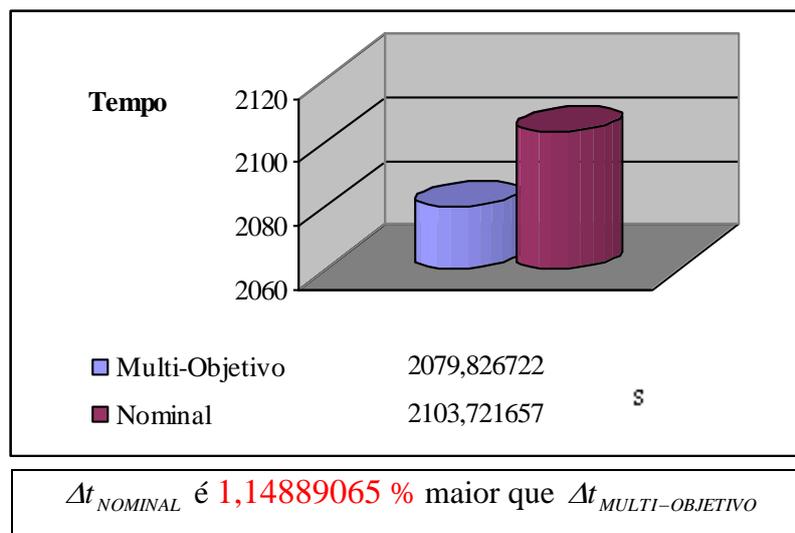


Fig. 7.19 – Comparação entre  $\Delta t_{MULTI-OBJETIVO}$  e  $\Delta t_{NOMINAL}$  do 8º Exemplo.

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

#### 8.1 - CONCLUSÕES

Neste trabalho, o problema da manutenção orbital de constelações simétricas de satélites foi abordado como um problema de otimização multiobjetivo. Consideramos como exemplo, uma constelação composta por  $n = 3$  satélites. Entretanto, o método de otimização multiobjetivo e o programa para controle da constelação desenvolvidos permitem facilmente considerar mais satélites; porém o problema para  $n = 3$  é conceitualmente idêntico ao problema para  $n > 3$ ; mas, neste caso, teríamos um esforço computacional maior. Por isso, optamos por considerar apenas  $n = 3$ .

Para as órbitas dos satélites dos exemplos, consideramos órbitas equatoriais e circulares, mas o programa desenvolvido permite a utilização de órbitas elípticas e/ou inclinadas. Neste caso devemos alterar o procedimento de cálculo para os erros de posição  $\delta\theta_1$ ,  $\delta\theta_2$ ,  $\delta\theta_3$  e  $\delta\theta$  (Equações 6.1 a 6.7). Este procedimento é específico para cada tipo de constelação, devendo ser definido conforme a geometria da constelação, número de satélites, missão executada pela constelação, tipo de cobertura e etc. Neste trabalho consideramos o vínculo de posição mais simples possível para facilitar a visualização, já que a forma de calcular o erro de posicionamento  $\delta\theta$  não é o enfoque principal do trabalho.

Durante o desenvolvimento do trabalho percebemos que o enfoque principal seria a otimização multiobjetivo e este poderia ter vários níveis de complexidade. Inicialmente, esperávamos poder implementar um programa capaz além de minimizar o consumo de combustível, minimizar o tempo gasto nas manobras e o erro de posicionamento, e ainda, otimizar outros parâmetros tais como: interseção de janelas de visibilidade, disponibilidade e custo de operação do centro de controle, disponibilidade e custo de operação da estação de rastreamento, necessidade do uso de mais uma estação, entre outros. Mas todos estes parâmetros a otimizar tornavam o problema muito complexo. Era possível otimizar o problema considerando apenas um parâmetro, ou objetivo, de

cada vez. Mas quando consideramos esses parâmetros simultaneamente surgem acoplamentos que fazem com que alguns objetivos da otimização sejam conflitantes. Isto torna a solução muito difícil, se não impossível, usando métodos de otimização clássicos, como foi mostrado nos capítulos anteriores. Dessa forma, iniciamos a busca por uma metodologia multiobjetivo capaz de ser aplicada ao problema. Porém, não foi possível encontrar na literatura nenhuma metodologia que atendesse igualmente todos os objetivos da otimização. As metodologias encontradas geralmente iniciavam o problema com uma abordagem multiobjetivo mas acabavam reduzindo o problema ao caso mono-objetivo por meio de simplificações ou fatores de influência. Ou então, quando realmente a abordagem era multiobjetivo, a solução encontrada não era única, mas sim, um conjunto de soluções candidatas à solução ótima, e neste caso, para a escolha da solução ótima devíamos utilizar outros critérios, muitas vezes externos ao problema. A melhor metodologia existente na literatura, que baseia-se no Critério de Pareto de 1909, apresenta essa deficiência como foi mostrado no Capítulo 5. Até hoje, vários autores utilizam o Critério de Pareto com pequenas variações. Portanto, ao que parece, não existe na literatura revisada nenhum método capaz de realizar, realmente, a otimização multiobjetivo considerando igualmente todos os objetivos do problema. Assim, tivemos que tentar de alguma forma, criar uma metodologia que conseguisse pelo menos considerar igualmente todos os objetivos. Essa metodologia baseia-se no que chamamos de Critério da Menor Perda, como foi mostrado no Capítulo 6. Usando esse critério, foi possível considerar igualmente objetivos conflitantes e obter uma solução única para o problema, o que para aplicações em Engenharia é interessante. Consideramos nos exemplos apresentados neste trabalho apenas três objetivos, mas o Critério da Menor Perda permite que sejam considerados quantos objetivos forem necessários.

O problema da manutenção orbital de uma constelação de satélites certamente pode ser formulado como um problema multiobjetivo com mais de três objetivos a otimizar. Consideramos apenas três pois, caso contrário, a implementação do programa desenvolvido para a solução do problema se tornaria ainda mais complexa. Entretanto, o problema para três objetivos é conceitualmente igual ao problema com mais de três

objetivos e sua implementação pode ser facilmente realizada. Por isso, optamos por considerar apenas a minimização do consumo de combustível, do tempo gasto nas manobras e do erro de posicionamento.

O programa desenvolvido foi testado e comprovou-se que ele é capaz de gerar soluções confiáveis. Ele foi desenvolvido em módulos de forma a poder ser ampliado considerando um maior número de satélites e/ou outras configurações geométricas da constelação conforme a necessidade.

## **8.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Como sugestões para trabalhos futuros podemos citar as seguintes possibilidades.

O programa de manutenção orbital para o controle de uma constelação de satélites implementado neste trabalho foi desenvolvido com fins unicamente acadêmicos para poder testar a metodologia de otimização multiobjetivo, baseada no Critério da Menor Perda desenvolvida neste trabalho, aplicada ao problema multiobjetivo da manutenção orbital de uma constelação de satélites. Portanto, foram feitas simplificações no desenvolvimento do programa, porém todas em componentes ou sub-rotinas não relacionadas diretamente com a otimização multiobjetivo, como as sub-rotinas de propagação de órbita e cálculo do arrasto atmosférico mencionadas no Capítulo 3. Para os testes realizados neste trabalho, a precisão obtida nestas sub-rotinas foi adequada. Entretanto, para aplicações práticas seria interessante utilizar sub-rotinas mais precisas. Assim, sugerimos a implementação dessas sub-rotinas e a integração delas no programa “Constellation”.

Outra possibilidade para trabalhos futuros seria considerar configurações de constelações já existentes, como por exemplo as constelações INMARSAT, GLOBALSTAR e NAVSTAR/GPS, e comparar os resultados obtidos pelo programa “Constellation” com dados reais quanto a gasto de combustível, tempo gasto com manobras e precisão das manobras para essas constelações. Essa comparação permitiria avaliar o desempenho do programa desenvolvido em aplicações reais, mas para isto, a sugestão anterior já deve ter sido implementada.

O programa “Constellation” foi desenvolvido em módulos, como mostrado na Figura 3.9, de forma a ser possível a substituição de cada um deles, se isto for necessário, por versões mais precisas ou mais rápidas, ou ainda por uma nova versão que utiliza diferentes modelagens. Assim, sugerimos o desenvolvimento e implementação dessas novas versões, aplicadas a missões reais dentro e fora do INPE.

Quanto ao Critério da Menor Perda desenvolvido neste trabalho podemos citar a seguinte possibilidade: da mesma forma que o Critério de Pareto foi desenvolvido para aplicações em Economia e hoje é utilizado em outras áreas, sugerimos a aplicação do Critério da Menor Perda também em outras áreas do conhecimento humano além da Astronáutica como a Economia e a Biologia, de forma a poder testar a utilidade deste critério. Isto é possível devido ao caráter geral deste critério aplicado à otimização multiobjetivo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adams, W. S.; Rider L. Circular polar constellations providing continuous single or multiple coverage above a specified latitude. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 35, n. 2, p. 155-192, April-June 1987.
- Agnèse, J. C.; Brousse, P. Scheduling techniques for a constellation visibilities. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 100 part I, p. 47-55, 1998.
- Anthony, M. L.; Sasaki, F. T. **On some optimum single pulse transfer in central force fields**. Martin Co, Aug. 1963. (Rept. R-63-11)
- Aragone, L. S.; Gonzalez, R. L. V. Fast computational procedure for solving multi-item single-machine lot scheduling optimization problems. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 93, n. 3, p. 491-515, June 1997.
- Balasko, Y. Pareto optima, welfare weight, and smooth equilibrium analysis. **Journal of Economic Dynamics & Control**, v. 21, n. 2-3, p. 473-503, 1997.
- Ballard, A. H. Rosette constellations of earth satellites. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. AES-16, n. 5, p. 656-673, Sep. 1980.
- Barbanel, J. Partition ratios, Pareto optimal cake division, and related notations. **Journal of Mathematical Economics**, v. 32, n. 4, p. 401-428, 1999.
- Belenson, S.; Kapur, K. An algorithm for solving multicriterion linear programming problems with examples. **Operational Res. Quart.** v. 24, p. 65, 1973.
- Benayoun, R.; deMontgolfier, J.; Tergny, J.; Laritchev, O. Linear programming with multiple objective functions: step method. **Math. Programming**, v.1, p. 366, 1971.
- Bentham, J. **An introduction to the principles of morals and legislation**. New York: Hafner, 1948. 378 p.
- Biggs, M. C. B. **The optimisation of spacecraft orbital manoeuvres. Part II: using Pontryagin's maximum principle**. Numerical Optimisation Centre: The Hatfield Polytechnic, 1978. 25 p. (Technical Report n. 98)
- Billik, B. H.; Roth, H. L. Studies relative to rendezvous between circular orbits.

- Astronautica Acta**, v. 13, n. 1, p. 23-36, 1967.
- Bonneau, F.; Bernard, J. Interplanetary trajectories. In **Spaceflight dynamics Part II**. edited by Jean-Pierre Carrou, Toulouse-France, 1995. Cap. 18, p. 1183-1219.
- Brochet, C.; Garcia, J. M.; Enjalbert, J. M.; Céolin, T. Models and algorithms for constellation station keeping strategies and satellites replacement. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 100, Part I, p. 31-45, 1998.
- Brousse, P.; Rozanes, P.; Lansard, E.; Martinot, V. Skybridge station keeping strategy. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 100 Part I, p. 3-17, 1998.
- Brouwer, D.; Clemence, G. M. **Methods of celestial mechanics** Academic Press, New York, 1961. 598 p.
- Brown, C. D.; **Spacecraft mission design**. Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1992. 187 p.
- Brunk, W. E. Transfer between noncoplanar orbits with minimum velocity requirements. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 7, p. 111-124, 1960. (Paper 60-69)
- Carroll, V. C.; Mason, W. J., Optimal multi-objective low-thrust spacecraft trajectories. **Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.**, n. 186, p. 387-402.
- Castiel, D.; Draim, J. E.; Brosius, J. W. **Elliptical orbit satellite system and deployment with controllable coverage characteristics**. United States patent number 5.582.367, 10 Dec 1996.
- Castronuovo, M. M.; Ulivieri, C.; Laneve, G. Multi-sunsynchronous constellations for continuous surveillance in tropical regions. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 100 part I, p. 19-30, 1998.
- Charnes, A.; Cooper, W. **Management models and industrial applications of linear programming. V. 1**. New York: Wiley, 1961. 467 p.
- Chiaradia, A. P. M. **Determinação e manobras autônomas de órbita de satélites artificiais em tempo real usando medidas GPS de uma frequência**. São José dos Campos, 112 p. (INPE-8755-TDI/798) Tese (Doutorado em Engenharia e

Tecnologia Espaciais / Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2002.

Cohon, L. J.; Facet, T.; Haan, A.; Marks, D. **Mathematical programming models and methodological approaches for river basin planning**. Cambridge, Massachusetts: (Rep. N° R75-37), Dept. of Civil Engrg, MIT, 1973. 308 p.

Cohon, L. J. **Multiobjective programming and planning**. New York: Academic Press, 1978. 333 p.

Concha, M.; DeFazio, R. NANOSAT constellation mission design. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 100 part I, p.71-79, 1998.

Daniilidis, A.; Hadjisavvas, N.; Schaible, S. Connectedness of efficient set for three-objective quasiconcave maximization problems. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 93, n. 3, p. 517-524, June 1997.

Ding, X. P. Constrained multiobjective games in general topological space. **Computers & Mathematics With applications**, v. 39, p. 23-30, 2000.

Dobrzelecki, A. J. **The longitudinal dynamics of a vehicle orbiting within the Earth's atmosphere** Phd. University of Colorado at Boulder, 233 p. 1973.

Drain, J. E. Three and four satellite continuous coverage constellations. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 8, n. 6, Nov. – Dec. 1985.

Drain, J. E.; Castiel, D. Optimization of the Borealis and Concordia sub-constellations of the Ellipso personal communications system. **Acta Astronautica**, v. 40, n. 2-8, p. 183-193, 1997.

Dyer, J. Interactive goal programming. **Management Sci.**, v. 19, n. 62, 1972.

Easton, R. L.; Brescia, R. **Continuously visible satellite constellations**. NRL Report 6896, April 1969.

Eckel, K. G. Optimum transfer between noncoplanar elliptical orbits. **Astronautica Acta**, v. 8, n. 4, p. 177-192, 1962.

Eckel, K. G. Optimum transfer in central force field with n-impulses. **Astronautica**

- Acta**, v. 9, n. 5-6, p. 302-324, 1963.
- Eckel, K. G. Numerical solutions of noncoaxial optimum transfer problems. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 10, p. 82-92, 1963.
- Eckel, K. G. Optimal impulsive transfer with time constraint. **Acta Astronautica**, v. 9, n. 3, p. 139-146, 1982.
- Eckel, K. G.; Vinh, N. X. Optimal switching conditions for minimum fuel fixed time transfer between non coplanar elliptical orbits. **Acta Astronautica**, v. 11, n. 10/11, p. 621-631, 1984.
- Edelbaum, T. N. Some extensions of the Hohmann transfer maneuver. **A. R. S. Journal**, v. 29, n. 11, p. 864-865, Nov. 1959.
- Ely, T. A.; Crossley, W. A.; Williams E. A. Satellite constellation design for zonal coverage using genetic algorithms. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 99 part I, p. 443-460, 1998.
- Ergin, I. H. Consistency in house allocation problems. **Journal of Mathematical Economics**, vol 34, p. 77-97, 2000.
- Evans, J.; Steur, R. A revised simplex method for linear multiple objective programs. **Math. Programming**, v. 5 n. 54, 1973.
- Folta, D.; Newman, L. K.; Quinn, D. Design and implementation of satellite formations and constellations. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 100 part I, p. 57-70, 1998.
- Galperin, E. A. Pareto analysis vi-à-vis balance space approach in multiobjective global optimization. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 93, n. 3, p. 533-545, June 1997.
- Gass, S.; Saaty, T. The computational algorithm for the parametric objective function. **Naval Res. Logist. Quart.**, v. 2, n. 39, 1955.
- Geoffrion, A.; Dyer, J.; Feinberg, A. An interactive approach for multi-criterion optimization with an application to the operation of an academic department. **Management Sci.**, v. 19, p. 357, 1972.

- George, E. R. Optimization of satellite constelations for discontinuous global coverage via genetic algorithms. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 97 part I, p. 333-345, 1997.
- Gobet, F. W. Satellite networks for global coverage. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 9, p. 134-156, 1963.
- Gobet, F. W.; Doll, J. R. A survey of impulsive trajectories. **AIAA Journal**, v. 7, n. 5, May 1969.
- Goddard, R. H. A method of reaching extreme altitudes. **Smithsonian Inst. Publ. Misc. Collect**, v. 71, 1919.
- Gross, L. R.; Prussing, J. E. Optimal multiple-impulse direct ascent fixed-time rendezvous. **AIAA Journal**, v. 12, n° 7, July 1974.
- Haimes, Y.; Hall, W. Multiobjectives in water resources systems analysis: the surrogate worth trade-off method. **Water resouces Res.**, v. 10, p. 615, 1974.
- Haimes, Y.; Hall, W.; Freedman, h. **Multiobjectives in water resources systems analysis: the surrogate worth trade-off method**. Amsterdam: Elsevier, 1975. 200 p.
- Hamacher, H. W.; Nickel, S. Multicriteria planar location problems. **European Journal of Operational Research**, v. 94, p. 66-86, 1996.
- Hapke, M.; Jaskiewicz, A. Slowinski, R. Interactive analysis of multiple-criteria project scheduling problems. **European Journal of Operational Research**, v. 107, p. 315-324, 1998.
- Haurie, A. On Pareto optimal decisions for a coalition of a subset of players. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. AC-18, n. 2, April, 1973.
- Haynes, G. W. **Minimum velocity transfer between coplanar circular orbits employing an arbitrary number of impulses**. Rept. R-60-47, Martin Co, Set. 1960.
- Henig, M. I.; Buchanan, J. T. Tradeoff directions in multiobjective optimization problems. **Mathematical Programming**, v. 78, p. 357-374, 1996.

- Hoelker, R. F.; Silber, R. **The bi-elliptical transfer between circular co-planar orbits**. Alabama: Army Ballistic Missiles Agency (Redstone Arsenal, EUA), 1959.
- Hoelker, R. F.; Silber, R. The bi-elliptical transfer between circular co-planar orbits. In: Symposium on Ballistic Missiles and Space Technology, 4., 1961, New York, **Proceedings of the 4<sup>th</sup> Symposium on Ballistic Missiles and Space Technology**, v. 3, p. 164-175, Pergamon Press, New York, 1961.
- Höfler, F. Some play fair, some don't. Reciprocal fairness in a stylized principal-agent problem. **Journal of Economic Behavior & Organization**, v. 38, p.113-131, 1999.
- Hohmann, W. **Die erreichbarkeit der himmelskorper**. Oldenbourg, Munique, 1925.
- Holl, S. **Efficient solutions to a multicriteria linear program, with application to an institution of higher education**. Ph.D Thesis, Dept. of Math. Sciences, Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, 194 p., 1973.
- Horner, J. M. Optimum impulsive orbital transfer between coplanar orbits. **ARS Journal**, v. 32, n. 7, p. 182-1089, July 1962.
- Isaacs, R. **Diferential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization**. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1965. 384 p.
- Ivashkin, V. V.; Skorokhodov, A. P. Definition and analysis of properties of optimal three-impulse point-to-orbit transfers under time constraint **Acta Astronautica**, v. 8, p. 11-23, 1981.
- Janiak, A. Minimization of the makespan in a two-machine problem under given resource constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 107, p. 325-337, 1998.
- Jaszkievicz, A.; Ferhat, A. B. Solving multiple criteria choice problems by interactive trichotomy segmentation. **European Journal of Operational Research**, v. 113, p. 271-280, 1999.
- Jaszkievicz, A.; Slowinski, R. The light beam search approach – an overview of

- methodology and applications. **European Journal of Operational Research**, v. 113, p. 300-314, 1999.
- Jesus, A. D. C. **Análise estatística de manobras orbitais com propulsão finita sujeita a erros no vetor empuxo**. São José dos Campos. (INPE-7504-TDI/719) Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais / Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2000.
- Jezewski, D. J.; Rozendaal, H. L. An efficient method for calculating optimal free-space n-impulse trajectories. **AIAA Journal**, v. 6, n. 11, Nov. 1968.
- Kantsiper, B.; Weiss, S. An analytical approach to calculating Earth coverage. **Advances in the Astronautical Sciences**, v.97 part I, p. 313-331, 1997.
- Kechichian, J. A. Orbit plane control strategies for inclined geosynchronous satellite constellations. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 35, n. 1, p.46-54, Jan.-Feb. 1998.
- Kluever, C. A.; Tanck, G. S. A feedback control law for stationkeeping with on-off thrusters. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 97 part I, p.387-399, 1997.
- Königsmann, H. J.; Collins J. T.; Dawson, S.; Wertz, J. R. Autonomous orbit maintenance system. **Acta Astronautica**, v. 39, n. 9-12, p. 977-985, 1996.
- Koopmans, T. C. **Activity analysis of production and allocation**, Wiley, New York, 404 p., 1951.
- Krasilshikov, M. N.; Sypalo, K. I. Optimal on-ground tracking stations' operation scheduling technique in the problem of constellation satellites orbit determination. In: IAC International Astronautical Congress, 51., 2000, Rio de Janeiro, **Proceedings of the 51<sup>st</sup> International Astronautical Congress**, Rio de Janeiro - Brazil, October 2 - 6, 2000.
- Kuhn, H.; Tucker, A. Nonlinear programming. **Proc. Berkeley Symp. Math. Statist. Probability**, 2<sup>nd</sup>, J. Neyman editor, Univ. of California Press, Berkeley, p. 481-492, 1951.
- Lamy, A.; Pascal, S. Station keeping strategies for constellations of satellites.

- Advances in the Astronautical Sciences**, v.84 part II, p. 819-833, 1993.
- Lang, T. J. Symmetric circular orbit satellite constellations for continuous global coverage. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 65 part II, p. 1111-1132, 1987.
- Lawden, D. F. The determination of minimal orbits. **Journal of the British Interplanetary Society**, v. 11, n. 5, p. 216-244, Sept. 1952.
- Lawden, D. F. Minimal rocket trajectories. **ARS Journal**, v. 23, p. 360-382, 1953.
- Lawden, D. F. Fundamentals of space navigation. **JBIS**, v. 13, p. 87-101, 1954.
- Lawden, D. F. Optimal programming of rocket thrust direction. **Astronautica Acta**, v. 1, p. 41-56, 1955.
- Lawden, D. F. Optimal intermediate-thrust arcs in gravitational field. **Astronautica Acta**, v. 8, p. 106-123, 1962.
- Lawden, D. F. **Optimal trajectories for space navigation**. London: Butterworth, 1963.
- Lawden, D. F. Time-closed optimal transfer by two impulses between coplanar elliptical orbits. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 16, n. 3, May-June 1993.
- Lee, V. A.; Florence, D. E. Minimum time ballistic interplanetary trajectories. **ARS Journal**, v. 31, n. 3, p. 435-437, March 1961.
- Lerch, F. J. et al. Gravity model improvement using GEOS3 (GEM 9 and 10) **J. Geophysical Research**, v. 84(B8), p. 3897-3916, 1979.
- Lion, P. M.; Handelsman, M. Primer vector on fixed-time impulsive trajectories. **AIAA Journal**, v. 6, n°1, Jan. 1968.
- Major, D. Benefit-cost ratios for projects in multiple objective investment programs. **Water Resources Res.**, v. 5, p. 1174, 1969.
- Marchal, C. Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires (durée indifferente). **Astronautica Acta**, v. 11, n. 6, p. 432-435, Nov.-Dec. 1965.

- Marchal, C. **Synthesis of the analytical results on optimal transfers between keplerian orbits (time-free case)**. Toulouse TP 482, 1967, ONERA.
- Marchal, C. **Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires (durée indifferente)**. PhD thesis, University of Paris, June 1967.
- Marchal, C. Optimisation de la phase extra-atmosphérique de la montée en orbite. **La Recherche Aérospatiale**, n. 116/118, 1967.
- Marec, J. P. **Optimal space trajectories**. New York: Elsevier, 1979.
- Marglin, S. Objectives of water resource development: A general statement, In: A. Maass, M. Hufschmidt, R. Dorfman, H. Thomas Jr., S. Marglin e G. Fair (ed.), **Design of water-resource systems**, Cambridge, Massachusetts: Harvard Univ. Press, , 1962. p. 17-87
- Marglin, S. **Public investment criteria**. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1967. 103 p.
- Marks, W. Multicriteria optimization of shape of energy-saving buildings. **Bulding and Environment**, v. 32, n. 4,p. 331-339, 1997.
- Marett, R.; Wright, M. A comparison of neighborhood search techniques for multi-objective combinatorial problems. **Computers Operational Research**, v. 23, n. 5, p. 465-483, 1996.
- Metev, B. S.; Markova, I. T. Y. Multi-objective optimization over convex disjunctive feasible sets using reference points. **European Journal of Operational Research**, v. 98, p. 124-137, 1997.
- Mishra, S. K. Multiobjective second order symmetric duality with cone constraints. **European Journal of Operational Research**, v. 126, p. 675-682, 2000.
- Monarchi, D.; Kisiel, C.; Duckstein, L. Interactive multiobjective programming in water resources: a case study. **Water Resources Res.**, v. 9, n. 11, 1973.
- Moyer, H. G. Minimum impulse coplanar circle-ellipse transfer. **AIAA Journal**, v. 3, n. 4, p. 723-726, April 1965.

- Mozhaev, G. V. The problem of continuous Earth coverage and kinematically regular satellite networks, I. **Kosmicheskie Issledovania**, v. 10, n. 6, p. 833-840, Nov.-Dec. 1972.
- Mozhaev, G. V. The problem of continuous Earth coverage and kinematically regular satellite networks, II. **Kosmicheskie Issledovania**, v. 11, n. 1, p. 59-69, Jan. 1973. Traduzido em **Cosmic Research**, v. 11, n. 1 p. 52-61, Jan.-Feb. 1973.
- Munick, H. Optimum transfer between circular and hyperbolic orbits. **A. R. S. Journal**, v. 32, n. 11, p. 1739-1740, Nov. 1962.
- Murata, T.; Ishibuchi, H.; Tanaka, H. Multi-objective genetic algorithm and its applications to flowshop scheduling. **Computers ind. Engng**, v. 30, n. 4, p. 957-968, 1996.
- Oberth, H. **Wege zur raumschiffahrt**. Munich: R. Oldenbourg, 1929.
- Osyczka, A.; Kundu, S. A modified distance method for multicriteria optimization, using genetic algorithms. **Computers ind. Engng**, v. 30, n.4, p. 871-882, 1996.
- Pareto, V. **Cours d'économie politique**. Lausanne: Rouge, 1896-1897.
- Pareto, V. **Manuale di economia politica**. Milão: Società Editrice Libreria, 1906.
- Pareto, V. **Manuale di economia politica com una introduzione alla scienza sociale**. Milão: Società Editrice Libreria, 1909.
- Pareto, V. **Trattato di sociologia generale**. Firenze: Barbèra, 1916.
- Perrotta, G.; Di Girolamo, S.; Capua, R.; D'Andrea, J.; Pilla, E. A comparison between several satellite constelations for GNSS2. **Acta Astronautica**, v. 40, n. 2-8, p. 455-465, 1997.
- Pietrzak, J. Pareto optimal tests **Computers & Structures**, v. 71, p. 35-42, 1999.
- Plimmer, R. M. Fuel requirements for inter-orbital transfer of a rocket. In: IAC International Astronautical Congress, 10., 1959, London, **Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Astronautical Congress**, London - England, August-September, 1959, v. 2, p.911-923, 1959.

- Prado, A. F. B. A. **Análise, seleção e implementação de procedimentos que visem manobras ótimas de satélites artificiais.** São José dos Campos. 246 p. (INPE-5003-TDL/397). Dissertação (Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1989.
- Prado, A. F. B. A. Earth-Moon trajectories for the lunar polar orbit mission. IAF paper ST-90-016. **International Astronautical Congress**, 41st, Dresden, Federal Republic of Germany, 1990.
- Prado, A. F. B. A.; Rios Neto, A. Um estudo bibliográfico sobre o problema de transferência de órbitas. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, v. XV, n. 1, p. 65-78, 1993.
- Press, W. H.; Teukolaky, S. A.; Vetterling, W. T.; Flannery, B. P. **Numerical recipes in FORTRAN** (The Art of Scientific Computing), 2<sup>nd</sup> edition. Cambridge University Press, 1992.
- Prussing, J. E. Optimal four-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit. **AIAA Journal**, v. 7, n. 5, May 1969.
- Prussing, J. E. Optimal two and three impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit. **AIAA Journal**, v. 8, n. 7, July 1970.
- Prussing, J. E.; Chiu, J. H. Optimal multiple-impulse time-fixed rendezvous between circular orbits. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 9, n. 1, p. 17-22, Jan.-Feb. 1986.
- Rangan, S.; Poolla, K. Weighted optimization for multiobjective full-information control problems. **Systems & Control Letters**, v. 31, p. 207-213, 1997.
- Rocco, E. M. **Transferências orbitais impulsivas com limite de tempo.** São José dos Campos. 168 p. (INPE-6676-TDI/626) Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais / Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1997.
- Rocco, E. M. **Estudo da estratégia de manobra para o controle de órbita do satélite CBERS.** São José dos Campos: INPE, 1999. 72 p. (INPE-7035-NTC/336).

- Rocco, E. M.; Souza, M. L. O.; Prado, A. F. B. A. Constellation station keeping using optimum impulsive maneuvers with time constraint. **IAF 2000 51<sup>st</sup> International Astronautical Congress**, Rio de Janeiro - Brazil, 2000.
- Rocco, E.M.; Souza, M.L.O.; Prado, A.F.B.A. Multi-objective optimization approach apply of the station keeping of satellite constellations. **AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference**. Quebec City, Canada, 2001.
- Rocco, E.M.; Souza, M.L.O.; Prado, A.F.B.A. Multi-objective optimization approach apply of the station keeping of satellite constellations. em **Advances in Astronautical Sciences**, Robert H Jacobs, 2002. V.109, p. 641-656.
- Rodrigues, D. L. F. **Análise dinâmica da transferência orbital**. São José dos Campos. 187 p. (INPE-5352-TDI/461). Dissertação (Mestrado em Ciência Espacial / Mecânica Orbital) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1991.
- Roth, H. L. **Use of the bi-elliptic transfer to accomplish single rendezvous**. Rept. TOR-269 (4130-10)-21, April 1964, Aerospace Corp.
- Roth, H. L. Minimization of the velocity increment for a bi-elliptic transfer with plane change. **Astronautica Acta**, v. 13, n. 2, p.119-130, March-April 1967.
- Santos, M. M. N. **Estudo da influência dos erros dos propulsores em manobras orbitais tridimensionais**. São José dos Campos. p. (INPE- -TDI/ ). Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais / Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1997.
- Schulz, W. **Transferências bi-impulsivas entre órbitas elípticas não coplanares com consumo mínimo de combustível**. São José dos Campos. 112 p. (INPE-6385-TDI/604). Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais / Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1997.
- Souza, M. L. O. Forecasting space debris distribution: a measur theory approach. **IAF 2000 51<sup>st</sup> International Astronautical Congress**, Rio de Janeiro - Brazil, October 2 - 6, 2000.
- Shah, N. H.; Proulx, R. J.; Kantsiper, B.; Cefola, P. J.; Draim, J.; Automated station-

- keeping for satellite constellations. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 97 part I, p. 357-385, 1997.
- Shternfeld, A. **Soviet space science**. New York: Basil Books, 1959. p. 109-111.
- Sprumont, Y. A note on ordinally equivalent Pareto surfaces. **Journal of Mathematical Economics**, v. 34, p. 27-38, 2000.
- Szebehely, V. G. **Theory of orbits**. New York: Academic Press, 1967.
- Tamiz, M.; Mirrazavi, S. K., Jones, D. F. Extensions of Pareto efficiency analysis to integer goal programming. **Omega The International Journal of Management Science**, v. 27, p. 179-188, 1999.
- Taur, D. R.; Carroll, V. C.; Prussing, J. E. Optimal impulsive time-fixed orbital rendezvous and interception with path constraints. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 18, n. 1, Jan.-Feb. 1995.
- Tian, G. On the Existence of optimal truth-dominant mechanisms. **Economics Letters**, v. 53, p. 17-24, 1996.
- Ting, L. Optimum orbital transfer by several impulses. **Astronautica Acta**, v. 6, n. 5, p.256-265, May 1960.
- Torgerson, W. **Theory and methods of scaling**, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1958. 460 p.
- Tsien, H. S. Take-off from satellite orbit. **Journal of the American Rocket Society**, v. 23, p. 233-236, 1953.
- Ulivieri, C.; Laneve, G.; Moghaddam, S. M. H.; Foni A. UPH constellations. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 97 part I, p. 347-355, 1997.
- Verkama, M.; Ehtama, H.; Hämäläinen, R. P. Distributed computation of Pareto solutions in  $n$ -player games. **Mathematical Programming**, v. 74, p. 29-45, 1994.
- Viana, A.; de Sousa, J. P. Using metaheuristics in multiobjective resource constrained project scheduling. **European Journal of Operational Research**, v. 120, p. 359-374, 2000.

- Vorob'ev, N. N. Foundations of game theory: noncooperative games. **Automatica**, v. 32, n. 9, p. 1341-1342, 1996.
- Wallenius, J. Comparative evaluation of some interactive approaches to multicriterion optimization. **Management Sci.**, v. 21, p. 1387, 1975
- Walker, J. G. Circular orbit patterns providing continuous whole Earth coverage. **Royal Aircraft Establishment**, Technical Report 70211, Nov. 1970.
- Walker, J. G. Some circular orbit patterns providing continuous whole Earth coverage. **J. British Interplanetary Society**. v. 24, p. 369-384, 1971.
- Walker, J. G. Continuous whole Earth coverage by circular orbit satellites. **Royal Aircraft Establishment**, Technical Memorandum Space 194, April 1973.
- Walker, J. G. Continuous whole Earth coverage by circular orbit satellite patterns. **Royal Aircraft Establishment**, Technical Report 77044, March 1977.
- Walker, J. G. Satellite patterns for continuous multiple whole Earth coverage. **Maritime and Aeronautical Satellite Communication and Navigation**, IEE Conference Publication 160, p. 119-122, March 1978.
- Walker, J. G. Coverage predictions and selection criteria for satellite constellations. **Royal Aircraft Establishment**, Technical Report 82116, Dec. 1982.
- Wang, K. Minimum time transfer between coplanar circular orbits by two impulses and propulsion requirements. **Astronautica Acta**, v. 9, n. 1, p.12-19, 1963.
- Winn, C. B. Minimum fuel transfer between coaxial orbits, both coplanar and noncoplanar. **American Astronautical Society**, Paper 66-119, July 1966.
- Yu, P. A class of decisions for group decision problems. **Management Sci.**, v. 19, p. 936, 1973.
- Yu, J.; Yuan, G. X. Z. The study of Pareto equilibria for multiobjective games by fixed point and ky fan minimax inequality methods. **Computers Math. Applic.**, v. 35, n. 9, p. 17-24, 1998.
- Zeleny, M. **Linear multiobjective programming**. Berlin and New York: Springer-

Verlag, 1974. 220 p.

Zhou, G.; Gen, M. Genetic algorithm approach on multi-criteria minimum spanning tree problem. **European Journal of Operational Research**, v. 114, p. 141-152, 1999.

Zionts, S.; Wallenius, J. Na interative programming method for solving the multiple criteria problem. **Management Sci.**, v. 22, p. 652, 1976.



## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- Debreu, **Theory of value: an axiomatic analysis of economic equilibrium**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959. 114 p.
- Dem'yanov, V. F.; Malozenov, V. N. **Introduction to minimax**. 1974.
- Eldin, H. K.; Beheshti, H. M. **Management science applications: computing and systems analysis**. New York: Elsevier North Holland, Inc., 1981. 316 p.
- French, S. **Sequencing and scheduling: an introduction to the mathematics of the job-shop**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1982. 245 p.
- Gottzein, E.; Flichter, W.; Jablonski, A.; Juckenhöfel, O.; Mittnacht, M.; Müller, C.; Surauer, M. Challenges in the control and autonomy of communications satellites. **Control Engineering Practice**, v. 8, p. 409-427, 2000.
- Harvey, C. M. **Operations research: an introduction to linear optimization and decision analysis**. New York: Elsevier North Holland, Inc., 1979. 453 p.
- Karlin, **Mathematical methods and theory in games, programming and economics**. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1959. 386 p.
- Maccloskey, J. F.; Trefethen, F. N. **Pesquisa operacional como instrumento de gerência**. Rio de Janeiro: Editora Edgard Blücher Ltda., 1956. 402 p.
- Prado, F. B. A.; Kuga, H. K. **Fundamentos de tecnologia espacial**. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2001. 220 p.
- Salukvadze, M. E. **Vector-valued optimization problems in control theory**. New York: Academic Press, 1979.
- Willians, J. D. **The compleat strategyst** New York: MacGraw-Hill Book Company, 1966. 268 p
- Wertz, R. J.; Larson, W. J. **Space mission analysis and design**. El Segundo / Dordrecht: Microcosm Press e Kluwer Academic Publishers, 1999. 969 p.

