

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

**INPE-9551-PUD/123**

**OTIMIZAÇÃO DE MANOBRAS ORBITAIS  
COM DOIS E TRÊS IMPULSOS**

Vivian Martins Gomes  
Ana Paula Marins Chiaradia  
Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado

Bolsa de Iniciação Científica patrocinada pelo Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq), desenvolvida junto ao Departamento de Engenharia e Tecnologias Espaciais (DMC).  
Período: agosto/2000 – junho/2001

INPE  
São José dos Campos  
2003

RELATÓRIO FINAL DE PESQUISA CNPq

Instituição: INPE – São José dos Campos

*OTIMIZAÇÃO DE MANOBRAS  
ORBITAIS COM DOIS E  
TRÊS IMPULSOS*

Bolsista: Vivian Martins Gomes

Orientadores: Dra. Ana Paula Marins Chiaradia  
Prof. Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado

Período: Agosto/00 – Junho/01

Bolsa de Iniciação Científica financiada pelo Conselho Nacional de  
Pesquisa e Desenvolvimento – CNPq, desenvolvida junto  
à Divisão de Mecânica Espacial e Controle – DMC.

## SUMÁRIO

<b>Capítulo 1</b> Introdução.....	1
1.1 Definição dos Elementos Orbitais.....	2
1.2 Problema dos Dois Corpos.....	4
1.3 Coordenadas Cartesianas de Posição e Velocidade.....	8
<b>Capítulo 2</b> Transformação de Coordenadas.....	10
2.1 Determinação de Posição e Velocidade através dos Elementos Orbitais.....	10
2.2 Determinação dos Elementos Orbitais através da Posição e Velocidade.....	11
2.3 Programa Desenvolvido.....	16
2.4 Resultados.....	17
2.5 Apresentação da Subrotina.....	18
<b>Capítulo 3 - Manobras Orbitais</b> .....	22
3.1 Tipos de Manobras.....	22
3.1.1 Transferências de Órbitas.....	22
3.1.2 Correções de Órbitas.....	22
3.2 Manobras Orbitais Impulsivas.....	23
3.3 Manobras de Mudança de Plano.....	23
3.3.1 Manobras de um Único Impulso.....	23
3.3.2 Transferência de Hohmann.....	25
3.3.3 Transferência Bi-Elíptica Tri-Impulsiva.....	27
3.4 Programa Desenvolvido.....	32
3.5 Resultados.....	32
3.6 Exemplos de Cálculo do Impulso para Mudança de Plano.....	35
<b>Capítulo 4 - Conclusão</b> .....	37
<b>Referências</b> .....	38

<b>Apêndice A</b> .....	39
<b>Apêndice B</b> .....	45

## RESUMO

O objetivo principal deste trabalho, além de fazer um estudo sobre posicionamento e determinação de órbitas e manobras de satélites, é desenvolver um conjunto de rotinas aplicáveis em Mecânica Celeste. O primeiro programa oferece a opção de fazer a transformação de coordenadas cartesianas de posição e velocidade para elementos keplerianos e vice versa, utilizando o algoritmo encontrado na Literatura. Esse programa foi desenvolvido em linguagem Fortran com entrada de dados e apresentação em Visual Basic. O segundo representa um trabalho mais efetivo de pesquisa. Além de desenvolvimento de software, foram implementados e comparados dois métodos de cálculo de manobras orbitais N-impulsivas. Essa comparação levou em consideração tanto o consumo de combustível como o tempo de duração da manobra. O primeiro método é baseado na aplicação de uma série N de impulsos em um mesmo ponto da órbita, em diferentes passagens do veículo espacial por esse ponto. O segundo método utiliza uma série de três impulsos, sendo o primeiro impulso aplicado na órbita inicial e utilizado para colocar o veículo espacial em uma órbita de transferência coplanar com a órbita inicial e com o apogeu situado a uma certa distância da Terra; o segundo impulso é aplicado nesse ponto e é utilizado para efetuar a mudança de inclinação no plano orbital desejado para a manobra; e, finalmente, o terceiro impulso é aplicado quando o veículo, que se encontra na órbita de transferência, passar pela órbita final desejada e é efetuado com o objetivo de finalizar a transferência até a órbita final desejada. Os resultados mostram que a transferência N-impulsiva é vantajosa para transferências envolvendo mudanças pequenas na inclinação entre os planos das órbitas inicial e final. Já a manobra tri-impulsiva apresenta maior economia para manobras que envolvem variação de plano orbital a partir de um certo limite.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

O primeiro método para encontrar a órbita de um corpo em três dimensões foi uma das descobertas de Newton, uns 50 anos depois das contribuições dos astrônomos Tycho Brahe e Johann Kepler (Kuga e Kondapalli, 1995).

Tycho Brahe coletou informações precisas das posições dos planetas, contudo, não conseguiu formular um modelo que ajustasse as observações, contendo o movimento dos planetas ao redor do Sol. O problema principal era o planeta Marte.

Em seus estudos, utilizando as observações de Tycho, Kepler assumiu a teoria de Aristóteles, a qual diz que o movimento circular é o único movimento natural e perfeito e que corpos celestes, necessariamente, se moviam em círculos. Ele tentou ajustar várias curvas geométricas nas observações de Tycho na posição de Marte e, finalmente, acertou uma elipse como uma possível solução. A órbita foi encontrada e com isso surgiram as três leis de Kepler, que dizem:

**1ª lei: Lei das órbitas elípticas** – A órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol como um dos focos.

**2ª lei: Lei das áreas** – A linha que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

**3ª lei: Lei harmônica** – O quadrado do período de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média do Sol.

Apesar das leis de Kepler terem sido só uma descrição e não uma explicação do movimento planetário, serviram para a grande descoberta de Newton. Após anos de estudos, Newton conclui suas três leis de movimento, publicadas em 1687 em seu

trabalho *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, conhecido simplesmente por *Principia*. As três leis de Newton são:

**1ª lei:** Todo corpo permanece em seu estado de repouso ou movimento uniforme quando a força exercida sobre ele é nula.

**2ª lei:** A taxa de mudança do momento linear é proporcional à força e na mesma direção da força.

**3ª lei:** Para toda ação há sempre uma reação igual e oposta.

### **1.1 DEFINIÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS**

Definindo um sistema de referência cujo centro é o centro da Terra e cujo plano fundamental é o equador terrestre. A origem da contagem dos ângulos (longitude) no equador terrestre é fixada de modo arbitrário por uma convenção adotada de acordo com o problema a ser tratado. A interseção plano orbital com o plano do equador é chamada de reta dos nodos, que intercepta a órbita em dois pontos distintos,  $\Omega$  e  $\pi$ . Chamado de nodo ascendente  $\Omega$  é o ponto em que o satélite cruza o plano equatorial dirigindo-se do hemisfério sul para o hemisfério norte. Chamado de perigeu  $\pi$  é o ponto da elipse mais próximo do foco (centro da Terra).

Os chamados elementos keplerianos são coordenadas que localizam completamente o satélite e sua órbita no espaço. Consiste de seis elementos que são suficientes para descrever o tamanho, a forma e a orientação de uma órbita (Kuga e Kondapalli, 1995).

De início, dois elementos são necessários para fixar o plano da órbita. Eles especificam a orientação do plano orbital no espaço e, também, o plano orbital e o sentido do movimento do corpo neste plano.

$i$ : inclinação do plano orbital sobre o plano fundamental de referência (ângulo  $Oxy$ ), (veja Fig.1.1).  $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$ . Se o sentido do movimento do corpo, projetado sobre o plano fundamental, é direto, então  $0^\circ \leq i \leq 90^\circ$ ; se retrógrado,  $90^\circ < i < 180^\circ$ .

$\Omega$ : longitude do nodo ascendente - o ângulo, no plano fundamental, entre o vetor unitário  $I$  e o ponto onde o satélite atravessa o plano fundamental em direção ao norte medido no sentido horário quando visto do lado norte do plano fundamental, isto é, o ângulo entre a origem do eixo  $OX$  e  $O\Omega$ ,  $0^\circ \leq \Omega < 360^\circ$ , (veja Fig.1.1).

Dois outros elementos fixam a dimensão e a forma da elipse:

$a$ : semi-eixo maior da elipse, uma constante que define o tamanho da órbita cônica.

$e$ : excentricidade da elipse, uma constante que define a forma da órbita cônica, ou seja:  $e = 0$ : órbita circular;  $0 < e < 1$ : órbita elíptica;  $e = 1$ : órbita parabólica; e  $e > 1$ : órbita hiperbólica.

Um outro elemento fixa a posição da elipse em seu plano:

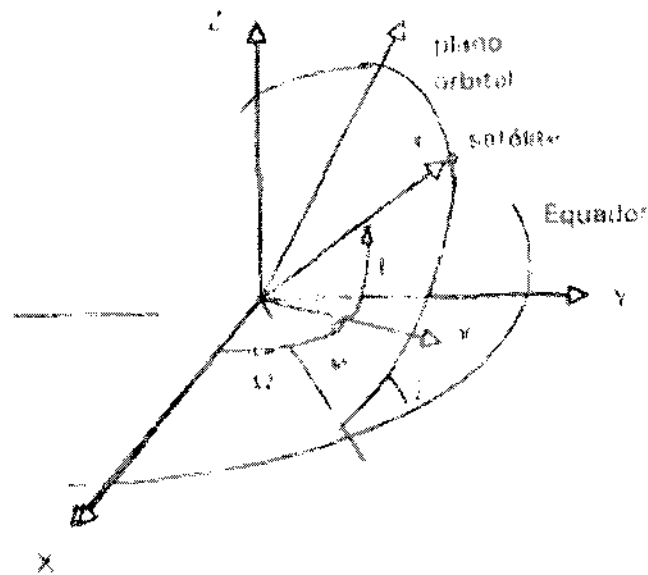
$\omega$ : argumento do perigeu, o ângulo, no plano da órbita do satélite, entre o nodo ascendente e o ponto do perigeu, medido na direção do movimento do satélite, isto é, o ângulo entre  $O\Omega$  e o perigeu,  $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$ , (veja Fig.1.1).

Porém estes elementos não permitem conhecer a posição do satélite em um dado instante. Para isto, é necessário:

$\tau$ : época = instante em que o satélite passa pelo perigeu, (veja Fig.1.1).

Este sistema de parâmetros não é único. Pode-se usar longitude do perigeu ( $\varpi$ ) no lugar do argumento de perigeu, definido pela soma dos ângulos (não coplanares)  $\omega$  e  $\Omega$ .





**Fig. 1.1: Definição dos elementos orbitais**  
**FONTE: (Kuga e Kondapalli, 1995)**

Pela Fig. 1.1, podem-se definir alguns pontos notáveis da geometria orbital. Conforme a Fig. 1.1, seja o sistema  $OXYZ$  centrado no centro da Terra e cujo plano fundamental  $OXY$  é o plano do Equador. O eixo  $OX$  aponta para o ponto vernal  $\gamma$ , e o sistema  $OXYZ$  é portanto considerado inercial

## 1.2 PROBLEMA DOS DOIS CORPOS

Primeiramente, adaptando as três leis de Kepler para o problema dos satélites artificiais terrestre, tem-se que:

**1ª lei: Lei das órbitas elípticas** – A órbita descrita pelos satélites artificiais são elipses com um dos focos no centro da Terra.

**2ª lei: Lei das áreas** – O segmento que liga o centro da Terra a um satélite descreve áreas iguais em tempos iguais.

**3ª lei: Lei harmônica** – O quadrado do período orbital de dois satélites quaisquer estão na mesma relação que os cubos de suas distâncias médias ao centro da Terra.

Então, considere um satélite artificial em órbita kepleriana ao redor da Terra. Seu movimento pode ser interpretado como uma trajetória sob a ação de um campo central, onde o ponto fixo é o centro da Terra. Como foi dito, as órbitas de todos os planetas no sistema solar, assim como as órbitas de todos os satélites terrestres, são elípticas. Como as elipses são curvas fechadas, um objeto numa órbita elíptica viaja o mesmo caminho de um lado a outro. O tempo que o satélite leva para dar uma volta em sua órbita é chamado período. O valor da energia para órbitas elípticas pode ser deduzido a partir da expressão para a excentricidade e é dada por:

$$E = -\frac{\mu}{2a}, \quad (1.1)$$

onde  $a$  é o semi-eixo maior e  $\mu$  é a constante gravitacional terrestre.

Através da Fig.1.2, podem-se observar as relações geométricas do movimento elíptico, com as seguintes definições:

$f$ : anomalia verdadeira – O ângulo no plano orbital que vai do perigeu a posição do satélite, medido na direção do movimento. Especifica a posição do satélite em sua órbita.

$U$ : anomalia excêntrica – O ângulo  $U$  medido na órbita elíptica conforme mostra a Fig.1.2.

$r_p$ : perigeu - O ponto de uma órbita mais perto do corpo central (Terra); o ponto de mínimo raio orbital.

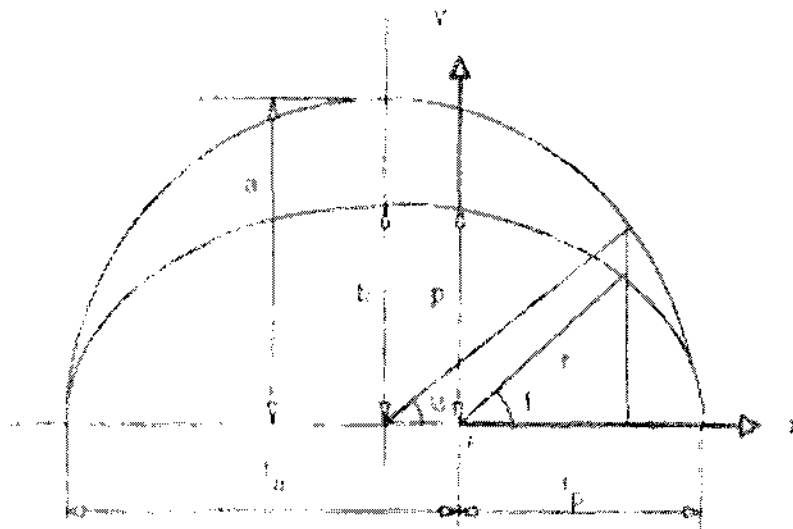
$r_a$ : apogeu – O ponto de uma órbita mais afastado do corpo central (Terra); o ponto de máximo raio orbital.

$b$ : semi-eixo menor – Metade da largura de uma elipse medida do centro.

$p$ : semi-latus rectum – Segmento de uma reta contendo um foco e perpendicular ao semi-eixo maior limitado pela elipse.

A partir da Eq. da elipse (2.2), deduz-se que quando  $f = 0^\circ$ , o satélite está no ponto da trajetória mais próximo da Terra (perigeu), e quando  $f = 180^\circ$ , o satélite está no ponto mais distante (apogeu).

$$r = \frac{p}{(1 + e \cos f)}. \quad (1.2)$$



**Fig. 1.2: Elipse do movimento orbital**

**FONTE: (Kuga e Kondapalli, 1995)**

A equação de Kepler fornece uma relação entre a anomalia excêntrica e o tempo. Através dela é possível localizar onde o satélite se encontra em determinado instante. A dedução da equação de Kepler se inicia com a equação da elipse:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos f}{a(1 - e^2)} = \frac{1}{a(1 - e^2)} + \frac{e \cos f}{a(1 - e^2)}. \quad (1.3)$$

Derivando  $1/r$  em relação a  $f$  e fazendo  $r=a(1-ecosU)$ , tem-se que:

$$r^2 df = a^2(1 - e^2)^{1/2}(1 - e \cos U)dU. \quad (1.4)$$

Dividindo ambos os membros por  $dt$  e lembrando da integral da área:

$$r^2 \frac{df}{dt} = h = (\mu p)^{1/2}, \quad (1.5)$$

onde  $h$  é o momento angular específico, tem-se:

$$\left(\frac{\mu}{a^3}\right)^{1/2} dt = (1 - e \cos U)dU. \quad (1.6)$$

Supondo a constante de integração  $T$ , de tal modo que para  $t = T$  (passagem pelo perigeu),  $U = 0$ , a integração da equação fornece:

$$\left(\frac{\mu}{a^3}\right)^{1/2} (t - T) = U - e \operatorname{sen} U. \quad (1.7)$$

Definindo a velocidade angular como:

$$n = \left( \frac{\mu}{a^3} \right)^{1/2}, \quad (1.8)$$

tem-se:

$$n(t - T) = U - e \operatorname{sen} U = M, \quad (1.9)$$

onde  $M$  é um ângulo denominado anomalia média. Assim, a forma final da equação de Kepler é:

$$M = U - e \operatorname{sen} U. \quad (1.10)$$

### 1.3 COORDENADAS CARTESIANAS DE POSIÇÃO E VELOCIDADE

Através da Fig.1.2 podem-se calcular as coordenadas cartesianas de posição referidas ao sistema  $Oxy$ , com origem  $O$  no foco da elipse, o eixo  $Ox$  apontando para o perigeu e o eixo  $Oy$  a  $90^\circ$  de  $Ox$  no sentido anti-horário. A coordenada  $x$  é dada por:

$$x = r \cos f = a(\cos U - e). \quad (1.11)$$

Para obter a coordenada  $y$ , calcula-se o raio em termos da anomalia excêntrica  $U$ . A partir da equação da elipse, tem-se que

$$p = r + er \cos f = r + ex, \quad (1.12)$$

$$a(1 - e^2) = r + ea(\cos U - e), \quad (1.13)$$

$$r = a - ae^2 - ae \cos U + ae^2 = a(1 - e \cos U). \quad (1.14)$$

Como para a coordenada  $y$  parte-se de

$$y^2 = r^2 - x^2, \quad (1.15)$$

tem-se que

$$y = r \operatorname{sen} f = a \operatorname{sen} U (1 - e^2)^{1/2}. \quad (1.16)$$

Para obter as coordenadas de velocidade, deriva-se  $x$  e  $y$  em relação ao tempo. A variação temporal da anomalia excêntrica  $\dot{U}$  pode ser obtida a partir da equação de Kepler, que derivando em relação ao tempo tem-se:

$$n = \dot{U}(1 - e \cos U). \quad (1.17)$$

Lembrando que

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos U, \quad (1.18)$$

têm-se

$$\dot{x} = -\frac{na^2}{r} \operatorname{sen} U, \quad (1.19)$$

$$\dot{y} = \frac{na^2}{r} (1 - e^2)^{1/2} \cos U. \quad (1.20)$$

## CAPÍTULO 2

### TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Neste capítulo, será feito um estudo de como obter as coordenadas cartesianas através dos elementos orbitais e vice versa.

#### 2.1 DETERMINAÇÃO DE POSIÇÃO E VELOCIDADE ATRAVÉS DOS ELEMENTOS ORBITAIS

É possível obter as coordenadas cartesianas  $X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}$  e  $\dot{Z}$  a partir dos elementos keplerianos. Para isto, devem-se calcular as coordenadas no plano orbital  $Oxy$ , conforme mostram as Eqs. (1.11), (1.16), (1.19) e (1.20). Pelo fato do movimento se dar no plano orbital tem-se que:

$$z = \dot{z} = 0. \quad (2.1)$$

Com os ângulos de Euler da órbita,  $i, \Omega$  e  $\omega$ , existe uma matriz de rotação  $R$  em função desses ângulos, que produz a transformação:

$$X^T = R(i, \Omega, \omega)x^T, \quad (2.2)$$

onde  $X^T = (X, Y, Z)$  e  $x^T = (x, y, z)$

A transformação completa é realizada através de três rotações dos ângulos  $(-\Omega)$ ,  $(-i)$  e  $(-\omega)$  em torno dos eixos instantâneos de rotação  $Z, X$  e  $Z$ , ou seja:

$$X^T = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)x^T. \quad (2.3)$$

Lembrando que as matrizes de rotação  $R_z(\theta)$  e  $R_x(\theta)$  são definidas por:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

e

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Assim, pode-se calcular a matriz de rotação  $R(i, \Omega, \omega)$ :

$$R(i, \Omega, \omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos i \cos \omega & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos i \cos \omega & -\cos \Omega \sin i \\ \sin i \sin \omega & \sin i \cos \omega & \cos i \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Para obter as componentes do vetor velocidade, utiliza-se a mesma matriz de rotação:

$$\dot{X}^T = R(i, \Omega, \omega) \dot{x}^T, \quad (2.7)$$

onde  $\dot{X}^T = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$  e  $\dot{x}^T = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ .

## 2.2 DETERMINAÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS ATRAVÉS DAS COORDENADAS DA POSIÇÃO E VELOCIDADE

Também podem-se obter os elementos orbitais de um satélite a partir de suas coordenadas de posição e velocidade.

### Semi-eixo maior $a$

Primeiro calculam-se os módulos do vetor posição e velocidade, dados por:



$$r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (2.8)$$

e

$$v^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2. \quad (2.9)$$

Lembrando a equação de “vis-viva”:

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (2.10)$$

Então, chega-se a:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}. \quad (2.11)$$

### **Excentricidade $e$**

O cálculo da excentricidade pode ser obtido através das seguintes relações:

$$e \operatorname{sen} U = \frac{r \dot{r}}{na^2} \quad (2.12)$$

e

$$e \cos U = 1 - \frac{r}{a}. \quad (2.13)$$

O termo  $r \dot{r}$  pode ser obtido por:

$$r \dot{r} = X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}. \quad (2.14)$$

Logo, se elevar as Eqs. (2.12) e (2.13) ao quadrado e somá-las, obtém-se a excentricidade:

$$e = \left[ \left( \frac{r\dot{r}}{na^2} \right)^2 + \left( 1 - \frac{r}{a} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.15)$$

### Inclinação $i$

A inclinação pode ser obtida através do momento angular específico  $h$ , que é dado por:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \dot{X} & \dot{Y} & \dot{Z} \\ \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \end{vmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = (YZ - ZY)\hat{I} + (ZX - XZ)\hat{J} + (XY - YX)\hat{K} = h_x \hat{I} + h_y \hat{J} + h_z \hat{K}, \quad (2.17)$$

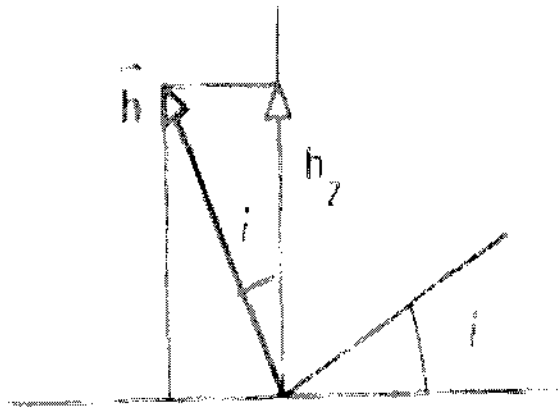
$$h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}, \quad (2.18)$$

onde  $\hat{I}$ ,  $\hat{J}$ ,  $\hat{K}$  são os versores nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , e  $h_x$ ,  $h_y$  e  $h_z$  são as componentes do momento angular nas mesmas direções. Pode-se notar na Fig. 2.1 que o vetor momento angular é perpendicular ao plano da órbita, formando o ângulo  $i$  com o eixo  $Z$ .

Logo,

$$\cos i = \frac{h_z}{h} \quad (2.19)$$

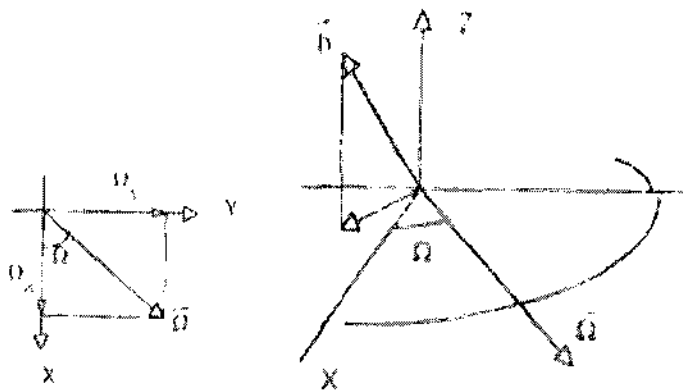
com  $0 \leq i \leq 180^\circ$ .



**Fig. 2.1: Vetor momento angular**  
**FONTE: (Kuga e Kondapalli, 1995)**

### Nodo ascendente $\Omega$

Para calcular  $\Omega$ , usa-se a definição de um vetor  $\vec{\Omega}$ , com origem no centro  $O$  e passando pela linha dos nodos, conforme mostra a Fig. 2.2.



**Fig. 2.2: Vetor  $\vec{\Omega}$**   
**FONTE: (Kuga e Kondapalli, 1995)**

Como o momento angular  $\vec{h}$  é perpendicular ao plano da órbita, ele também é perpendicular ao vetor  $\vec{\Omega}$  que está contido no plano da órbita. Logo,

$$\vec{\Omega} = \hat{K} \times \vec{h}, \quad (2.20)$$

onde  $\hat{K}$  é o versor no eixo Z. Então, tem-se que:

$$\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \hat{I} & \hat{J} & \hat{K} \\ 0 & 0 & 1 \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = -h_y \hat{I} + h_x \hat{J}. \quad (2.21)$$

Ainda pela Fig. 2.2, pode-se obter:

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{\Omega_y}{\Omega_x} = \frac{h_x}{-h_y}, \quad (2.22)$$

onde  $\Omega_x$  e  $\Omega_y$  são as componentes do vetor  $\vec{\Omega}$  nas direções X e Y.

### **Anomalia média $M$**

Através da equação de Kepler (1.10), pode-se obter a anomalia média calculando, anteriormente, a anomalia excêntrica  $U$ , que pode ser obtida utilizando a Eq. (1.18).

### **Argumento do perigeu $\omega$**

O cálculo do ângulo  $\omega$  requer a definição de um ângulo auxiliar  $\nu$ , chamado longitude verdadeira. Esse ângulo é a soma dos ângulos argumento do perigeu com a anomalia verdadeira:

$$v = \omega + f, \quad (2.23)$$

onde  $v$  é dada por:

$$\operatorname{tg} v = \frac{-\cos i \operatorname{sen} \Omega X + \cos i \cos \Omega Y + \operatorname{sen} i Z}{\cos \Omega X + \operatorname{sen} \Omega Y} \quad (2.24)$$

e  $f$  dada por:

$$\operatorname{tg} f = \frac{\cos U - e}{(1 - e^2)^{1/2} \operatorname{sen} U}. \quad (2.25)$$

Assim, pode-se facilmente obter o argumento do perigeu através de:

$$\omega = v - f. \quad (2.26)$$

### 2.3 PROGRAMA DESENVOLVIDO

Para fazer a transformação das coordenadas de posição e velocidade para elementos keplerianos e vice versa, as equações anteriores foram implementadas em linguagem Fortran (veja o Apêndice A), com entrada de dados e apresentação em Visual Basic. Este programa fornece a opção de entrar tanto com coordenadas cartesianas quanto com os elementos orbitais e, através do estudo mostrado neste trabalho, faz as conversões desejadas.

Para verificar a confiabilidade do programa, foram realizados testes com entrada de dados em coordenadas cartesianas e transformando esses resultados obtidos em elementos orbitais novamente em coordenadas cartesianas. Como a transformação volta corretamente aos valores iniciais, verificou-se que o programa apresenta resultados confiáveis e é de fácil utilização por qualquer usuário.

## 2.4 RESULTADOS

A Tabela 2.1 mostra as constantes utilizadas no programa.

**TABELA 2.1: CONSTANTES UTILIZADAS.**

<b>Constante geo-gravitacional</b>	$\mu = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$
<b>Raio da circunferência</b>	$\pi = 3.141592653589793$
<b>Fator que converte graus em radianos</b>	$\text{RAD} = \pi / 180$
<b>Fator que converte radianos em graus</b>	$\text{DEG} = 180 / \pi$

As Tabelas 2.2, 2.3 e 2.4 apresentam alguns exemplos de transformações obtidas pelo programa desenvolvido.

**TABELA 2.2: TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS CARTESIANAS PARA ELEMENTOS ORBITAIS E VICE VERSA.**

<b>Dados de entrada</b>	<b>Dados de saída / entrada</b>	<b>Dados de saída</b>
$\dot{X} = 6378000 \text{ m}$	$a = 14814777 \text{ m}$	$X = 6381106.28 \text{ m}$
$Y = 12756000 \text{ m}$	$e = 0.99741$	$Y = 12755073.79 \text{ m}$
$Z = 19134000 \text{ m}$	$I = 54.73^\circ$	$Z = 19132205.72 \text{ m}$
$\dot{X} = 500 \text{ m/s}$	$\Omega = 315^\circ$	$\dot{X} = 500.3183 \text{ m/s}$
$\dot{Y} = 1500 \text{ m/s}$	$w = 282.91^\circ$	$\dot{Y} = 1500.23 \text{ m/s}$
$\dot{Z} = 2000 \text{ m/s}$	$M = 82.58^\circ$	$\dot{Z} = 2000.13 \text{ m/s}$
	$U = 127.76^\circ$	

**TABELA 2.3: TRANSFORMAÇÃO DE ELEMENTOS ORBITAIS PARA COORDENADAS CARTESIANAS E VICE VERSA.**

Dados de entrada	Dados de saída / entrada	Dados de saída
$a = 9567000 \text{ m}$	$X = 1236428.018 \text{ m}$	$a = 9566999.99 \text{ m}$
$e = 0.1$	$Y = 8096780.560 \text{ m}$	$e = 0.09999$
$I = 30^\circ$	$Z = 2800727.197 \text{ m}$	$I = 29.999^\circ$
$\Omega = 45^\circ$	$\dot{X} = -6593.037 \text{ m}$	$\Omega = 44.999^\circ$
$w = 60^\circ$	$\dot{Y} = -138.249 \text{ m}$	$w = 59.999^\circ$
$M = 343.93^\circ$	$\dot{Z} = 2635.156 \text{ m}$	$M = 343.92^\circ$
$U = 342.17^\circ$		$U = 342.17^\circ$

A Tabela 2.4 fornece dados do satélite tipo Molniya. Observa-se que sua órbita é altamente excêntrica e sua inclinação é crítica (Chiaradia,1999).

**TABELA 2.4: TRANSFORMAÇÃO DE ELEMENTOS ORBITAIS PARA COORDENADAS CARTESIANAS E VICE VERSA.**

Dados de entrada	Dados de saída / entrada	Dados de saída
$a = 26563000.0 \text{ m}$	$X = 12315519374.039 \text{ m}$	$a = 26562999.9 \text{ m}$
$e = 0.75$	$Y = 14478612.729 \text{ m}$	$e = 0.75$
$I = 63.435^\circ$	$Z = 28957290.122 \text{ m}$	$I = 63.435^\circ$
$\Omega = 0^\circ$	$\dot{X} = -888.719 \text{ m}$	$\Omega = 2.13 \times 10^{-9}^\circ$
$w = 270^\circ$	$\dot{Y} = 1132.145 \text{ m}$	$w = 5269.999^\circ$
$M = 80^\circ$	$\dot{Z} = 2264.296 \text{ m}$	$M = 79.999^\circ$

## 2.5 APRESENTAÇÃO DA SUBROTINA

As figuras abaixo mostram a apresentação do programa de transformação de coordenadas em Visual Basic.

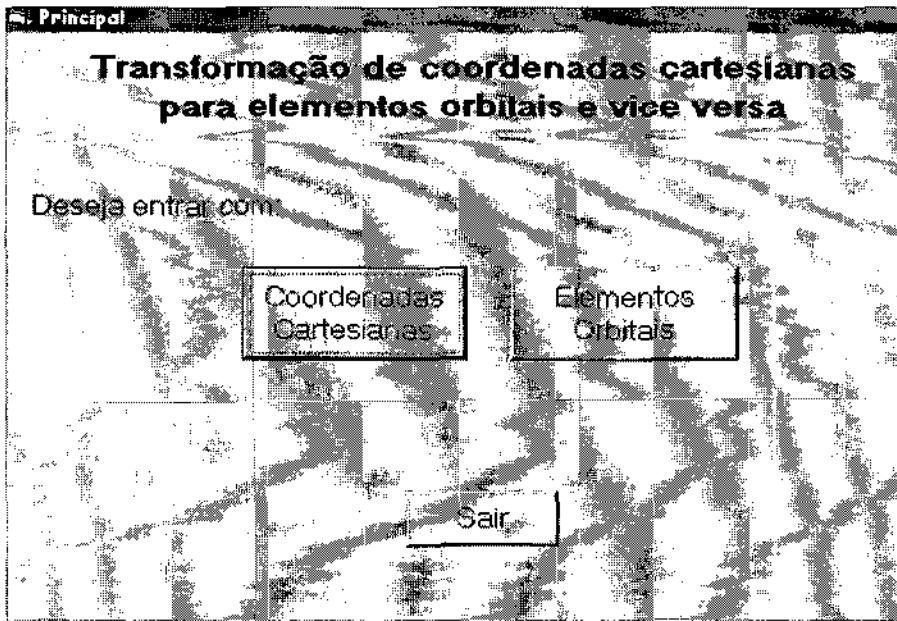


Fig. 2.3: Tela inicial para escolha da transformação

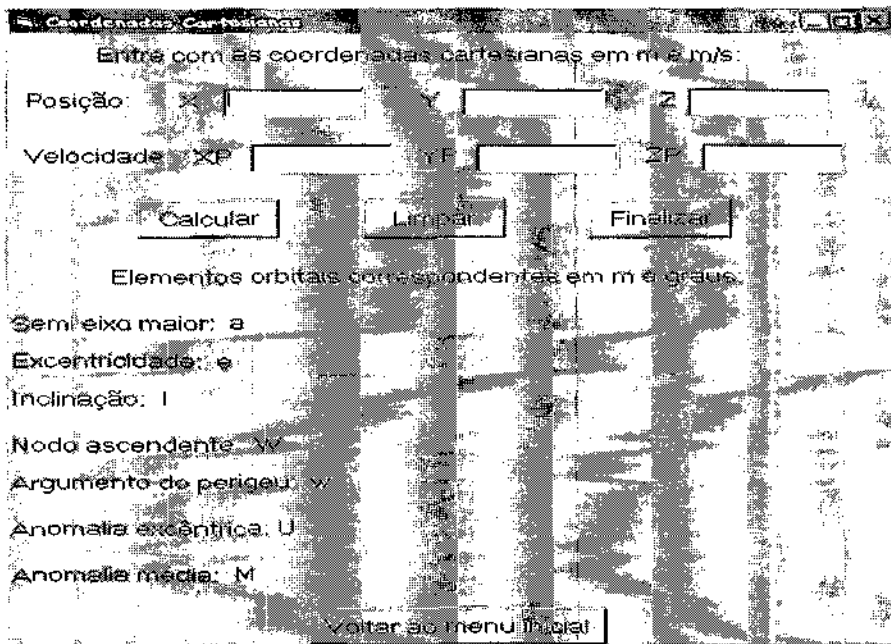


Fig. 2.4: Entrada dos dados de posição e velocidade



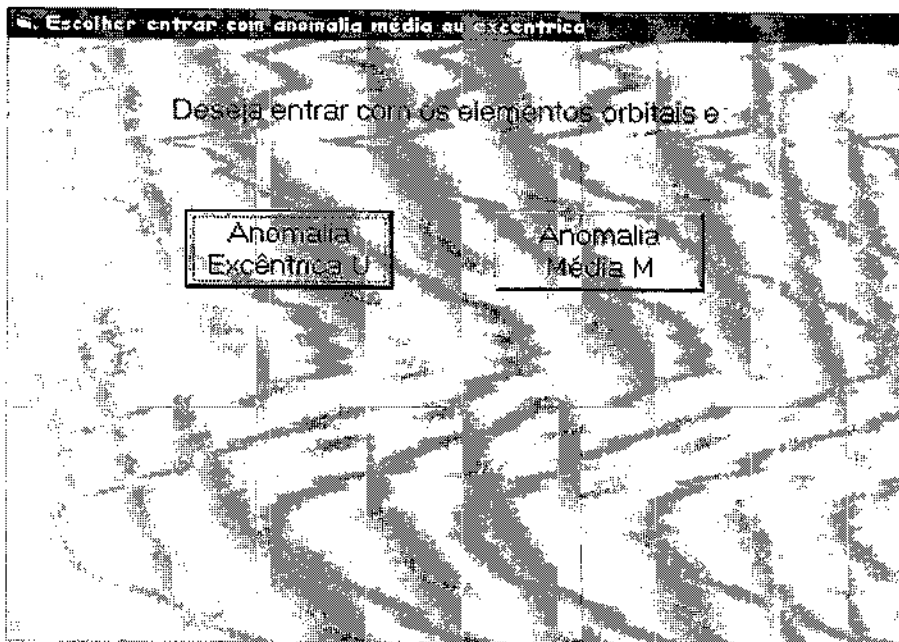


Fig. 2.5: Opção para entrada dos elementos orbitais com anomalia média ou anomalia excêntrica

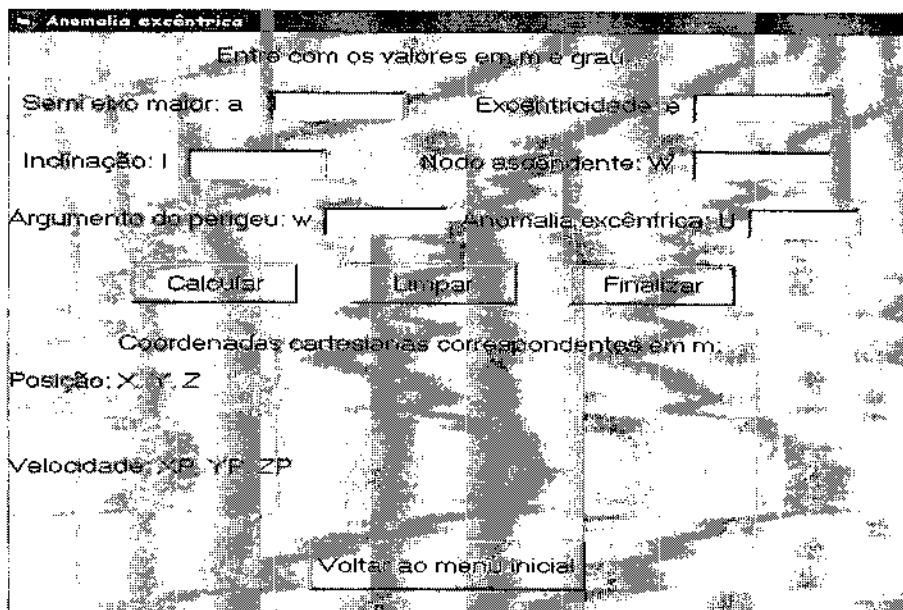


Fig. 2.6: Entrada dos elementos orbitais e anomalia excêntrica

Anomalia média

Entre com os valores em m e grau

Semi eixo maior: a       Excentricidade: e

Inclinação: i       Nó do ascendente: W

Argumento do perigeu: w       Anomalia média: M

Coordenadas cartesianas correspondentes em Km:

Posição: X, Y, Z

Velocidade: XP, YP, ZP

**Fig. 2.7: Entrada dos elementos orbitais e anomalia média**

## **CAPÍTULO 3**

### **MANOBRAS ORBITAIS**

A determinação de órbita e o cálculo de manobras orbitais de um satélite artificial são problemas de extrema importância no estudo de Mecânica Celeste e Mecânica Orbital. Assim o problema de transferir um veículo espacial de uma órbita para outra tem crescido de importância nos últimos anos. Aplicações deste estudo podem ser encontradas em diversas atividades espaciais, como na colocação de um satélite em órbita geostacionária, no deslocamento de uma estação espacial, na manutenção de órbita de um satélite, entre outras. Neste capítulo serão descritos alguns tipos de manobras orbitais.

#### **3.1 TIPOS DE MANOBRAS**

Podemos agrupar o problema de transferências orbitais em duas categorias principais, quanto ao tipo de manobras envolvidas: transferência de órbita e correções de órbita.

##### **3.1.1 TRANSFERÊNCIAS DE ÓRBITA**

São as manobras de grande amplitude usadas quando se quer transferir o satélite de uma órbita para outra. É o caso de transferência de um satélite em baixa órbita terrestre para uma órbita alta.

##### **3.1.2 CORREÇÕES DE ÓRBITA**

São manobras de pequena amplitude, utilizadas quando o objetivo é fazer correções nos elementos orbitais para manter o movimento do satélite em uma órbita específica, ao invés de alterá-la. Essas manobras são necessárias, por exemplo, para compensar efeitos perturbadores que tendem a alterar a órbita nominal do veículo espacial (Prado e Rios-Neto, 1993).

Assim, transferência orbital e correção orbital são as chamadas manobras orbitais.

### **3.2 MANOBRAS ORBITAIS IMPULSIVAS**

O que caracteriza uma manobra orbital é a mudança da velocidade orbital. Se um incremento de velocidade  $\Delta V$  é adicionado instantaneamente, a manobra é chamada de manobra impulsiva. Uma mudança de velocidade  $\Delta V$ , que se encontra no plano da órbita pode mudar sua forma ou tamanho, ou pode mudar as linhas dos apses.

### **3.3 MANOBRAS DE MUDANÇA DE PLANO**

#### **3.3.1 MANOBRAS DE UM ÚNICO IMPULSO**

Depois de aplicarmos um  $\Delta V$  finito, se a magnitude da velocidade e o ângulo do vôo do satélite não mudarem, isso significa que somente o plano da órbita foi alterado; chamamos isso de uma simples mudança de plano. Uma manobra de mudança de plano gira o plano orbital no espaço inercial, porém o tamanho (semi eixo  $a$ ) e a forma (excentricidade  $e$ ) da órbita continuam os mesmos (Prado e Rios-Neto, 1993).

Esse método é baseado na aplicação de uma série  $N$  de impulsos em um mesmo ponto da órbita, em diferentes passagens do veículo espacial por esse ponto. O plano da órbita é girado de um ângulo  $\theta$ . A velocidade inicial e a velocidade final são idênticas em magnitude e nessas condições o impulso a ser aplicado tem magnitude  $\Delta V$  dado por (Sukhanov, 1999):

$$\Delta V = 2V \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \quad (3.1)$$

onde  $V$  é a velocidade orbital dada por:

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \quad (3.2)$$

onde  $r$  e  $a$  são o raio e semi-eixo da órbita, numa transferência de órbita circular para circular.

Nesta manobra, a inclinação  $i$  e ascensão reta do nodo ascendente  $\Omega$  são alterados em relação à órbita original.

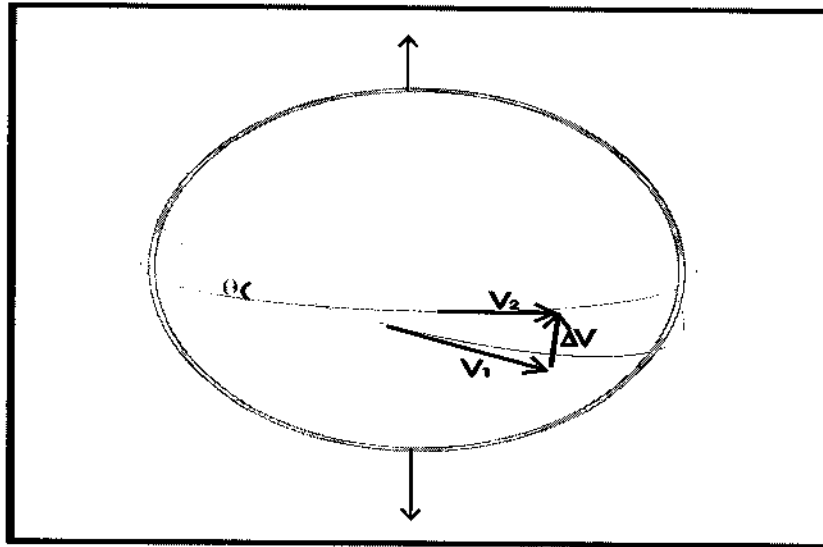
Assim, uma manobra de um único impulso consiste na aplicação de um impulso  $\Delta V$  tangencial a uma órbita circular ou no apogeu de uma órbita elíptica. No caso de uma mudança de plano em uma órbita elíptica, o impulso  $\Delta V$  deve ser aplicado no apogeu, pois nesse ponto a velocidade do veículo espacial é menor.

O tempo de transferência, neste caso, é dado por:

$$t = (N - 1)P, \quad (3.3)$$

onde  $N$  é o número de impulsos e  $P$  é o período da órbita circular que pode ser obtido através de:

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\mu}}. \quad (3.4)$$



**Fig. 3.1: Mudança de plano orbital**

**FONTE: (Rama Rao, 1994)**

### 3.3.2 TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN

Hohmann (1925) obteve a solução ótima do problema de transferência de um veículo espacial entre duas órbitas circulares e coplanares em um campo gravitacional Newtoniano. Essa solução é usada até hoje e foi considerada com a solução final do problema até 1959.

A transferência de Hohmann é a transferência mínima executada com dois impulsos entre órbitas circulares e coplanares. Esses impulsos devem ser aplicados no apogeu e perigeu das órbitas consideradas. Essa transferência é de mínima energia.

Na órbita inicial aplica-se um impulso na direção do movimento e de magnitude dada por (Prado e Rios-Neto, 1993):

$$\Delta V_0 = V_0 \sqrt{\frac{2 \frac{r_f}{r_0}}{1 + \frac{r_f}{r_0}} - 1}, \quad (3.5)$$

onde  $r_0$  é o raio da órbita inicial,  $r_f$  o raio da órbita final e  $V_0$  a velocidade do veículo na órbita inicial.

Com isso o veículo entra numa órbita de transferência elíptica com perigeu  $r_0$  e apogeu  $r_f$ . Então, espera-se que o veículo complete meia revolução e atinja o apogeu, quando é aplicado o segundo impulso, na direção do movimento e com magnitude dada por:

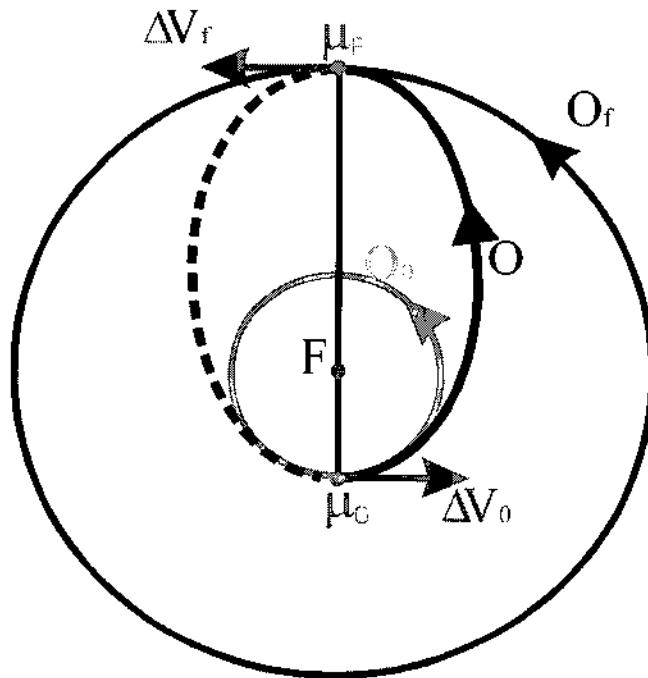
$$\Delta V_f = \frac{1}{\sqrt{\frac{r_f}{r_0}}} - \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{r_f}{r_0}}} V_0, \quad (3.6)$$

que faz com que o veículo entre em uma órbita circular de raio  $r_f$ .

Com isso, temos que o tempo de transferência é a metade do período orbital da órbita.

$$t = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 + \frac{r_f}{r_0}}{2} \right]^{3/2} T_0, \quad (3.7)$$

onde  $T_0$  é o período da órbita inicial.



**Fig. 3.2: Transferência de Hohmann**

### 3.3.3 TRANSFERÊNCIA BI-ELÍPTICA TRI-IMPULSIVA

No final de década de 50, foi mostrado que a solução de Hohmann era a solução ótima apenas quando a razão entre os raios das órbitas final e inicial é menor que 11.94. Nos outros casos, a transferência bi-elíptica tri-impulsiva é mais econômica (Prado e Rios-Neto, 1993).

Este método utiliza uma série de três impulsos na manobra, da seguinte maneira:

- aplica-se o primeiro impulso ( $\Delta V_0$ ) na órbita inicial, na direção do movimento do veículo e com uma magnitude tal que ele entre em uma órbita de transferência coplanar com a órbita inicial e com perigeu em  $r_1$  e apogeu em  $r_2$ ;
- quando o veículo atinge o apogeu  $r_2$ , é aplicado um segundo impulso ( $\Delta V_1$ ), também na direção do movimento, e com magnitude tal que faça com que o veículo entre em



uma órbita elíptica com apogeu em  $r_2$  e perigeu em  $r_f$ , ou seja, este impulso é utilizado para efetuar a mudança de inclinação no plano orbital desejado para a manobra;

- o terceiro e último impulso é aplicado quando o veículo, que se encontra na órbita de transferência, atinge o perigeu, ou seja, quando ele passa pela órbita final desejada. Este impulso é, agora, contrário a direção do movimento e com magnitude tal que faça com que o veículo entre em uma órbita circular de raio  $r_f$ . Este impulso é então aplicado com o objetivo de finalizar a transferência.

Assim, a magnitude dos 3 impulsos é dada por (Chobotov, 1996):

$$\Delta V_1 = V_{cl} \left( \sqrt{\frac{2 \frac{r_2}{r_1}}{1 + \frac{r_2}{r_1}} - 1} \right), \quad (3.8)$$

$$\Delta V_2 = V_{cl} \left( \sqrt{\frac{2 \frac{r_f}{r_1}}{\frac{r_2}{r_1} \left[ \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_f}{r_1} \right]}} - \sqrt{\frac{2}{\frac{r_2}{r_1} \left[ 1 + \frac{r_2}{r_1} \right]}} \right), \quad (3.9)$$

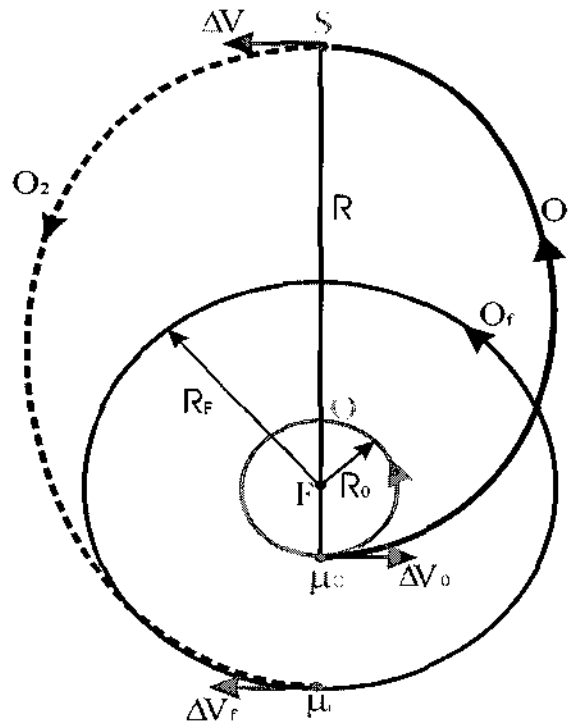
$$\Delta V_3 = V_{cl} \left( \frac{2 \frac{r_2}{r_1}}{\frac{r_f}{r_1} \left[ \frac{r_f}{r_1} + \frac{r_2}{r_1} \right]} - \frac{1}{\frac{r_f}{r_1}} \right), \quad (3.10)$$

onde  $V_{cl}$  é a velocidade nas órbitas circulares inicial e final, obtida através de:

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}. \quad (3.11)$$

Assim, podemos obter  $\Delta V$ , que é dado por:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_f. \quad (3.12)$$



**Fig. 3.3: Transferência bi-elíptica tri-impulsiva**

Para o caso de órbitas circulares, podemos obter as equações para  $\Delta V$  do seguinte modo:

$$\Delta V_1 = \Delta V_3 = V \sqrt{\frac{2 \frac{r_2}{r_1}}{1 + \frac{r_2}{r_2}} - 1} \quad (3.13)$$

e

$$\Delta V_2 = 2V \sqrt{\frac{2}{\frac{r_2}{r_1} \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \quad (3.14)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os planos, e assim, (3.12) se transforma em:

$$\Delta V = 2\Delta V_1 + \Delta V_2. \quad (3.15)$$

O principal nesta manobra é fazer uma rotação na órbita no ponto onde a velocidade é baixa, isto é, o apogeu da elipse de transferência. Depois desta rotação, o satélite retorna através da segunda elipse de transferência para o ponto original de partida. Neste ponto,  $\Delta V_3$  é aplicado tangencialmente em direção contrária ao movimento para atingir a órbita circular final, que tem o mesmo raio que a órbita circular inicial, mas sofreu uma rotação através de um ângulo  $\theta$  (Chobotov, 1996).

Para minimizar o impulso total  $\Delta V$  para mudança de plano com um ângulo  $\theta$ , façamos:

$$\rho = \frac{r_2}{r_1}. \quad (3.16)$$

Assim,

$$\Delta V = 2V \left[ \sqrt{\frac{2\rho}{1+\rho} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\rho}\right)} - 1 \right]. \quad (3.17)$$

Derivando (3.17) em relação a  $\rho$ , temos:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \rho} \Big|_{\theta} = 0 = 2V \left\{ \sqrt{\frac{2\rho}{1+\rho}} \left( -\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\rho^2} \right) + \left( 1 + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\rho} \left( \frac{1}{2\sqrt{\frac{2\rho}{1+\rho}}} \left[ \frac{(1+\rho)2 - 2\rho}{(1+\rho)^2} \right] \right) \right) \right\}. \quad (3.18)$$

Assim, encontramos o melhor valor para  $\frac{r_2}{r_1}$ :

$$\rho_{opt} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 - 2 \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2} - 2}. \quad (3.19)$$

A Eq. (3.19) nos revela que para  $0^\circ \leq \theta \leq 38.94^\circ$  deve-se usar  $\frac{r_2}{r_1} = 1$ , para  $38.94^\circ \leq \theta \leq$

$60^\circ$ , usamos  $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 - 2 \sin \frac{\theta}{2}}$  e para  $60^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , usamos  $\frac{r_2}{r_1}$  tendendo ao infinito.

### 3.4 PROGRAMA DESENVOLVIDO

Foram desenvolvidas subrotinas em linguagem Fortran para a comparação de dois tipos de manobras orbitais N-impulsivas.

A primeira subrotina é um método baseado na aplicação de uma série N de impulsos em um mesmo ponto da órbita, conforme visto no item (3.3.2) deste capítulo, e a segunda, utiliza uma série de três impulsos na manobra, conforme mostrado no item (3.3.3).

### 3.5 RESULTADOS

Como no caso da transferência tri-impulsiva os impulsos e sua soma são funções de  $\theta$  e  $\frac{r_2}{r_1}$ , podemos obter resultados numéricos de  $\Delta V$  em função de  $\theta$  para vários valores de  $\frac{r_2}{r_1}$ . Podemos perceber na Fig.3.5, que quando  $\frac{r_2}{r_1}=1$ ,  $\Delta V_1 = \Delta V_3 = 0$ , e o resultado é uma curva da manobra de um único impulso, como é mostrado na Fig.3.4. Para valores maiores de  $\frac{r_2}{r_1}$ , o impulso total é maior para pequenos valores de  $\theta$ , mas menor para valores maiores de  $\theta$ . Podemos notar que  $\frac{r_2}{r_1}=1$  é a melhor curva, ou seja, apresenta o mais baixo valor para o impulso total, para valores de  $\theta$  variando de  $0^\circ$  a  $38,94^\circ$  e que  $\frac{r_2}{r_1}$  tendendo ao infinito é a melhor curva para valores de  $\theta$  maiores que  $60^\circ$ .

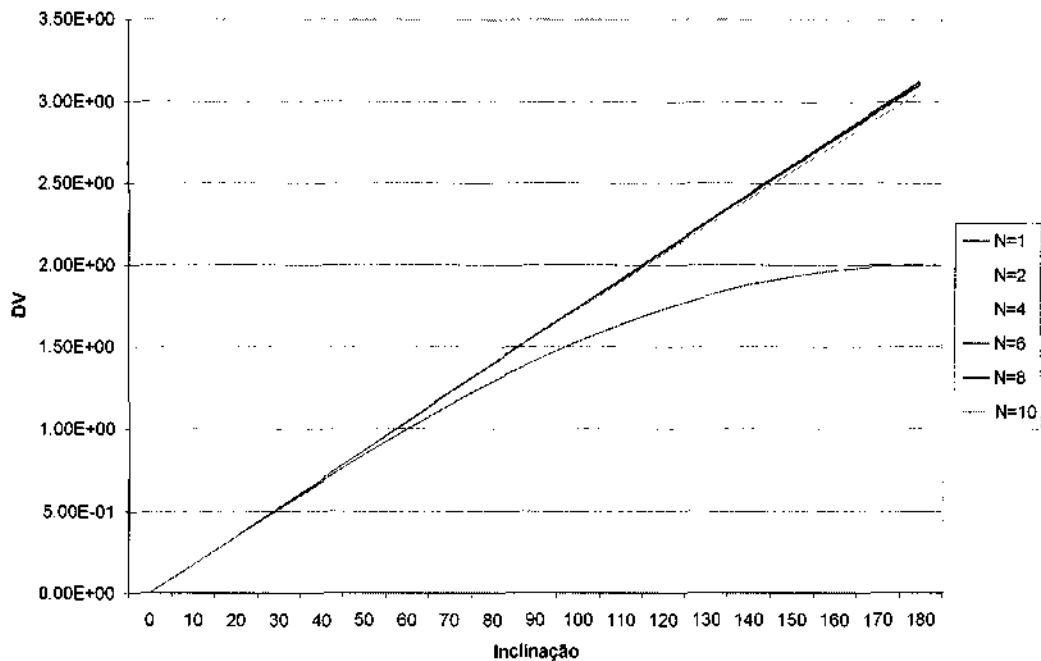
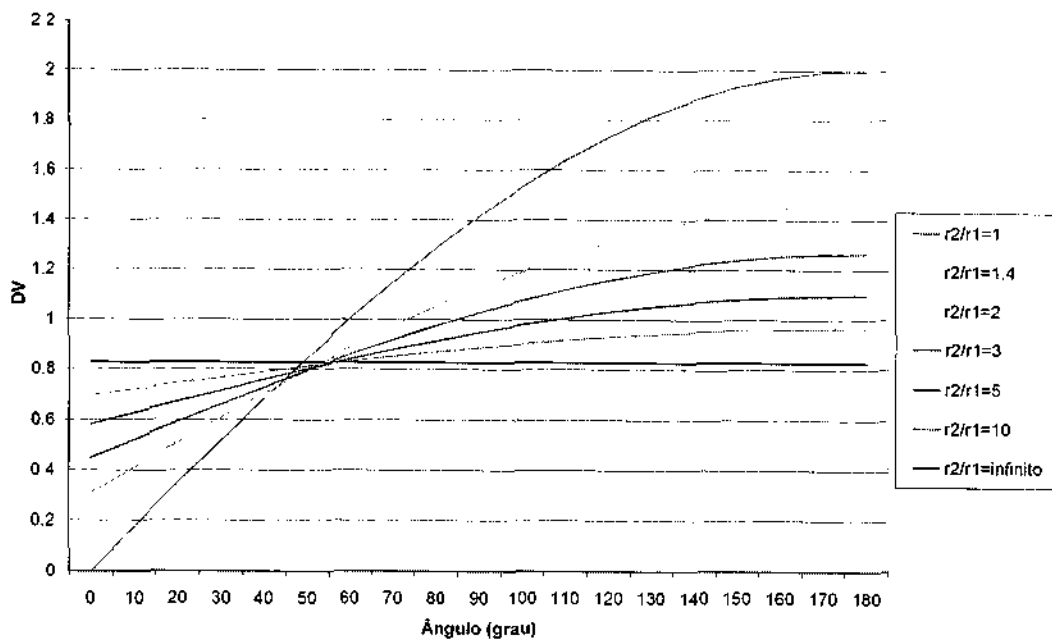
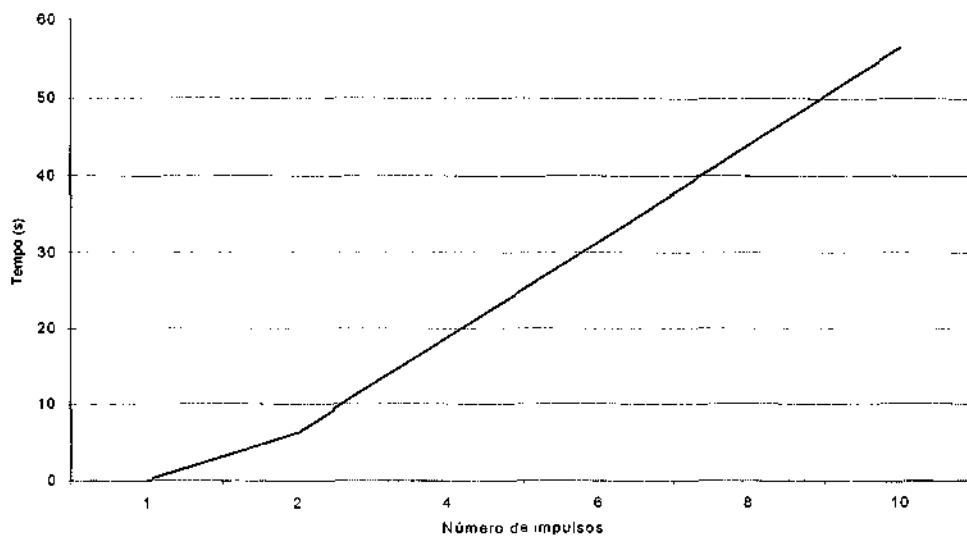


Fig. 3.4: Resultados para a manobra N-impulsiva



**Fig. 3.5: Resultados para a mudança de plano tri-impulsiva**

Como foi visto anteriormente, no caso da manobra N-impulsiva, o tempo depende da quantidade de impulsos aplicados para realizar a transferência, como pode ser visto na Fig.3.6.



**Fig. 3.6: Tempo para a transferência N-impulsiva**

### 3.6 EXEMPLOS DE CÁLCULO DO IMPULSO PARA MUDANÇA DE PLANO

As tabelas abaixo mostram dados da posição inicial e da posição final desejada de alguns satélites, assim como o melhor valor do impulso para realizar a manobra. Os dados dos satélites citados foram obtidos de Prasad e Kuga, 1999.

**TABELA 3.1: DADOS DO SATÉLITE CBERS.**

Posição inicial		Posição final	
X = -2343970.735 m	a = 7148860 m	X = -5873595.238 m	a = 7148860 m
Y = 6311134.704 m	e = 0.0011	Y = -279470.517 m	e = 0.0011
Z = -2417885.816 m	I = 36°	Z = -4073520.233 m	I = 98°
$\dot{X}$ = -6459.877 m/s	$\Omega$ = 140°	$\dot{X}$ = -4237.919 m/s	$\Omega$ = 177.137°
$\dot{Y}$ = -1031.162 m/s	w = 90°	$\dot{Y}$ = 1063.204 m/s	w = 90°
$\dot{Z}$ = 3590.751 m/s	M = 235°	$\dot{Z}$ = 6049.499 m/s	M = 235°

Nesta manobra, o menor impulso é obtido por uma transferência tri-impulsiva, com  $\frac{r_2}{r_1}$  tendendo ao infinito. O impulso aplicado necessário para se fazer essa transferência é de 6185927.6 m/s.

**TABELA 3.2: DADOS DO SATÉLITE TOPEX/POSEIDON**

Posição inicial		Posição final	
X = 2727472.843 m	a = 7714423.46 m	X = -2013488.441 m	a = 7714423.46 m
Y = -1570015.659 m	e = 0.0015	Y = 2702501.773 m	e = 0.0015
Z = -7055224.409 m	I = 112°	Z = -6951445.692 m	I = 66°
$\dot{X}$ = -5524.044 m/s	$\Omega$ = 215°	$\dot{X}$ = -3972.585 m/s	$\Omega$ = 240°
$\dot{Y}$ = -4436.337 m/s	w = 100°	$\dot{Y}$ = -5869.710 m/s	w = 100°
$\dot{Z}$ = -1152.333 m/s	M = 160°	$\dot{Z}$ = -1135.383 m/s	M = 160°

No caso desta manobra, o menor consumo também será obtido com a transferência tri-

impulsiva, porém, o melhor valor de  $\frac{r_2}{r_1}$  é  $\frac{\text{sen} \frac{\theta}{2}}{1 - 2 \text{sen} \frac{\theta}{2}}$ , sendo necessário um impulso de

8404.9184 m/s para realizar a transferência.

**TABELA 3.3: DADOS DO SATÉLITE TIPO MOLNIYA.**

Posição inicial		Posição final	
X = 15519374.03 m	a = 26563000.0 m	X = 12315519374 m	a = 26563000.0 m
Y = 9230269.40 m	e = 0.75	Y = 14478612.73 m	e = 0.75
Z = 31031548.53 m	I = 73.435°	Z = 28957290.12 m	I = 63.435°
$\dot{X} = -888.720$ m/s	$\Omega = 0^\circ$	$\dot{X} = -888.719$ m/s	$\Omega = 0^\circ$
$\dot{Y} = 721.754$ m/s	w = 270°	$\dot{Y} = 1132.145$ m/s	w = 270°
$\dot{Z} = 2426.491$ m/s	M = 80°	$\dot{Z} = 2264.296$ m/s	M = 80°

O menor consumo obtido para esta manobra é utilizando o método baseado na aplicação de uma série N de impulsos em um mesmo ponto da órbita em diferentes passagens do veículo espacial por esse ponto. No entanto, o consumo mais baixo é obtido quando aplicado somente um impulso para totalizar a transferência. O impulso necessário é de 675.2372 m/s.



## CAPÍTULO 4

### CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi comparar dois métodos de transferência orbital tridimensional para veículos espaciais e obter resultados que quantificassem essa comparação. Para isso, além de fazer um estudo sobre posicionamento e determinação de órbitas e manobras de satélites, foi desenvolvido um programa em linguagem Fortran com apresentação em Visual Basic, que oferece a opção de fazer a transformação de coordenadas cartesianas de posição e velocidade para elementos keplerianos e vice versa, utilizando o algoritmo estudado. Para analisar a confiabilidade do programa, foram realizados vários testes, verificando que o resultado das transformações eram obtidos corretamente, sendo assim, confiável e de fácil utilização para qualquer usuário.

Para a comparação de métodos de transferência orbital, também foi desenvolvido um programa em linguagem Fortran, que implementa e compara duas técnicas para o cálculo de manobras orbitais N-impulsivas, sendo o primeiro método baseado na aplicação de uma série N de impulsos em um mesmo ponto da órbita, em diferentes passagens do veículo espacial por esse ponto, e um segundo método que utiliza uma série de três impulsos na manobra.

Os resultados mostram que a transferência N-impulsiva é vantajosa para transferências envolvendo mudanças pequenas na inclinação entre os planos das órbitas inicial e final, ou seja, quando essa inclinação está entre  $0^\circ$  e  $38.94^\circ$ . Para inclinações acima deste valor, o melhor método passa a ser a transferência tri-impulsiva. Porém, para uma

variação da inclinação entre  $38.94^\circ$  e  $60^\circ$ , deve-se usar  $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 - 2 \sin \frac{\theta}{2}}$  e para variações

maiores de  $60^\circ$  deve-se usar  $\frac{r_2}{r_1}$  tendendo ao infinito.

## REFERÊNCIAS

Bate, R. R.; Muller, D. D.; White, J. E. **Fundamentals of Astrodynamics**. Dover Publication, New York, 1971.

Chiaradia, A. P. M. **Determinação e manobras autônomas de órbitas de satélites artificiais em tempo real usando medidas GPS de uma frequência**. São José dos Campos. 200p. Dissertação (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1999.

Chobotov, V. A. **Orbital Motion**. 2 Edition, Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.

Kuga, H. K.; Rao, K. R. **Introdução à Mecânica Orbital**. Inpe-5615-PUD/064, 1995.

Prado, A. F. B. A.; Neto, A. R. **Um Estudo Bibliográfico Sobre o Problema de Transferências de Órbitas**. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, 15(1):65-78, 1993.

Prasad, R.P.; Kuga, H.K. **Orbit Maintenance and Control of CBERS**. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE/DMC, 1999.

Rao, K. R. **Determinação de Órbita e Manobras Orbitais**. Departamento de Mecânica e Controle – INPE, Apostila a ser publicada.

Sukhanov, A. A. **Lectures on Astrodynamics**. Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 1999.

## APÊNDICE A

### PROGRAMA DESENVOLVIDO PARA FAZER A TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS CARTESIANAS EM ELEMENTOS ORBITAIS E VICE VERSA

#### A.1 PROGRAMA PRINCIPAL

```
PROGRAM ELEMENTOS_XYZ
IMPLICIT NONE
INTEGER ESCOLHA, RESPOSTA
REAL*8 MI, DPI, DEG, RAD, PI,P(6)
REAL*8 X,Y,Z,XP,YP,ZP
REAL*8 A,E,I,OMEGA,M,W,U
COMMON/CONSTANTE/MI, DEG, RAD, DPI,PI
DATA MI/3.986005D+14/
PI = 3.141592653589793D0
DPI = PI + PI
RAD = PI / 180.D0      !GRAUS EM RADIANOS
DEG = 180.D0 / PI     !RADIANOS EM GRAUS
C
10  WRITE(*,*)"DESEJA ENTRAR COM:"
    WRITE(*,*)"1- COORDENADAS CARTESIANAS"
    WRITE(*,*)"2- ELEMENTOS ORBITAIS"
    READ (*,*) ESCOLHA
C
    IF (ESCOLHA.EQ.1) THEN
        CALL SUB_COORD_CART (X,Y,Z,XP,YP,ZP,A,E,I,OMEGA,M,W)
    ELSE IF (ESCOLHA.EQ.2) THEN
        CALL SUB_ELEM_KEPL (A,E,I,OMEGA,W,U,M,P)
    ENDIF
C
    WRITE(*,*)"DESEJA ENTRAR COM OUTROS VALORES?"
    WRITE(*,*)"1- SIM    2- NAO"
    READ (*,*) RESPOSTA
    IF (RESPOSTA.EQ.1) THEN
        GOTO 10
    ELSE IF (RESPOSTA.EQ.2) THEN
        CONTINUE
    ENDIF
STOP
```

## A.2 SUBROTINA 1 – COORDENADAS CARTESIANAS PARA ELEMENTOS ORBITAIS

```

SUBROUTINE SUB_COORD_CART (X,Y,Z,XP,YP,ZP,A,E,I,OMEGA,M,W)
C
  IMPLICIT NONE
  REAL*8 R,V,A,X,Y,Z,XP,YP,ZP,H,HX,HY,HZ,I,E
  REAL*8
N,M,U,W,ESENU,ECOSU,F,SENLV,COSLV,LV,FARG,RDOTV
  REAL*8 MI, DEG, RAD, DPI,PI
  REAL*8 RRP, OMEGA
  COMMON/CONSTANTE/MI, DEG, RAD, DPI,PI
C
  WRITE(*,*)"ENTRE COM AS COORDENADAS CARTESIANAS EM M
E M/S"
  WRITE(*,*)"X"
  READ (*,*) X
  WRITE(*,*)"Y"
  READ (*,*) Y
  WRITE(*,*)"Z"
  READ (*,*) Z
  WRITE(*,*)"XP"
  READ (*,*) XP
  WRITE(*,*)"YP"
  READ (*,*) YP
  WRITE(*,*)"ZP"
  READ (*,*) ZP
C
C CALCULO DO SEMI EIXO MAIOR A
C
  R=DSQRT(X**2 + Y**2 + Z**2)
  V=(XP**2 + YP**2 + ZP**2)
  A=1.D0/(2.D0/R - V/MI)
C
C CALCULO DA EXCENTRICIDADE E
C
  RRP=X*XP+Y*YP+Z*ZP
  N=DSQRT(MI/(A**3))
  E=DSQRT((RRP/(N*(A**2)))**2 + (1.D0-(R/A))**2)
C
C CALCULO DA INCLINACAO I
C
  HX=Y*ZP-Z*YP
  HY=Z*XP-X*ZP
  HZ=X*YP-Y*XP

```

```

      H=DSQRT(HX**2+HY**2+HZ**2)
      IF (H.LT.1.D-10) GOTO 20
      I = DATAN2(DSQRT(HX*HX + HY*HY),HZ)
C
C CALCULO DO NODO ASCENDENTE (OMEGA)
C
      IF ((HX .EQ. 0.D0).AND.(HY.EQ.0.D0)) THEN
          OMEGA = 0.D0
      ELSE
          OMEGA=DATAN2(HX,-HY)    ! EM RAD
          IF (OMEGA.LT.0.D0) OMEGA=OMEGA + DPI
      ENDIF
C
C CALCULO DA ANOMALIA EXCENTRICA U
C
      ESENU=(RRP/MI)*DSQRT(MI/A)
      ECOSU=1.D0 - R/A
      IF ((ESENU .EQ. 0.D0).AND.(ECOSU.EQ.0.D0)) THEN
          U = 0.D0
      ELSE
          U=DATAN2(ESENU,ECOSU)
          IF (U.LT.0.D0) U = U + DPI
      ENDIF
C
C CALCULO DA ANOMALIA MEDIA M
C
      ! U=DACOS (1.D0/E*(1.D0-(R/A)))
      M=DMOD(U - ESENU,DPI)      !EM RAD
      IF (M.LT.0.D0) M = M + DPI
C
C CALCULO DO ARGUMENTO DO PERIGEU W
C
      SENLV=(Y*DCOS(OMEGA)-X*DSIN(OMEGA))/(R*DCOS(I))
      COSLV=(X*DCOS(OMEGA)+Y*DSIN(OMEGA))/R
      IF (COSLV.EQ.0.D0) THEN
          LV=PI/2.D0
      ELSE
          LV=DATAN2(SENLV,COSLV)
      ENDIF
C
      IF(LV.LT.0.D0) LV= LV + DPI
C
      FARG=((A*(1.D0-E**2)/R)-1.D0)/E
      IF (FARG.GT.1.D0) THEN
          FARG=1.D0
      ENDIF
      IF (FARG.LT.-1.D0) THEN

```

```

FARG=-1.D0
ENDIF
F=DACOS(FARG)
RDOTV=X*XP+Y*YP+Z*ZP
IF (RDOTV.LE.0.D0) THEN
F= DPI - F
ENDIF
W=LV - F
IF(W.LT.0.D0) W= W + DPI
C
C TRANSFORMAÇÃO DE RADIANOS PARA GRAUS
I=I*DEG
OMEGA=OMEGA*DEG
W=W*DEG
M=M*DEG
U=U*DEG
C LONGV = LONGV*DEG
C
C IMPRIMINDO NA TELA OS ELEMENTOS ORBITAIS
20 WRITE(*,*) "RESULTADOS EM M E GRAUS"
WRITE(*,*) "A=",A
WRITE(*,*) "E=", E
WRITE(*,*) "I=",I
WRITE(*,*) "OMEGA=", OMEGA
WRITE(*,*) "W=", W
C WRITE(*,*) "LONGV", LONGV
WRITE(*,*) "M=",M
WRITE(*,*) "U=",U
C
RETURN
END

```

### A.3 SUBROTINA 2 - ELEMENTOS ORBITAIS PARA COORDENADAS CARTESIANAS

```

SUBROUTINE SUB_ELEM_KEPL (A,E,I,OMEGA,W,U,M,P)
C
IMPLICIT NONE
REAL*8 A,E,I,OMEGA,W,U,M,MI,DPI,RAD,DEG,P(6)
REAL*8 N,R,XX,YY,XXP,YYP,U0,U1,M1
REAL*8 MAT1(3,2)
INTEGER ESCOLHA, J
COMMON/CONSTANTE/MI, DEG, RAD, DPI
C
WRITE(*,*)"DESEJA ENTRAR COM:"

```

```

WRITE(*,*)"1- ELEMENTOS KEPLERIANOS E ANOMALIA
EXCENTRICA U"
WRITE(*,*)"2- ELEMENTOS KEPLERIANOS E ANOMALIA MEDIA
M"
READ (*,*) ESCOLHA
WRITE(*,*)"A"
READ (*,*) A
WRITE(*,*)"E"
READ (*,*) E
WRITE(*,*)"I"
READ (*,*) I
WRITE(*,*)"OMEGA"
READ (*,*) OMEGA
WRITE(*,*)"W"
READ (*,*) W
C
C CONVERTER DE GRAU PARA RAD
C
I=I*RAD
OMEGA=OMEGA*RAD
W=W*RAD
IF (ESCOLHA.EQ.2)THEN
WRITE(*,*)"M"
READ (*,*) M
M = M*RAD
U0= DMOD(M, DPI)
M1 = DMOD(M, DPI)
U1 = 1.D0
C CÁLCULO DA ANOMALIA EXCÊNTRICA
DO WHILE (DABS(U1).GT.1.D-12)
U1=((U0-E*DSIN(U0)-M1)/(1.D0-E*DCOS(U0)))
U0 = U0 - U1
ENDDO
U = U0
ELSE IF (ESCOLHA .EQ. 1) THEN
WRITE(*,*)"U"
READ (*,*) U
U = U*RAD
ENDIF
C
C CALCULO DAS COORDENADAS NO PLANO OXY
C
30 XX=A*(DCOS(U)- E)
YY=A*(DSQRT(1.D0 - E**2)*DSIN(U))
C
C CALCULO DO MOVIMENTO MEDIO N E DO R

```

```

C
  N=DSQRT(MI/A**3)
  R=A*(1.D0-E*DCOS(U))
C
C  CALCULO DAS COORDENADAS XP,YP,ZP
C
  XXP=-((N*(A**2))/R)*DSIN(U)
  YYP=((N*A**2)/R)*DSQRT(1.D0-(E**2))*DCOS(U)
C
C  CALCULO DA MATRIZ DE ROTACAO
C
  MAT1(1,1)=DCOS(OMEGA)*DCOS(W)-
DSIN(OMEGA)*DCOS(I)*DSIN(W)
  MAT1(1,2)=-DCOS(OMEGA)*DSIN(W)-
DSIN(OMEGA)*DCOS(I)*DCOS(W)
  MAT1(2,1)=DSIN(OMEGA)*DCOS(W)+DCOS(OMEGA)*DCOS(I)*DSI
N(W)
  MAT1(2,2)=-
DSIN(OMEGA)*DSIN(W)+DCOS(OMEGA)*DCOS(I)*DCOS(W)
  MAT1(3,1)=DSIN(I)*DSIN(W)
  MAT1(3,2)=DSIN(I)*DCOS(W)
C
  DO J= 1,3
  P(J)=MAT1(J,1)*XX + MAT1(J,2)*YY
C
  P(J+3)=MAT1(J,1)*XXP + MAT1(J,2)*YYP
  ENDDO
C
  WRITE(*,*) "X=",P(1)
  WRITE(*,*) "Y=",P(2)
  WRITE(*,*) "Z=",P(3)
  WRITE(*,*) "XP=",P(4)
  WRITE(*,*) "YP=",P(5)
  WRITE(*,*) "ZP=",P(6)
C
  RETURN
END

```



## APÊNDICE B

### PROGRAMA DESENVOLVIDO PARA O CÁLCULO DAS MANOBRAS

#### B.1 SUBROTINA PARA A MANOBRA N-IMPULSIVA

PROGRAM MANOBRAS CASO 1

```
C
  IMPLICIT NONE
  REAL *8 V,DV,U,A,AINC,PI,P,T,RAD,AA,V0,MI,DVF
  INTEGER I,N
  OPEN (1,FILE = "1IMPULSO.DAT")
  OPEN (2,FILE = "2IMPULSOS.DAT")
  OPEN (4,FILE = "4IMPULSOS.DAT")
  OPEN (6,FILE = "6IMPULSOS.DAT")
  OPEN (8,FILE = "8IMPULSOS.DAT")
  OPEN (10,FILE = "10IMPULSOS.DAT")
  OPEN (11,FILE = "TEMPO_CASO1.DAT")

C
  DATA A/1.D0/
  DATA U/1.D0/
  PI = 3.141592653589793D0
  RAD=PI/180.D0
  MI=3.986005D+14

C
  V=1.D0
  WRITE(*,*)"ENTRE COM O SEMI EIXO"
  READ(*,*) AA
  V0=DSQRT(MI/AA)
  DO AINC=0,180,2
  DV=2.D0*DSIN(AINC*RAD/2.D0)
  DVF=DV*V0
  WRITE(1,*) DVF,AINC
  DO I=2,10,2
  DV=2.D0*V*DSIN((AINC*RAD/I)/2.D0)
  DV=I*DV
  DVF=DV*V0
  IF (I.EQ.2) THEN
  WRITE(2,*) DVF,AINC
  ELSE
  IF (I.EQ.4) THEN
  WRITE(4,*) DVF,AINC
  ELSE
  IF (I.EQ.6) THEN
```

```

WRITE(6,*) DVF,AINC
ELSE
IF (I.EQ.8) THEN
WRITE(8,*) DVF,AINC
ELSE
IF (I.EQ.10) THEN
WRITE(10,*) DVF,AINC
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDDO
END DO
P=DSQRT((4*PI**2*A**3)/U)
DO N=2,10,2
T=(N-1)*P
WRITE(11,*) T
ENDDO
STOP
END

```

## B.2 SUBROTINA PARA A MANOBRA TRI-IMPULSIVA

```

PROGRAM MANOBRAS
IMPLICIT NONE
REAL*8 RF,AINC,DV1,DV2,DV,RAD,PI,V0,MI,AA,DV11,DV22
OPEN(1,FILE="MANOBRAS1.DAT")
OPEN(2,FILE="MANOBRAS2.DAT")
OPEN(3,FILE="MANOBRAS3.DAT")
MI=3.986005D+14
WRITE(*,*)"ENTRE COM O SEMI EIXO"
READ(*,*) AA
V0=DSQRT(MI/AA)
PI = 3.141592653589793D0
RAD=PI/180.D0
C
C RF=R2/R1 PARA RF=1
RF=1.D0
DO AINC=0,38.94,2
DV1=DSQRT((2*RF)/(1+1))-1
DV11=DV1*V0
DV2=2*DSQRT(2/(RF*(1+RF)))*DSIN(AINC*RAD/2)
DV22=DV2*V0
DV=2*DABS(DV11)+DABS(DV22)
WRITE(1,*) DV,AINC

```

```

        ENDDO
C
C  PARA RF = SEN(AINC/2) / 1 - 2*SEN(AINC/2)
    DO AINC=40,60,2
    RF=DSIN(AINC*RAD/2)/(1-2*DSIN(AINC*RAD/2))
    DV1=DSQRT((2*RF)/(1+1))-1
    DV11=DV1*V0
    DV2=2*DSQRT(2/(RF*(1+RF)))*DSIN(AINC*RAD/2)
    DV22=DV2*V0
    DV=2*DABS(DV11)+DABS(DV22)
    WRITE(2,*) DV,AINC
    ENDDO
C
C  PARA RF=INFINITO
    DO AINC=60,180,2
    RF=10E10
    DV1=DSQRT((2*RF)/(1+RF))-1
    DV11=DV1*V0
    DV2=2*DSQRT(2/(RF*(1+RF)))*DSIN(AINC*RAD/2)
    DV22=DV2*V0
    DV=2*DABS(DV11)+DABS(DV22)
    WRITE(3,*) DV,AINC
    ENDDO
    STOP
    END

```



Título

Otimização de Manobras Orbitais com Dois e Três Impulsos

- 1030

Autor

Vivian Martins Gomes, Ana Paula Marins Chiaradia, Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado

Tradutor

Não há

Editor

Não há

Origem	Projeto	Série	No. de Páginas	No. de Fotos	No. de Mapas
DMC	PIBIC/CNPq		43	0	0

Tipo

RPQ  PRE  NTC  PRP  MAN  PUD  TAE

Divulgação

Externa  Interna  Reservada  Lista de Distribuição Anexa

Periódico / Evento

Não há

Convênio

Não há

Autorização Preliminar

\_\_/\_\_/\_\_  
Data

\_\_\_\_\_  
Titular da Unidade

Revisão Técnica

Solicitada  Dispensada

Recebida \_\_/\_\_/\_\_ Devolvida \_\_/\_\_/\_\_

\_\_\_\_\_  
Titular de Nível "A"

\_\_\_\_\_  
Assinatura do Revisor

Revisão de Linguagem

Solicitada  Dispensada

Recebida \_\_/\_\_/\_\_ Devolvida \_\_/\_\_/\_\_

\_\_\_\_\_  
Leonel Fernando Perondi  
Titular de Nível "A"  
Coordenador Geral  
Engenharia e Tecnologia Espacial  
Assinatura do Revisor

Autorização Final

\_\_/\_\_/\_\_  
Data

\_\_\_\_\_  
Titular da Unidade

Palavras Chave

Astrodinâmica, Manobras Orbitais, Manobras Impulsivas

