

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-8476-TDI/776

**ESTUDO DE TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS INCLUINDO
MANOBRAS AEROASSISTIDAS**

Walkíria Schulz

Tese de Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais, orientada pelos Drs. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Rodolpho Vilhena de Moraes, aprovada em 21 de fevereiro de 2001.

INPE
São José dos Campos
2001

629.7.076.6

SCHULZ, W.


Estudo de transferências orbitais incluindo manobras
aeroassistidas / W. Schulz. – São José dos Campos: INPE,
2001.

178p. – (INPE-8476-TDI/776).

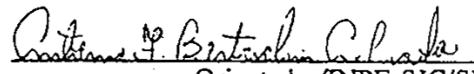
1.Satélites artificiais. 2.Arrasto aerodinâmico. 3.Sus-
tentação aerodinâmica. 4.Inclinação. 5.Veículos orbitais
manobráveis. I.Título.

Aprovada pela Banca Examinadora em cumprimento a requisito exigido para a obtenção do Título de **Doutora** em **Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle.**

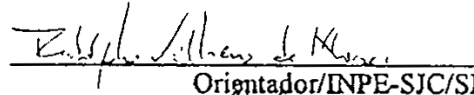
Dr. Hans Ulrich Pilchowski


Presidente/INPE-SJC/SP

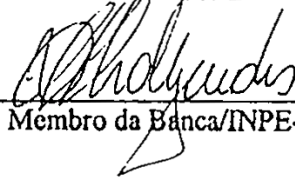
Dr. Antonio F. Bertachini de A Prado


Orientador/INPE-SJC/SP

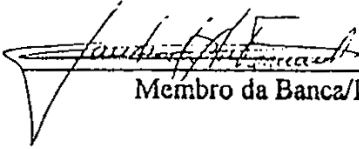
Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes


Orientador/INPE-SJC/SP

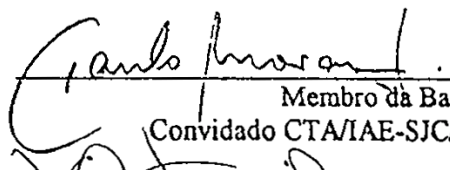
Dr. Ulisses Thadeu Vieira Guedes


Membro da Banca/INPE-SJC/SP

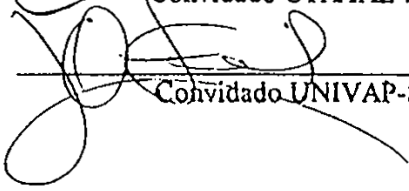
Dr. Sandro da Silva Fernandes


Membro da Banca/ITA-SJC/SP

Dr. Paulo Moraes Jr.


Membro da Banca
Convidado CTA/IAE-SJC/SP

Dr. Leonardo d'Olivé Ferreira


Convidado UNIVAP-SJC/SP

Candidato (a) : Walkíria Schulz

São José dos Campos, 21 de fevereiro de 2001.

"(...) Nesse ponto, assim me parece, está a melhor resposta para os medíocres e mesquinhos que estão sempre perguntando qual é a utilidade da ciência. Num desses comentários míticos de autoria incerta, conta-se que perguntaram a Michael Faraday qual era a utilidade da ciência. ‘Meu senhor’, respondeu Faraday. ‘Qual é a utilidade de um recém-nascido?’ O que Faraday (ou Benjamin Franklin, ou quem quer que seja) obviamente queria dizer é que um bebê talvez não tenha nenhuma utilidade no presente, mas tem grande potencial para o futuro. Agora gosto de pensar que ele quis também dizer outra coisa: qual é a utilidade de pôr um bebê no mundo, se a única coisa que ele faz com a sua vida é apenas trabalhar para continuar a viver? Se tudo é julgado pelo seu grau de ‘utilidade’ – isto é, se é útil para nos manter vivos –, ficamos diante de uma circularidade fútil. Deve haver algum valor adicional. Pelo menos uma parte da vida deveria ser dedicada a *viver* essa vida, e não apenas a trabalhar para impedir o seu fim. É assim que justificamos corretamente o uso do dinheiro dos contribuintes para promover as artes. É uma das justificações apropriadamente oferecidas para conservar espécies raras e belas edificações. É a resposta que damos àqueles bárbaros para quem os elefantes selvagens e as casas históricas só deviam ser preservados se ‘compensassem o custo’. Com a ciência acontece o mesmo. É claro que a ciência compensa o seu custo; é claro que ela é útil. Mas ela não é só isso. (...)"

Dawkins, R. O anestésico da familiaridade. In:
Desvendando o arco-íris: ciência, ilusão e
encantamento. São Paulo: Companhia das Letras, 2000.
Cap. 1, p. 22-23.

Aos que nunca duvidaram,
Arthur, Teresinha e Cristián.

AGRADECIMENTOS

Aos Dr. Antônio Fernando Bertachini de Almeida Prado e Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes pelas orientações carinhosas e por estarem sempre disponíveis.

Aos membros da banca examinadora pela predisposição em analisar este trabalho e pelas sugestões recebidas.

Ao Dr. Ulisses Thadeu Vieira Guedes pela valiosa contribuição.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais que me abrigou e instruiu na Divisão de Mecânica Orbital e Controle.

À FAPESP que financiou este estudo.

Aos meus orientadores extra-oficiais: Arthur e Teresinha Schulz.

Aos meus amigos pelo apoio, companheirismo, incentivo e pelos momentos de diversão.

Em especial, a Cristián Beaugé pelo seu amor.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise de missões espaciais através do desenvolvimento de um programa computacional para o cálculo de manobras aerodinâmicas e das manobras propulsivas necessárias para sua implementação. Além do desenvolvimento numérico, um estudo analítico contempla a realização da fase aeroassistida deste tipo de manobra. Nessa análise, estão incluídos um estudo dos limites térmicos associados com a passagem de um veículo pela atmosfera e outro sobre a análise dos erros associados. Diversas simulações de manobras aerodinâmicas são realizadas e comparadas com mudanças orbitais desenvolvidas fora da atmosfera. Conclui-se que se trata de um problema extremamente dependente das condições iniciais e que cada missão merece uma análise individual cuidadosa. Além disso, os resultados oriundos da formulação analítica mostram-se em comum acordo com os resultados numéricos nas camadas mais altas da atmosfera terrestre.

STUDY OF ORBITAL TRANSFERS WITH AEROASSISTED MANEUVERS

ABSTRACT

This work presents an analysis of space missions through the development of a software package for the calculation of aerodynamic maneuvers and of the required thrust maneuvers for their implementation. Besides the numerical development, an analytical study contemplates the accomplishment of the aeroassisted phase of this maneuver type. This analysis includes a study of the thermal limits associated with a vehicle passage through the atmosphere as well as an analysis of the associated errors. Several simulations of aerodynamic maneuvers are carried out and compared with orbital changes accomplished outside of the atmosphere. Among the conclusions, it is shown that the problem is extremely sensitive to the initial conditions and each mission deserves a careful individual analysis. Finally, the results obtained from the analytical formulation are shown to be in agreement with the numerical results for the upper layers of the terrestrial atmosphere.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	
LISTA DE TABELAS	
LISTA DE SÍMBOLOS	
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	31
1.1 Motivação	32
1.2 Revisão Bibliográfica	33
1.3 Organização	37
CAPÍTULO 2 – DEFINIÇÕES	39
2.1 Manobra Aeroassistida	40
2.2 Modelo Atmosférico	42
2.2.1 <i>U.S. Standard Atmosphere 1976</i>	44
2.3 Reentrada	45
2.4 O Veículo	46
CAPÍTULO 3 – TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS COM EMPUXO SEM AÇÃO AERODINÂMICA	49
3.1 Empuxo Infinito (Hipótese Impulsiva)	50
3.2 Empuxo Finito (Hipótese Não-Impulsiva)	52
3.2.1 Formulação Matemática	52
3.2.2 O Algoritmo	54

CAPÍTULO 4 – SIMULAÇÕES COM COEFICIENTES AERODINÂMICOS CONSTANTES	63
4.1 Equações de Movimento na Atmosfera	63
4.2 Simulações com Coeficientes Aerodinâmicos Constantes	66
4.2.1 Considerações	69
4.2.2 Exemplos	71
4.3 Simulações com Coeficientes Aerodinâmicos Variáveis	84
CAPÍTULO 5 – ESTUDO COMPARATIVO DO CONSUMO DE COMBUSTÍVEL PARA MANOBRAS COM E SEM ATMOSFERA	89
CAPÍTULO 6 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS	101
6.1 Soluções Analíticas com Expansões até 6 ^a Ordem	101
6.1.1 Expressões para os outros Elementos Orbitais	104
6.2 Soluções Analíticas com Expansões até 8 ^a Ordem	109
6.3 Soluções Analíticas com Sustentação	112
6.4 Validação Numérica	119
6.5 Outros Resultados	133
CAPÍTULO 7 – VÍNCULOS TÉRMICOS	139
7.1 Meio Rarefeito	140
7.2 Aquecimento Cinético	143
7.3 Resultados das Simulações	148
CAPÍTULO 8 – UMA MANOBRA COMPLETA COM ERROS ASSOCIADOS	153

8.1 Manobra Profunda	153
8.2 Manobra Rasante	156
8.3 Análise dos Erros Associados	158
CAPÍTULO 9 – COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	163
9.1 Comentários	163
9.2 Conclusões	167
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	169
APÊNDICE A – O MÉTODO DA PROJEÇÃO DO GRADIENTE.....	177

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Representação de uma trajetória de transferência para ilustrar as forças que atuam sobre o veículo espacial.....	40
2.2 <i>Flight path angle</i> γ e ângulo de ataque α	42
2.3 Forma geral do veículo.....	47
3.1 Vetor de empuxo \vec{T} que atua sobre o satélite.....	53
4.1 Variáveis de estado e forças aerodinâmicas e propulsiva.....	65
4.2 Características geométricas do veículo.....	66
4.3 Componentes da força aerodinâmica, ângulo de ataque α e ângulo de rolamento σ	68
4.4 Manobras aeroassistidas.....	75
4.5 Controle ótimo da manobra contínua que utiliza a atmosfera – IDA (graus).....	76
4.6 Controle ótimo da manobra contínua que utiliza a atmosfera – VOLTA (graus).....	77
4.7 Variação em altitude sofrida por um veículo espacial ao atravessar a atmosfera terrestre.....	81

4.8	Variação em semi-eixo maior (km). Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	82
4.9	Variação em excentricidade. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	83
4.10	Variação em inclinação (graus). Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	83
5.1	Variação em inclinação (graus) induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.278$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	91
5.2	Variação total em massa de combustível (kg) induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.278$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	92
5.3	Variação total em massa de combustível (kg) induzida pela manobra impulsiva sem atmosfera para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.278$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	93
5.4	Economia em massa de combustível (kg) entre a manobra fora da atmosfera e a manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.278$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	94

5.5	Velocidade característica resultante da manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.278$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	95
5.6	(a) Economia em massa de combustível (kg) entre a manobra fora da atmosfera e a manobra aeroassistida e (b) variação em inclinação induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.350$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	96
5.7	(a) Economia em massa de combustível (kg) entre a manobra fora da atmosfera e a manobra aeroassistida e (b) variação em inclinação induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.420$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	96
5.8	(a) Economia em massa de combustível (kg) entre a manobra fora da atmosfera e a manobra aeroassistida e (b) variação em inclinação induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 8.000$ km e $r_p = 6.420$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	98
5.9	(a) Economia em massa de combustível (kg) entre a manobra fora da atmosfera e a manobra aeroassistida e (b) variação em inclinação induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 9.000$ km e $r_p = 6.420$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	98
6.1	Ângulo θ (anomalia verdadeira) da travessia atmosférica.....	120

6.2	$\Delta Va/\Delta Vi$ como uma função de r_p (km) para $R_C = 7.000$ km. Numérico vs. Analítico.....	135
6.3	$\Delta Va/\Delta Vi$ como uma função de r_p (km) para $R_C = 8.000$ km. Numérico vs. Analítico.....	135
6.4	$\Delta Va/\Delta Vi$ como uma função de r_p (km) para $R_C = 9.000$ km. Numérico vs. Analítico.....	135
6.5	$\Delta Va/\Delta Vi$ como uma função de r_p (km) para $R_C = 10.000$ km. Numérico vs. Analítico.....	136
7.1	Variação em energia cinética ($\text{kg}\cdot\text{km}^2/\text{s}^2$). Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	149
7.2	Variação em energia cinética ($\text{kg}\cdot\text{km}^2/\text{s}^2$) em função do raio do perigeu (km).....	150
7.3	Fluxo de calor convectivo (kW/m^2). Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	150
7.4	Fluxo de calor convectivo (kW/m^2) em função do raio do perigeu (km).....	151
8.1	Variação em inclinação (graus) induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.500$ km e $r_p = 6.481$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	155

8.2	Economia em massa de combustível (kg) entre a manobra fora da atmosfera e a manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.500$ km e $r_p = 6.481$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.....	155
A.1	Projeção do gradiente.....	178

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 Elementos orbitais do veículo – Caso I.....	72
4.2 Elementos orbitais do veículo – Caso II.....	72
4.3 Elementos orbitais do veículo – Caso III.....	73
4.4 Consumo de combustível (kg) – $a = 7.000$ km.....	78
4.5 Consumo de combustível (kg) – $a = 8.000$ km.....	78
4.6 Consumo de combustível (kg) – $a = 9.000$ km.....	78
4.7 Eficiência percentual de cada manobra (massa de combustível / massa final do satélite).....	80
4.8 Variação em inclinação.....	86
6.1 Variação em semi-eixo maior (km) para $\alpha = \sigma = 0,0^\circ$	121
6.2 Variação em inclinação (graus) para $\alpha = \sigma = 0,0^\circ$	122
6.3 Variação em semi-eixo maior (km) para $\alpha = \sigma = 40^\circ$	124
6.4 Variação em inclinação (graus) para $\alpha = \sigma = 40^\circ$ sem sustentação.....	124
6.5 Variação em inclinação (graus) para $\alpha = \sigma = 40^\circ$ com sustentação.....	125

6.6	Varição em excentricidade para $\alpha = \sigma = 0,0^\circ$ sem sustentação.....	127
6.7	Varição em excentricidade para $\alpha = \sigma = 40^\circ$ com sustentação.....	128
6.8	Varição no argumento do perigeu (graus) para $\alpha = \sigma = 0,0^\circ$ sem sustentação.....	129
6.9	Varição no argumento do perigeu (graus) para $\alpha = \sigma = 40^\circ$ com sustentação.....	130
6.10	Varição em longitude do nodo ascendente (graus) para $\alpha = \sigma = 0,0^\circ$ sem sustentação.....	131
6.11	Varição em longitude do nodo ascendente (graus) para $\alpha = \sigma = 40^\circ$ com sustentação.....	132
8.1	Consumo de combustível (kg) – $a = 7.500$ km (profunda).....	154
8.2	Elementos orbitais do veículo (profunda).....	154
8.3	Consumo de combustível (kg) – $a = 7.500$ km (rasante).....	157
8.4	Elementos orbitais do veículo (rasante).....	157

LISTA DE SÍMBOLOS

Latinos

a semi-eixo maior da órbita

\vec{A} força aerodinâmica

$B = \beta a e$

$B_r = r_n / r_b$

c consumo específico de combustível

$c_1 = \frac{1}{2} \epsilon \beta r_{p0} \sin^2 i$

C constante adimensional

C_{atm} constante dependente da atmosfera planetária

C_A coeficiente de sustentação em altitude

C_B coeficiente de sustentação lateral

C_D coeficiente de arrasto

C_L coeficiente de sustentação

\vec{d} direção de busca de mínimo

dQ quantidade total de calor removida de dS por unidade de tempo

dS elemento de superfície

e excentricidade da órbita

E anomalia excêntrica

E_i Energia que pode ser adicionada a uma superfície por processos distintos

E_r Energia que pode ser subtraída de uma superfície por processos distintos

f_i elementos orbitais da órbita final resultante da passagem pela atmosfera

f_n lado esquerdo das equações de movimento ($n = 1 \dots 9$)

f_N intensidade da força perturbadora normal

\vec{f}_N força perturbadora normal

f_T	intensidade da força perturbadora tangente
F	parâmetro que relaciona velocidade orbital com velocidade relativa à atmosfera
F_A	intensidade da força de sustentação em altitude
\vec{F}_A	força de sustentação em altitude
F_B	intensidade da força de sustentação lateral
\vec{F}_B	força de sustentação lateral
F_D	intensidade da força aerodinâmica de arrasto
\vec{F}_D	força aerodinâmica de arrasto
F_L	intensidade da força aerodinâmica de sustentação
\vec{F}_L	força aerodinâmica de sustentação
g	intensidade da aceleração gravitacional
\vec{g}	aceleração da gravitacional
g_h	parâmetros iniciais do problema de erros associados
g_0	intensidade da aceleração da gravitacional ao nível do mar
G	constante gravitacional universal
$G_a = 1 + X_2 \cos(s) + X_3 \sin(s)$	
h	altitude
i	inclinação da órbita
\vec{I}	vetor identidade
I_{SP}	empuxo específico de combustível
J	índice de desempenho
$k = \rho_{p0} \exp\{\beta r_{p0} - c_1 \cos(2\omega_0)\}$	
K_{Boltz}	constante de Stefan-Boltzmann
K_g	emissividade de radiação do gás
Kn	número de Knudsen
K_{Rad}	emissividade de radiação da superfície
K_1, K_2, K_3	parâmetros para cálculo dos coeficientes aerodinâmicos

m	massa
M	número de Mach
M	matriz de sensibilidade
$OXYZ$	Sistema Geocêntrico Inercial
p	<i>semi latus rectum</i>
p_n	multiplicadores de Lagrange associados às equações de movimento
\vec{P}	$\vec{P} = \vec{I} - \nabla \vec{S}_3^T \times [\nabla \vec{S}_3 \times \nabla \vec{S}_3^T]^{-1} \times \nabla \vec{S}_3$
PB	passo de busca
Q	transferência de calor total ou calor total imposto
Q'	taxa de transferência de calor
Q'_C	fluxo de calor convectivo
Q'_k	fluxo termocinético
Q'_R	fluxo de calor irradiado do gás quente para a superfície do veículo
Q'_{Rad}	fluxo de calor irradiado (ou re-irradiado) pela superfície do veículo
r_b	raio da base do veículo
r_n	raio de arredondamento da ogiva do veículo
r_p	raio do perigeu
r_σ	distância radial do centro da Terra até a superfície de um esferóide achatado
$r_{\sigma E}$	raio equatorial de um esferóide achatado
R	distância radial ao centro da Terra
\vec{R}	vetor posição
RC	razão de contração
Re	número de Reynolds
\mathfrak{R}	raio de curvatura do nariz ou do limite principal do corpo de encontro com a atmosfera
\mathfrak{R}_e	constante específica do gás
s	<i>range angle</i>
S	área da superfície

$$S_i = \frac{\mu X_1^4}{G_a^3 m_0 (1 - X_4)}$$

S_j equação de vínculo j sobre os elementos keplerianos da órbita final

S_M razão de velocidade molecular

\vec{S} vínculos sobre os elementos keplerianos da órbita final

\vec{S}_3 equações dos vínculos ativos

t tempo

T intensidade do empuxo

\vec{T} força dos propulsores ou vetor de empuxo

T_{FL} temperatura do fluxo livre

T_S temperatura no ponto de estagnação

T_{Sup} temperatura de estagnação da superfície

T_t temperatura de estagnação do gás

T_w temperatura da superfície

T_1, T_2, T_3 componentes da força dos propulsores no sistema do veículo

u argumento da latitude

u_n, \vec{u} controle aplicado ao satélite

U velocidade do fluxo de gás

V velocidade

\vec{V} vetor velocidade do veículo em relação à atmosfera

\vec{V}_a vetor velocidade absoluta

w velocidade angular de rotação da Terra

W velocidade de ejeção dos gases

$$\vec{W}_1 = -[\vec{S}_3 \times \vec{S}_3^T]^{-1} \times \vec{S}_3 \times \nabla J(\vec{u})$$

$$x = ae$$

X_n, \vec{X} variáveis de estado

Y constante que depende das características do veículo ao entrar na atmosfera

Gregos

α ângulo de ataque

α_p ângulo de *pitch*

α_T coeficiente térmico de acomodação

β *inverse scale height*, parâmetro que varia com a altitude do satélite

β_y ângulo de *yaw*

$$\delta = \frac{FSC_D}{m}$$

$$\delta_A = \frac{FSC_L \cos \sigma}{m}$$

$$\delta_B = \frac{FSC_L \sin \sigma}{m}$$

Δ variação

ε excentricidade de um esferóide achatado ou uma elipse de revolução

ϕ_g latitude geocêntrica

γ *flight path angle*

γ_i expoente isotrópico

λ_j multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos

μ constante gravitacional terrestre

θ anomalia verdadeira

θ_c ângulo de cone

ρ densidade da atmosfera ou do gás

ρ_0 densidade da atmosfera ao nível do mar

ρ_{p0} densidade da atmosfera no perigeu

σ ângulo de rolamento

ω argumento do perigeu

Ω longitude do nodo ascendente

ξ pequena variação sobre os g_h

Índices inferiores

0 inicial

c em órbita circular

f final

max máximo

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A capacitação de missões de baixo custo para transferências entre órbitas terrestres, transferências entre órbitas com objetivos mais longínquos no Sistema Solar e o resgate de veículos espaciais para reaproveitamento pode facilitar a exploração espacial. A expressão ‘baixo custo’ se refere ao orçamento da missão e nele estão incluídos estudos relacionados com o consumo de combustível e necessidade de proteção térmica. A capacidade atual é muito limitada pela quantidade excessiva de propelente necessária para lançar e transportar cargas no espaço. Essa situação motivou o desenvolvimento de técnicas para a realização de manobras orbitais utilizando forças naturais, substituindo, pelo menos em parte, as forças propulsivas.

Vários métodos de controle de veículos atravessando a atmosfera vêm sendo estudados para assegurar a manutenção da desaceleração e do aquecimento desses veículos dentro de limites previamente definidos e, também, a sua chegada ao destino desejado (e.g. ponto de pouso). As manobras que utilizam a atmosfera para modificar a velocidade de um veículo espacial são conhecidas como manobras aeroassistidas. Nesse tipo de manobra, a atmosfera tem a função de alterar a velocidade do veículo, provocando, assim, uma transferência orbital que pode ser co-planar ou não. Em alguns casos, como na reentrada atmosférica, o objetivo pode ser atingir um ponto na superfície do planeta, sendo necessário atravessar a atmosfera de forma a não comprometer a integridade física do veículo.

Desde os trabalhos pioneiros do início da década de 1960, tem estado estabelecido que um ganho substancial em consumo de combustível poderia ser alcançado lançando-se mão de forças aerodinâmicas combinadas com forças propulsivas, com o objetivo de provocar uma mudança de plano na órbita de um veículo em torno da Terra. Essa manobra, que em princípio pode ser realizada nas vizinhanças de qualquer planeta com

atmosfera, é usualmente chamada de mudança de plano sinérgica e faz parte das transferências orbitais atmosféricas.

A técnica de manobras aeroassistidas foi demonstrada pela primeira vez no verão setentrional de 1993, durante os últimos meses da missão Magalhães (*Magellan*) ao planeta Vênus. Essas manobras permitiram ao veículo espacial diminuir o raio de sua órbita sem gastar combustível, utilizando-se do arrasto provocado pela atmosfera venusiana.

Exemplos de aplicações dos conceitos de vôo relacionados com manobras aeroassistidas incluem mísseis balísticos, cápsulas espaciais, veículos que retornam das missões lunares (*e.g. Apollo*) e os ônibus espaciais. Outras aplicações mais recentes dizem respeito a veículos que necessitam de transferências para órbitas próximas (*aeroassisted orbital transfer vehicles – AOTV*) e a missões com destino a planetas externos com atmosfera.

Um dos experimentos mais recentes que contemplaram a técnica de manobras aeroassistidas foi a sonda americana *Mars Global Surveyor - MGS*. Ela sofreu os efeitos da atmosfera marciana sobre a sua órbita de setembro de 1998 a fevereiro de 1999. Durante esses cinco meses, a MGS atravessou a atmosfera superior marciana e aproveitou-se da resistência do ar para modificar gradualmente o tamanho de sua órbita. O objetivo era diminuir o período orbital de 11,6 horas para algo em torno de duas horas.

1.1 Motivação

O estudo de manobras aeroassistidas possibilita o desenvolvimento de tecnologias para exploração *in situ* de superfícies e atmosferas planetárias.

A consequência inevitável de uma manobra aeroassistida é provocar uma redução de energia orbital. Em uma transferência orbital, a utilização deste tipo de manobra se torna interessante quando resulta em uma mudança de órbita desejada. Uma ou mais manobras propulsivas podem ser aplicadas para atingir o objetivo final, porém, a vantagem em utilizar a atmosfera está na economia de combustível em comparação com uma manobra totalmente propulsiva equivalente. De fato, segundo Miele (1996), a economia de combustível para uma transferência aeroassistida planar ou quase-planar entre uma órbita geostacionária e uma órbita baixa, por exemplo, pode chegar a 60% do combustível que seria gasto por uma transferência de Hohmann equivalente.

Por outro lado, a trajetória atmosférica de um veículo com sustentação deve estar continuamente sob controle para garantir que ele alcance seu objetivo final e não exceda os limites de aquecimento. Variações na densidade atmosférica, massa do veículo, coeficientes aerodinâmicos, parâmetros físicos e condições iniciais são os principais responsáveis por desvios de trajetórias desejadas para veículos com sustentação entrando na atmosfera.

1.2 Revisão Bibliográfica

Entre os anos de 1964 e 1968, a NASA passou a pensar mais seriamente sobre uma missão tripulada ao planeta Marte como o passo seguinte ao programa *Apollo*, que estava em desenvolvimento e levaria alguns homens à Lua e os traria de volta. Minimizar a massa de um veículo colocado em órbita em torno de Marte era uma das questões principais do projeto (Walberg, 1985). Assim, o aproveitamento do arrasto aerodinâmico como redutor de velocidade para propiciar a captura do veículo pelo planeta vermelho foi amplamente estudado e demonstrou uma economia tão significativa de combustível que se tornou essencial ao projeto.

Entretanto, as missões tripuladas a Marte mostraram outras dificuldades tecnológicas intransponíveis à época, fazendo com que o interesse em missões planetárias

atmosféricas diminuísse, enquanto crescia a ênfase em missões planetárias não tripuladas.

A maioria dos estudos iniciais sobre esse assunto era constituída, essencialmente, por análises de trajetórias descritas por pontos de massa, nas quais o foco estava em definir teoricamente uma mudança de plano e as variações em velocidade necessárias para atingir essa mudança de plano, sem se preocupar com as características do veículo (Walberg, 1985).

Para trajetórias balísticas de longo alcance, uma das fases mais difíceis do voo é a reentrada na atmosfera, onde o aquecimento aerodinâmico associado com as altas velocidades de voo é muito intenso. Allen e Eggers (1958) e Chapman (1959, 1960) iniciaram os estudos sobre reentrada atmosférica fazendo uma análise simplificada do histórico da desaceleração de veículos, tais como mísseis balísticos entrando na atmosfera terrestre, com o objetivo de minimizar o aquecimento aerodinâmico. Etkin (1959) aplicou a teoria da estabilidade ao problema de dinâmica de voo de aeronaves e possibilitou, assim, sua extensão para a área espacial. Loh (1960), por sua vez, apresentou soluções analíticas aproximadas para vários parâmetros relacionados ao problema termodinâmico de reentrada atmosférica.

Wingrove (1963) investigou os vários métodos de controle de veículos manobráveis atravessando uma atmosfera desenvolvidos até então e agrupou-os em três classes gerais (referência, previsão e forma fechada), de acordo com as suas vantagens/desvantagens em relação à habilidade de manipularem-se as condições iniciais.

As equações de movimento completas que governam a reentrada de um veículo considerado como um ponto de massa em uma atmosfera estacionária e modelada exponencialmente, com coeficientes de arrasto e de sustentação escolhidos arbitrariamente em função tanto da velocidade quanto da altitude foram solucionadas por Shen (1963), com o uso de expansões em série.

No início da década de 1960, Ruger (1964) apresentou um método aproximado para a determinação do ângulo crítico de reentrada atmosférica, o qual define a mudança entre uma trajetória do tipo balística¹ ou ricochete² para uma determinada velocidade de reentrada e um coeficiente de sustentação negativo constante.

Diversas técnicas, com diferentes níveis de complexidade, foram desenvolvidas durante os anos 50 e 60 para guiar um veículo até o seu ponto de pouso na superfície de um planeta com atmosfera. Nenhuma delas se mostrou ideal: ou apresentavam regiões limitadas de aplicação, ou necessitavam de muito esforço computacional.

Durante a primeira metade da década de 1970, as pesquisas sobre missões planetárias aeroassistidas continuaram discretamente, com a maior parte delas sendo desenvolvida na Europa. Em 1978, houve um grande ressurgimento de interesse associado à pesquisa de missões não tripuladas. A manobra de captura de um veículo espacial por um planeta utilizando-se da atmosfera e os conceitos associados ao veículo propostos por esses novos estudos eram muito similares aos desenvolvidos previamente nas investigações de missões tripuladas ao planeta Marte. O propósito era provocar a entrada do veículo espacial na atmosfera planetária com uma velocidade significativa, de tal forma que o arrasto produzido gerasse uma diminuição de velocidade e encontrasse condições razoáveis de saída atmosférica, atingindo-se, assim, a órbita final desejada em torno do planeta. Seria necessário, ainda, disparar jatos antes e/ou depois da passagem pela atmosfera para realizar correções orbitais, mas esses seriam menos intensos do que o necessário caso a atmosfera não fosse aproveitada.

¹ Coeficiente de sustentação é nulo.

² “Em uma trajetória de ricochete (*skip* na maioria das referências ou *bounce*, um termo mais adequado), o veículo entra na atmosfera com velocidade de magnitude orbital e utiliza sua capacidade de sustentação para provocar uma mudança de direção. Ele é, então, ejetado da atmosfera e o arco de trajetória seguinte é Kepleriano.” Vinh (1981).

O artigo de Walberg (1985) sobre transferências orbitais aeroassistidas faz um levantamento de 33 outros artigos e notas técnicas sobre mudanças de plano acompanhadas tanto de forças aerodinâmicas, quanto propulsivas. E, no final da década de 80, Mease (1988) apresenta a situação do problema de otimização de transferências orbitais aeroassistidas, dando maior ênfase aos princípios fundamentais que aumentaram o conhecimento a respeito.

A formulação analítica do problema de trajetórias espaciais ótimas, sem considerar a atmosfera, está presente em Marec (1979). Afora livros como o de Vinh (1981), que apresenta soluções analíticas para problemas simplificados, a maioria dos estudos sobre o problema de manobras aeroassistidas considera métodos numéricos de solução, como o de Yeo e Sng (1980), que tenta resolver esse problema comparando os resultados de três algoritmos de quasilinearização, ou o estudo de Beiner (1987), que usa o Teorema de Green para realizar uma reentrada sem mudança de plano. A partir do final da década de 1980, Calise (1988), Hull et al. (1988a,b), Mease et al. (1988), Miele et al. (1988), Cochran et al. (1994), Ma (1996) e Mishne et al. (1997) começam a estudar as diversas abordagens do problema ótimo de mudança de plano, utilizando-se da atmosfera através de métodos de resolução analíticos ou semi-analíticos. Vinh e Ma (1990) e Ma et al. (1997) apresentaram as equações variacionais dos elementos orbitais necessárias para o cálculo de trajetórias ótimas através de uma atmosfera esfericamente simétrica e estática. Entretanto, para múltiplas passagens a solução era ainda numérica.

Até então, o problema de manobras aeroassistidas era resolvido separadamente da necessidade de se aplicar manobras propulsivas. Os trabalhos de Vinh e Hanson (1985) e Hanson (1989) mostraram que, considerando-se o problema de manobras espaciais e aeroassistidas como um único problema de otimização, a variação em velocidade total necessária para realizar uma manobra de mudança de plano pode ser reduzida.

O problema de encontrar soluções analíticas para casos específicos de entrada atmosférica continuou a ser estudado. Uma técnica aperfeiçoada para obter soluções

assintóticas de equações diferenciais não-lineares foi apresentada por Vinh e Kuo (1997) e aplicada com sucesso ao problema de avaliar a desaceleração máxima de veículos espaciais durante a fase de entrada atmosférica. As soluções encontradas através dessa técnica são bastante acuradas quando aplicadas às equações de trajetórias de reentrada. As soluções explícitas para trajetórias balísticas e de ricochete são utilizadas para analisar os efeitos da velocidade inicial e do ângulo de entrada sobre a desaceleração máxima e sobre o aquecimento durante a reentrada.

As manobras aeroassistidas representam uma tecnologia aplicável em várias frentes. A bibliografia a respeito contém demonstrações de ganhos significativos quando da consideração desse tipo de manobra, destacando-se o fato de ser utilizada em missões atuais. Apesar de serem realizadas com sucesso contemplando-se o conhecimento tecnológico dos dias de hoje, as manobras aeroassistidas podem se tornar ainda mais atrativas. Algoritmos de controle de bordo podem remover limitações atuais e o estudo de condições ambientes e de desenhos adequados para veículos em órbitas finais a baixas altitudes e pequenos períodos pode aumentar significativamente o potencial de economia de combustível.

Nesse contexto, o presente trabalho propõe a análise de missões aeroassistidas através do desenvolvimento de um programa computacional para o cálculo de manobras que venham a utilizar a atmosfera terrestre para realizar mudanças orbitais e/ou reentrada e das manobras propulsivas necessárias. Além do desenvolvimento numérico, um estudo analítico contempla a realização de manobras aeroassistidas nas camadas mais altas da atmosfera. Nesta análise, estão incluídos um estudo dos limites térmicos associados com a passagem de um veículo pela atmosfera e outro sobre a análise dos erros.

1.3 Organização

O primeiro capítulo é constituído por esta introdução. No Capítulo 2, são definidos os termos e parâmetros pertinentes ao problema de manobras aeroassistidas. O Capítulo 3 apresenta a formulação matemática envolvida na teoria de controle de manobras

impulsivas e não-impulsivas, enquanto o Capítulo 4 mostra o equacionamento por trás das transferências aeroassistidas e os primeiros resultados do programa de simulação com coeficientes aerodinâmicos constantes e variáveis. O Capítulo 5 inclui os resultados de um estudo comparativo do consumo de combustível para manobras com e sem atmosfera. No Capítulo 6, é apresentada a formulação analítica relacionada com o problema proposto. Os vínculos térmicos e dinâmicos associados são considerados no Capítulo 7 e no Capítulo 8 é feita uma análise dos erros associados com a simulação de uma manobra aeroassistida completa. O Capítulo 9 descreve as conclusões e as perspectivas futuras deste trabalho.

CAPÍTULO 2

DEFINIÇÕES

A maioria dos problemas que envolvem manobras orbitais de satélites artificiais e sondas espaciais procura uma solução ótima em algum aspecto dentre todas as soluções de trajetórias possíveis. Para vôos espaciais no meio interplanetário, onde o veículo está sujeito apenas às forças gravitacionais das massas envolvidas e à força propulsiva que ele mesmo pode gerar, a extensa bibliografia a respeito cobre praticamente todos os aspectos do problema. Entretanto, uma extensão natural e bastante importante do problema é o estudo de trajetórias ótimas em vôos atmosféricos como a revisão bibliográfica do Capítulo 1 demonstrou. Em qualquer missão espacial, a fase atmosférica representa o início e, muitas vezes, o final da trajetória de vôo. Para um veículo em órbita baixa, a fase atmosférica cobre toda a trajetória. E para casos em que uma mudança de órbita é necessária, uma ou mais passagens pela atmosfera podem ter importância muito significativa no que concerne ao consumo de combustível espacial.

O objetivo principal deste trabalho é lidar com esse problema de otimização de consumo de combustível em transferências orbitais, incluindo mudanças de plano, utilizando a atmosfera terrestre como redutor de energia orbital.

Um veículo espacial deslocando-se em torno de um planeta está sujeito à força gravitacional deste ($m\vec{g}$), à força dos seus propulsores (\vec{T}) sempre que estes estiverem em operação e à força aerodinâmica (\vec{A}) gerada pela interação com a atmosfera (Figura 2.1). Outras perturbações de menor monta, como a ação de outros corpos (Sol, Lua, etc.), a pressão de radiação, etc., em geral, podem ser desconsideradas. A força aerodinâmica varia, entre outros fatores, com a localização do veículo no espaço, sendo maior quanto mais densa for a atmosfera do planeta. O problema de otimização consiste em controlar o veículo através das forças propulsivas e aerodinâmicas, para levá-lo de um estado inicial a um final de forma que a sua massa de combustível no estado final

seja maximizada. Para resolver esse problema, algumas definições básicas, feitas nos tópicos seguintes, tornam-se importantes.

Na Figura 2.1, \vec{R} corresponde à posição e \vec{V} é a velocidade do veículo. O sistema de coordenadas é o Geocêntrico Inercial e os índices inferiores estão relacionados com os momentos inicial e final.

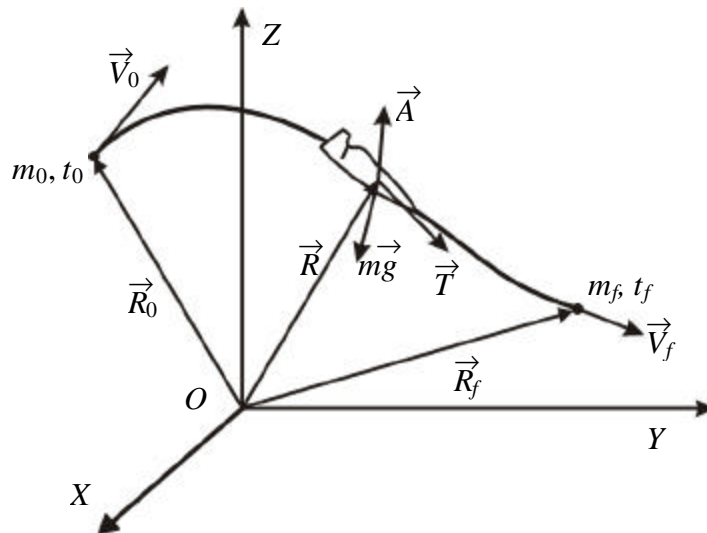


Fig. 2.1 – Representação de uma trajetória de transferência para ilustrar as forças que atuam sobre o veículo espacial.

FONTE: Vinh (1981, p.2).

2.1 Manobra Aeroassistida

Como o próprio nome sugere, Manobras Aeroassistidas são manobras orbitais realizadas dentro de uma atmosfera planetária. Essas manobras podem ser acompanhadas ou não de propulsão e podem ter objetivos corretivos (mudança de órbita ou de orientação), de variação da energia orbital ou de atravessar a atmosfera e atingir um ponto de pouso na superfície do planeta.

A força aerodinâmica é uma força dissipativa que tem o efeito de retirar energia do sistema. Assim, de uma forma geral, qualquer manobra que incluir uma fase de desaceleração pode substituir total ou parcialmente os propulsores pela passagem através da atmosfera, economizando combustível. Um veículo que entra na atmosfera de um planeta com velocidade orbital e se aproveita das suas características aerodinâmicas (sustentação e/ou arrasto) para efetuar uma mudança orbital está realizando uma Manobra Aeroassistida.

São exemplos de manobras aeroassistidas manobras de *aerocapture* e *aerobraking* (os termos em Inglês serão mantidos ou por não existir paralelo na literatura em Português ou por serem amplamente conhecidos, facilitando, assim, futuras pesquisas). Em uma manobra de *aerocapture* a diminuição da velocidade do veículo é alcançada através de uma profunda passagem pela atmosfera, suficiente para transferi-lo de sua trajetória de aproximação para uma órbita desejada em torno do planeta (i.e., o veículo é capturado pelo campo gravitacional do planeta). Segundo Walberg (1985), em uma manobra de *aerobraking*, o veículo é transferido de sua trajetória hiperbólica de aproximação para uma órbita bastante elíptica em torno do planeta através do acionamento de propulsores. Essa órbita é, então, circularizada através de uma ou mais passagens pela atmosfera, cada uma seguida de pequenos disparos de jatos corretivos no apogeu. Essas correções têm como objetivo manter a altitude do perigeu baixa o suficiente para produzir o efeito aerodinâmico desejado e necessariamente alta para evitar aquecimento demasiado.

As manobras aeroassistidas podem ser classificadas ainda como *aeroglide* ou *aerocruise*. Nas primeiras, a fase aerodinâmica acontece sem a presença de jatos, enquanto nas últimas, durante a fase aerodinâmica, a velocidade do veículo é mantida constante, utilizando-se jatos para cancelar os efeitos do arrasto.

Em função das características do vôo, tais como velocidade relativa à atmosfera, *flight path angle* e ângulo de ataque (Figura 2.2), a trajetória de um veículo dentro da atmosfera pode assumir perfis diferentes. O *flight path angle* γ é o ângulo formado entre

a velocidade do veículo relativa à Terra e a sua projeção sobre um plano transversal ao vetor posição do veículo conhecido como horizontal local (Vinh, 1981). O ângulo de ataque α é aquele entre o eixo longitudinal do veículo e a velocidade relativa à atmosfera.

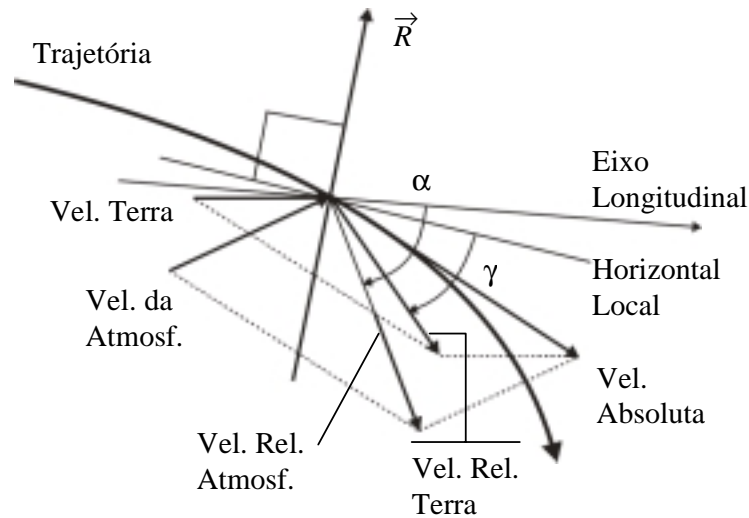


Fig. 2.2 – *Flight path angle* γ e ângulo de ataque α .

FONTE: Guedes (1997, p.19)

Neste trabalho a atenção está concentrada em manobras aeroassistidas realizadas ao redor da Terra. Entretanto, a sua aplicação a outros planetas é uma questão de pequenas modificações em parâmetros e modelos atmosféricos, que podem ser traduzidas por uma simples troca de sub-rotinas de programação.

2.2 Modelo Atmosférico

De uma forma geral, o problema de determinar a trajetória ótima de um veículo passando por uma atmosfera não pode ser solucionado sem o uso de computação numérica baseada em um modelo específico dessa atmosfera e da aerodinâmica desse veículo.

Para analisar os efeitos das forças aerodinâmicas que agem sobre um veículo espacial, torna-se necessário modelar a atmosfera planetária na qual o voo se realiza. As forças aerodinâmicas são mais efetivas perto da superfície do planeta, assim, apenas uma fina camada inferior da atmosfera precisa ser considerada. A maioria dos aspectos complexos das atmosferas planetárias não tem conseqüências nos cálculos aerodinâmicos. Como, por exemplo, o fato de a atmosfera terrestre ser composta por uma mistura de vários gases e poder ser tratada como um gás uniforme de composição invariável em determinados trechos. De fato, a característica mais importante da atmosfera para este problema é a sua densidade. A composição particular da atmosfera pode ter alguma influência importante apenas sobre o aquecimento aerodinâmico do veículo devido aos detalhes da dissociação de gases envolvidos no processo. Assim, para o caso de modelagem da atmosfera, torna-se conveniente representar apenas a densidade desta.

Para a atmosfera terrestre, as propriedades físicas de interesse são temperatura, pressão, densidade e viscosidade. Os valores dessas propriedades variam não apenas com a localização geográfica e altitude do satélite, mas também com o horário do dia e a época do ano (para citar apenas alguns exemplos). Em Mecânica de Voo, adota-se um conjunto específico de dados relacionados com condições médias. Esse conjunto é conhecido como Atmosfera Padrão Internacional (*International Standard Atmosphere*).

Segundo Regan e Anandakrishnan (1993), o propósito da Atmosfera Padrão foi definido como: uma distribuição vertical hipotética das temperatura, pressão e densidade atmosféricas, a qual, através de acordo internacional e por razões históricas, é aproximadamente representativa das condições em latitudes médias no decorrer de um ano. Aplicações típicas desse modelo são: base para calibrações de altímetros, cálculos de desempenho de aeronaves, projetos de aeronaves e foguetes, tabelas balísticas, etc. Supõe-se que o ar obedece a lei dos gases perfeitos e a equação hidrostática, que juntas relacionam temperatura, pressão e densidade com o geopotencial (altitude). Apenas uma atmosfera padrão pode ser especificada em uma dada época. A atmosfera deve também

ser considerada em movimento rotacional sincronizado com a Terra e como uma média sobre um ciclo diurno, sobre variações semi-anuais, sobre a atividade geomagnética e sobre a atividade das manchas solares.

Uma breve descrição do modelo *U.S. Standard Atmosphere 1976* se faz necessária, uma vez que esse modelo atmosférico foi amplamente utilizado neste trabalho.

2.2.1 *U.S. Standard Atmosphere 1976*

O trabalho do *U.S. Committee on Extension to the Standard Atmosphere* (COESA), estabelecido em 1953, levou às versões 1958, 1962, 1966 e 1976 do modelo *U.S. Standard Atmosphere*. Esses modelos foram publicados em um livro juntamente pelo *National Oceanic and Atmospheric Administration* (NOAA), pela *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) e pela Força Aérea americana. Aproximadamente 30 instituições americanas representando governo, indústria, institutos de pesquisa e universidades participaram do COESA. Baseadas em dados de satélites e foguetes e na teoria dos gases perfeitos, as densidades e temperaturas atmosféricas foram representadas a partir do nível do mar até uma altitude de 1.000 km. Os modelos *U.S. Standard Atmospheres 1958, 1962 e 1976* consistem de perfis simples representando uma atmosfera estável idealizada para uma atividade solar moderada. A lista de parâmetros inclui temperatura, pressão, densidade, aceleração causada pela gravidade, velocidade média das partículas, frequência média de colisão, caminho livre médio, peso molecular médio, velocidade do som, viscosidade, condutividade térmica e altitude geopotencial. A resolução da altitude varia de 0,05 km em baixas altitudes para 5 km nas altas. Todas as tabelas são dadas em metros e pés. Os *U.S. Standard Atmosphere Supplements 1966* incluem tabelas de temperatura, pressão, densidade, velocidade do som, viscosidade e condutividade térmica para nove latitudes positivas, para verão e inverno.

2.3 Reentrada

É usualmente associada ao conceito de Reentrada (ou Entrada, em determinados casos) Atmosférica a idéia de estudo da dinâmica de um corpo (*e.g.* bólido) vindo de fora da atmosfera e percorrendo uma trajetória através dela até o impacto com a superfície terrestre. Essa idéia, entretanto, embora não esteja completamente equivocada, está incompleta. Considera-se que um objeto está reentrando na atmosfera terrestre quando ele está cruzando, no sentido descendente, a camada atmosférica situada entre os limites de altitude de 95 e 11 km (para os Russos o limite superior é de 86 km), não sendo necessário que haja um encontro com a superfície. Existe, obviamente, um problema semântico ao denominar reentrada a dinâmica de objetos que podem nem mesmo ter saído da atmosfera. Não obstante, essa nomenclatura é mundialmente aceita e amplamente utilizada.

Abaixo de uma altitude de cerca de 60 km, as forças aerodinâmicas se tornam comparáveis às gravitacionais e, conseqüentemente, são incluídas no modelamento da trajetória. Segundo a hipótese de Eggers para a maioria dos objetos em reentrada, uma representação aceitável das características essenciais de uma trajetória em uma altitude tão baixa pode ser obtida ignorando-se completamente as forças gravitacionais (Regan e Anandakrishnan, 1993).

Os primeiros objetos a entrar na atmosfera terrestre foram os meteoróides, objetos de origem extraterrestre que, dependendo das suas dimensões e características iniciais, atingem a superfície do nosso planeta ou não. Como definição, um meteoróide é qualquer objeto natural que pode entrar na atmosfera, um meteoro é observado em trânsito através da atmosfera e um meteorito atinge a superfície ou, mais precisamente, é recuperado e identificado. O primeiro humano a relacionar um meteorito com um objeto extraterrestre estava iniciando uma conexão não espiritual entre o céu dos astrônomos e o mundo terrestre.

Muitos anos foram necessários para que a tecnologia se desenvolvesse suficientemente e fossem projetados, construídos, lançados e recuperados os primeiros artefatos humanos. Em agosto de 1960, o satélite americano *Discovery 13* completou 17 órbitas em torno da Terra e reentrou em sua atmosfera, passando à História como o primeiro objeto feito pelo homem a ser recuperado do espaço (Regan e Anandakrishnan, 1993).

Muitas missões espaciais científicas, militares ou comerciais utilizam satélites artificiais em órbitas relativamente próximas à superfície terrestre. Aplicações típicas são navegação, vigilância, procura e resgate e sensoriamento remoto do tempo, de recursos e de formação de gelo. Esses satélites em órbitas baixas (*Low Earth Orbit* – LEO) perdem energia vagarosamente através do contato com a atmosfera e, eventualmente, caem na superfície. Em outras situações, como em missões que precisam recuperar material, o retorno à superfície é desejado. Em ambos os casos a previsão acurada do local de queda é de suma importância. Em outros, ainda, o objetivo pode ser apenas o de realizar manobras de transferência orbital dentro da atmosfera em altitudes tão baixas que se caracterizam como reentrada atmosférica.

2.4 O Veículo

Neste trabalho, assim como no de Guedes (1997), é suposto inicialmente que o veículo a ser manobrado tem formato cônico e carenagem arredondada, como ilustrado na Figura 2.3. Entretanto, a forma e o tamanho do veículo são parâmetros de entrada do problema, podendo ser modificados quando houver necessidade. Admite-se ainda que o veículo busque uma condição de atitude de vôo estável naturalmente e de forma tão rápida que não provoque complicações nos cálculos nem dispêndio de combustível. Esta busca pela estabilidade consiste em aproximar o eixo longitudinal da direção da velocidade relativa à atmosfera e pode ser realizada através de um controle interno. Esta hipótese depende das características aerodinâmicas do veículo, proporcionadas pela sua geometria e pela sua distribuição de massa. Considera-se que o veículo possui um motor para a realização de manobras propulsivas e que a direção dos jatos pode ser controlada através dos ângulos de *pitch* e *yaw*.

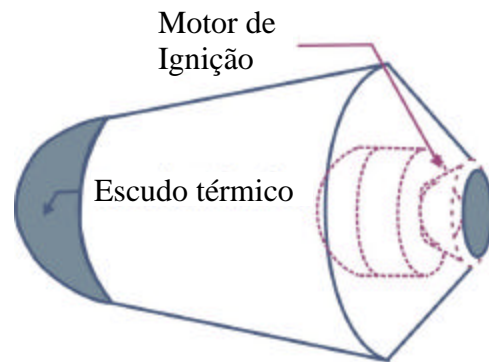


Fig. 2.3 – Forma geral do veículo.

FONTE: Guedes (1997, p.27)

Como simplificação, não é considerada, aqui, a variação do centro de pressão em relação ao centro de massa. Devido à utilização de combustível sólido, considera-se a ausência de *sloshing*, que são oscilações da superfície livre de um fluido em um tanque parcialmente cheio.

CAPÍTULO 3

TRANSFERÊNCIAS ORBITAIS COM EMPUXO SEM AÇÃO

AERODINÂMICA

Pode-se dizer, de forma simplificada, que a transferência orbital de um veículo espacial, um problema clássico da Astronáutica, consiste em alterar o seu estado inicial, definido pelas suas posição, velocidade e massa $(\vec{R}_0, \vec{V}_0, m_0)$ em um certo instante inicial t_0 , para um estado final, definido pelas respectivas variáveis de estado $(\vec{R}_f, \vec{V}_f, m_f)$ em um instante $t_f > t_0$. Entretanto, cada problema é um caso particular, uma vez que deve atender aos diversos vínculos impostos pela dinâmica do sistema e pelos objetivos desejados na missão que está sendo desenvolvida. Dessa forma, apesar de ser um dos problemas mais estudados da literatura astronáutica, ainda há muito a ser explorado.

Para a realização de manobras orbitais, os veículos espaciais devem ser submetidos a forças e torques naturais do ambiente ou provocados, por exemplo, por propulsores. Duas categorias de propulsão podem ser destacadas:

- i) Propulsão infinita: nesta categoria o motor do veículo é suposto capaz de aplicar uma propulsão de grande magnitude que ocorre durante um intervalo de tempo de curta duração (com relação ao período orbital, por exemplo). É a Hipótese Impulsiva. Seu efeito é medido através de uma variação instantânea da velocidade do veículo espacial;

- ii) Propulsão finita ou contínua: nesta, o motor do veículo é considerado capaz de aplicar uma propulsão de menor magnitude por um intervalo de tempo finito. Tem-se agora a Hipótese Não-Impulsiva. Neste caso, o efeito é medido através de integrações numéricas das equações do movimento, utilizando-se ou não linearizações válidas por um curto período de tempo.

Estas são as duas hipóteses normalmente utilizadas para a realização de simulações de transferências orbitais, sendo a primeira a mais estudada pela sua simplicidade e a segunda a mais próxima da realidade. Os empuxos finitos podem ainda se mostrar mais econômicos em termos do combustível necessário que os impulsivos, devido à sua adequação ao problema de transferências orbitais conseqüente das diferenças existentes entre os empuxos específicos. Empuxo específico é a razão entre a velocidade máxima de ejeção dos gases e a aceleração da gravidade. A Equação de Tsiolkovsky, que relaciona consumo de massa de combustível $(m_f - m_0)$ com variação de velocidade ΔV para sistemas a velocidade de ejeção constante, demonstra esse fato, pois, para empuxos finitos, o empuxo específico I_{SP} é maior (Chobotov, 1991).

$$m_f = m_0 \exp\left(-\frac{\Delta V}{I_{SP} g_0}\right) \quad (3.1)$$

Neste trabalho as duas hipóteses serão estudadas para a realização de transferências para a ou a partir da atmosfera terrestre e posterior comparação de resultados. Os valores do I_{SP} para a hipótese infinita e para a contínua são iguais a, respectivamente, 345 e 625 s. Neste capítulo apresenta-se a formulação matemática envolvida em cada um dos casos. Essas transferências se referem à fase não atmosférica da manobra, assim, as únicas forças envolvidas são devidas ao geopotencial e à ação de propulsores.

3.1 Empuxo Infinito (Hipótese Impulsiva)

Um dos estudos mais antigos sobre transferências orbitais é o clássico trabalho de Hohmann, no qual o autor propõe uma órbita de transferência elíptica bitangente com ângulo de transferência igual a 180° para realizar uma transferência ótima entre duas órbitas circulares coplanares em um campo de força inversamente proporcional ao quadrado da distância. Esta transferência, que recebeu seu nome, foi durante muito

tempo considerada como a solução final do problema impulsivo. Posteriormente, outros autores vieram a estudar casos com mais de dois impulsos, transferências não coplanares e relações entre as órbitas inicial e final que garantissem alguma otimização do problema.

As manobras orbitais são caracterizadas pela variação da velocidade orbital. Se um incremento em velocidade $\Delta \vec{V}$ for adicionado à velocidade inicial \vec{V}_0 do satélite em órbita, então o satélite passa a ter uma nova velocidade \vec{V}_f e, conseqüentemente, uma nova órbita. Se esse $\Delta \vec{V}$ for adicionado instantaneamente através de um empuxo infinito, a manobra é chamada de impulsiva.

Segundo Chobotov (1991), uma manobra que induz exclusivamente uma mudança de inclinação no plano provoca uma rotação do plano orbital no espaço inercial de um ângulo Δi , enquanto mantém o tamanho e a forma da órbita, através da aplicação de um ΔV dado por:

$$\Delta V = 2 V_c \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta i}{2}\right) \quad (3.2)$$

em que V_c é a velocidade que o satélite teria se estivesse em uma órbita circular no momento da aplicação do ΔV . Esta expressão representa o consumo ótimo de combustível para boa parte dos casos estudados de manobra de mudança de plano em órbita circular, a menos daqueles nos quais uma manobra com três ou mais impulsos e com a mudança de plano realizada a uma grande distância da Terra se mostra mais conveniente.

3.2 Empuxo Finito (Hipótese Não-Impulsiva)

A consideração de que o propulsor aplica um empuxo finito ao veículo espacial é a que mais se aproxima da realidade. Uma escolha adequada do ponto de aplicação do empuxo deve ser feita para não haver perda de energia, com conseqüências dinâmicas não desejadas no desenvolvimento e conclusão da manobra.

3.2.1 Formulação Matemática

A seguir, apresenta-se o algoritmo para resolver o problema de otimização de trajetórias de transferência com empuxo finito, baseado em método desenvolvido em Biggs (1978 e 1979) e posteriormente utilizado em Prado (1989) e em Jesus et al. (1999), válido para órbitas keplerianas.

O objetivo é minimizar o índice de desempenho $J = m(t_0) - m(t_f)$, que traduz o consumo de combustível, com respeito a α_p (ângulo de *pitch*) e β_y (ângulo de *yaw*).

As equações de movimento serão reescritas com o conjunto de nove variáveis X_n , $n = 1, \dots, 9$ (não-singulares e redundantes) adotado por Biggs (1978) e mostrado a seguir. Esta mudança justifica-se em função das transformações e das parametrizações utilizadas na solução do problema de controle associado.

$$X_1 = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} \quad (3.3)$$

$$X_2 = e \cos(\omega - \phi) \quad (3.4)$$

$$X_3 = e \sin(\omega - \phi) \quad (3.5)$$

$$X_4 = \frac{m(t) - m_0}{m_0} \quad (3.6)$$

$$X_5 = t \quad (3.7)$$

$$X_6 = \cos\left(\frac{i}{2}\right)\cos\left(\frac{\Omega + \phi}{2}\right) \quad (3.8)$$

$$X_7 = \sin\left(\frac{i}{2}\right)\cos\left(\frac{\Omega - \phi}{2}\right) \quad (3.9)$$

$$X_8 = \sin\left(\frac{i}{2}\right)\sin\left(\frac{\Omega - \phi}{2}\right) \quad (3.10)$$

$$X_9 = \cos\left(\frac{i}{2}\right)\sin\left(\frac{\Omega + \phi}{2}\right) \quad (3.11)$$

Nas quais, a é o semi-eixo maior, e a excentricidade, ω o argumento do perigeu, $\phi = \theta + \omega - s$, s o *range angle* do veículo, μ é a constante gravitacional e m_0 a massa inicial do veículo. O *range angle* é o ângulo entre o raio-vetor do veículo espacial e uma linha arbitrária de referência (na verdade, ele corresponde à anomalia verdadeira do veículo deslocada de uma constante).

Tomam-se como variáveis de controle os ângulos α_p (*pitch* ou arfagem) e β_y (*yaw* ou guinada), que podem ser visualizados na Figura 3.1.

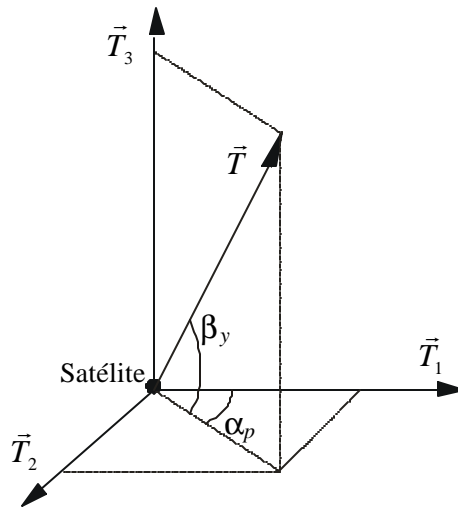


Fig. 3.1 – Vetor de empuxo \vec{T} que atua sobre o satélite.

FONTE: Jesus et al. (1999, p.6)

Esses ângulos descrevem a direção da aplicação do vetor empuxo. Ou seja, o controle do veículo está relacionado com os momentos de acionamento e desligamento do motor e com a escolha da direção de aplicação do empuxo.

3.2.2 O Algoritmo

Nesse método são utilizadas as mesmas condições de otimização que na Teoria de Controle Ótimo puro, porém, estas são tratadas de forma numérica e sem as dificuldades das integrações analíticas requeridas pelos métodos indiretos (falta de conhecimento completo das condições de contorno, em um mesmo instante, para o conjunto formado pelas equações de movimento e adjuntas).

1) Parte-se de uma estimativa inicial para o conjunto $(\alpha_{p0}, \beta_{y0}, \alpha'_p, \beta'_y, s_0, s_f)$ para o primeiro arco com propulsão e (s_0, s_f) para os demais. A estimativa pode ser obtida a partir do estudo de uma manobra impulsiva equivalente. Onde α_{p0} e β_{y0} são os valores de α_p e β_y no início da aplicação do empuxo, α'_p e β'_y são as taxas constantes de variação de α_p e β_y em relação a s (*range angle* escolhido como a variável independente), s_0 é o *range angle* em que se inicia a aplicação do empuxo e s_f é o *range angle* em que se termina a aplicação do empuxo. Utiliza-se a seguinte transformação de coordenadas para evitar problemas do tipo $s_f < s_0$:

$$u_1 = s_0 \quad (3.12)$$

$$u_2 = (s_f - s_0) \cos(\beta_{y0}) \cos(\alpha_{p0}) \quad (3.13)$$

$$u_3 = (s_f - s_0) \cos(\beta_{y0}) \sin(\alpha_{p0}) \quad (3.14)$$

$$u_4 = (s_f - s_0) \sin(\beta_{y0}) \quad (3.15)$$

$$u_5 = \alpha'_p \quad (3.16)$$

$$u_6 = \beta'_y \quad (3.17)$$

- 2) Utiliza-se a transformação *adjoint-control* (Biggs, 1979) para obter os multiplicadores de Lagrange iniciais, necessários às integrações numéricas, a partir do conjunto $(\alpha_{p0}, \beta_{y0}, \alpha'_p, \beta'_y, s_0, s_f)$ do arco inicial. Essa transformação tem a função de encontrar variáveis físicas cujos valores ótimos podem ser razoavelmente bem estimados e a partir dos quais os multiplicadores adjuntos iniciais podem ser deduzidos.

No método híbrido apresentado em Biggs (1979) e em Prado (1989), a determinação dos valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange, para resolução das equações dadas pelo Princípio de Máximo de Pontryagin, é transformada em um problema de busca direta. A solução numérica do problema em cada iteração é reduzida a uma solução de Programação Não-Linear, que é resolvida com o Método de Projeção do Gradiente. A idéia básica desse método é efetuar um passo de iteração na direção resultante da projeção do gradiente da função sobre os vínculos. A solução encontrada é sempre um mínimo local. Para aumentar o conhecimento sobre o mínimo da função pode-se variar a estimativa inicial e obter e comparar os mínimos locais correspondentes. Uma descrição desse método encontra-se no Apêndice A.

- 3) Integram-se numericamente as equações de movimento e adjuntas (dadas abaixo) durante todos os arcos com propulsão estipulados, obtendo-se sempre os valores dos ângulos de controle (*pitch* e *yaw*) em cada instante a partir das equações do Princípio de Máximo de Pontryagin (dadas abaixo). O método admite que se escolha *a priori* o número de arcos com propulsão. Esta escolha garante a otimização do problema uma vez que soluções com mais arcos do que necessário tendem a agrupar os arcos supérfluos, convergindo para o número adequado de arcos.

Equações de movimento:

$$\frac{dX_1}{ds} = f_1 = S_i X_1 T_1 \quad (3.18)$$

$$\frac{dX_2}{ds} = f_2 = S_i \{[(G_a + 1)\cos(s) + X_2]T_1 + \theta T_2 \text{sen}(s)\} \quad (3.19)$$

$$\frac{dX_3}{ds} = f_3 = S_i \{[(G_a + 1)\text{sen}(s) + X_3]T_1 - \theta T_2 \cos(s)\} \quad (3.20)$$

$$\frac{dX_4}{ds} = f_4 = S_i \theta T \frac{1 - X_4}{X_1 W} \quad (3.21)$$

$$\frac{dX_5}{ds} = f_5 = S_i \theta m_0 \frac{1 - X_4}{X_1} \quad (3.22)$$

$$\frac{dX_6}{ds} = f_6 = -S_i T_3 \frac{[X_7 \cos(s) + X_8 \text{sen}(s)]}{2} \quad (3.23)$$

$$\frac{dX_7}{ds} = f_7 = S_i T_3 \frac{[X_6 \cos(s) - X_9 \text{sen}(s)]}{2} \quad (3.24)$$

$$\frac{dX_8}{ds} = f_8 = S_i T_3 \frac{[X_9 \cos(s) + X_6 \text{sen}(s)]}{2} \quad (3.25)$$

$$\frac{dX_9}{ds} = f_9 = S_i T_3 \frac{[X_7 \text{sen}(s) - X_8 \cos(s)]}{2} \quad (3.26)$$

Nas quais:

$$G_a = 1 + X_2 \cos(s) + X_3 \text{sen}(s) \quad (3.27)$$

$$S_i = \frac{\mu X_1^4}{G_a^3 m_0 (1 - X_4)} \quad (3.28)$$

$$T_1 = T \cos(\beta_y) \cos(\alpha_p) \quad (3.29)$$

$$T_2 = T \cos(\beta_y) \text{sen}(\alpha_p) \quad (3.30)$$

$$T_3 = T \text{sen}(\beta_y) \quad (3.31)$$

$$T = |\vec{T}| \quad (3.32)$$

W é a velocidade de ejeção dos gases.

Equações adjuntas obtidas a partir das condições necessárias de primeira ordem (Equações de Euler-Lagrange), para valores de f_n conhecidos (pois magnitude e direção das forças de empuxo já foram determinados):

$$\frac{dp_n}{ds} = -\sum_{j=1}^9 p_j \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \quad (3.33)$$

Ou seja,

$$\frac{dp_1}{ds} = -\frac{1}{X_1} \left[4 \sum_{j=1}^9 p_j f_j + p_1 f_1 - p_4 f_4 - p_5 f_5 \right] \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_2}{ds} = \frac{\cos(s)}{G_a} \left[3 \sum_{j=1}^9 p_j f_j - p_4 f_4 - p_5 f_5 \right] - S_i p_2 T_1 - S_i \cos^2(s) [p_2 T_1 - p_3 T_2] + \\ - S_i \cos(s) \sin(s) [p_2 T_2 + p_3 T_1] \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_3}{ds} = \frac{\sin(s)}{G_a} \left[3 \sum_{j=1}^9 p_j f_j - p_4 f_4 - p_5 f_5 \right] - S_i p_3 T_1 + \\ - S_i \cos(s) \sin(s) [p_2 T_1 - p_3 T_2] - S_i \sin^2(s) [p_2 T_2 + p_3 T_3] \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\frac{dp_4}{ds} = -\frac{1}{m_0(1-X_4)} \left[\sum_{j=1}^9 p_j f_j - p_4 f_4 - p_5 f_5 \right] \quad (3.37)$$

$$\frac{dp_5}{ds} = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{dp_6}{ds} = -S_i T_3 \frac{[p_7 \cos(s) + p_8 \sin(s)]}{2} \quad (3.39)$$

$$\frac{dp_7}{ds} = S_i T_3 \frac{[p_6 \cos(s) - p_9 \sin(s)]}{2} \quad (3.40)$$

$$\frac{dp_8}{ds} = S_i T_3 \frac{[p_6 \sin(s) + p_9 \cos(s)]}{2} \quad (3.41)$$

$$\frac{dp_9}{ds} = -S_i T_3 \frac{[p_8 \cos(s) - p_7 \sin(s)]}{2} \quad (3.42)$$

As condições de transversalidade são dadas por:

$$p_n(s_f) = \frac{\partial J}{\partial \bar{X}_f} + \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{X}_f} \quad (3.43)$$

que, com a expressão para $J(\cdot)$, torna-se:

$$p_n(s_f) = -\sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial S_j}{\partial X_n} \quad n = 1, \dots, 9; n \neq 4 \quad (3.44)$$

$$p_4(s_f) = -1 - \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial X_4} \quad (3.45)$$

Nestas expressões, λ_j são os multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos e \bar{S} são os vínculos sobre os elementos keplerianos da órbita final.

O Princípio de Máximo de Pontryagin equivale a buscar valores das variáveis de controle α_p e β_y que maximizem a hamiltoniana do sistema e é dado por:

$$\max_{\alpha_p, \beta_y} \sum_{n=1}^9 p_n f_n \quad (3.46)$$

Utilizando-se os valores de f_n e igualando-se a zero as derivadas em relação aos ângulos de *pitch* e *yaw*, a Equação (3.46) se transforma nas seguintes condições requeridas para α_p e β_y :

$$\text{sen}(\alpha_p) = \frac{q_2}{S'} \quad (3.47)$$

$$\text{sen}(\beta_y) = \frac{q_3}{S''} \quad (3.48)$$

$$\text{cos}(\alpha_p) = \frac{q_1}{S'} \quad (3.49)$$

$$\text{cos}(\beta_y) = \frac{S'}{S''} \quad (3.50)$$

Em que:

$$S' = \pm\sqrt{q_1^2 + q_2^2} \quad (3.51)$$

$$S'' = \pm\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (3.52)$$

$$q_1 = p_1 X_1 + p_2 [X_2 + (G_a + 1) \cos(s)] + p_3 [X_3 + (G_a + 1) \text{sen}(s)] \quad (3.53)$$

$$q_2 = p_2 G_a \text{sen}(s) - p_3 G_a \cos(s) \quad (3.54)$$

$$q_3 = -\frac{1}{2} \{ p_6 [X_7 \text{sen}(s) + X_8 \text{sen}(s)] + p_7 [X_6 \cos(s) - X_9 \text{sen}(s)] + p_8 [X_6 \text{sen}(s) + X_9 \cos(s)] + p_9 [X_7 \text{sen}(s) - X_8 \cos(s)] \} \quad (3.55)$$

Para s_0 e/ou s_f livre, tem-se:

$$\sum_{n=1}^9 p_n f_n = 0 \quad (3.56)$$

- 4) Com o valor de $[X_1, X_2, \dots, X_9]^T$ no instante final da integração obteve-se a órbita final, sendo assim utiliza-se o conjunto de variáveis de estado X_n (que evita singularidades em $e = 0$ e $i = 0$) definido pelas Equações (3.3) à (3.11) e obtêm-se os valores dos elementos keplerianos da órbita atingida. O problema apresenta-se com a seguinte formulação matemática:

Determinar o mínimo da função objetivo (a função a ser minimizada) que representa o combustível consumido pelo veículo espacial que é dado por $X_4(s_f)$, sujeito a:

$$\frac{dX_n}{ds} = f_n(\bar{X}, s, \alpha_p, \beta_y), \text{ com } n = 1, \dots, 9 \quad (3.57)$$

$$S_j(\bar{X}(s_f)) = 0, \text{ com } j = 1, \dots, n \quad (3.58)$$

Outros vínculos podem ser incorporados, como, por exemplo, limitações aos ângulos de *pitch* e *yaw*.

- 5) Calcula-se numericamente - através de perturbações em cada um dos elementos de controle (vetor \vec{u}) seguidas de novas integrações numéricas - o gradiente dos vínculos e da função objetivo (combustível gasto) em relação a \vec{u} .
- 6) Testa-se o módulo do vetor formado pelas equações de vínculos ativos e, caso esse vetor seja menor do que uma tolerância especificada, parte-se para o passo 8, pois admite-se que os vínculos foram satisfeitos.
- 7) Prossegue-se em busca de satisfação dos vínculos através do método da Projeção do Gradiente (Lumberger, 1973), com o passo de busca dado por:

$$u_{n+1} = u_n - \nabla \bar{S}_3^T \times \left[\nabla \bar{S}_3 \times \nabla \bar{S}_3^T \right]^{-1} \times \nabla \bar{S}_3 \quad (3.59)$$

Em que \vec{S}_3 é o vetor formado pelos vínculos ativos. Daqui se volta para o passo 2, pois um novo valor para as condições iniciais foi encontrado e torna-se necessário realizar as integrações novamente.

8) Uma vez atingidos os vínculos, parte-se para a busca do mínimo da função objetivo. A direção de busca é dada por (Lumberger, 1973):

$$\vec{d} = -\vec{P} \times \nabla J(\vec{u}) \quad (3.60)$$

na qual:

$$\vec{P} = \vec{I} - \nabla \vec{S}_3^T \times [\nabla \vec{S}_3 \times \nabla \vec{S}_3^T]^{-1} \times \nabla \vec{S}_3 \quad (3.61)$$

e \vec{I} é o vetor identidade.

9) Verifica-se o módulo do vetor \vec{d} e, se ele for menor que o valor especificado para a tolerância para a direção de busca nesta etapa, vai-se para o passo 11, pois foi encontrado um ponto estacionário.

10) O módulo do passo de busca é dado por:

$$PB = RC \frac{J(\vec{u})}{[\nabla J(\vec{u}) \times \vec{d}]} \quad (3.62)$$

A cada passo da função objetivo, PB é o passo de busca e RC é a razão de contração. Esta última define o tamanho do passo empregado e é solicitada pelos dados de entrada

do programa. Sua utilização tem como objetivo obter um melhor comportamento numérico através de uma busca em várias fases.

Os valores de RC e da tolerância para a direção de busca diminuem à medida que o vetor \vec{u} se aproxima do ponto de mínimo. Além disso, o fator $\nabla J(\vec{u}) \times \vec{d}$ se aproxima de zero, o que pode prejudicar a convergência por gerar um valor de PB muito grande. Nesse momento será necessário interromper o processo antes que isso ocorra (no programa computacional desenvolvido existe um teste de módulo). O passo completo torna-se:

$$u_{n+1} = u_n + PB \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \quad (3.63)$$

Volta-se para o passo 2 e realizam-se as integrações mais uma vez.

- 11) Verifica-se a possibilidade de o ponto \vec{u} ser um ponto de *Kuhn-Tucker* (Luemberger, 1973). Caso seja, volta-se novamente para o passo 7.
- 12) Verifica-se o número da etapa presente. Caso não seja a última, divide-se a razão de contração e a tolerância para a direção de busca por uma constante (nesta implementação esta constante foi escolhida igual a 10) e vai-se para o passo 7, onde se inicia a satisfação dos vínculos mais uma vez. Caso esta etapa seja a última, interrompe-se o método de busca e dá-se o problema por resolvido.

CAPÍTULO 4

SIMULAÇÕES COM COEFICIENTES AERODINÂMICOS CONSTANTES

O problema básico apresentado neste capítulo é o de manobras de transferência orbital. No caso especial aqui considerado, as órbitas inicial e final em torno da Terra são completamente especificadas e deseja-se realizar uma mudança de plano. O problema se resume em: “Como transferir um satélite entre estas duas órbitas de tal forma que o consumo de combustível seja mínimo?” Não há restrição de tempo e o satélite pode sair e chegar em qualquer ponto das órbitas dadas. As manobras são realizadas utilizando-se jatos contínuos de magnitude constante e passíveis de serem aplicados em qualquer direção sem consumo extra, jatos impulsivos (ver definições no Capítulo 3) e/ou passagens pela atmosfera terrestre para mudança de plano. As diferentes possibilidades de manobras são comparadas quanto ao consumo de combustível. Uma vez que o equacionamento das manobras que realizam transferência orbital acionando-se jatos foi apresentado no capítulo anterior, inicia-se este capítulo com as equações de movimento para transferências que utilizam também a atmosfera para realização de manobras.

4.1 Equações de Movimento na Atmosfera

O movimento de um veículo aeroespacial com massa variável, em um campo gravitacional, sujeito a forças aerodinâmicas e à força devida ao empuxo dos jatos é governado pelas equações abaixo (Marec, 1979).

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}_a \quad (4.1)$$

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{1}{m}(\vec{T} + \vec{A}) + \vec{g}(\vec{R}, t) \quad (4.2)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{c}{g_0} T \quad (4.3)$$

em que \vec{R} é o vetor posição, \vec{V}_a é o vetor velocidade absoluta, m a massa, \vec{T} o vetor de empuxo com magnitude T , \vec{A} a força aerodinâmica, \vec{g} a aceleração da gravidade (que é uma função de \vec{R} e do tempo) e c o consumo específico de combustível. Na Equação (4.3), g_0 é uma constante que determina o valor da aceleração gravitacional em um nível de referência (normalmente o nível do mar).

A força aerodinâmica pode ser decomposta em força de arrasto \vec{F}_D (o símbolo vem do Inglês: *drag*), oposta ao vetor velocidade e força de sustentação \vec{F}_L (*lift*), perpendicular à outra (Figura 4.1). A magnitude dessas forças é dada por relações bem conhecidas (Vinh, 1981).

$$F_D = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D \quad (4.4)$$

$$F_L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad (4.5)$$

em que ρ é a densidade da atmosfera, fornecida pelo modelo atmosférico utilizado em função, entre outros fatores, da altitude, e os coeficientes C_D e C_L são, respectivamente, os coeficientes de arrasto e de sustentação relativos à área da superfície de referência S .

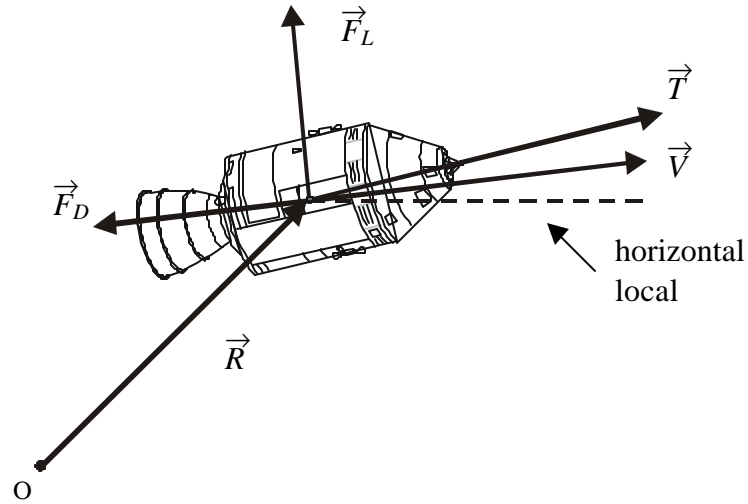


Fig. 4.1 – Variáveis de estado e forças aerodinâmicas e propulsiva.

Os coeficientes de arrasto e de sustentação são funções de diversos fatores, entre eles a geometria do veículo e o ângulo de ataque. Shen (1963) apresenta expansões em séries para o cálculo desses coeficientes em função da densidade atmosférica. Entretanto, segundo Regan e Anandakrishnan (1993) e Guedes (1997), considera-se que C_D e C_L possam ser calculados através de relações com o ângulo de ataque α .

$$C_D = K_1 + K_2 \text{sen}^2(\alpha) \tag{4.6}$$

$$C_L = K_3 \text{sen}(2\alpha) \tag{4.7}$$

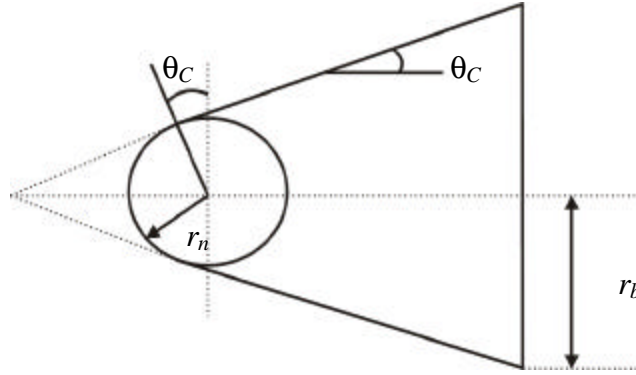


Fig. 4.2 – Características geométricas do veículo.

FONTE: Regan e Anandakrishnan (1993, p.355)

Para um veículo de formato cônico com nariz arredondado (Figura 4.2), os valores de K_1 , K_2 e K_3 são calculados pelas Equações (4.8) a (4.10) (Guedes, 1997), limitadas pela condição $|\alpha|_{\max} = \theta_C$, pois tais equações não levam em conta o efeito de sombras de superfície que alteram o perfil de escoamento e, conseqüentemente, os procedimentos de cálculo dos coeficientes aerodinâmicos.

$$K_1 = 2 \operatorname{sen}^2(\theta_C) (1 - B_r^2 \cos^2(\theta_C)) + B_r^2 (1 - \operatorname{sen}^4(\theta_C)) \quad (4.8)$$

$$K_2 = (1 - 3 \operatorname{sen}^2(\theta_C)) (1 - B_r^2 \cos^2(\theta_C)) \quad (4.9)$$

$$K_3 = \cos^2(\theta_C) \quad (4.10)$$

nas quais

$$B_r = \frac{r_n}{r_b} \quad (4.11)$$

4.2 Simulações com Coeficientes Aerodinâmicos Constantes

As primeiras simulações realizadas para o problema inicialmente proposto levaram em consideração que:

- Dentro dos limites da atmosfera (abaixo de 200 km de altitude) não são disparados jatos, ou seja, as únicas forças envolvidas são a de origem aerodinâmica e a devida à aceleração gravitacional;
- Coeficientes aerodinâmicos são mantidos constantes dentro da atmosfera e seus valores são definidos pela configuração definida ao entrar nesta;
- O campo gravitacional terrestre não é esférico e tem distribuição de massa assimétrica;
- O sistema de coordenadas utilizado é o Sistema Geocêntrico Inercial, onde os eixos tri-ortogonais têm origem no centro de massa da Terra, com eixo X apontando na direção do ponto vernal, eixo Z apontando na direção do pólo médio de rotação terrestre e eixo Y sobre o Equador completando o triedro dextrógiro;
- Os empuxos contínuos têm uma magnitude fixa. O valor dessa constante é um dos parâmetros de entrada do programa;
- A velocidade de ejeção dos gases dos jatos é constante;
- A direção da força aplicada pelos jatos pode ser modificada durante a transferência. Essa direção pode ser especificada pelos ângulos *pitch* (ângulo entre a direção do jato e a perpendicular ao vetor posição) e *yaw* (ângulo com o plano orbital). O movimento destes ângulos é livre;
- Os jatos contínuos operam em modo liga-desliga. O que significa que não são admitidos estágios intermediários. Esta simplificação garante que os jatos estejam ou em zero ou em máximo nível de atividade.

Para estas simulações foram adotadas as mesmas características geométricas do veículo para o cálculo dos coeficientes de arrasto e de sustentação que em Guedes (1997):

$$\theta_c = 11,4^\circ$$

$$r_n = 0,252 \text{ m}$$

$$r_b = 1,004 \text{ m}$$

Se por um lado a magnitude da força aerodinâmica depende, entre outras coisas, do ângulo de ataque α , por outro, sua direção é uma função do ângulo de rolamento σ , ou seja, do ângulo entre o plano de sustentação e o plano formado pelo vetor velocidade relativa à atmosfera e o vetor posição do veículo (Figura 4.3). Aqui, a simetria do veículo em torno do eixo longitudinal não interfere no fato de que a força aerodinâmica depende do ângulo de rolamento, pois o controle de um veículo simétrico é realizado através de componentes internos, tais como rodas de reação.

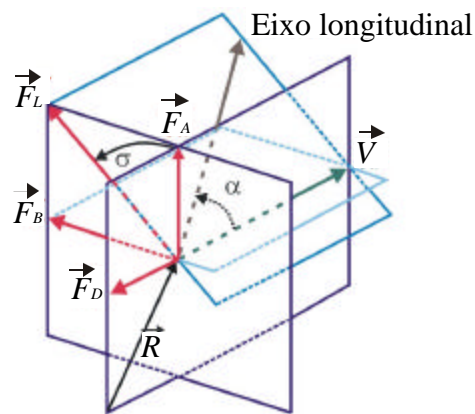


Fig. 4.3 – Componentes da força aerodinâmica, ângulo de ataque α e ângulo de rolamento σ .

FONTE: Guedes (1997, p.45)

Além de decompor a força aerodinâmica em força de arrasto \vec{F}_D e de sustentação \vec{F}_L , é conveniente decompor esta última em “sustentação em altitude” \vec{F}_A e “sustentação lateral” \vec{F}_B (Figura 4.3). As direções e amplitudes destas forças são calculadas através das seguintes relações (Guedes, 1997):

$$\vec{F}_D = -F_D \hat{V} \quad (4.12)$$

$$\vec{F}_A = F_A \hat{S} \quad (4.13)$$

$$\vec{F}_B = F_B \hat{H} \quad (4.14)$$

$$F_D = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D \quad (4.15)$$

$$F_A = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_A \quad (4.16)$$

$$F_B = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_B \quad (4.17)$$

$$\hat{V} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \quad (4.18)$$

$$\hat{H} = \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}, \quad \vec{H} = \vec{R} \times \vec{V} \quad (4.19)$$

$$\hat{S} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}, \quad \vec{S} = \vec{V} \times \vec{H} \quad (4.20)$$

Os coeficientes de sustentação em altitude e lateral são calculados através das seguintes funções do ângulo de rolamento:

$$C_A = C_L \cos(\sigma) \quad (4.21)$$

$$C_B = C_L \sin(\sigma) \quad (4.22)$$

4.2.1 Considerações

Várias simulações foram realizadas com o objetivo de obter a variação de inclinação devida à passagem do veículo pela atmosfera. As manobras com mudança de plano foram escolhidas para este estudo por serem muito dispendiosas em comparação com outras manobras orbitais, podendo gerar, assim, bons exemplos de aplicação de manobras aeroassistidas.

As comparações foram feitas entre manobras impulsivas realizadas sem a influência da atmosfera (manobras do tipo I) e manobras em parte propulsivas e em parte aeroassistidas (manobras dos tipos II e III). Nos tipos II e III, as manobras propulsivas foram utilizadas para, inicialmente, injetar o veículo em uma órbita com passagem pela atmosfera terrestre e, após a realização da manobra atmosférica necessária, retirá-lo de sua órbita atmosférica para levá-lo à órbita final desejada. Estas manobras também foram simuladas com jatos contínuos e impulsivos, seguindo o procedimento descrito no Capítulo 3.

A vantagem esperada para este procedimento se apóia no fato de que, dependendo das características aerodinâmicas do veículo (ângulos de ataque e rolamento), a atmosfera se encarrega de realizar a mudança de plano desejada, economizando-se, assim, uma parte do combustível necessário para a realização da mudança orbital completa. Esta expectativa é válida, pois as características aerodinâmicas podem ser escolhidas e encontradas antes da entrada do veículo na atmosfera.

Entretanto, as várias simulações mostraram que este problema é fortemente dependente de condições iniciais tais como massa do veículo e elementos orbitais das órbitas inicial e final, podendo se mostrar mais ou menos vantajoso realizar uma descida até a atmosfera terrestre em determinados casos e completamente desvantajoso em outros. É preciso levar em consideração, ainda, o fato de que um veículo que vai enfrentar as condições de aquecimento decorrentes de uma ou mais passagens pela atmosfera deve estar adequadamente preparado com revestimentos ou outros sistemas de proteção, para não inviabilizar a missão. Essa adequação pode significar mais massa devido ao acréscimo de material isolante e, conseqüentemente, uma cota menor de massa disponível a bordo para o armazenamento de combustível. Além disso, uma certa restrição envolvendo o pico de aquecimento cinético decorrente da passagem pela atmosfera deve ser levada em consideração. Com isso, resultados que se mostraram semelhantes no que concerne ao consumo de combustível para a realização da manobra foram considerados inadequados do ponto de vista de projeto.

4.2.2 Exemplos

Entre as diversas simulações realizadas, foi selecionado um caso que demonstra quão vantajosa pode ser a realização de uma manobra aeroassistida para mudança de plano orbital. Neste caso, três transferências são comparadas: o veículo encontra-se em uma órbita inicial circular e equatorial a aproximadamente 600, 1600 e 2600 km de altitude e deseja realizar uma mudança de plano de 15° de inclinação positiva, com um erro aceitável de $0,5^\circ$.

Para essas simulações foram considerados os três casos abaixo relacionados:

- I. Manobra impulsiva aplicada em um dos nodos, utilizando-se a Equação (3.1), sem passagem pela atmosfera;
- II. Manobra impulsiva para colocar o veículo em uma órbita excêntrica com perigeu dentro da atmosfera. Posteriormente é aplicada outra manobra impulsiva para retirá-lo desta órbita “atmosférica”, além de uma terceira para circularizar a órbita final;
- III. O mesmo procedimento anterior utilizando-se, entretanto, empuxos contínuos nas três etapas e seguindo o procedimento descrito no Item 3.2.

Essa passagem pela atmosfera pode provocar diferentes mudanças orbitais em função dos ângulos de ataque e de rolamento escolhidos para a entrada do veículo. Com o objetivo de maximizar a mudança em inclinação alcançada nesta passagem, estes ângulos foram selecionados de tal forma que a órbita do veículo sofresse uma variação máxima em inclinação. Os valores dos elementos keplerianos das órbitas iniciais, intermediárias e finais se encontram nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3.

TABELA 4.1 – ELEMENTOS ORBITAIS DO VEÍCULO – CASO I

Elementos Orbitais	Órbita Inicial	1ª Órbita de Transferência	2ª Órbita de Transferência	Órbita Final
Semi-eixo maior (km)	7000,000	6786,000	5470,375	7000,000
Excentricidade	0,0	0,032	0,203	0,0
Inclinação (graus)	0,0	0,0	16,0	16,0
Argumento do Perigeu (graus)	0,0	0,0	-13,0	0,0
Nodo (graus)	0,0	0,0	185,0	0,0

TABELA 4.2 – ELEMENTOS ORBITAIS DO VEÍCULO – CASO II

Elementos Orbitais	Órbita Inicial	1ª Órbita de Transferência	2ª Órbita de Transferência	Órbita Final
Semi-eixo maior (km)	8000,000	7287,500	5875,220	8000,000
Excentricidade	0,0	0,098	0,121	0,0
Inclinação (graus)	0,0	0,0	15,0	15,0
Argumento do Perigeu (graus)	0,0	0,0	-5,5	0,0
Nodo (graus)	0,0	0,0	188,0	0,0

TABELA 4.3 – ELEMENTOS ORBITAIS DO VEÍCULO – CASO III

Elementos Orbitais	Órbita Inicial	1ª Órbita de Transferência	2ª Órbita de Transferência	Órbita Final
Semi-eixo maior (km)	9000,000	7787,500	6138,506	9000,000
Excentricidade	0,0	0,156	0,074	0,0
Inclinação (graus)	0,0	0,0	16,0	16,0
Argumento do Perigeu (graus)	0,0	0,0	-4,0	0,0
Nodo (graus)	0,0	0,0	140,0	0,0

Nessas tabelas, as órbitas inicial e final são circulares e com semi-eixos maiores iguais a 7000, 8000 e 9000 km. A primeira órbita de transferência é encontrada após a aplicação de um propulsor (nesta etapa não faz diferença se esse propulsor é impulsivo ou contínuo, pois o interesse é apenas estabelecer quais são as órbitas consideradas), para provocar uma passagem pela atmosfera. Esta primeira órbita de transferência é calculada de tal forma que o seu apogeu coincida com a órbita circular inicial e que o perigeu encontre-se dentro da atmosfera, que nestes casos foi considerada como tendo 200 km de altitude.

A passagem pela atmosfera se inicia antes do ponto exato do perigeu da primeira órbita de transferência. Ao entrar na atmosfera, o satélite começa imediatamente a sofrer perturbações aerodinâmicas que modificam o seu conjunto de elementos orbitais. Especialmente nos casos com sustentação, o veículo espacial pode ser rapidamente expulso da atmosfera, sem nunca atingir o perigeu da órbita de transferência.

Em seguida a essa primeira rápida passagem pela atmosfera, o satélite é encontrado em uma nova órbita excêntrica que em algum momento também atravessará a atmosfera. Esta é a segunda órbita de transferência. Nota-se que, nos casos apresentados, devido

aos efeitos da sustentação e do arrasto atmosférico, a inclinação sofre uma variação de aproximadamente 15° e o semi-eixo maior pode diminuir até 1500 km nessa única passagem. Esses valores se justificam, pois os parâmetros aerodinâmicos que influenciam a manobra atmosférica foram modificados para se encontrar a variação em inclinação desejada de 15° . Outros pares de ângulos de ataque e de rolamento proporcionam outras variações dos elementos orbitais. Caso a inclinação final não tivesse sido atingida, mais passagens pela atmosfera seriam efetuadas. Aqui fica evidente a importância dos parâmetros de controle α e σ , pois nem sempre a máxima variação de inclinação é o resultado desejado.

Atingido o apogeu da segunda órbita de transferência, o sistema propulsivo do veículo é acionado novamente para injetá-lo em uma órbita de transferência cujo apogeu é igual ao semi-eixo maior da órbita final. Deve-se chamar a atenção para o fato de que, ao sair da atmosfera na segunda órbita de transferência, o veículo será manobrado em seu apogeu. Assim, esta órbita pode ser tão excêntrica que seu perigeu se encontre abaixo da superfície terrestre, pois o veículo não irá completar uma revolução.

Com o procedimento descrito, a manobra de mudança de inclinação é substituída por três manobras propulsivas: uma para transferir o satélite para uma órbita que cruze a atmosfera e duas outras para trazê-lo de volta. A Figura 4.4 ilustra as manobras realizadas, mostrando os momentos de aplicação de jatos e as passagens através da atmosfera terrestre.

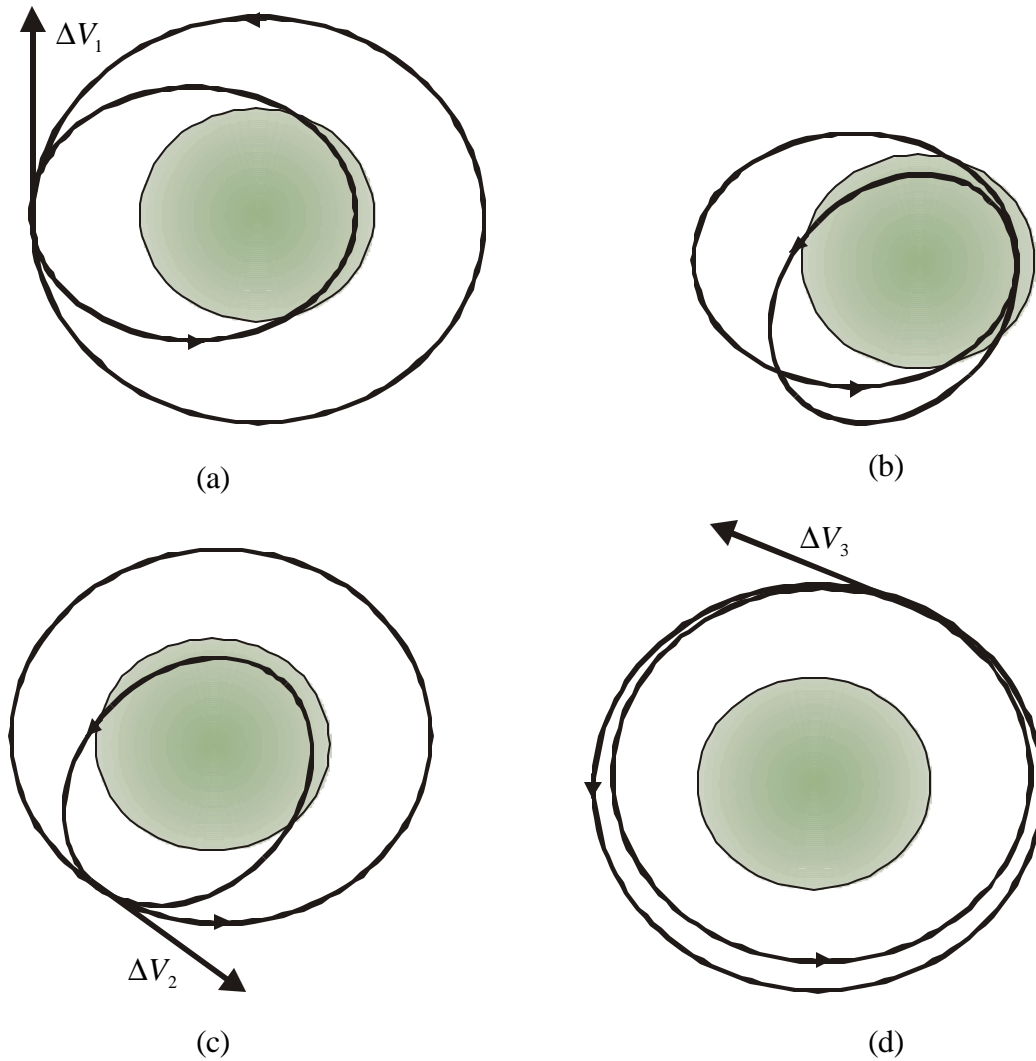


Fig. 4.4 – Manobras aeroassistidas. A região sombreada representa os limites da atmosfera sensível. a) O satélite encontra-se em sua órbita inicial circular quando uma manobra propulsiva é realizada aplicando um ΔV_1 para colocá-lo na primeira órbita de transferência. b) Ao passar pela atmosfera, o satélite sofre perturbações aerodinâmicas que o transferem para a segunda órbita de transferência (uma mudança de plano de aproximadamente 15° ocorre nesta passagem). c) Uma segunda manobra propulsiva é realizada para retirar o satélite da órbita atmosférica em que ele se encontra. d) A terceira e última manobra propulsiva circulariza a órbita final.

Para o caso III, em que as manobras são realizadas com empuxos contínuos e ajuda da atmosfera, outros resultados podem ser acrescentados. A solução do problema para a parte propulsiva desta transferência é dada em forma de um histórico de controle dos jatos (ângulos de arfagem e guinada, também conhecidos como *pitch* e *yaw*) e do cálculo do combustível consumido. Neste caso, o método de cálculo utilizado (descrito do Capítulo 3) permite que se selecione qualquer valor para o número de arcos onde os jatos estarão sendo acionados em cada manobra. A duração do arco propulsado faz parte do problema de otimização e é encontrada, também, utilizando o método do Capítulo 3. O ângulo entre o vetor posição do satélite e uma linha de referência no plano orbital (*range angle*) é utilizado como variável independente substituindo o tempo.

A Figura 4.5 apresenta o controle ótimo para a manobra de transferência entre a órbita inicial e a primeira órbita de transferência, para o caso onde o semi-eixo maior é igual a 8000 km. O ângulo de guinada é sempre igual a zero, pois a manobra é plana. Esta manobra foi realizada utilizando-se apenas um arco de propulsão, pois as órbitas envolvidas têm uma intersecção no apogeu da primeira órbita de transferência. A Figura 4.6 apresenta o controle ótimo para a manobra de trazer o veículo da atmosfera. Nessa manobra, a propulsão é aplicada em dois arcos: o primeiro é no apogeu da segunda órbita de transferência e o segundo aproximadamente 180° depois do primeiro com o objetivo de circularizar a órbita final.

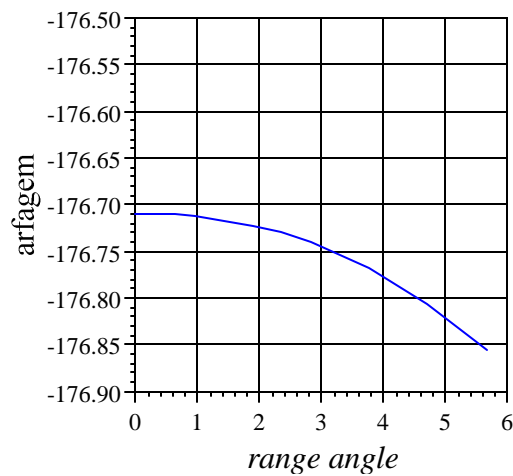


Fig. 4.5 – Controle ótimo da manobra contínua que utiliza a atmosfera – IDA (graus).

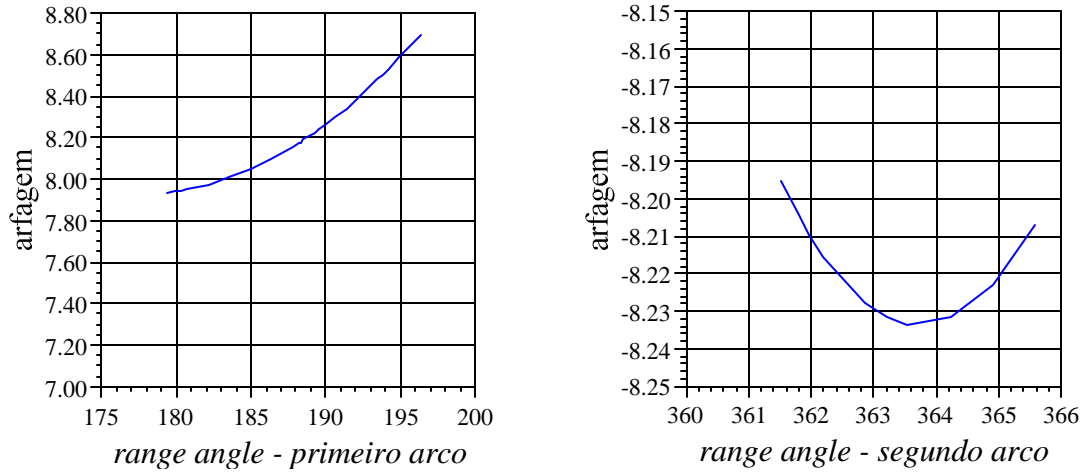


Fig. 4.6 – Controle ótimo da manobra contínua que utiliza a atmosfera – VOLTA (graus).

Para o caso específico dessa manobra, é possível notar, através das escalas das Figuras 4.5 e 4.6, que os ângulos de arfagem são praticamente constantes durante a aplicação dos jatos. Além disso, tanto na manobra de ida quanto no segundo arco da manobra de volta os jatos são acionados por um período tão curto que estas manobras podem ser aproximadas por uma impulsiva. O mesmo não ocorre com o primeiro arco da manobra de volta, no qual a queima se dá por, aproximadamente, 20° .

Os valores encontrados para os consumos de combustível neste exemplo são apresentados nas Tabelas 4.4, 4.5 e 4.6. O consumo de combustível para a manobra com atmosfera se refere às manobras com jatos necessárias para colocar o veículo em uma órbita excêntrica com perigeu na atmosfera (IDA) e, posteriormente, trazê-lo para a órbita final (VOLTA). As manobras propulsivas com jatos contínuos são realizadas com jatos de magnitude igual a 1.000 N. Um procedimento de otimização (Prado, 1989) é aplicado para encontrar a direção dos jatos para cada instante de tempo. Nessas tabelas, o consumo total de combustível se refere à soma dos consumos das manobras de ida e volta para os casos com atmosfera.

TABELA 4.4 – CONSUMO DE COMBUSTÍVEL (kg) – $a = 7.000$ km

Tipo de Empuxo	Manobra sem atmosfera		Manobra com atmosfera		
	Impulsiva	Contínua		Impulsiva	
		IDA	VOLTA		IDA
Consumo		6,3	52,4	11,6	87,1
Consumo Total	146,7	58,7		98,7	

TABELA 4.5 – CONSUMO DE COMBUSTÍVEL (kg) – $a = 8.000$ km

Tipo de Empuxo	Manobra sem atmosfera		Manobra com atmosfera		
	Impulsiva	Contínua		Impulsiva	
		IDA	VOLTA		IDA
Consumo		18,3	55,6	33,0	89,7
Consumo Total	139,6	73,9		122,7	

TABELA 4.6 – CONSUMO DE COMBUSTÍVEL (kg) – $a = 9.000$ km

Tipo de Empuxo	Manobra sem atmosfera		Manobra com atmosfera		
	Impulsiva	Contínua		Impulsiva	
		IDA	VOLTA		IDA
Consumo		27,6	61,8	49,1	96,4
Consumo Total	133,5	89,4		145,5	

Pode-se notar que, nas manobras sem utilização da atmosfera, o combustível necessário para realizar a manobra de mudança de plano orbital obedece a um decréscimo de valor conforme as órbitas se afastam do centro de massa do sistema. Este é um resultado

conhecido e plenamente justificável. Quanto mais afastado do planeta, menor a influência deste sobre o satélite e menos dispendiosa se torna a manobra.

Entretanto, nas manobras que utilizam a atmosfera para realizar a mudança de plano orbital, o comportamento se torna oposto. Isso ocorre porque agora as mudanças de plano são realizadas pela atmosfera e as manobras que consomem combustível são apenas as de mudança de semi-eixo maior. Essas manobras não são tão dispendiosas quanto as de mudança de plano e é exatamente essa diferença de consumo que resulta na economia de combustível encontrada. O acréscimo de valor total de consumo de combustível observado com o aumento da distância ao centro de massa do sistema se justifica pelo aumento da variação do semi-eixo maior necessário para ir-se mais longe.

Uma comparação entre os dois tipos de manobras impulsivas (com e sem atmosfera) nos mostra o quão vantajoso/desvantajoso pode ser, nestes casos, a utilização da manobra aeroassistida. Para uma órbita baixa de semi-eixo maior igual a 7.000 km, uma viagem até a atmosfera se mostra uma alternativa mais econômica do que uma simples manobra de mudança de inclinação na sua órbita original, com uma economia de mais do que 10% da massa inicial de combustível (quase 50 kg de combustível). No entanto, nos casos em que os semi-eixos maiores iniciais têm valores iguais ou superiores a 9.000 km, essa economia não mais se apresenta.

A alternativa mais econômica, nos casos apresentados, sem dúvida, é a utilização de jatos contínuos para trazer o veículo até a atmosfera. Uma comparação com a aplicação de um impulso fora da atmosfera mostra que este método alcança uma economia de aproximadamente 18% de combustível para um semi-eixo maior igual a 7.000 km, 13% para o semi-eixo maior igual a 8.000 km e quase 9% para o último caso apresentado de semi-eixo igual a 9.000 km. Nota-se que a economia de combustível encontrada entre esses dois métodos apresenta uma tendência a diminuir com o aumento do semi-eixo maior da órbita nominal.

É interessante ressaltar ainda que a alternativa de jatos contínuos não é apenas a mais econômica, mas também a que mais se aproxima da realidade.

Estes resultados podem ser melhor visualizados na Tabela 4.7, onde a eficiência de cada manobra é medida pela razão entre a massa total de combustível utilizado e a massa do satélite ao fim da manobra. Para medir a eficiência de cada manobra é preciso levar em consideração que, ao economizar combustível para realizar a primeira transferência orbital (a manobra de ida até a atmosfera), o satélite estará, inevitavelmente, mais pesado por ocasião da manobra de volta da atmosfera. Com mais massa para trazer de volta, a manobra de volta necessitará de mais combustível. Assim, o consumo de combustível, embora traduza o custo da manobra, não evidencia as dificuldades enfrentadas em cada fase. Na Tabela 4.7, quanto menor o valor percentual apresentado, mais eficiente a manobra simulada, pois o interesse é minimizar o consumo de combustível por unidade de massa.

TABELA 4.7 – EFICIÊNCIA PERCENTUAL DE CADA MANOBRA
(MASSA DE COMBUSTÍVEL / MASSA FINAL DO SATÉLITE)

Tipo de Empuxo	Manobra sem atmosfera		Manobra com atmosfera	
	Impulsiva	Contínua	Contínua	Impulsiva
$a = 7.000 \text{ km}$	79,1 %	21,1 %	21,1 %	40,9 %
$a = 8.000 \text{ km}$	72,5 %	27,3 %	27,3 %	53,9 %
$a = 9.000 \text{ km}$	67,2 %	34,5 %	34,5 %	68,1 %

Nesta tabela, fica claro que a manobra contínua com uso da atmosfera é sempre mais eficiente que as outras nos casos apresentados e que esta eficiência tende a diminuir com a distância ao centro de massa de forma mais lenta do que na manobra impulsiva que também utiliza a atmosfera.

Tentou-se ainda simular um quarto modo de realizar essas manobras de mudança de plano orbital: aplicar jatos contínuos sem uma passagem pela atmosfera. Infelizmente, essa alternativa se mostrou inviável, uma vez que a manobra de mudança de inclinação com consumo mínimo de combustível deve ser aplicada em um ponto específico da órbita (o nodo) e, pela sua própria natureza, o jato contínuo é aplicado durante um arco de tempo finito. Essa particularidade tornou o consumo de combustível tão grande que seria maior que a massa total inicial do veículo, o que seria um absurdo.

A Figura 4.7 mostra, a título de ilustração, um exemplo de outro tipo de resultado que foi encontrado através das simulações numéricas: a variação de altitude sofrida pelo satélite ao passar através da atmosfera terrestre com um conjunto particular de parâmetros orbitais e aerodinâmicos. Essa figura mostra os valores da altitude integrados no tempo dentro da atmosfera para uma órbita com semi-eixo maior igual a 9.000 km.

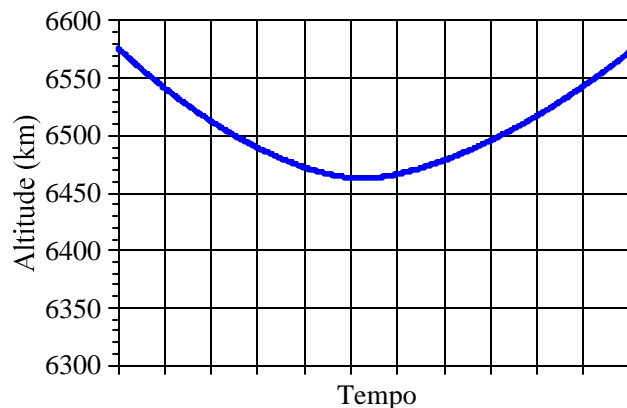


Fig. 4.7 – Variação em altitude sofrida por um veículo espacial ao atravessar a atmosfera terrestre.

Uma forma mais abrangente de analisar os resultados das simulações realizadas se concretiza com os gráficos que podem ser gerados pelos dados resultantes do programa FORTRAN que simula a passagem pela atmosfera. Para diferentes pares de ângulo de ataque e ângulo de rolamento, diferentes perturbações atmosféricas atuam sobre o

veículo provocando mudanças de órbita distintas. Assim, para cada par encontrou-se uma variação em cada elemento orbital que pode ser visualizada em um gráfico do tipo “curva de nível”. As Figuras 4.8, 4.9 e 4.10 mostram os gráficos gerados no exemplo onde o semi-eixo maior é igual a 8.000 km para as variações em semi-eixo maior, excentricidade e inclinação sofridas pelo veículo ao passar pela atmosfera terrestre. Nessas figuras os ângulos de ataque (α) e de rolamento (σ) estão em graus, a variação em semi-eixo maior está em quilômetros e a variação em inclinação está demonstrada também em graus.

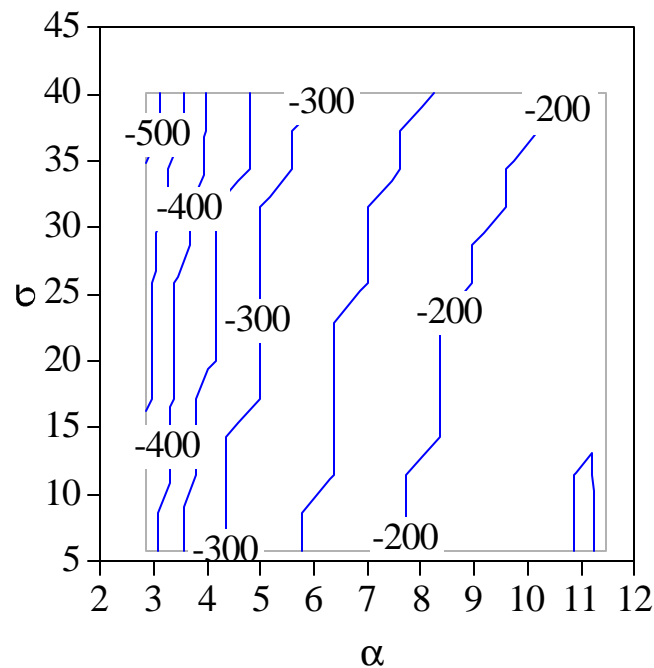


Fig. 4.8 – Variação em semi-eixo maior (km). Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

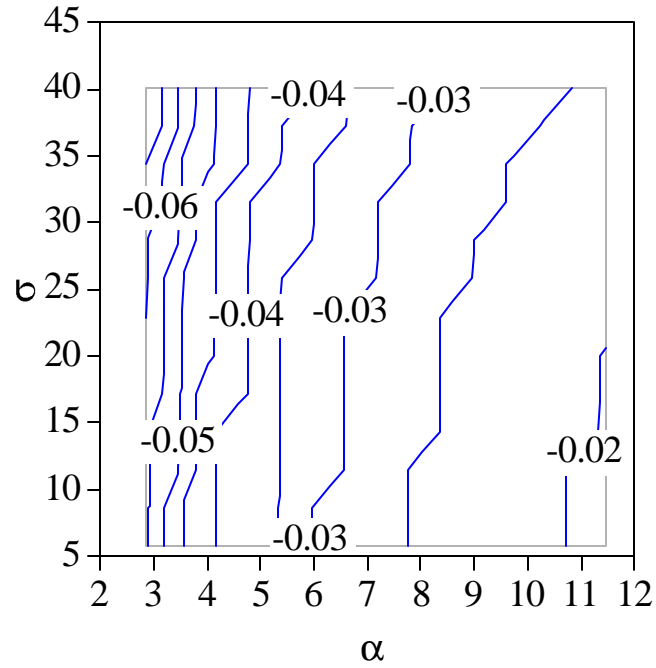


Fig. 4.9 – Variação em excentricidade. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

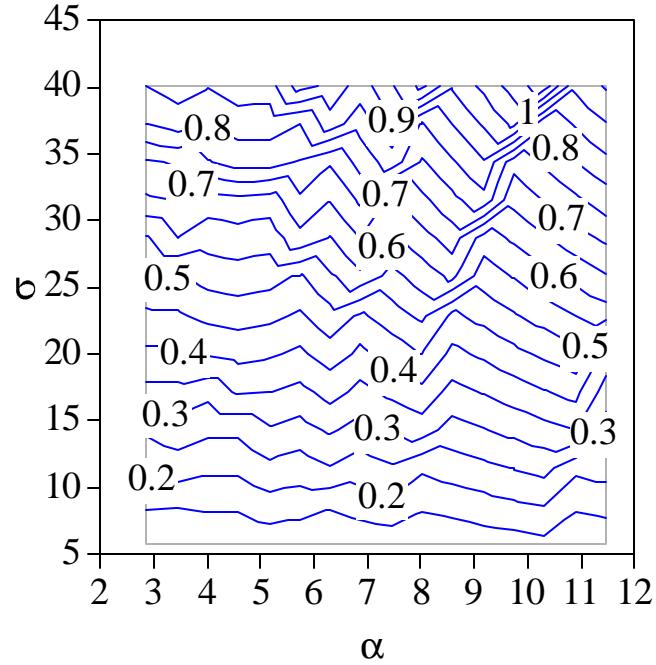


Fig 4.10 – Variação em inclinação (graus). Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

Esse tipo de figura apresenta a magnitude da variação sobre os elementos orbitais que o veículo pode sofrer ao atravessar a atmosfera terrestre com determinado conjunto de características aerodinâmicas, podendo, assim, gerar previsões adequadas para cada caso e sustentar a escolha apropriada dessas características.

Nelas, pode-se notar a maior dependência do semi-eixo maior e da excentricidade com o ângulo de ataque, enquanto a inclinação varia de forma mais contundente com o ângulo de rolamento. É preciso lembrar que estes ângulos estão diretamente relacionados com as forças aerodinâmicas que atuam sobre o satélite. O arrasto atmosférico varia unicamente com o ângulo de ataque (Equação 4.6), ao mesmo tempo em que a sustentação varia preponderantemente com o ângulo de rolamento (Equações 4.21 e 4.22), mas também com o de ataque (Equação 4.7). Assim, a variação sobre o semi-eixo maior, que é induzida de forma direta pelo arrasto, é dependente do ângulo de ataque, mas apresenta alguma variação com o de rolamento por sofrer conseqüências indiretas da sustentação durante a passagem atmosférica. Os valores dessa variação diminuem com o aumento do ângulo de ataque porque este aumenta a força de arrasto provocando uma saída mais rápida da atmosfera e, conseqüentemente, um tempo menor sobre a ação dessa força. Essas considerações valem também para a excentricidade que varia com o arrasto seguindo a mesma influência do semi-eixo maior.

A variação da inclinação orbital é induzida pela sustentação. Assim, pode-se notar na Figura 4.10 sua dependência direta do ângulo de rolamento através das linhas quase horizontais deste gráfico. Quanto maior o ângulo de rolamento, maior a variação da inclinação. Existe ainda uma pequena influência do ângulo de ataque, mas esta se dá de forma indireta.

4.3 Simulações com Coeficientes Aerodinâmicos Variáveis

Na etapa anterior, os coeficientes aerodinâmicos de arrasto e de sustentação foram calculados em função dos ângulos de ataque e rolamento que o satélite apresentava ao entrar na atmosfera, sem considerar as variações sofridas por estes durante a passagem

atmosférica. Entretanto, de uma forma realista, esses ângulos não devem se manter constantes durante a passagem através da atmosfera, pois a própria ação do arrasto atmosférico provocaria mudanças em sua atitude. Tentou-se, nesta nova etapa, representar o comportamento desses ângulos através de equações lineares no tempo, com coeficientes de primeira ordem também variáveis.

O problema agora é praticamente o mesmo que antes, a menos dos ângulos de ataque e de rolamento, os quais passam a obedecer à seguinte regra:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 t \quad (4.23)$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 t \quad (4.24)$$

Nas simulações realizadas, os valores de α_0 e σ_0 foram mantidos constantes, enquanto α_1 e σ_1 eram variados para obter resultados em torno dos valores “iniciais” α_0 e σ_0 . O objetivo é descobrir se esta variação linear dos ângulos de ataque e rolamento no tempo poderia provocar uma maior variação na inclinação durante a passagem pela atmosfera.

Aproveitando o exemplo mostrado no caso com coeficientes constantes, foram realizadas simulações para conjuntos α_0 e σ_0 correspondentes a valores de α e σ anteriormente calculados. Os resultados mostraram que a variação em inclinação resultante de uma passagem pela atmosfera com coeficientes linearmente variantes no tempo nunca é superior à encontrada no caso dos coeficientes constantes. O que faz destes um valor máximo para as manobras atmosféricas.

A Tabela 4.8, a seguir, apresenta uma parte dos resultados gerados nessa simulação, onde se encontra o valor máximo da referida variação. Os valores apresentados nessa

tabela foram calculados computacionalmente, por isso apresentam tantas casas decimais.

TABELA 4.8 – VARIAÇÃO EM INCLINAÇÃO

α_1 (rad)	σ_1 (rad)	Δi (graus)
6,383782391594650E-016	-2,999999999999994E-001	2,412077543741535E-001
6,383782391594650E-016	-1,999999999999994E-001	2,808341772041656
6,383782391594650E-016	-9,99999999999937E-002	5,471303239215205
6,383782391594650E-016	6,383782391594650E-016	6,647257900716220
6,383782391594650E-016	1,000000000000006E-001	5,823768952953905
6,383782391594650E-016	2,000000000000006E-001	3,722381316497749
6,383782391594650E-016	3,000000000000006E-001	1,517261338306605
6,383782391594650E-016	4,000000000000006E-001	6,964258991646588E-002

O maior valor encontrado para a variação em inclinação corresponde ao maior valor encontrado para o exemplo similar com coeficientes constantes. Nota-se que os valores de α_1 e σ_1 para esse valor máximo são praticamente iguais a zero, o que corresponde a $\alpha = \alpha_0, \sigma = \sigma_0$. Neste caso, o conjunto (α_0, σ_0) escolhido corresponde aos valores de α e σ constantes que geravam a variação máxima em inclinação. Donde se conclui que o resultado ótimo tende ao encontrado no exemplo com coeficientes constantes.

Para casos onde o conjunto (α_0, σ_0) escolhido apresenta valores próximos ao conjunto que corresponde ao máximo em variação em inclinação, o valor 6,647257900716220 graus (máximo de variação em inclinação) foi encontrado para diferentes valores de α_1, σ_1 . Entretanto, para conjuntos (α_0, σ_0) escolhidos aleatoriamente, com valores bastante diferentes dos do conjunto que corresponde ao máximo em variação em

inclinação, o valor máximo para a variação em inclinação não atingiu 6,647257900716220 graus.

Os resultados encontrados, embora coerentes com os anteriores, não demonstraram uma melhora no sentido de aumentar a variação em inclinação desejada pela passagem atmosférica. Uma aproximação através de uma parábola, para a representação dos ângulos de ataque e de rolamento, também foi testada, apresentando o mesmo tipo de resultado. Com isso, demonstra-se que o resultado encontrado com coeficientes constantes é o ótimo.

Uma justificativa para esse comportamento se apóia na equação analítica para a taxa temporal de variação em inclinação devida ao arrasto atmosférico apresentada em King-Hele (1987):

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\rho VR^2 w \delta}{2\sqrt{\mu p F}} \text{sen}(i) \cos^2(u) \quad (4.25)$$

Nesta, ρ é a densidade da atmosfera, V é a velocidade do veículo em relação à atmosfera, R é a magnitude da sua posição, w é a velocidade angular de rotação da Terra, μ é o parâmetro gravitacional (Gm , onde G é a constante gravitacional universal e m a massa), p é o *semi latus rectum*, F é um fator que relaciona velocidade orbital com velocidade relativa à atmosfera e é praticamente igual a 1, u é o argumento da latitude e δ é dado pela seguinte relação com a área S ,

$$\delta = \frac{FSC_D}{m} \quad (4.26)$$

Sendo essa variação em inclinação uma função direta do coeficiente aerodinâmico de arrasto C_D , é de se esperar que a variação máxima em inclinação seja encontrada para o valor máximo deste coeficiente. Entretanto, este resultado pode ser modificado pelo fator $\sin(i) \cos^2(u)$. A Equação 4.6 mostra que C_D é máximo para $\alpha = 90^\circ$. Assim, uma representação do coeficiente de arrasto através de uma relação linear, ou mesmo de uma curva quadrática, tende apenas a diminuir o valor absoluto deste. Os resultados das simulações com coeficientes variáveis não poderiam mesmo, seguindo King-Hele (1987), se mostrar melhores do que os das simulações com coeficientes constantes, em se tratando de variação em inclinação.

No entanto, a teoria de King-Hele se refere, por questão de simplificação, ao arrasto aerodinâmico e, na verdade, a variação em inclinação está relacionada com a sustentação. Esta consideração modifica o parâmetro δ para,

$$\delta = \frac{FSC_L}{m} \quad (4.27)$$

que, por sua vez, torna a variação em inclinação uma função direta do coeficiente aerodinâmico de sustentação C_L , cujo valor é máximo para $\alpha = 45^\circ$.

CAPÍTULO 5

ESTUDO COMPARATIVO DO CONSUMO DE COMBUSTÍVEL PARA MANOBRAS COM E SEM ATMOSFERA

Entre todos os tipos de manobras puramente propulsivas utilizadas para modificar tamanho, forma e/ou orientação de órbitas de satélites artificiais, a mais dispendiosa, em se tratando de consumo de combustível, é a manobra de mudança de plano orbital. Uma forma difundida pela literatura para se referir ao consumo de combustível de uma manobra propulsiva é a chamada Velocidade Característica, que nada mais é do que a medida da magnitude da variação total em velocidade necessária para realizar uma transferência. O consumo de combustível está diretamente relacionado com a velocidade característica pela Equação de Tsiolkovsky (Chobotov, 1991),

$$m_f = m_0 \exp\left(-\frac{|\Delta V|}{I_{sp} g_0}\right) \quad (5.1)$$

em que m_f é a massa total final do veículo após a realização da manobra, m_0 é a massa total do veículo antes da manobra, ΔV é a velocidade característica, I_{sp} é o empuxo específico do combustível e g_0 é a aceleração da gravidade ao nível do mar. Assim, a massa de combustível despendida pela manobra é calculada por $m_0 - m_f$.

O alto consumo de uma manobra de mudança de plano puramente propulsiva incentivou a procura de técnicas alternativas que pudessem provocar as mudanças desejadas de forma mais econômica. Uma das técnicas mais interessantes utiliza forças aerodinâmicas e propulsivas combinadas da forma que foi discutida no Capítulo 4. A bibliografia a respeito mostra os primeiros passos no estudo dessa combinação nos trabalhos pioneiros de London e Nyland, que puderam ser conhecidos por meio do

artigo de Bruce (1965). Entretanto, algumas das considerações feitas por esses autores, embora apresentem soluções analíticas, limitam muito a aplicabilidade de suas análises.

Dando continuidade à análise dos resultados apresentados no capítulo anterior, outros subprodutos do desenvolvimento proposto se apresentam. O problema de realizar mudanças de plano orbital utilizando-se a atmosfera terrestre como meio de retirar energia de um satélite artificial (com as características definidas no Item 4.1) se resume a encontrar soluções economicamente viáveis. Essas soluções são apresentadas aqui na forma de gráficos do tipo “curvas de nível”, onde o eixo horizontal corresponde ao ângulo de ataque (α), o eixo vertical, ao ângulo de rolamento (σ) – ambos em graus, medidos ao entrar na atmosfera e mantidos constantes através desta – e as curvas de nível representando os diversos fatores relevantes para uma análise quantitativa do perfil das manobras estudadas.

Partindo-se do princípio de que, ao passar pela atmosfera, a órbita do satélite sofre uma variação em inclinação provocada pela interação aerodinâmica do veículo com a atmosfera, foram calculadas as velocidades características relacionadas com esta manobra.

Nesta análise são realizadas simulações para as três órbitas iniciais/finais estudadas no Capítulo 4. Essas órbitas têm como características principais os semi-eixos maiores iguais a 7.000, 8.000 e 9.000 km e o fato de serem circulares. As órbitas iniciais são, ainda, equatoriais. A altitude da atmosfera em todos os casos é considerada igual a 200 km, que corresponde a aproximadamente 6.578 km de distância ao centro de massa.

A Figura 5.1 apresenta a variação em inclinação sofrida por um satélite, inicialmente em uma órbita circular com semi-eixo maior igual a 7.000 km, ao passar pela atmosfera em uma órbita de transferência cujo perigeu é igual a 6.278 km e o apogeu é igual ao semi-eixo maior da órbita inicial. É bom lembrar que o veículo passa pela atmosfera e é enviado para fora desta pela ação das forças aerodinâmicas antes de atingir o perigeu da

primeira órbita de transferência. Assim, não há problema em considerar um perigeu tão baixo como 6.278 km, afinal ele não será atingido.

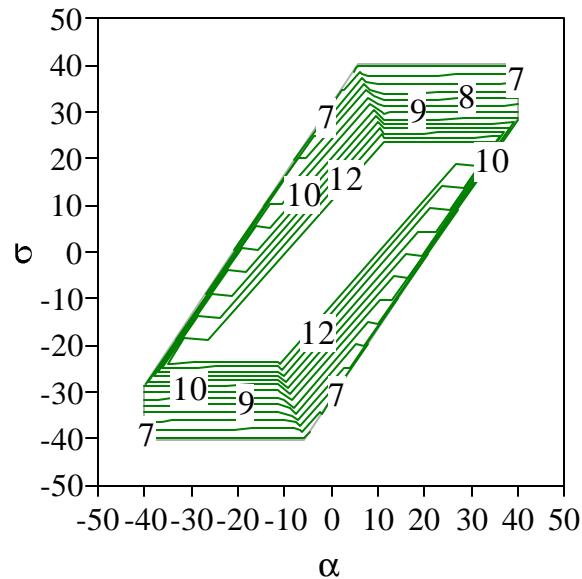


Fig. 5.1 – Variação em inclinação (graus) induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.278$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

Na Figura 5.1, assim como nas figuras seguintes, existem pares de α e σ para os quais não há resultado no gráfico. Esta é uma consequência da ação da atmosfera ter provocado a reentrada do satélite para essas combinações de parâmetros. Estes resultados estão de acordo com os encontrados por Guedes (2000), onde o comportamento de uma trajetória de reentrada é analisado após a aplicação de uma manobra de injeção. Na Figura 5.1, pode-se notar, ainda, que para determinados pares de ângulos de ataque e rolagem a variação em inclinação é dependente apenas deste último. Esse comportamento é esperado da forte dependência da inclinação orbital com a sustentação atmosférica atuante sobre o veículo, que é uma função desse ângulo.

Para cada órbita inicial, foram simuladas manobras utilizando-se diferentes órbitas de transferência, com o objetivo de analisar a influência da atmosfera sobre órbitas com

diferentes valores de perigeu e , conseqüentemente, de período dentro da atmosfera. Os valores de distância ao perigeu simulados foram 6.278, 6.350, 6.420 e 6.480 km.

O primeiro resultado significativo aponta que órbitas de transferência com perigeus muito próximos ao valor do limite da atmosfera sensível tendem a ser mantidas dentro da atmosfera. Em outras palavras, essas órbitas não sofrem o desvio desejado pela ação da sustentação atmosférica e deixam de apresentar interesse para o problema em estudo.

Os diversos subprodutos desta análise podem ser observados nas Figuras 5.2 a 5.5, onde a órbita inicial tem $a = 7.000$ km e a órbita de transferência tem perigeu igual a 6.278 km.

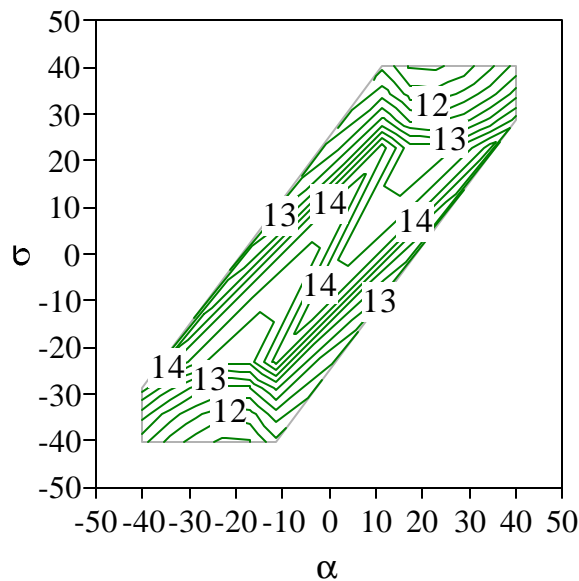


Fig. 5.2 – Variação total em massa de combustível (kg) induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.278$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

A Figura 5.2 mostra a variação total em massa de combustível necessária para colocar o satélite em uma trajetória que atravessasse a atmosfera e que, ao sair dela e voltar para uma órbita com semi-eixo maior igual ao raio da órbita inicial, apresente as mudanças de

inclinação ilustradas na Figura 5.1. A Figura 5.3 apresenta o consumo esperado para a manobra impulsiva realizada fora da atmosfera terrestre, para encontrar as mesmas mudanças de plano orbital. A Figura 5.4 mostra a diferença entre esses consumos, tornando claros os valores de α e σ para os quais uma manobra é mais vantajosa do que a outra.

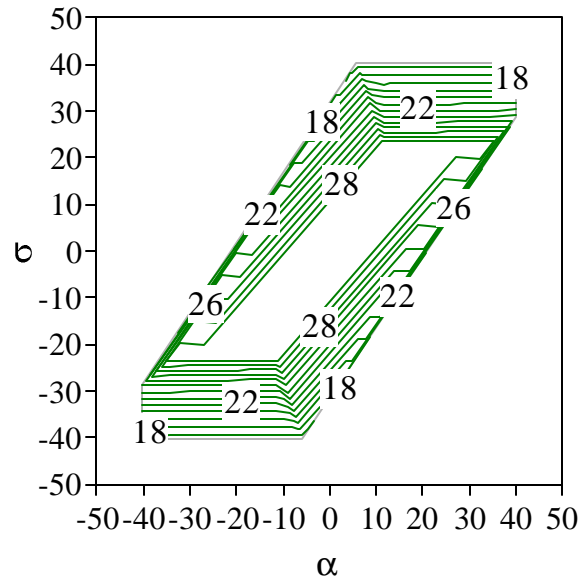


Fig. 5.3 – Variação total em massa de combustível (kg) induzida pela manobra impulsiva sem atmosfera para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.278$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

Na Figura 5.3, realmente parece estranho falar em variação em massa de combustível relacionando ângulos de ataque e rolamento com manobra impulsiva realizada fora da atmosfera. Essa manobra não é afetada por esses ângulos, mas o consumo de combustível é diretamente dependente da variação em inclinação. A figura foi montada dessa forma para que se possa comparar o consumo resultante da manobra impulsiva sem atmosfera com o da manobra aeroassistida decorrente da variação em inclinação, essa sim extremamente dependente do par de ângulos de ataque e rolamento.

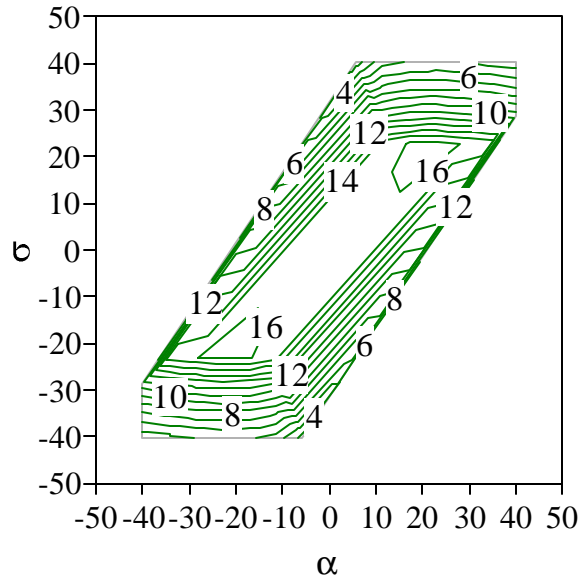


Fig. 5.4 – Economia em massa de combustível (kg) entre a manobra fora da atmosfera e a manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.278$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

Todas as figuras deste capítulo têm como objetivo mostrar para o analista de uma missão espacial quais as conseqüências sobre os diferentes aspectos do problema de realizar manobras aeroassistidas. Com elas é possível escolher um par de ângulos de ataque e de rolamento que satisfaça as necessidades do projeto no que concerne à variação de inclinação do plano orbital e ao consumo de combustível.

A Figura 5.5 está relacionada com a Figura 5.2, por meio da Equação 5.1 e representa a velocidade característica calculada para a manobra com atmosfera. A velocidade característica, na Figura 5.5, representa a soma das velocidades características necessárias para entrar e sair da atmosfera.

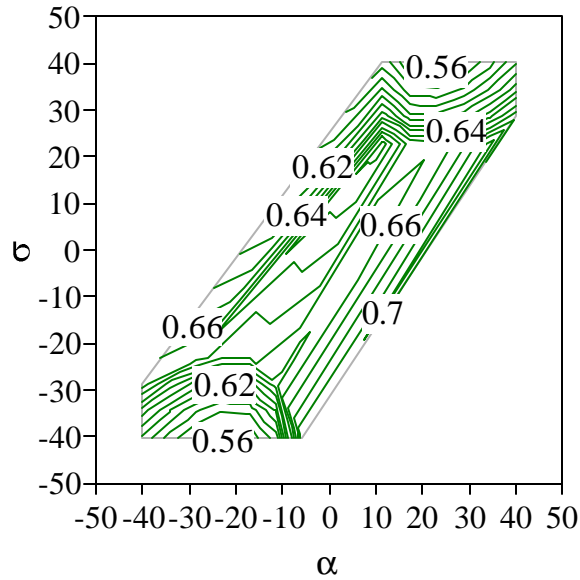


Fig. 5.5 – Velocidade característica resultante da manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.278$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

As conseqüências econômicas das mudanças de perigeu das órbitas de transferência podem ser observadas nas Figuras 5.6 e 5.7, nas quais os perigeus utilizados foram, respectivamente, 6.350 e 6.420 km. A parte (a) dessas figuras apresenta a economia em combustível utilizado encontrada comparando-se a manobra aeroassistida com a manobra de mudança de inclinação realizada fora da atmosfera. É preciso levar em consideração que as variações em inclinação sofridas pelas manobras com perigeus distintos não são idênticas, pois o tempo de passagem pela atmosfera e as condições de densidade desta são diferentes. Assim, a economia precisa ser analisada em função da variação em inclinação induzida pela passagem atmosférica mostrada na parte (b).

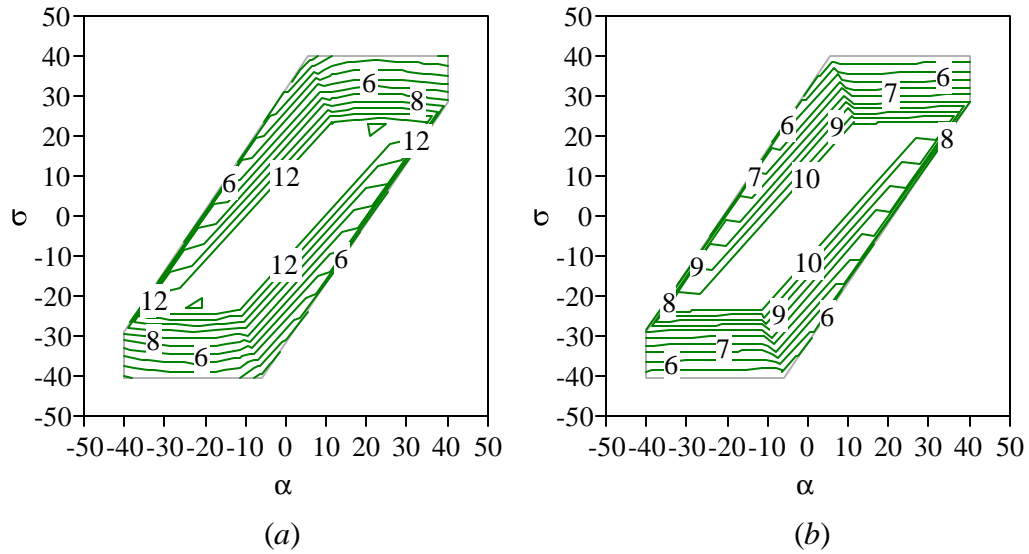


Fig. 5.6 – (a) Economia em massa de combustível (kg) entre a manobra fora da atmosfera e a manobra aeroassistida e (b) variação em inclinação induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.350$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

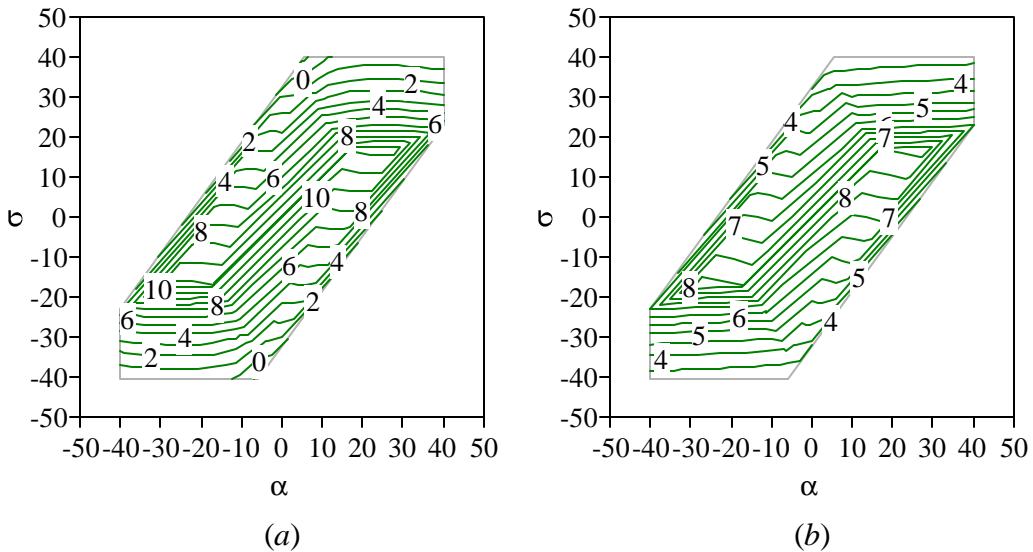


Fig. 5.7 – (a) Economia em massa de combustível (kg) entre a manobra fora da atmosfera e a manobra aeroassistida e (b) variação em inclinação induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.000$ km e $r_p = 6.420$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

Nas Figuras 5.6 e 5.7 pode-se notar que conforme a órbita de transferência se afasta do centro de massa do sistema (no caso de 6.350 km para 6.420 km de raio de perigeu) os valores para a economia em combustível aumentam. Esse resultado está de acordo com o que foi discutido no Capítulo 4, pois, ao aumentar o raio do perigeu a manobra aeroassistida vai se tornando menos dispendiosa, por ser menor a variação em semi-eixo maior necessária.

Outra consequência da mudança de perigeu da órbita de transferência é que para uma maior altitude de perigeu, mais pares de ângulos de ataque e rolamento induzem às manobras aeroassistidas desejadas. Esta constatação pode ser observada no centro da Figura 5.7, onde os valores de pares próximos de zero estão presentes. Isso ocorre porque o veículo entra na atmosfera com menor ângulo de aproximação, o que induz a uma manobra menos radical que a de reentrada atmosférica.

Para complementar, as Figuras 5.8 e 5.9 mostram as vantagens/desvantagens de se utilizar a atmosfera para realizar mudanças de plano, para órbitas iniciais com semi-eixos maiores iguais a 8.000 e 9.000 km, respectivamente, e distância ao perigeu igual a 6.420 km. Essas figuras apresentam, da mesma forma que as Figuras 5.6 e 5.7, a economia em massa de combustível utilizado e a variação em inclinação encontrada pela manobra aeroassistida.

Os resultados mostrados nas Figuras 5.8 e 5.9 estão, também, de acordo com o que foi discutido no Capítulo 4, pois, ao se afastar do centro de força, a manobra impulsiva realizada fora da atmosfera tende a ser mais econômica. Enquanto isso a manobra aeroassistida vai se tornando mais dispendiosa.

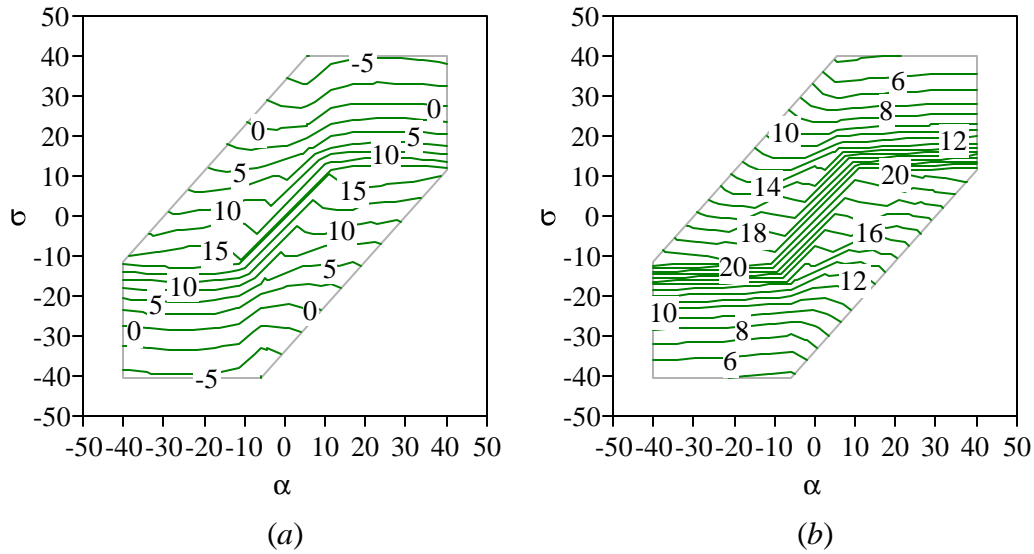


Fig. 5.8 – (a) Economia em massa de combustível (kg) entre a manobra fora da atmosfera e a manobra aeroassistida e (b) variação em inclinação induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 8.000$ km e $r_p = 6.420$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

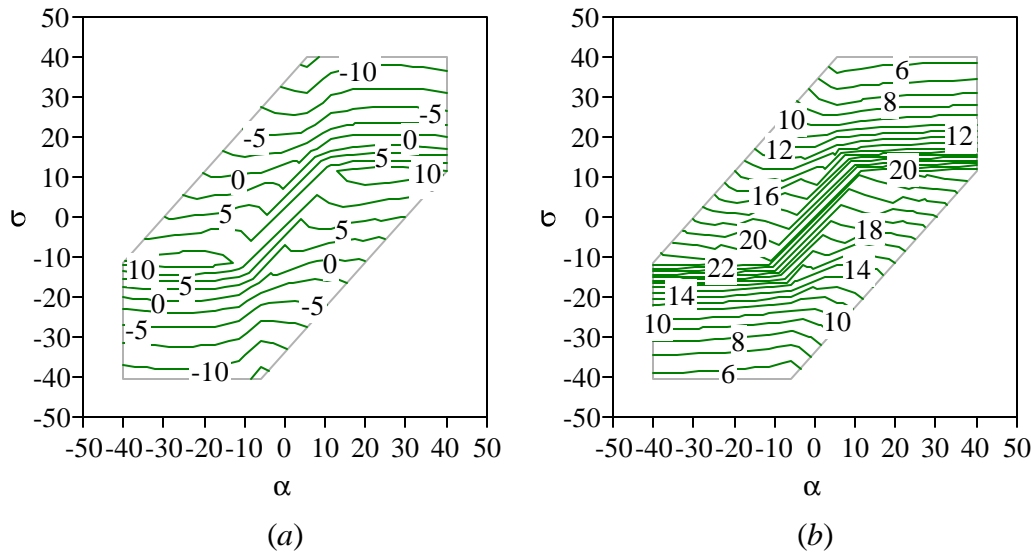


Fig. 5.9 – (a) Economia em massa de combustível (kg) entre a manobra fora da atmosfera e a manobra aeroassistida e (b) variação em inclinação induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 9.000$ km e $r_p = 6.420$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

É importante enfatizar que as análises feitas aqui levaram em consideração apenas uma passagem pela atmosfera. Uma simulação de múltiplas passagens será realizada no Capítulo 8, onde se apresenta uma comparação com uma passagem única e profunda (menor raio de perigeu).

CAPÍTULO 6

SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Além das possíveis mudanças orbitais nos elementos pertencentes ao mesmo plano, uma transferência orbital não-coplanar requer variações na inclinação i e/ou na longitude do nodo ascendente Ω . No caso de passagem através da atmosfera, uma parte da (ou toda) mudança de plano de um veículo capaz de produzir sustentação é realizada pelas forças aerodinâmicas. A relação entre mudança aerodinâmica e variação do plano orbital ainda não está bem estabelecida, através de uma formulação analítica.

Antes de partir para a solução analítica, é importante frisar as características físicas do problema proposto. Uma manobra de mudança de plano combinada (propulsiva + aerodinâmica) pode ser descrita de forma geral como aquela na qual um veículo espacial é, primeiramente, desviado de sua órbita original, com o uso de propulsores, em direção à atmosfera. A fase aerodinâmica começa no momento da entrada na atmosfera. Após a realização da manobra aerodinâmica, a energia perdida pelo veículo devido ao arrasto é restaurada através do acionamento de jatos propulsivos de forma que a órbita original é restabelecida em um novo plano.

Neste capítulo, apresenta-se uma nova relação entre a variação do semi-eixo maior resultante de uma passagem pela atmosfera e a variação da inclinação nas mesmas circunstâncias. Essa solução analítica é baseada nas equações encontradas em King-Hele (1987). Todas as equações apresentadas por King-Hele foram verificadas e validadas.

6.1 Soluções Analíticas com Expansões até 6ª Ordem

Ainda não foram encontradas soluções analíticas exatas para transferências orbitais aeroassistidas ótimas, exceto para casos muito simplificados e idealizados (King-Hele,

1987). Enquanto isso, soluções numéricas de casos mais gerais foram obtidas através de métodos diretos e indiretos.

King-Hele (1987) encontrou expressões para as variações induzidas nos elementos orbitais de um veículo que atravessa a atmosfera terrestre em algum momento. Ele considerou a excentricidade limitada a $0,02 < e < 0,2$. As expressões foram obtidas a partir das Equações de Gauss e foram utilizadas funções de Bessel para integrar as equações resultantes. As Equações (6.1) e (6.2) mostram as variações induzidas no semi-eixo maior e na inclinação encontradas por ele, como exemplo.

$$\Delta a = -\delta a^2 \rho_{p_0} \exp[\beta(a_0 - a - a_0 e_0)] \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2e \cos(E) + \frac{3}{2} e^2 \cos^2(E) + e^3 \cos^3(E) + O(e^4) \right\} \exp[B \cos(E)] dE \quad (6.1)$$

$$\Delta i = -\left(\frac{a}{\mu F} \right)^{1/2} \frac{a^2 w \delta}{4} \rho_{p_0} \sin i \exp(-B) \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + \cos(2\omega) \cos(2E) + -4e \cos^2(\omega) \cos(E) + O(e^2) \right\} \exp[B \cos(E)] dE \quad (6.2)$$

Nestas equações, δ é a função das características aerodinâmicas do satélite dada pela Equação (4.26), onde apenas o arrasto atmosférico é considerado, a é o semi-eixo maior, ρ_{p_0} é a densidade da atmosfera no perigeu, β é uma função da altitude do satélite conhecida como *inverse scale height*, e é a excentricidade da órbita, E é a anomalia excêntrica, $B = \beta a e$, μ é a constante gravitacional, F é um parâmetro que relaciona velocidade orbital com velocidade relativa à atmosfera, w é a velocidade angular de rotação da Terra, i é a inclinação orbital, ω é o argumento do perigeu e o subscrito 0 (zero) refere-se as condições iniciais da órbita.

Para essas equações, King-Hele (1987) considera a atmosfera terrestre como esféricamente simétrica, o que não é uma concepção realista. Essa consideração é

traduzida pelo modelo exponencial para a variação da densidade com a distância ao centro da Terra dado por:

$$\rho = \rho_{p_0} \exp\{\beta(r_{p_0} - R)\} \quad (6.3)$$

em que r_{p_0} é a distância do perigeu inicial ao centro da Terra, igual a $a_0(1-e_0)$.

Considerando-se que

$$R = a(1 - e \cos E) \quad (6.4)$$

então,

$$\rho = \rho_{p_0} \exp\{\beta(a_0 - a - a_0 e_0) + \beta a e \cos E\} \quad (6.5)$$

Baseando-se nestas equações, neste trabalho, a função trigonométrica de E foi expandida em série de Taylor até a 6ª ordem e as integrais envolvidas foram solucionadas. Desta forma, foi possível encontrar as expressões analíticas mostradas a seguir. A solução encontrada para a variação em semi-eixo maior é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta a = & -\delta a^2 \rho_{p_0} \left\{ \left[1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 \right] E + \right. \\ & - \left[\frac{B}{2} + (1+B)e + \frac{3}{4}(2+B)e^2 + \frac{(3+B)}{2}e^3 \right] \frac{E^3}{3} + \\ & + \left[\frac{B(1+3B)}{24} + \frac{(1+7B+3B^2)}{12}e + \frac{3}{48}(8+13B+3B^2)e^2 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{(21+19B+3B^2)}{24}e^3 \right] \frac{E^5}{5} + O(E^7) \right\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Como King-Hele (1987) não considera o efeito da sustentação sobre o veículo atravessando a atmosfera, a perturbação que provoca uma variação sobre a inclinação da órbita do satélite é devida ao efeito da rotação da atmosfera. A solução para esta variação é dada por:

$$\begin{aligned}
 \Delta i = & -\left(\frac{a}{\mu F}\right)^{1/2} \frac{a^2 w \delta}{4} \rho_{p_0} \operatorname{sen} i \left\{ [2(1-2e) \cos^2 \omega] E + \right. \\
 & + \left[-\frac{B}{2} + 2(1+B)e \cos^2 \omega - \frac{(4+B) \cos(2\omega)}{2} \right] \frac{E^3}{3} + \\
 & + \left[\frac{B(1+3B)}{24} - \frac{(1+7B+3B^2)e \cos^2 \omega}{6} + \frac{(16+25B+3B^2) \cos(2\omega)}{24} \right] \frac{E^5}{5} + \\
 & \left. + O(E^7) \right\}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

6.1.1 Expressões para os outros Elementos Orbitais

As expressões para os outros elementos orbitais (excentricidade e , nodo ascendente Ω e argumento do perigeu ω) também foram obtidas baseando-se na teoria de King-Hele (1987). Para a excentricidade, a densidade atmosférica é considerada uma função exponencial da altitude em uma atmosfera esfericamente simétrica, como foi feito com o semi-eixo maior e mostrado na Equação (6.5). Nas próximas equações usaremos $x = ae$ como King-Hele, pois segundo ele assim “a teoria é mais facilmente desenvolvida”.

$$\begin{aligned}
\Delta x = & -\delta a^2 \rho_{p0} \left\{ \left[1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 \right] E + \right. \\
& - \left[\frac{(1+B)}{2} + (1+B)e + \frac{(5+3B)}{4}e^2 + \frac{(3+B)}{2}e^3 \right] \frac{E^3}{3} + \\
& + \left[\frac{(1+7B+3B^2)}{24} + \frac{(4+7B+3B^2)}{12}e + \frac{(23+33B+9B^2)}{48}e^2 + \right. \\
& \left. \left. + \frac{(24+19B+3B^2)}{24}e^3 \right] \frac{E^5}{5} + O(E^7) \right\}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

O nodo ascendente, da mesma forma que a inclinação orbital, é perturbado pela rotação atmosférica.

$$\begin{aligned}
\Delta \Omega = & - \left(\frac{a}{\mu F} \right)^{1/2} \frac{a^2 w \delta}{4} \rho_{p0} \sin(2\omega) \{ [1 - 2e] E + \\
& + \left[\frac{-(4+B) + 2e + 2Be^2}{2} \right] \frac{E^3}{3} + \\
& + \left[\frac{(16+25B+3B^2) - (2+14B+6B^2)e}{24} \right] \frac{E^5}{5} + O(E^7) \}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

A simetria esférica da atmosfera considerada até o momento é uma boa primeira aproximação. Entretanto, a densidade da atmosfera depende, na verdade, da sua altitude acima da superfície terrestre, que é um esferóide achatado. Conseqüentemente, a atmosfera também apresenta um achatamento.

Para o cálculo da variação sobre o argumento do perigeu, supõe-se que a densidade é constante na superfície de esferóides cuja excentricidade é igual a ε e no qual um dos eixos coincide com o eixo de rotação terrestre.

Um novo modelo atmosférico precisa ser considerado. A distância radial r_σ do centro da Terra até a superfície de um esferóide achatado, de raio equatorial $r_{\sigma E}$ e excentricidade ε é dada por (King-Hele, 1987)

$$r_\sigma = r_{\sigma E} \{1 - \varepsilon \sin^2 \phi_g + O(\varepsilon^2)\} \quad (6.10)$$

na qual ϕ_g é a latitude geocêntrica. Escolhe-se $r_{\sigma E}$ de forma que o esferóide definido pela Equação (6.10) passe pelo ponto do perigeu inicial r_{p0} , cuja latitude é ϕ_{p0} (King-Hele, 1987).

$$r_\sigma = r_{p0} \frac{1 - \varepsilon \sin^2 \phi_g}{1 - \varepsilon \sin^2 \phi_{p0}} \quad (6.11)$$

No esferóide definido pela Equação (6.11), a densidade atmosférica é ρ_{p0} . Acima do esferóide, a densidade varia exponencialmente com a altitude. Assim (King-Hele, 1987):

$$\rho = \rho_{p0} \exp\{-\beta(R - r_\sigma)\} \quad (6.12)$$

Agora, deseja-se conectar a latitude do satélite ϕ_g com a posição angular deste em sua órbita. Utiliza-se a lei dos senos:

$$\sin \phi_g = \sin i \sin(\omega + \theta) \quad (6.13)$$

em que θ é a anomalia verdadeira do satélite. Substituindo-se as Equações (6.11) e (6.13) em (6.12), obtém-se a densidade do ar em qualquer ponto (R, θ) da órbita (King-Hele, 1987):

$$\rho = \rho_{p_0} \exp\{-\beta(R - r_{p_0}) + c_1 \cos 2(\omega + \theta) - c_1 \cos 2\omega_0 + O(c_1 \epsilon)\} \quad (6.14)$$

com $c_1 = \frac{1}{2} \epsilon \beta r_{p_0} \sin^2 i$.

A Equação (6.14) pode ser escrita em função da anomalia excêntrica E utilizando-se a Equação (6.4), uma condição de truncamento dada pela Equação (6.15) e as expressões seguintes:

$$\exp\{c_1 \cos 2(\omega + \theta)\} = 1 + c_1 \cos 2(\omega + \theta) + \frac{1}{2} c_1^2 \cos^2 2(\omega + \theta) \quad (6.15)$$

$$R \cos \theta = a(\cos E - e) \quad (6.16)$$

$$R \sin \theta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (6.17)$$

Eliminando-se assim a anomalia verdadeira θ , a expressão final para o modelo de densidade atmosférica que considera o achatamento terrestre com erro menor que 0,002 (King-Hele, 1987) é dada por:

$$\begin{aligned} \rho = k \exp\{-\beta(a - ae \cos E)\} & \left[1 + c_1 \cos 2(\omega + E) - 2c_1 e \sin 2(\omega + E) \sin E + \right. \\ & + \frac{1}{4} c_1^2 \{1 + \cos 4(\omega + E)\} - \frac{1}{2} c_1 e^2 \{\cos(2\omega) + 2 \cos 2(\omega + E) + \\ & \left. - 3 \cos 2(\omega + E) \cos(2E)\} - c_1^2 e \sin 4(\omega + E) \sin E + O(c_1 \epsilon, c_1 e^3, c_1^2 e^2) \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

com $k = \rho_{p_0} \exp\{\beta r_{p_0} - c_1 \cos(2\omega_0)\}$.

Assim como no caso dos outros elementos orbitais, a variação do argumento do perigeu também depende de uma expressão para a densidade atmosférica. A equação para a variação do argumento do perigeu pode, agora, ser calculada utilizando-se a Equação (6.18) como essa expressão da densidade. Neste trabalho, encontrou-se:

$$\begin{aligned}
\Delta\omega = & -\frac{\delta ak}{e} \left\{ \left[1 + \frac{1}{4}c_1^2 + \left(1 + \frac{1}{4}c_1^2 \right) B + \right. \right. \\
& + \left(e + (1+e)c_1 \cos(2\omega) + \frac{c_1^2}{4} \cos(4\omega) \right) \left. \right] \frac{E^2}{2} + \\
& - \left[2(1+2e)c_1 \sin(2\omega) + c_1^2 \sin(4\omega) \right] \frac{E^3}{3} + \\
& - \left[\frac{(4+3B)}{6} + \frac{(1+3B)}{24}c_1^2 + [24e+13+3B+ \right. \\
& + e(16+3B)] \frac{c_1}{6} \cos(2\omega) + \frac{c_1^2}{24}(49+3B) \cos(4\omega) \left. \right] \frac{E^4}{4} + \\
& + \left[\left(\frac{(5+3B)}{3} + \frac{(22+6B)e}{3} \right) c_1 \sin(2\omega) + \right. \\
& + \left. \frac{(17+3B)}{6}c_1^2 \sin(4\omega) \right] \frac{E^5}{5} + \\
& + \left[\frac{(1+15B+15B^2)}{120} + \frac{(1+15B+15B^2)}{480}c_1^2 + \frac{(16+45B+15B^2)}{120}e + \right. \\
& + \left. \left(\frac{(121+135B+15B^2)}{120} + \frac{(736+405B+15B^2)}{120}e \right) c_1 \cos(2\omega) + \right. \\
& + \left. \frac{(1441+495B+15B^2)}{480}c_1^2 \cos(4\omega) \right] \frac{E^6}{6} + O(E^7) \left. \right\} \quad (6.19)
\end{aligned}$$

King-Hele considera o achatamento terrestre no cálculo da variação do argumento do perigeu, mas não no da variação do nodo ascendente. Nesse último caso, apenas a

rotação da atmosfera é considerada, o que não causa variações na expressão da densidade.

6.2 Soluções Analíticas com Expansões até 8ª Ordem

Para melhorar a precisão e aumentar o alcance das Equações (6.6), (6.7), (6.8), (6.9) e (6.19), a função trigonométrica de E das Equações (6.1), (6.2) e correspondentes para os outros elementos orbitais foi expandida em série de Taylor até a 8ª ordem e as integrais envolvidas foram novamente solucionadas neste trabalho. O resultado desta expansão são as novas expressões para os cinco elementos orbitais apresentadas a seguir.

$$\begin{aligned}
 \Delta a = -\delta a^2 \rho_{p0} & \left\{ \left[1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 \right] E + \right. \\
 & - \left[\frac{B}{2} + (1+B)e + \frac{3}{4}(2+B)e^2 + \frac{(3+B)}{2}e^3 \right] \frac{E^3}{3} + \\
 & + \left[\frac{B(1+3B)}{24} + \frac{(1+7B+3B^2)}{12}e + \frac{3}{48}(8+13B+3B^2)e^2 + \right. \\
 & + \left. \frac{(21+19B+3B^2)}{24}e^3 \right] \frac{E^5}{5} - \left[\frac{B(1+15B+15B^2)}{720} + \right. \\
 & + \left. \frac{(1+31B+60B^2+15B^3)}{360}e + \frac{1}{480}(32+151B+105B^2+15B^3)e^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{(183+361B+150B^2+15B^3)}{720}e^3 \right] \frac{E^7}{7} + O(E^9) \left. \right\} \quad (6.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta i = & - \left(\frac{a}{\mu F} \right)^{1/2} \frac{a^2 w \delta}{4} \rho_{p0} \operatorname{sen} i \left\{ [2(1-2e) \cos^2 \omega] E + \right. \\
& + \left[-\frac{B}{2} + 2(1+B)e \cos^2 \omega - \frac{(4+B) \cos(2\omega)}{2} \right] \frac{E^3}{3} + \\
& + \left[\frac{B(1+3B)}{24} - \frac{(1+7B+3B^2)e \cos^2 \omega}{6} + \frac{(16+25B+3B^2) \cos(2\omega)}{24} \right] \frac{E^5}{5} + \\
& + \left[-\frac{B(1+15B+15B^2)}{720} + \frac{(1+31B+60B^2+15B^3)e \cos^2 \omega}{180} + \right. \\
& \left. - \frac{(64+301B+195B^2+15B^3) \cos(2\omega)}{720} \right] \frac{E^7}{7} + O(E^9) \left. \right\} \quad (6.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x = & -\delta a^2 \rho_{p0} \left\{ \left[1 + 2e + \frac{3}{2} e^2 + e^3 \right] E + \right. \\
& - \left[\frac{(1+B)}{2} + (1+B)e + \frac{(5+3B)}{4} e^2 + \frac{(3+B)}{2} e^3 \right] \frac{E^3}{3} + \\
& + \left[\frac{(1+7B+3B^2)}{24} + \frac{(4+7B+3B^2)}{12} e + \frac{(23+33B+9B^2)}{48} e^2 + \right. \\
& + \left. \frac{(24+19B+3B^2)}{24} e^3 \right] \frac{E^5}{5} - \left[\frac{(1+31B+60B^2+15B^3)}{720} + \right. \\
& + \left. \frac{(32+152B+120B^2+15B^3)}{720} e + \left(\frac{37}{288} + \frac{(47B+30B^2+5B^3)}{720} \right) e^2 + \right. \\
& \left. + \frac{(288+406B+150B^2+15B^3)}{720} e^3 \right] \frac{E^7}{7} + O(E^9) \left. \right\} \quad (6.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \Omega = & - \left(\frac{a}{\mu F} \right)^{1/2} \frac{a^2 w \delta}{4} \rho_{p0} \operatorname{sen}(2\omega) \left\{ [1-2e] E + \right. \\
& + \left[\frac{-(4+B) + 2e + 2Be^2}{2} \right] \frac{E^3}{3} + \\
& + \left[\frac{(16+25B+3B^2) - (2+14B+6B^2)e}{24} \right] \frac{E^5}{5} + \\
& + \left[\frac{-(64+301B+195B^2+15B^3) + (2+62B+120B^2+30B^3)e}{720} \right] \frac{E^7}{7} + \\
& + O(E^9) \left. \right\} \quad (6.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\omega = & -\frac{\delta ak}{e} \left\{ \left[1 + \frac{1}{4}c_1^2 + \left(1 + \frac{1}{4}c_1^2 \right) B + \right. \right. \\
& + \left. \left(e + (1+e)c_1 \cos(2\omega) + \frac{c_1^2}{4} \cos(4\omega) \right) \right] \frac{E^2}{2} + \\
& - \left[2(1+2e)c_1 \sin(2\omega) + c_1^2 \sin(4\omega) \right] \frac{E^3}{3} + \\
& - \left[\frac{(4+3B)}{6} + \frac{(1+3B)}{24} c_1^2 + [24e+13+3B + \right. \\
& + e(16+3B)] \frac{c_1}{6} \cos(2\omega) + \frac{c_1^2}{24} (49+3B) \cos(4\omega) \left. \right] \frac{E^4}{4} + \\
& + \left[\left(\frac{(5+3B)}{3} + \frac{(22+6B)e}{3} \right) c_1 \sin(2\omega) + \right. \\
& + \left. \frac{(17+3B)}{6} c_1^2 \sin(4\omega) \right] \frac{E^5}{5} + \\
& + \left[\frac{(1+15B+15B^2)}{120} + \frac{(1+15B+15B^2)}{480} c_1^2 + \frac{(16+45B+15B^2)}{120} e + \right. \\
& + \left. \left(\frac{(121+135B+15B^2)}{120} + \frac{(736+405B+15B^2)}{120} e \right) c_1 \cos(2\omega) + \right. \\
& + \left. \frac{(1441+495B+15B^2)}{480} c_1^2 \cos(4\omega) \right] \frac{E^6}{6} + \\
& - \left[\left(\frac{(91+165B+45B^2)}{180} + \frac{(376+345B+45B^2)}{90} e \right) c_1 \sin(2\omega) + \right. \\
& + \left. \frac{(931+525B+45B^2)}{360} c_1^2 \sin(4\omega) \right] \frac{E^7}{7} + \\
& - \left[\frac{(36+133B+105B^2+105B^3)}{5040} + \frac{(1+63B+210B^2+105B^3)}{20160} c_1^2 + \right. \\
& + \frac{(64+483B+525B^2+105B^3)}{5040} e + \left(\frac{(1093+3003B+1470B^2)}{5040} + \right. \\
& + \left. \frac{105B^3}{5040} + \frac{(12160+16863B+4305B^2+105B^3)}{5040} e \right) c_1 \cos(2\omega) + \\
& + \left. \frac{(37969+31983B+5250B^2+105B^3)}{20160} c_1^2 \cos(4\omega) \right] \frac{E^8}{8} + O(E^9) \left. \right\} \tag{6.24}
\end{aligned}$$

6.3 Soluções Analíticas com Sustentação

As equações analíticas sugeridas por King-Hele (1987) consideram apenas a perturbação aerodinâmica causada pelo arrasto em uma passagem através da atmosfera terrestre. Sendo o arrasto atmosférico uma força na direção do movimento, apenas os elementos orbitais cuja variação tem componentes tangenciais da força perturbativa sofreriam maiores mudanças. Para os elementos que não têm componentes na direção tangencial, o artifício de considerar efeitos da rotação e da não-esfericidade atmosférica foi utilizado por ele.

No entanto, a sustentação é uma força importante em muitos casos. Veículos com grandes coeficientes de sustentação não estão bem representados pelas equações até agora apresentadas. Faz-se necessária a inclusão desta componente da força perturbadora nas equações de movimento e isso é feito neste trabalho.

Segundo as Equações de Gauss, as variações no tempo sofridas pelo semi-eixo maior e pela excentricidade são dadas por:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2V}{\mu} f_T \quad (6.25)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{V} \left[2f_T(e + \cos \theta) - f_N \frac{R}{a} \sin \theta \right] \quad (6.26)$$

nas quais f_T é a componente tangencial e f_N a normal da força perturbadora.

Assim, o semi-eixo maior, que varia apenas com a componente tangencial da força, não sofre perturbação devida à sustentação, uma vez que esta não possui componente na direção tangente. A excentricidade, por outro lado, tem uma componente normal da sustentação que pode provocar mudanças significativas.

As Equações de Gauss para os outros elementos orbitais são apresentadas para que se possa perceber que esses elementos também são influenciados pela componente normal ao movimento da força. Com essas equações é possível prever o movimento orbital decorrente da passagem atmosférica.

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} R f_N \cos(\omega + \theta) \quad (6.27)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} R f_N \frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin i} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\Omega}{dt} \cos i = \frac{1}{eV} \left\{ f_T \left[\sin \theta + (1 + e \cos \theta) \sin \theta \frac{R}{p} \right] + \right. \\ \left. + f_N \left[\cos \theta + e + e \sin^2 \theta \frac{R}{p} \right] \right\} \quad (6.29) \end{aligned}$$

Qualquer componente da força aerodinâmica pode ser representada como uma relação entre a área da superfície, a densidade da atmosfera, o quadrado da velocidade e o coeficiente aerodinâmico correspondente. A componente tangencial da força, que está relacionada apenas ao arrasto atmosférico, é dada por:

$$\frac{f_T}{m} = -\frac{1}{2} \rho V^2 \delta \quad (6.30)$$

em que $\delta = \frac{FSC_D}{m}$.

A componente normal da força representa a ação da sustentação sobre o veículo. Em um movimento plano, \vec{f}_N é um vetor no plano (\vec{R}, \vec{V}) , que é o plano vertical, e não há força lateral. Entretanto, as características físicas do veículo podem ser tais que o vetor sustentação sofra uma rotação sobre \vec{V} e assim também o faz \vec{f}_N . Cria-se uma componente lateral para a força normal que tem o efeito de modificar o plano orbital.

A Figura 4.3 apresenta o esquema vetorial das forças aerodinâmicas sobre um satélite. Note-se que o vetor sustentação \vec{F}_L sofreu uma rotação de um ângulo σ para fora do plano vertical.

A componente normal da força é decomposta em duas: $f_N \cos \sigma$ no plano vertical e ortogonal a \vec{V} e $f_N \sin \sigma$ ortogonal ao plano vertical. É a componente $f_N \sin \sigma$ que provoca variações na inclinação orbital e no nodo ascendente. A componente normal da força correspondente é dada por:

$$\frac{F_B}{m} = -\frac{1}{2}\rho V^2 \delta_B \quad (6.31)$$

Em que $\delta_B = \frac{F S C_L \sin \sigma}{m}$.

A excentricidade e o argumento do perigeu são modificados pela componente da força normal no plano vertical:

$$\frac{F_A}{m} = -\frac{1}{2}\rho V^2 \delta_A \quad (6.32)$$

em que $\delta_A = \frac{FSC_L \cos \sigma}{m}$.

Na Equação (6.29) pode-se perceber que o argumento do perigeu sofre modificações ainda devido à variação do nodo ascendente. Assim, ω varia com as duas componentes da sustentação.

As expressões para as derivadas de e , i , ω e Ω em relação à anomalia excêntrica são dadas por:

$$\frac{dx}{dE} = a^2 \rho \frac{(1 + e \cos E)^{1/2}}{(1 - e \cos E)^{1/2}} \left[-\delta(e + \cos E) + \frac{1}{2} \delta_A (1 - e^2)^{1/2} (1 - e \cos E) \sin E \right] \quad (6.33)$$

$$\frac{di}{dE} = -\frac{1}{2} a \rho \delta_B \frac{(1 + e \cos E)}{(1 - e^2)^{1/2}} \left[\cos \omega (\cos E - e) - (1 - e^2)^{1/2} \sin \omega \sin E \right] \quad (6.34)$$

$$\frac{d\Omega}{dE} = -\frac{1}{2} a \rho \delta_B \frac{(1 + e \cos E)}{\sin i (1 - e^2)^{1/2}} \left[\sin \omega (\cos E - e) - (1 - e^2)^{1/2} \cos \omega \sin E \right] \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dE} = \Omega \cos i + \\ -\frac{1}{2} \frac{a \rho}{e} \frac{(1 + e \cos E)^{1/2}}{(1 - e \cos E)^{1/2}} \left[2\delta(1 - e^2)^{1/2} \sin E + \delta_A \left((1 - e^2) \cos E + e \sin^2 E \right) \right] \end{aligned} \quad (6.36)$$

das quais o tempo foi substituído pela anomalia excêntrica através do operador

$$\frac{d}{dE} = r \left(\frac{a}{\mu} \right)^{1/2} \frac{d}{dt} \quad (\text{King-Hele, 1987}).$$

Neste trabalho, estas equações foram integradas e as funções trigonométricas de E foram expandidas até a 6ª ordem, encontrando-se novas equações analíticas para os quatro elementos orbitais que variam com a ação da sustentação. Essa expansão supõe

que o arco de passagem pela atmosfera é pequeno. Essas equações são integradas utilizando-se o método de aproximações sucessivas de 1ª ordem.

$$\begin{aligned}
\Delta i = & -\frac{a\delta_B}{\sqrt{1-e^2}} \rho_{p_0} \left\{ (1-e^2) \cos \omega + [(e-1)\sqrt{1-e^2} \sin \omega] E + \right. \\
& - [1+B+2e-(1+B)e^2] \cos \omega \frac{E^2}{2!} + \\
& + \sqrt{1-e^2} [1+3B-(4+3B)e] \sin \omega \frac{E^3}{3!} + \\
& + [1+7B+3B^2+(8+12B)e-(1+7B+3B^2)e^2] \cos \omega \frac{E^4}{4!} \\
& + \sqrt{1-e^2} [-1-15B-15B^2+(16+45B+15B^2)e] \sin \omega \frac{E^5}{5!} + \\
& \left. + O(E^6) \right\} \tag{6.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x = & -2\delta a^2 \rho_{p_0} \left\{ \left[1+2e+\frac{3}{2}e^2+e^3 \right] + \right. \\
& - \left[(1+B)+2(1+B)e+\frac{(5+3B)}{2}e^2+(3+B)e^3 \right] \frac{E^2}{2} + \\
& + \left[\frac{(1+7B+3B^2)}{6} + \frac{(4+7B+3B^2)}{3}e + \frac{(23+33B+9B^2)}{12}e^2 + \right. \\
& \left. + \frac{(24+19B+3B^2)}{6}e^3 \right] \frac{E^4}{4} + O(E^5) \left. \right\} + \\
& + a^2 \delta_A \sqrt{1-e^2} \rho_{p_0} \left\{ \frac{(2-e^2)}{2} E + \right. \\
& + \left[-\frac{(1+3B)}{2} + \frac{(7+3B)}{4}e^2 \right] \frac{E^3}{3} + \\
& \left. + \left[\frac{(1+15B+15B^2)}{24} - \frac{(61+75B+15B^2)}{48}e^2 \right] \frac{E^5}{5} + O(E^6) \right\} \tag{6.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\Omega = & -\frac{a\delta_B}{\text{sen } i\sqrt{1-e^2}} \rho_{p_0} \left\{ (1-e^2) \text{sen } \omega + [(e+1)\sqrt{1-e^2} \cos \omega] E + \right. \\
& - [1+B+2e-(1+B)e^2] \text{sen } \omega \frac{E^2}{2!} + \\
& - \sqrt{1-e^2} [1+3B+(4+3B)e] \cos \omega \frac{E^3}{3!} + \\
& + [1+7B+3B^2+(8+12B)e-(1+7B+3B^2)e^2] \text{sen } \omega \frac{E^4}{4!} \\
& + \sqrt{1-e^2} [1+15B+15B^2+(16+45B+15B^2)e] \cos \omega \frac{E^5}{5!} + \\
& \left. + O(E^6) \right\} \tag{6.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\omega = & \Omega \cos i - \frac{\delta a k \sqrt{1-e^2}}{e} \left\{ [32+4e^2(1+e^2)+(8+e^2+e^4)c_1^2 + \right. \\
& + 2c_1(2+2e+e^2) \cdot (4 \cos(2\omega) + c_1 \cos(4\omega))] \frac{E}{16} + \\
& - c_1 [2+4e(1+e)+c_1(2+2e+e^2) \cos(2\omega)] \text{sen}(2\omega) E^2 + \\
& - [(80+96B)+(20+24B)c_1^2+(52+12B)e^2+(13+3B)c_1^2 e^2 + \\
& + (4+12B)e^4+(1+3B)c_1^2 e^4 + [(208+48B)c_1+(640+48B)c_1 e + \\
& + (920+24B)c_1 e^2] \cos(2\omega) + [(196+12B)c_1^2+(208+12B)c_1^2 e + \\
& + (110+6B)c_1^2 e^2] \cos(4\omega)] \frac{E^3}{96} + \\
& + c_1 [(10+6B)+(44+12B)e+(86+12B)e^2 + [(34+6B)c_1 + \\
& + (40+6B)c_1 e + (23+3B)c_1 e^2] \cos(2\omega)] \text{sen}(2\omega) \frac{E^4}{6} + \\
& + [(272+960B+480B^2)+(68+240B+120B^2)c_1^2+(484+540B+ \\
& + 60B^2)e^2+(121+135B+15B^2)c_1^2 e^2+(4+60B+60B^2)e^4 + \\
& + (1+15B+15B^2)c_1^2 e^4 + [(1936+2160B+240B^2)c_1+(11776+ \\
& \tag{6.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 6480B + 240B^2)c_1e + (30248 + 9240B + 120B^2)c_1e^2]\cos(2\omega) + \\
& + [(5764 + 1980B + 60B^2)c_1^2 + (7744 + 2100B + 60B^2)c_1^2e + \\
& + (4922 + 1110B + 30B^2)c_1^2e^2]\cos(4\omega)]\frac{E^5}{1920} + O(E^6)\} + \\
& - \frac{1}{2} \frac{\delta_B ak}{e} \left\{ e \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) \exp(-\beta a) + \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) \left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{e^4}{4} \right) + \right. \\
& + \left. \left(1 + e - \frac{e^2}{2} \right) \left(c_1 \cos(2\omega) + \frac{c_1^2}{4} \cos(4\omega) \right) + \right. \\
& - c_1 [2(1 + 2e + e^2) + c_1(2 + 2e + 3e^2) \cos(2\omega)] \text{sen}(2\omega) E + \\
& + [(1 + B)(4 + c_1^2)(-4 + e^4) + (20 + 4B)e^2 + (5 + B)c_1^2e^2 + \\
& - [(80 + 16B)c_1 + (192 + 16B)c_1e + (200 + 8B)c_1e^2]\cos(2\omega) + \\
& - [(68 + 4B)c_1^2 + (64 + 4B)c_1^2e + (218 - 2B)c_1^2e^2]\cos(4\omega)]\frac{E^2}{32} + \\
& + c_1 [(14 + 6B) + (40 + 12B)e + (56 + 6B)e^2 + [(38 + 6B)c_1 + \\
& + (32 + 6B)c_1e + (177 + 9B)c_1e^2]\cos(2\omega)] \text{sen}(2\omega) \frac{E^3}{6} + \\
& + [(16 + 112B + 48B^2) + (4 + 28B + 12B^2)c_1^2 - (164 + 124B + 12B^2)e^2 + \\
& - (41 + 31B + 3B^2)c_1^2e^2 - (4 + 28B + 12B^2)e^4 - (1 + 7B + 3B^2)c_1^2e^4 + \\
& + [(656 + 496B + 48B^2)c_1 + (2304 + 1168B + 48B^2)c_1e + (3992 + \\
& + 1192B - 24B^2)c_1e^2]\cos(2\omega) + [(1412 + 412B + 12B^2)c_1^2 + (1024 + \\
& + 388B + 12B^2)c_1^2e + (8342 + 1306B - 6B^2)c_1^2e^2]\cos(4\omega)]\frac{E^4}{384} + \\
& - c_1 [(122 + 150B + 30B^2) + (544 + 420B + 60B^2)e + \\
& + (1142 + 570B + 30B^2)e^2 + [(842 + 390B + 30B^2)c_1 + \\
& + (512 + 330B + 30B^2)c_1e + \\
& + (5913 + 1785B + 45B^2)c_1e^2]\cos(2\omega)] \text{sen}(2\omega) \frac{E^5}{120} + O(E^6) \left. \right\}
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Com essas expressões torna-se possível prever a variação orbital induzida por uma passagem atmosférica, através das variações dos cinco elementos orbitais aqui apresentados. Essas equações são mais completas que as encontradas na literatura porque incluem a perturbação devida à sustentação, além do arrasto atmosférico. Entretanto, sua aplicação é limitada a pequenos ângulos dentro da atmosfera, pois essa era a premissa para as expansões em série de Taylor iniciais.

6.4 Validação Numérica

Nas simulações numéricas aqui realizadas, o limite da atmosfera sensível foi fixado em uma altitude igual a 200 km. No entanto, na solução analítica, a variável “limite da atmosfera” não existe nas expressões e, assim, para integrar dentro da atmosfera é preciso limitá-la através do intervalo de anomalias verdadeiras (θ) entre os pontos de entrada e saída (Figura 6.1). Devido a esse fato, um tipo diferente de solução numérica foi encontrado que leva em consideração a anomalia verdadeira no ponto de entrada na atmosfera e supõe que o satélite vai permanecer dentro da atmosfera por um arco de longitude igual a duas vezes o valor desta anomalia. Desta forma, um dos resultados numéricos encontrados apresenta o mesmo arco de passagem atmosférica que o resultado analítico, conforme desejado.

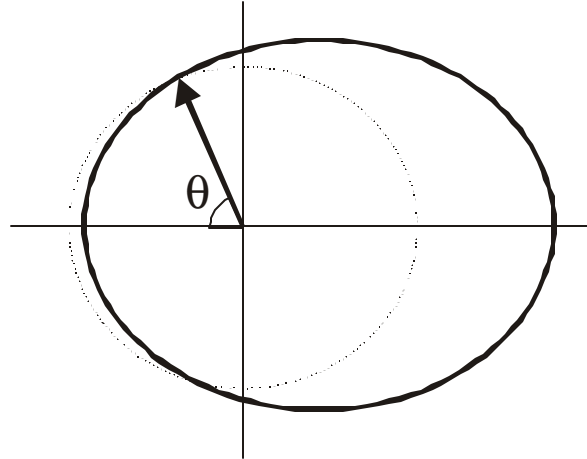


Fig. 6.1 – Ângulo θ (anomalia verdadeira) da travessia atmosférica.

As variações em semi-eixo maior e inclinação devidas à passagem do satélite através da atmosfera obtidas pelo método analítico foram, então, comparadas com as encontradas por simulações numéricas. Os resultados são mostrados nas Tabelas 6.1 a 6.4 e as órbitas iniciais utilizadas são similares à da Tabela 4.2, a menos dos valores para as inclinações orbitais que estão indicados. As soluções numéricas são apresentadas de quatro formas diferentes. A primeira, chamada de “Numérica”, está relacionada ao problema numérico resultante da integração das equações de movimento durante o tempo que o satélite permanece abaixo de uma altitude de 200 km; a segunda, “Numérica 2θ ”, apresenta os valores numéricos resultantes da integração das equações de movimento dentro da atmosfera durante o intervalo de tempo que o satélite viaja um arco de longitude igual a duas vezes o ângulo entre a entrada e o perigeu da solução analítica; a terceira solução é semelhante à primeira, considerando, porém, a ação da sustentação, e é chamada de “Numérica Sust.”; da mesma forma, a quarta solução, “Numérica 2θ Sust.”, tem as mesmas características da segunda solução além de considerar a sustentação.

TABELA 6.1 – VARIACÃO EM SEMI-EIXO MAIOR (km) PARA $\alpha = \sigma = 0,0^\circ$

Perigeu (km)	Analítica 6ª ordem	Analítica 8ª ordem	Numérica	Numérica 2θ	Numérica Sust.	Numérica 2θ Sust.
$i = 0^\circ$						
200	$-2,16 \times 10^{-3}$	$-2,16 \times 10^{-3}$	$-2,47 \times 10^{-3}$	$-2,05 \times 10^{-3}$	$-2,47 \times 10^{-3}$	$-2,05 \times 10^{-3}$
170	$-6,33 \times 10^{-2}$	$-6,22 \times 10^{-2}$	$-5,73 \times 10^{-2}$	$-4,96 \times 10^{-2}$	$-5,73 \times 10^{-2}$	$-4,96 \times 10^{-2}$
130	$-8,47 \times 10^{-1}$	$-6,48 \times 10^{-1}$	$-4,35 \times 10^{-1}$	$-4,16 \times 10^{-1}$	$-4,35 \times 10^{-1}$	$-4,16 \times 10^{-1}$
100	-76,82	-30,85	-19,11	-19,07	-19,11	-19,07
$i = 30^\circ$						
200	$-2,17 \times 10^{-3}$	$-2,17 \times 10^{-3}$	$-2,51 \times 10^{-3}$	$-2,08 \times 10^{-3}$	$-2,51 \times 10^{-3}$	$-2,08 \times 10^{-3}$
170	$-6,38 \times 10^{-2}$	$-6,27 \times 10^{-2}$	$-5,83 \times 10^{-2}$	$-5,04 \times 10^{-2}$	$-5,83 \times 10^{-2}$	$-5,04 \times 10^{-2}$
130	$-8,53 \times 10^{-1}$	$-6,53 \times 10^{-1}$	$-4,42 \times 10^{-1}$	$-4,22 \times 10^{-1}$	$-4,42 \times 10^{-1}$	$-4,22 \times 10^{-1}$
100	-77,43	-31,09	-19,42	-19,37	-19,42	-19,37
$i = 60^\circ$						
200	$-2,22 \times 10^{-3}$	$-2,22 \times 10^{-3}$	$-2,60 \times 10^{-3}$	$-2,15 \times 10^{-3}$	$-2,60 \times 10^{-3}$	$-2,15 \times 10^{-3}$
170	$-6,52 \times 10^{-2}$	$-6,41 \times 10^{-2}$	$-6,08 \times 10^{-2}$	$-5,26 \times 10^{-2}$	$-6,08 \times 10^{-2}$	$-5,26 \times 10^{-2}$
130	$-8,72 \times 10^{-1}$	$-6,67 \times 10^{-1}$	$-4,61 \times 10^{-1}$	$-4,41 \times 10^{-1}$	$-4,61 \times 10^{-1}$	$-4,41 \times 10^{-1}$
100	-79,09	-31,76	-20,26	-20,21	-20,26	-20,21
$i = 90^\circ$						
200	$-2,28 \times 10^{-3}$	$-2,29 \times 10^{-3}$	$-2,74 \times 10^{-3}$	$-2,26 \times 10^{-3}$	$-2,74 \times 10^{-3}$	$-2,26 \times 10^{-3}$
170	$-6,71 \times 10^{-2}$	$-6,59 \times 10^{-2}$	$-6,44 \times 10^{-2}$	$-5,57 \times 10^{-2}$	$-6,44 \times 10^{-2}$	$-5,57 \times 10^{-2}$
130	$-8,97 \times 10^{-1}$	$-6,86 \times 10^{-1}$	$-4,88 \times 10^{-1}$	$-4,66 \times 10^{-1}$	$-4,88 \times 10^{-1}$	$-4,66 \times 10^{-1}$
100	-81,37	-32,68	-21,42	-21,38	-21,42	-21,38

TABELA 6.2 – VARIAÇÃO EM INCLINAÇÃO (graus) PARA $\alpha = \sigma = 0,0^\circ$

Perigeu (km)	Analítica 6ª ordem	Analítica 8ª ordem	Numérica	Numérica 2 θ	Numérica Sust.	Numérica 2 θ Sust.
$i = 0^\circ$						
200	$-4,60 \times 10^{-11}$	$-4,60 \times 10^{-11}$	$-2,73 \times 10^{-9}$	$3,71 \times 10^{-11}$	$-2,73 \times 10^{-9}$	$3,71 \times 10^{-11}$
170	$-2,31 \times 10^{-11}$	$-8,73 \times 10^{-10}$	$9,15 \times 10^{-10}$	$3,71 \times 10^{-11}$	$9,15 \times 10^{-10}$	$3,71 \times 10^{-11}$
130	$-1,81 \times 10^{-11}$	$-5,20 \times 10^{-11}$	$9,15 \times 10^{-10}$	$-1,06 \times 10^{-9}$	$9,15 \times 10^{-10}$	$-1,06 \times 10^{-9}$
100	$-1,89 \times 10^{-9}$	$-1,59 \times 10^{-7}$	$-2,73 \times 10^{-9}$	$-4,33 \times 10^{-8}$	$-2,73 \times 10^{-9}$	$-4,33 \times 10^{-8}$
$i = 30^\circ$						
200	$-1,32 \times 10^{-7}$	$-1,32 \times 10^{-7}$	$-1,44 \times 10^{-7}$	$-1,15 \times 10^{-7}$	$-1,44 \times 10^{-7}$	$-1,15 \times 10^{-7}$
170	$-6,58 \times 10^{-8}$	$-2,52 \times 10^{-6}$	$-3,80 \times 10^{-6}$	$-3,30 \times 10^{-6}$	$-3,80 \times 10^{-6}$	$-3,30 \times 10^{-6}$
130	$-5,17 \times 10^{-7}$	$-1,50 \times 10^{-5}$	$-2,86 \times 10^{-5}$	$-2,74 \times 10^{-5}$	$-2,86 \times 10^{-5}$	$-2,74 \times 10^{-5}$
100	$-5,41 \times 10^{-5}$	$-4,60 \times 10^{-4}$	$-1,25 \times 10^{-3}$	$-1,25 \times 10^{-3}$	$-1,25 \times 10^{-3}$	$-1,25 \times 10^{-3}$
$i = 60^\circ$						
200	$-2,25 \times 10^{-7}$	$-2,35 \times 10^{-7}$	$-2,55 \times 10^{-7}$	$-2,04 \times 10^{-7}$	$-2,55 \times 10^{-7}$	$-2,04 \times 10^{-7}$
170	$-1,13 \times 10^{-7}$	$-4,46 \times 10^{-6}$	$-6,74 \times 10^{-6}$	$-5,83 \times 10^{-6}$	$-6,74 \times 10^{-6}$	$-5,83 \times 10^{-6}$
130	$-8,87 \times 10^{-7}$	$-2,66 \times 10^{-5}$	$-5,05 \times 10^{-5}$	$-4,84 \times 10^{-5}$	$-5,05 \times 10^{-5}$	$-4,84 \times 10^{-5}$
100	$-9,27 \times 10^{-5}$	$-8,15 \times 10^{-4}$	$-2,22 \times 10^{-3}$	$-2,21 \times 10^{-3}$	$-2,22 \times 10^{-3}$	$-2,21 \times 10^{-3}$
$i = 90^\circ$						
200	$-2,56 \times 10^{-7}$	$-2,79 \times 10^{-7}$	$-3,03 \times 10^{-7}$	$-2,43 \times 10^{-7}$	$-3,03 \times 10^{-7}$	$-2,43 \times 10^{-7}$
170	$-1,28 \times 10^{-7}$	$-5,30 \times 10^{-6}$	$-8,00 \times 10^{-6}$	$-6,93 \times 10^{-6}$	$-8,00 \times 10^{-6}$	$-6,93 \times 10^{-6}$
130	$-1,00 \times 10^{-6}$	$-3,16 \times 10^{-5}$	$-6,00 \times 10^{-5}$	$-5,75 \times 10^{-5}$	$-6,00 \times 10^{-5}$	$-5,75 \times 10^{-5}$
100	$-1,06 \times 10^{-4}$	$-9,68 \times 10^{-4}$	$-2,64 \times 10^{-3}$	$-2,63 \times 10^{-3}$	$-2,64 \times 10^{-3}$	$-2,63 \times 10^{-3}$

Nas Tabelas 6.1 e 6.2 pode-se notar que:

- i) Com o decréscimo do perigeu, a variação sofrida pelo semi-eixo maior aumenta. Este resultado é esperado, pois um raio de perigeu menor significa que o satélite está sujeito a uma influência maior da atmosfera, dado que ele permanece mais tempo dentro da atmosfera e a densidade desta cresce até o veículo atingir o perigeu;

- ii) Os efeitos da manobra “Numérica 2θ ” são menores que os da “Numérica” porque a atmosfera provoca um decaimento na órbita e, na solução “Numérica”, o satélite viaja por um ângulo maior do que 2θ , pois utiliza-se o limite de 200 km para a atmosfera sensível e isso torna sua travessia mais longa;
- iii) As equações analíticas foram encontradas supondo que o ângulo θ não é grande. Assim, com o decréscimo do perigeu (e o conseqüente aumento do ângulo θ), os resultados analíticos começam a se desviar dos numéricos, pois a teoria analítica não tem mais a mesma validade que nas altitudes superiores. De qualquer forma os resultados para a solução analítica de 8ª ordem são, na maioria dos casos, mais precisos que os de 6ª.

Estes exemplos foram encontrados para ângulos de ataque α e de rolamento σ iguais a zero. Em conseqüência disto, os valores calculados nas manobras com sustentação são semelhantes aos encontrados nas soluções sem sustentação, uma vez que este efeito varia com $\sin 2\alpha$. Os resultados das Tabelas 6.3, 6.4 e 6.5 foram encontrados usando-se $\alpha = \sigma = 40^\circ$, aumentando-se o efeito da sustentação nas simulações numéricas.

TABELA 6.3 – VARIAÇÃO EM SEMI-EIXO MAIOR (km) PARA $\alpha = \sigma = 40^\circ$

Perigeu (km)	Analítica 6ª ordem	Analítica 8ª ordem	Numérica	Numérica 2θ	Numérica Sust.	Numérica 2θ Sust.
$i = 0^\circ$						
200	$-7,60 \times 10^{-3}$	$-7,61 \times 10^{-3}$	$-7,82 \times 10^{-3}$	$-6,33 \times 10^{-3}$	$-7,82 \times 10^{-3}$	$-6,33 \times 10^{-3}$
170	$-2,23 \times 10^{-1}$	$-2,19 \times 10^{-1}$	$-2,01 \times 10^{-1}$	$-1,74 \times 10^{-1}$	$-2,01 \times 10^{-1}$	$-1,74 \times 10^{-1}$
130	-2,99	-2,28	-1,53	-1,47	-1,53	-1,46
100	270,92	108,80	-67,52	-67,37	-58,73	-58,62
$i = 60^\circ$						
200	$-7,83 \times 10^{-3}$	$-7,84 \times 10^{-3}$	$-8,28 \times 10^{-3}$	$-6,70 \times 10^{-3}$	$-8,88 \times 10^{-3}$	$-7,18 \times 10^{-3}$
170	$-2,30 \times 10^{-1}$	$-2,26 \times 10^{-1}$	$-2,14 \times 10^{-1}$	$-1,85 \times 10^{-1}$	$-2,29 \times 10^{-1}$	$-1,98 \times 10^{-1}$
130	-3,08	-2,35	-1,63	-1,55	-1,74	-1,66
100	278,95	112,03	-51,79	-71,43	-66,34	-66,22

TABELA 6.4 – VARIAÇÃO EM INCLINAÇÃO (graus) PARA $\alpha = \sigma = 40^\circ$
SEM SUSTENTAÇÃO

Perigeu (km)	Analítica 6ª ordem	Analítica 8ª ordem	Numérica	Numérica 2θ
$i = 0^\circ$				
200	$-1,62 \times 10^{-10}$	$-1,62 \times 10^{-10}$	$-2,73 \times 10^{-9}$	$3,71 \times 10^{-11}$
170	$-8,14 \times 10^{-12}$	$-3,08 \times 10^{-9}$	$9,15 \times 10^{-10}$	$-3,27 \times 10^{-10}$
130	$-6,39 \times 10^{-11}$	$-1,83 \times 10^{-8}$	$-2,73 \times 10^{-9}$	$-3,24 \times 10^{-9}$
100	$-6,69 \times 10^{-9}$	$-5,62 \times 10^{-7}$	$-1,37 \times 10^{-8}$	$-1,55 \times 10^{-7}$
$i = 60^\circ$				
200	$-7,94 \times 10^{-7}$	$-8,30 \times 10^{-7}$	$-9,00 \times 10^{-7}$	$-7,21 \times 10^{-7}$
170	$-3,98 \times 10^{-7}$	$-1,57 \times 10^{-5}$	$-2,38 \times 10^{-5}$	$-2,05 \times 10^{-5}$
130	$-3,13 \times 10^{-6}$	$-9,37 \times 10^{-5}$	$-1,78 \times 10^{-4}$	$-1,71 \times 10^{-4}$
100	$-3,27 \times 10^{-4}$	$-2,87 \times 10^{-3}$	$-7,92 \times 10^{-3}$	$-7,90 \times 10^{-3}$

TABELA 6.5 – VARIAÇÃO EM INCLINAÇÃO (graus) PARA $\alpha = \sigma = 40^\circ$
COM SUSTENTAÇÃO

Perigeu (km)	Analítica com Sustentação	Numérica com Sustentação	Numérica 2 θ , com Sust.
$i = 0^\circ$			
200	$2,20 \times 10^{-5}$	$2,56 \times 10^{-5}$	$2,05 \times 10^{-5}$
170	$6,41 \times 10^{-4}$	$6,84 \times 10^{-4}$	$5,92 \times 10^{-4}$
130	$8,61 \times 10^{-3}$	$5,18 \times 10^{-3}$	$4,96 \times 10^{-3}$
100	$7,88 \times 10^{-1}$	$2,00 \times 10^{-1}$	$2,00 \times 10^{-1}$
$i = 60^\circ$			
200	$2,27 \times 10^{-5}$	$2,63 \times 10^{-5}$	$2,10 \times 10^{-5}$
170	$6,60 \times 10^{-4}$	$7,02 \times 10^{-4}$	$6,07 \times 10^{-4}$
130	$8,86 \times 10^{-3}$	$5,31 \times 10^{-3}$	$5,09 \times 10^{-3}$
100	$8,11 \times 10^{-1}$	$2,05 \times 10^{-1}$	$2,05 \times 10^{-1}$

A partir destes resultados, torna-se visível que a variação em inclinação tem uma dependência muito forte da sustentação e que a variação do semi-eixo maior praticamente não se altera com esta. Este resultado está de acordo com o esperado, uma vez que a expressão para a variação do semi-eixo maior depende apenas da componente da força perturbadora na direção da velocidade, ou seja, teoricamente o semi-eixo varia com o arrasto atmosférico e não com a sustentação. Já, a inclinação orbital é fortemente dependente da sustentação, pois em sua expressão aparece a componente normal da força perturbadora. A diferença entre os resultados simulados para a variação em inclinação com e sem sustentação é significativa o suficiente para se considerar os efeitos desta.

Os valores encontrados para a variação da inclinação são pequenos em decorrência da manobra escolhida. Para ser possível realizar uma comparação entre a solução analítica e os resultados numéricos, é necessário considerar as limitações da teoria analítica. Segundo essa, a permanência na atmosfera deve ser a mais rápida possível, para garantir

que a anomalia verdadeira seja pequena. Com passagens através de uma camada tão tênue da atmosfera as variações dos elementos orbitais não poderiam ser grandes. Entretanto, os valores encontrados são significativos e suficientes para a realização das análises aqui apresentadas.

Esses cálculos foram realizados também para os outros elementos orbitais: excentricidade e , argumento do perigeu ω e longitude do nodo ascendente Ω . As Tabelas 6.6, 6.8 e 6.10 mostram os valores das variações destes elementos para os casos onde o ângulo de ataque e o de rolamento são iguais a zero, ou seja, sem sustentação. Já as Tabelas 6.7, 6.9 e 6.11 mostram os valores para a variação destes para os casos onde estes ângulos são iguais a 40° e a sustentação é considerada.

As expressões analíticas desenvolvidas podem ser consideradas equivalentes aos resultados numéricos, quando a altitude do perigeu é próxima do limite da atmosfera. Assim, as Equações (6.6), (6.7), (6.8), (6.9) e (6.19) foram validadas para as camadas mais altas da atmosfera. As Equações (6.20), (6.21), (6.22), (6.23) e (6.24), que representam a expansão até a 8ª ordem, apresentam resultados mais precisos na maioria dos casos. A limitação de aplicação destas expressões se deve às condições iniciais de validade impostas por King-Hele (1987). Segundo ele, as expressões são válidas para excentricidades pequenas ($e < 0,2$).

TABELA 6.6 – VARIAÇÃO EM EXCENTRICIDADE PARA $\alpha = \sigma = 0,0^\circ$

SEM SUSTENTAÇÃO

Perigeu (km)	Analítica 6ª ordem	Analítica 8ª ordem	Numérica	Numérica 2θ
$i = 0^\circ$				
200	$-2,60 \times 10^{-7}$	$-2,60 \times 10^{-7}$	$-2,37 \times 10^{-7}$	$-1,96 \times 10^{-7}$
170	$-7,63 \times 10^{-6}$	$-7,50 \times 10^{-6}$	$-5,46 \times 10^{-6}$	$-4,73 \times 10^{-6}$
130	$-5,94 \times 10^{-5}$	$-7,77 \times 10^{-5}$	$-4,14 \times 10^{-5}$	$-3,96 \times 10^{-5}$
100	$-3,58 \times 10^{-3}$	$-3,61 \times 10^{-3}$	$-1,83 \times 10^{-3}$	$-1,82 \times 10^{-3}$
$i = 30^\circ$				
200	$-2,62 \times 10^{-7}$	$-2,62 \times 10^{-7}$	$-2,40 \times 10^{-7}$	$-1,99 \times 10^{-7}$
170	$-7,69 \times 10^{-6}$	$-7,56 \times 10^{-6}$	$-5,55 \times 10^{-6}$	$-4,81 \times 10^{-6}$
130	$-5,99 \times 10^{-5}$	$-7,83 \times 10^{-5}$	$-4,20 \times 10^{-5}$	$-4,02 \times 10^{-5}$
100	$-3,60 \times 10^{-3}$	$-3,64 \times 10^{-3}$	$-1,85 \times 10^{-3}$	$-1,85 \times 10^{-3}$
$i = 60^\circ$				
200	$-2,68 \times 10^{-7}$	$-2,68 \times 10^{-7}$	$-2,49 \times 10^{-7}$	$-2,06 \times 10^{-7}$
170	$-7,86 \times 10^{-6}$	$-7,72 \times 10^{-6}$	$-5,80 \times 10^{-6}$	$-5,02 \times 10^{-6}$
130	$-6,12 \times 10^{-5}$	$-7,99 \times 10^{-5}$	$-4,37 \times 10^{-5}$	$-4,20 \times 10^{-5}$
100	$-3,68 \times 10^{-3}$	$-3,72 \times 10^{-3}$	$-1,93 \times 10^{-3}$	$-1,93 \times 10^{-3}$
$i = 90^\circ$				
200	$-2,76 \times 10^{-7}$	$-2,76 \times 10^{-7}$	$-2,62 \times 10^{-7}$	$-2,16 \times 10^{-7}$
170	$-8,08 \times 10^{-6}$	$-7,94 \times 10^{-6}$	$-6,13 \times 10^{-6}$	$-5,31 \times 10^{-6}$
130	$-6,29 \times 10^{-5}$	$-8,23 \times 10^{-5}$	$-4,64 \times 10^{-5}$	$-4,44 \times 10^{-5}$
100	$-3,79 \times 10^{-3}$	$-3,82 \times 10^{-3}$	$-2,05 \times 10^{-3}$	$-2,04 \times 10^{-3}$

TABELA 6.7 – VARIAÇÃO EM EXCENTRICIDADE PARA $\alpha = \sigma = 40^\circ$

COM SUSTENTAÇÃO

Perigeu (km)	Analítica com Sustentação	Numérica com Sustentação	Numérica 2 θ , com Sust.
$i = 0^\circ$			
200	$-1,12 \times 10^{-6}$	$-2,21 \times 10^{-6}$	$-1,78 \times 10^{-6}$
170	$-2,95 \times 10^{-5}$	$-2,01 \times 10^{-5}$	$-1,76 \times 10^{-5}$
130	$-4,99 \times 10^{-4}$	$-1,60 \times 10^{-4}$	$-1,53 \times 10^{-4}$
100	$-5,87 \times 10^{-2}$	$-6,54 \times 10^{-3}$	$-6,53 \times 10^{-3}$
$i = 30^\circ$			
200	$-1,14 \times 10^{-6}$	$-2,38 \times 10^{-6}$	$-1,89 \times 10^{-6}$
170	$-2,97 \times 10^{-5}$	$-2,13 \times 10^{-5}$	$-1,87 \times 10^{-5}$
130	$-5,03 \times 10^{-4}$	$-1,69 \times 10^{-4}$	$-1,63 \times 10^{-4}$
100	$-5,92 \times 10^{-2}$	$-6,92 \times 10^{-3}$	$-6,91 \times 10^{-3}$
$i = 60^\circ$			
200	$-1,16 \times 10^{-6}$	$-2,56 \times 10^{-6}$	$-2,03 \times 10^{-6}$
170	$-3,04 \times 10^{-5}$	$-2,29 \times 10^{-5}$	$-2,01 \times 10^{-5}$
130	$-5,14 \times 10^{-4}$	$-1,82 \times 10^{-4}$	$-1,75 \times 10^{-4}$
100	$-6,05 \times 10^{-2}$	$-7,38 \times 10^{-3}$	$-7,37 \times 10^{-3}$
$i = 90^\circ$			
200	$-1,19 \times 10^{-6}$	$-2,73 \times 10^{-6}$	$-2,20 \times 10^{-6}$
170	$-3,12 \times 10^{-5}$	$-2,45 \times 10^{-5}$	$-2,14 \times 10^{-5}$
130	$-5,28 \times 10^{-4}$	$-1,94 \times 10^{-4}$	$-1,87 \times 10^{-4}$
100	$-6,22 \times 10^{-2}$	$-7,81 \times 10^{-3}$	$-7,80 \times 10^{-3}$

TABELA 6.8 – VARIAÇÃO NO ARGUMENTO DO PERIGEU (graus) PARA

$$\alpha = \sigma = 0,0^\circ \text{ SEM SUSTENTAÇÃO}$$

Perigeu (km)	Analítica 6ª ordem	Analítica 8ª ordem	Numérica	Numérica 20
$i = 0^\circ$				
200	$5,42 \times 10^{-6}$	$5,42 \times 10^{-6}$	$2,50 \times 10^{-7}$	$3,78 \times 10^{-6}$
170	$2,10 \times 10^{-4}$	$1,79 \times 10^{-4}$	$6,67 \times 10^{-7}$	$1,15 \times 10^{-4}$
130	$7,51 \times 10^{-3}$	$9,91 \times 10^{-3}$	$7,89 \times 10^{-7}$	$3,96 \times 10^{-4}$
100	1,45941	1,04255	$2,46 \times 10^{-3}$	$1,39 \times 10^{-3}$
$i = 30^\circ$				
200	$5,85 \times 10^{-6}$	$5,85 \times 10^{-6}$	$2,73 \times 10^{-7}$	$3,87 \times 10^{-6}$
170	$2,26 \times 10^{-4}$	$1,92 \times 10^{-4}$	$6,70 \times 10^{-7}$	$1,17 \times 10^{-4}$
130	$8,21 \times 10^{-3}$	$1,20 \times 10^{-3}$	$7,52 \times 10^{-7}$	$4,03 \times 10^{-4}$
100	1,6024	1,16477	$2,55 \times 10^{-3}$	$1,46 \times 10^{-3}$
$i = 60^\circ$				
200	$6,40 \times 10^{-6}$	$6,40 \times 10^{-6}$	$3,40 \times 10^{-7}$	$4,09 \times 10^{-6}$
170	$2,47 \times 10^{-4}$	$2,09 \times 10^{-4}$	$6,80 \times 10^{-7}$	$1,22 \times 10^{-4}$
130	$9,08 \times 10^{-3}$	$1,44 \times 10^{-3}$	$6,48 \times 10^{-7}$	$4,23 \times 10^{-4}$
100	1,77936	1,31393	$2,80 \times 10^{-3}$	$1,65 \times 10^{-3}$
$i = 90^\circ$				
200	$6,97 \times 10^{-6}$	$6,97 \times 10^{-6}$	$8,62 \times 10^{-8}$	$4,42 \times 10^{-6}$
170	$2,70 \times 10^{-4}$	$2,27 \times 10^{-4}$	$7,04 \times 10^{-7}$	$1,30 \times 10^{-4}$
130	$9,99 \times 10^{-3}$	$1,68 \times 10^{-3}$	$5,04 \times 10^{-7}$	$4,51 \times 10^{-4}$
100	1,96297	1,46748	$3,17 \times 10^{-3}$	$1,93 \times 10^{-3}$

TABELA 6.9 – VARIAÇÃO NO ARGUMENTO DO PERIGEU (graus) PARA

$$\alpha = \sigma = 40^\circ \text{ COM SUSTENTAÇÃO}$$

Perigeu (km)	Analítica com Sustentação	Numérica com Sustentação	Numérica 2 θ , com Sust.
$i = 0^\circ$			
200	$5,70 \times 10^{-4}$	$4,51 \times 10^{-4}$	$2,64 \times 10^{-3}$
170	$2,20 \times 10^{-3}$	$4,38 \times 10^{-3}$	$9,36 \times 10^{-2}$
130	$8,10 \times 10^{-2}$	$2,40 \times 10^{-2}$	$2,13 \times 10^{-1}$
100	15,2872	$6,55 \times 10^{-1}$	$6,24 \times 10^{-1}$
$i = 30^\circ$			
200	$6,14 \times 10^{-4}$	$3,96 \times 10^{-4}$	$3,07 \times 10^{-4}$
170	$2,37 \times 10^{-3}$	$3,57 \times 10^{-3}$	$2,93 \times 10^{-3}$
130	$8,84 \times 10^{-2}$	$2,80 \times 10^{-2}$	$2,62 \times 10^{-2}$
100	16,7578	1,15	1,15
$i = 60^\circ$			
200	$6,71 \times 10^{-4}$	$4,14 \times 10^{-4}$	$3,22 \times 10^{-4}$
170	$2,59 \times 10^{-3}$	$3,73 \times 10^{-3}$	$3,08 \times 10^{-3}$
130	$9,77 \times 10^{-2}$	$2,93 \times 10^{-2}$	$2,75 \times 10^{-2}$
100	18,5805	1,20	1,19
$i = 90^\circ$			
200	$7,32 \times 10^{-4}$	$4,39 \times 10^{-4}$	$3,47 \times 10^{-4}$
170	$2,83 \times 10^{-3}$	$3,95 \times 10^{-3}$	$3,27 \times 10^{-3}$
130	$1,07 \times 10^{-1}$	$3,10 \times 10^{-2}$	$2,91 \times 10^{-2}$
100	20,4728	1,26	1,25

TABELA 6.10 – VARIAÇÃO EM LONGITUDE DO NODO ASCENDENTE (graus)

PARA $\alpha = \sigma = 0,0^\circ$ SEM SUSTENTAÇÃO

Perigeu (km)	Analítica 6ª ordem	Analítica 8ª ordem	Numérica	Numérica 2θ
$i = 0^\circ$				
200	$1,02 \times 10^{-8}$	$1,02 \times 10^{-8}$	$-7,76 \times 10^{-10}$	$2,12 \times 10^{-8}$
170	$9,13 \times 10^{-8}$	$8,21 \times 10^{-8}$	$-6,98 \times 10^{-9}$	$6,93 \times 10^{-7}$
130	$1,93 \times 10^{-6}$	$2,32 \times 10^{-7}$	$-1,08 \times 10^{-8}$	$2,39 \times 10^{-6}$
100	$-2,71 \times 10^{-4}$	$-1,41 \times 10^{-4}$	$-1,40 \times 10^{-5}$	$-7,75 \times 10^{-6}$
$i = 30^\circ$				
200	$1,02 \times 10^{-8}$	$1,02 \times 10^{-8}$	$-6,31 \times 10^{-10}$	$2,15 \times 10^{-8}$
170	$9,16 \times 10^{-8}$	$8,24 \times 10^{-8}$	$-6,90 \times 10^{-9}$	$7,00 \times 10^{-7}$
130	$1,94 \times 10^{-6}$	$2,33 \times 10^{-7}$	$-1,09 \times 10^{-8}$	$2,41 \times 10^{-6}$
100	$-2,72 \times 10^{-4}$	$-1,42 \times 10^{-4}$	$-1,44 \times 10^{-5}$	$-8,06 \times 10^{-6}$
$i = 60^\circ$				
200	$1,04 \times 10^{-8}$	$1,04 \times 10^{-8}$	$-2,18 \times 10^{-10}$	$2,23 \times 10^{-8}$
170	$9,26 \times 10^{-8}$	$8,34 \times 10^{-8}$	$-6,66 \times 10^{-9}$	$7,16 \times 10^{-7}$
130	$1,96 \times 10^{-6}$	$2,35 \times 10^{-7}$	$-1,13 \times 10^{-8}$	$2,47 \times 10^{-6}$
100	$-2,75 \times 10^{-4}$	$-1,43 \times 10^{-4}$	$-1,54 \times 10^{-5}$	$-8,91 \times 10^{-6}$
$i = 90^\circ$				
200	$1,05 \times 10^{-8}$	$1,05 \times 10^{-8}$	$-1,68 \times 10^{-9}$	$2,34 \times 10^{-8}$
170	$9,39 \times 10^{-8}$	$8,45 \times 10^{-8}$	$-6,29 \times 10^{-9}$	$7,37 \times 10^{-7}$
130	$1,99 \times 10^{-6}$	$2,39 \times 10^{-7}$	$-1,17 \times 10^{-8}$	$2,54 \times 10^{-6}$
100	$-2,79 \times 10^{-4}$	$-1,45 \times 10^{-4}$	$-1,68 \times 10^{-5}$	$-1,01 \times 10^{-5}$

TABELA 6.11 – VARIAÇÃO EM LONGITUDE DO NODO ASCENDENTE (graus)

PARA $\alpha = \sigma = 40^\circ$ COM SUSTENTAÇÃO

Perigeu (km)	Analítica com Sustentação	Numérica com Sustentação	Numérica 2 θ , com Sust.
$i = 0^\circ$			
200	$-2,45 \times 10^{-3}$	$6,75 \times 10^{-5}$	$-2,95 \times 10^{-3}$
170	$-9,38 \times 10^{-2}$	$8,73 \times 10^{-4}$	$-9,65 \times 10^{-2}$
130	$-3,49 \times 10^{-1}$	$-3,55 \times 10^{-3}$	$-2,39 \times 10^{-1}$
100	-6,77	$-4,78 \times 10^{-1}$	$-5,06 \times 10^{-1}$
$i = 30^\circ$			
200	$-4,97 \times 10^{-7}$	$9,04 \times 10^{-8}$	$-1,05 \times 10^{-6}$
170	$-1,90 \times 10^{-4}$	$2,03 \times 10^{-7}$	$-3,58 \times 10^{-5}$
130	$-7,09 \times 10^{-3}$	$-2,72 \times 10^{-6}$	$-1,29 \times 10^{-4}$
100	-1,37	$-4,06 \times 10^{-3}$	$-4,29 \times 10^{-3}$
$i = 60^\circ$			
200	$-2,91 \times 10^{-7}$	$2,93 \times 10^{-8}$	$-6,43 \times 10^{-7}$
170	$-1,11 \times 10^{-4}$	$6,02 \times 10^{-8}$	$-2,13 \times 10^{-5}$
130	$-4,15 \times 10^{-3}$	$-1,99 \times 10^{-6}$	$-7,72 \times 10^{-5}$
100	$-8,02 \times 10^{-1}$	$-2,50 \times 10^{-3}$	$-2,63 \times 10^{-3}$
$i = 90^\circ$			
200	$-2,60 \times 10^{-7}$	$5,44 \times 10^{-9}$	$-5,67 \times 10^{-7}$
170	$-9,94 \times 10^{-5}$	$2,61 \times 10^{-8}$	$-1,95 \times 10^{-5}$
130	$-3,70 \times 10^{-3}$	$-1,97 \times 10^{-6}$	$-7,06 \times 10^{-5}$
100	$-7,16 \times 10^{-1}$	$-2,38 \times 10^{-3}$	$-2,50 \times 10^{-3}$

6.5 Outros Resultados

Um tipo de resultado diferente do usual é o gráfico da razão entre a variação em velocidade devida ao decaimento do semi-eixo maior (ΔVa) e a variação em velocidade devida à mudança de inclinação (ΔVi), como uma função do raio do perigeu (r_p). Esses gráficos foram obtidos com simulações numéricas e analíticas.

O objetivo dessa solução é encontrar um método para prever se uma passagem através da atmosfera, que tenha como consequência uma mudança de plano desejada, é economicamente viável, uma vez que a variação em semi-eixo maior decorrente dessa passagem envolve um consumo extra de combustível para corrigir o decaimento orbital. Deseja-se encontrar a relação $\Delta Va/\Delta Vi$. Com um gráfico como esse é possível determinar o custo/benefício relacionado com cada manobra atmosférica.

Ao passar pela atmosfera para realizar uma manobra de mudança de plano orbital, invariavelmente a órbita do satélite sofre um decaimento do semi-eixo maior nem sempre desejado. Como esta consequência é inevitável, a relação $\Delta Va/\Delta Vi$ tenta mostrar se realizar a mudança de plano dentro da atmosfera é vantajoso em comparação com uma única manobra de mudança de plano na órbita inicial circular caracterizada pelo ΔVi .

ΔVa é a expressão para o incremento em velocidade necessário para corrigir o decaimento do semi-eixo maior devido à passagem pela atmosfera. Este incremento é dado por (Chobotov, 1991):

$$\Delta Va = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a_0} \right)} - \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a_0 - \Delta a} \right)} \quad (6.41)$$

em que r_p é o raio do perigeu da órbita que atravessa a atmosfera e a_0 o semi-eixo maior desta órbita antes da passagem pela atmosfera.

ΔVi é a expressão para a variação em velocidade necessária para obter-se uma variação em inclinação Δi utilizando-se um incremento impulsivo na órbita inicial circular. Sua expressão, de acordo com o Capítulo 3, é dada por:

$$\Delta Vi = 2\sqrt{\frac{\mu}{R_c}} \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta i}{2}\right) \quad (6.42)$$

em que R_c é o raio da órbita inicial circular.

As Figuras 6.2 a 6.5 mostram os gráficos encontrados para a relação $\Delta Va/\Delta Vi$ para diferentes valores de semi-eixo maior da órbita inicial, em função do raio do perigeu. Do lado esquerdo encontram-se os gráficos relativos às simulações numéricas, enquanto que, do lado direito, encontram-se os resultados da formulação analítica. Esses resultados foram encontrados utilizando-se as Equações (6.41) e (6.42), entretanto os valores de Δa e Δi foram calculados analiticamente com as expressões (6.20) e (6.37), respectivamente, considerando, assim, o efeito aerodinâmico. A solução numérica é obtida integrando-se as Equações de movimento (4.1) a (4.3).

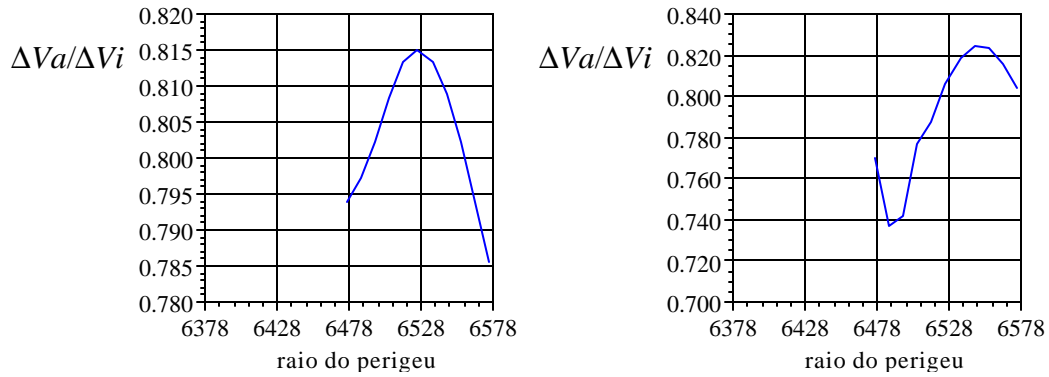


Fig. 6.2 - $\Delta Va/\Delta Vi$ como uma função de r_p (km) para $R_C = 7.000$ km. Numérico vs. Analítico.

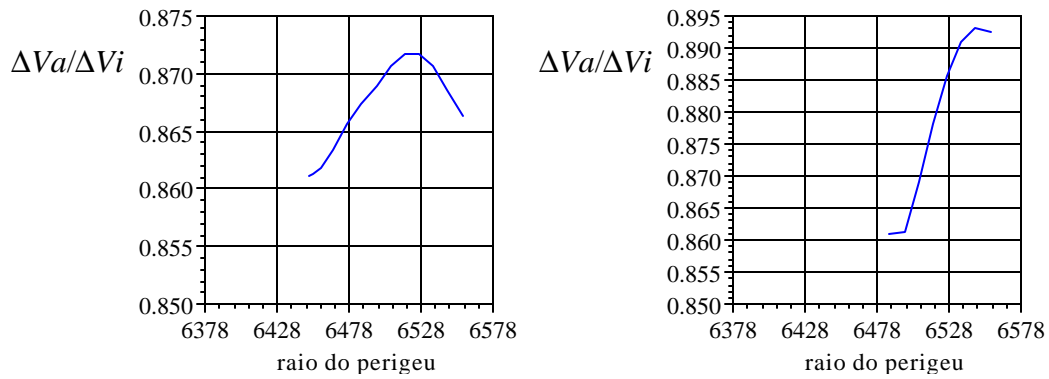


Fig. 6.3 - $\Delta Va/\Delta Vi$ como uma função de r_p (km) para $R_C = 8.000$ km. Numérico vs. Analítico.

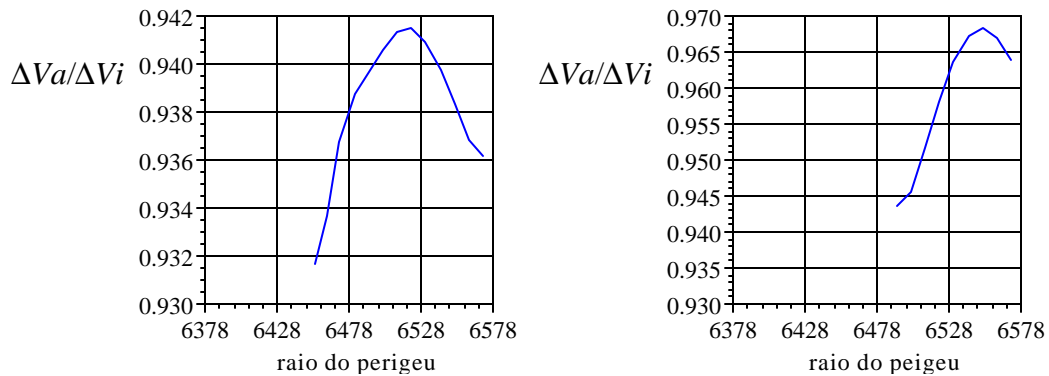


Fig. 6.4 - $\Delta Va/\Delta Vi$ como uma função de r_p (km) para $R_C = 9.000$ km. Numérico vs. Analítico.

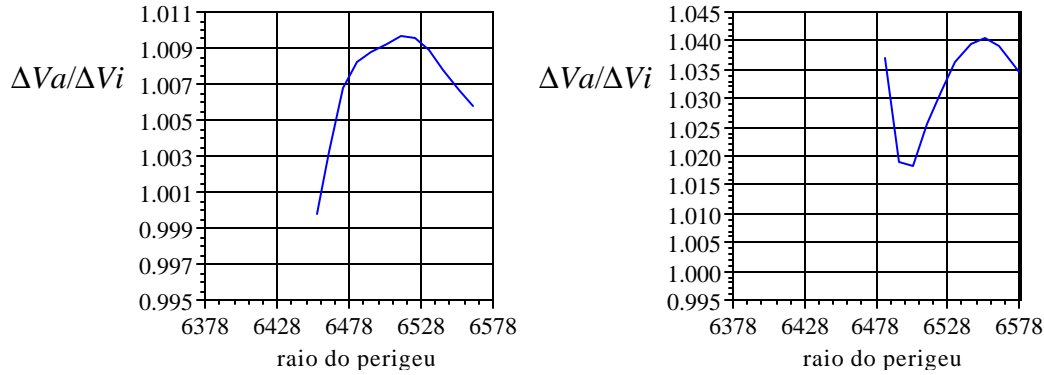


Fig. 6.5 - $\Delta Va/\Delta Vi$ como uma função de r_p (km) para $R_c = 10.000$ km. Numérico vs. Analítico.

Nessas figuras, é importante notar que o valor 1 para a relação $\Delta Va/\Delta Vi$ é o limite entre uma manobra economicamente viável e outra não. Em outras palavras, quando $\Delta Va/\Delta Vi$ for maior do que 1, a variação em velocidade necessária para corrigir o efeito da atmosfera sobre o semi-eixo maior irá superar a variação em velocidade necessária para realizar a mudança de plano orbital fora da atmosfera e, desta forma, a manobra não é desejável. Por outro lado, quando $\Delta Va/\Delta Vi < 1$, como nos casos das Figuras (6.2), (6.3), (6.4) e em parte da (6.5), a manobra é indicada, pois a atmosfera provocará a mudança de plano sem grandes perdas de semi-eixo maior.

Outro parâmetro importante é a influência do raio da órbita inicial R_c . Pode-se perceber que, para valores pequenos de R_c , a manobra atmosférica é vantajosa. Isto acontece porque a manobra de mudança de plano fora da atmosfera é tão mais barata quanto mais distante do centro de massa ela for executada.

A variação em função do raio do perigeu mostra um comportamento quase parabólico, decrescendo nos 50 km superiores da atmosfera e aumentando de 100 a 150 km de altitude. Isto significa que, se a manobra for realizada nos primeiros 50 km de profundidade da atmosfera, sua eficiência aumentará com o aumento no número de passagens pela atmosfera. Por outro lado, se os vínculos (tais como os relacionados com

as variações térmicas suportadas) permitirem que a passagem se realize mais profundamente, a eficiência aumenta quando se reduz o número de passagens. Assim, para responder à questão sobre o número ótimo de passagens, é necessário considerar outros vínculos.

Pode-se notar também nestas figuras que todas apresentam um valor máximo em torno do raio do perigeu igual a 6500 km. Este valor corresponde a uma altitude de, aproximadamente, 120 km. Segundo Martin (1966) e Regan e Anandakrishnan (1993), nessa altitude a atmosfera terrestre passa por mudanças críticas em suas características. Essa variação, que se dá principalmente sobre a temperatura e o peso molecular, provoca um fenômeno conhecido como limite de inversão de velocidade. O comportamento quase parabólico das Figs. 6.2 a 6.5 está associado a esse fenômeno.

O modelo analítico é limitado a pequenos ângulos dentro da atmosfera, ou seja, passagens rápidas e não muito profundas. Assim, esperava-se que os resultados se mostrassem de acordo apenas nos pontos mais altos da atmosfera (canto superior direito dos gráficos, correspondente a valores altos de perigeu da órbita que atravessa a atmosfera). A reprodução do comportamento das curvas mostra que o modelo analítico é válido nestas camadas mais altas. Para valores de perigeu mais profundos os resultados são discrepantes. Os pontos que correspondem a estes valores de perigeu foram retirados dos gráficos para garantir a escala e tornar possíveis as comparações.

Nesta análise está sendo considerada apenas a variação em semi-eixo maior decorrente da passagem pela atmosfera. Os gastos de combustível necessários para transferir o satélite da órbita inicial circular para a trajetória atmosférica e trazê-lo de volta não foram calculados nesta etapa. Esta é uma análise para saber apenas se valeria a pena realizar a manobra sabendo-se que a atmosfera vai causar mudanças orbitais não desejadas, sendo a mais séria destas sobre o semi-eixo maior.

No Capítulo 4, encontram-se os resultados das simulações numéricas das manobras necessárias para transferir o satélite para uma órbita que atravessasse a atmosfera terrestre. Através dos gráficos mostrados naquele capítulo é possível avaliar se uma manobra completa de mudança de plano orbital utilizando a atmosfera é economicamente viável e atinge os objetivos desejados (e.g. variação em inclinação de 15°). Juntando-se às soluções analíticas aqui apresentadas, pode-se avaliar se uma passagem mais profunda pela atmosfera é vantajosa em comparação com várias passagens rasas. Além disso, de acordo com os gráficos das Figuras 6.2 a 6.5, espera-se que uma passagem mais rasa seja mais econômica que uma mais profunda, aumentando-se assim as expectativas de que múltiplas passagens pela alta atmosfera seja o melhor caso.

Segundo Ma et al. (1997), para uma mesma variação de velocidade, uma manobra atmosférica com múltiplas passagens produz exatamente a mesma mudança de plano que uma passagem única. A vantagem das múltiplas passagens recai sobre o aquecimento e a desaceleração sofridos pelo veículo ao encontrar a alta atmosfera. Entretanto, o tempo de duração da manobra aumenta consideravelmente.

A possibilidade de se avaliar a realização da manobra no que concerne aos vínculos térmicos do problema será considerada no próximo capítulo.

CAPÍTULO 7

VÍNCULOS TÉRMICOS

O problema de transferir veículos espaciais de uma órbita a outra com mudança de plano pode ter diversas soluções. O caso mais específico de mudanças sinérgicas de plano (utilizando-se a atmosfera) pode diminuir o número de soluções, mas ainda assim, não se obtém, na maioria dos casos, uma única solução. Mais indicado do que procurar pela solução única, é determinar a solução que apresente um desempenho melhor e/ou mais segurança do que as outras.

O índice de desempenho mais interessante é o que tem sido discutido até o momento: a massa final m_f que reflete o consumo de combustível. Maximizando m_f (ou minimizando a velocidade característica), a quantidade de combustível consumida durante a transferência é minimizada. A massa de combustível necessária para realizar uma manobra orbital está diretamente relacionada com o custo da missão.

Em se tratando de manobras atmosféricas a massa total do veículo pode ser calculada por (em que m representa massa):

$$m_{total} = m_{de\ combustível} + m_{da\ carga\ útil} + m_{da\ estrutura\ com\ proteção\ térmica}$$

Assim, para que a manobra aeroassistida seja vantajosa, a economia em combustível (massa de combustível) deve ser maior do que o aumento em material para proteção térmica necessário para a realização de vôo trans-atmosférico.

Infelizmente, não é uma tarefa trivial encontrar uma relação entre as propriedades de uma trajetória trans-atmosférica e a massa necessária para uma proteção estrutural e térmica. Entretanto, alguns parâmetros que determinam a capacidade de controle

aerodinâmico e a influência de acelerações e aquecimento sobre o veículo podem ser determinados.

Os aumentos das taxas de aquecimento e de desaceleração são alguns dos principais efeitos sofridos pelo satélite ao atravessar uma atmosfera planetária. Ambos são mais severos quando ocorre uma combinação de densidades atmosféricas altas com grandes velocidades e são extremamente dependentes das condições iniciais da entrada e das características físicas do veículo.

Em se tratando de vínculos térmicos, uma introdução ao estudo do comportamento de um veículo deslocando-se em um gás rarefeito se faz necessária para a análise da transferência de calor nas camadas mais altas da atmosfera.

7.1 Meio Rarefeito

O voo de satélites nas camadas exteriores da atmosfera terrestre introduz uma série de novas considerações a problemas enfrentados pelos projetistas de uma missão. Um dos problemas mais importantes é devido às temperaturas enfrentadas pela superfície externa do satélite ao entrar em contato com uma atmosfera rarefeita, uma vez que os modelos de aquecimento normalmente utilizados não se aplicam naquele meio. Este problema não deve ser negligenciado e um bom exemplo do por quê é a desintegração de meteoros que entram na nossa atmosfera com velocidades altas.

Em torno da década de 1950, muitos estudos foram realizados sobre o comportamento do fluxo termocinético em gases rarefeitos e suas considerações foram aplicadas à Astronáutica. Bons exemplos são os trabalhos realizados por Stalder e Jukoff (1949), Stalder et al. (1951), Talbot (1957) e Schaaf e Chambré (1961). Entretanto, naquela época praticamente nenhum resultado experimental existia para comprovar as teorias que estavam sendo desenvolvidas.

Esses estudos tiveram, entre outros méritos, a importância de classificar os três principais regimes de voo e suas linhas divisórias foram determinadas em função da razão entre o caminho molecular livre médio e a dimensão do corpo em consideração. Esta razão ficou então estabelecida como o número de Knudsen (Kn). Este parâmetro pode ser considerado como uma medida do grau de rarefação de um gás. Quando o número de Knudsen é pequeno (menor do que 0,001), o efeito dos movimentos moleculares no fluxo pode ser desconsiderado e, nesse regime, o gás pode ser tratado como um meio contínuo. Por outro lado, para grandes valores de Kn (da ordem de 10), o efeito dos movimentos das moléculas é tão importante que o fenômeno resultante pode ser totalmente descrito através do movimento individual dessas moléculas de um ponto de vista estatístico.

Os vários fenômenos encontrados em um regime de altas velocidades em um escoamento de gases são freqüentemente descritos utilizando-se os números de Reynolds (Re) e de Mach (M). O primeiro parâmetro é uma medida do efeito da viscosidade e o último, uma medida do efeito da compressibilidade do meio. O número de Knudsen pode ser relacionado com estes parâmetros através de

$$Kn = C \frac{M}{Re} \quad (7.1)$$

em que C é uma constante adimensional.

Os três regimes aerodinâmicos mais importantes podem ser descritos de forma resumida como:

- i) Região aerodinâmica convencional, onde o caminho livre médio pode ser desconsiderado em comparação com as dimensões do corpo;
- ii) Região de fenômenos de moléculas livres, onde o caminho livre médio é grande em comparação com o tamanho do corpo;

- iii) Região conhecida como regime de *slip flow*, intermediária da convencional e do regime de moléculas livres.

O termo *slip flow* é apropriado para escoamentos cujos números de Knudsen são pequenos, mas que não podem ser ignorados. A mudança entre uma região e outra é, obviamente, gradual. Uma sugestão para os limites entre os regimes pode ser encontrada em Schaaf e Chambré (1961).

Na teoria aerodinâmica convencional, a primeira consideração a ser feita é a de que o fluido onde o corpo se encontra deve ser tratado como um meio homogêneo contínuo. Esta suposição certamente se torna inválida nas camadas mais altas da atmosfera terrestre devido à extrema rarefação desta. Uma medida da densidade atmosférica é fornecida através do caminho livre médio que uma molécula atravessa entre colisões sucessivas. A existência de um caminho livre médio grande não deve ser considerada como um indicativo de que o número de moléculas por unidade de volume é pequeno, apenas de que é menor do que em um meio contínuo. Por exemplo, em um meio atmosférico de densidade muito baixa (altitude em torno de 120 km), onde o caminho molecular livre médio é igual a 0,3 m, ainda existem 10^{13} moléculas em um centímetro cúbico (Shaaf e Chambré, 1961).

Em um regime de transição entre o *slip flow* e a região de moléculas livres, o caminho molecular livre médio é da mesma ordem de grandeza da dimensão de um corpo típico. Colisões com a superfície e colisões intermoleculares têm mais ou menos a mesma importância e a análise desses fenômenos se torna extremamente complicada.

O regime de fluxo de moléculas livres acontece em uma região de rarefação extrema. O caminho molecular livre médio é, por definição, muitas vezes maior que qualquer dimensão característica do corpo. As moléculas que atingem a superfície do corpo e que são, então, re-emitidas para o meio viajam muito antes de colidir com outras moléculas. Assim, torna-se válido desconsiderar o efeito de partículas re-emitidas sobre o fluxo

incidente, pelo menos enquanto os efeitos sobre o próprio corpo estiverem sendo considerados. Considera-se que o fluxo incidente não é perturbado pela presença do corpo. Esta é a suposição básica da teoria de fluxo molecular livre. Como consequência desta afirmação, nenhuma onda de choque é esperada nas vizinhanças do corpo.

7.2 Aquecimento Cinético

A redução de energia provocada por uma passagem atmosférica é acompanhada pelo aumento da energia térmica do gás ao redor do veículo. Uma parte dessa energia térmica é transferida para a superfície do corpo e é esta fração de energia que mais preocupa o projetista da missão. Essa fração depende de um mecanismo de transferência de calor entre o gás quente e a superfície e dos formato, dimensão, velocidade e altitude do veículo.

Cálculos teóricos da taxa de aquecimento e das características aerodinâmicas de veículos imersos em regimes de fluxo molecular livre podem ser desenvolvidos considerando-se os fluxos moleculares incidentes e refletidos ou re-emitidos separadamente. Para calcular o momento ou a energia incidente sobre a superfície é preciso considerar que o gás encontra-se em equilíbrio maxweliano. Os resultados devem ser aplicados em grandes altitudes com cuidado, pois o conhecimento sobre o estado e a composição da atmosfera superior é limitado.

De forma a determinar a temperatura superficial de um corpo em movimento com velocidade constante através de um gás rarefeito, é necessário, fundamentalmente, fazer o balanço de energia em uma parte da superfície. Energia pode ser adicionada (E_i) ou subtraída (E_r) de uma superfície por processos distintos. O balanço de energia para um elemento de superfície dS pode ser escrito como (Schaaf e Chambré, 1961)

$$dQ = dE_i - dE_r \quad (7.2)$$

em que dQ é a quantidade total de calor removida de dS por unidade de tempo. Schaaf e Chambré (1961) demonstram que:

$$dQ = \alpha_T \rho \mathfrak{R}_e T_{FL} \sqrt{\frac{\mathfrak{R}_e T_{FL}}{2\pi}} \left(\left[S_M^2 + \frac{\gamma_i}{\gamma_i - 1} - \frac{\gamma_i + 1}{2(\gamma_i - 1)} \frac{T_w}{T_{FL}} \right] \left\{ \exp[-(S_M \text{ sen } \alpha)^2] + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\pi} (S_M \text{ sen } \alpha) [1 + \text{erf}(S_M \text{ sen } \alpha)] \right\} - \frac{1}{2} \exp[-(S_M \text{ sen } \alpha)^2] \right) dS \quad (7.3)$$

na qual α_T é o coeficiente térmico de acomodação, ρ é a densidade do gás, \mathfrak{R}_e é a constante específica do gás, T_{FL} é a temperatura absoluta do fluxo livre, S_M é a razão de velocidade molecular que pode ser expressa em função do número de Mach M e do expoente isotrópico γ_i , T_w é a temperatura absoluta da superfície e α é o ângulo de ataque, neste caso, entre o elemento de superfície dS e a direção do fluxo.

Como o elemento de superfície dS é, em geral, uma função de α , a expressão para dQ pode ser integrada para qualquer forma de um corpo específico a fim de determinar a transferência de calor total Q . Supõe-se, em seguida, que a superfície é sempre convexa através do fluxo de gás, o que exclui a possibilidade de inter-reflexão molecular. Se a contribuição das moléculas refletidas puder ser desconsiderada em comparação com a das moléculas incidentes, essa integração reduz-se a:

$$Q = \frac{1}{2} \alpha_T \rho U^3 S \text{ sen } \alpha \quad (7.4)$$

em que U é a velocidade do fluxo de gás e $S \text{ sen } \alpha$ é a secção de choque projetada do corpo perpendicular à direção do movimento.

Um passo na direção do acoplamento entre a massa de sistemas de proteção térmica e o perfil da trajetória vem sendo dado em diversos estudos. Na maior parte dos casos, as considerações são feitas de forma indireta, em termos de taxa de transferência de calor Q' e/ou calor total imposto (a integral da taxa de transferência de calor sobre toda a trajetória atmosférica) Q . Admite-se, de uma forma geral, que a taxa de aquecimento por unidade de área pode ser escrita da forma (Mease, 1988; Miele, 1996; Vinh e Kuo, 1997):

$$Q' = C\rho^{N1}V^{N2} \quad (7.5)$$

na qual C , $N1$ e $N2$ são constantes. A taxa de aquecimento varia ao longo da superfície do veículo. Na maioria dos estudos, o ponto de estagnação da taxa de aquecimento é utilizado como local de medida do aquecimento do veículo.

Durante uma manobra de *aerobraking*, por exemplo, o fluxo termocinético Q'_k recebido pelo veículo ao passar pelo perigeu pode ser expresso como um produto entre a densidade da atmosfera local ρ e a velocidade do satélite V (Vlassov, 2000).

$$Q'_k = C\rho(h)V^3 \quad (7.6)$$

A Equação (7.6) refere-se ao fluxo termocinético calculado para o satélite Franco-Brasileiro na época em que seu projeto incluía manobras de *aerobraking*. O valor da constante C pode ser deduzido dos perfis fornecidos pela agência francesa CNES.

O calor é transferido do gás quente para o corpo que atravessa a atmosfera, entre outras formas, por convecção. Radiação emitida pelo gás também pode contribuir no

aquecimento da superfície; entretanto, esta contribuição é muito pequena e pode ser ignorada na maioria dos casos.

O fluxo de calor convectivo Q'_C , em regime hipersônico, pode ser expresso por (Loh, 1960; Duncan, 1962; Goester, 1994):

$$Q'_C = \frac{C_{atm}}{\sqrt{\mathfrak{R}}} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n1} \left(\frac{V}{(gR)^{1/2}} \right)^{n2} Y \quad (7.7)$$

na qual C_{atm} é uma constante dependente da atmosfera planetária; \mathfrak{R} é raio de curvatura do nariz ou do limite principal do corpo de encontro com a atmosfera – segundo Guedes (1997), $\mathfrak{R} = r_n = 0,252$ m – representa a distância do foco da linha de escoamento até um ponto na superfície de ataque; $n1$ e $n2$ são constantes que dependem do meio e seus valores são determinados teoricamente – Loh (1960), Duncan (1962) e Goester (1994) utilizam $n1 = 1/2$ e $n2 = 3$ – embora possam ser estimados experimentalmente sem grandes variações; ρ e ρ_0 são, respectivamente, as densidades atmosféricas medidas na altitude de vôo e ao nível do mar; V é a velocidade relativa à Terra; g é a aceleração local da gravidade; R é a distância do satélite ao centro atrator; e Y é uma constante que depende das características do veículo ao entrar na atmosfera. Normalmente, toma-se o valor de Y igual a 1 (Loh, 1960; Duncan, 1962; Goester, 1994; Guedes, 1997).

Para a atmosfera terrestre, calcula-se que C_{atm} pode variar entre 16.000 e 20.000 Btu·pés^{-3/2}·s⁻¹ e o valor recomendado por Loh (1960) e Guedes (1997) é igual a 17.000 Btu·pés^{-3/2}·s⁻¹, que corresponde a, aproximadamente, 106,6 kW/m^{3/2}.

O fluxo de calor irradiado do gás quente para a superfície do veículo, Q'_R , pode ser expresso por (Duncan, 1962)

$$Q'_R = K_g K_{Boltz} T_t \quad (7.8)$$

em que K_g é a emissividade de radiação do gás; K_{Boltz} é a constante de Stefan-Boltzmann que é igual a $4,81 \times 10^{-3}$ Btu·pés⁻²·s⁻¹·°R⁻⁴; T_t é a temperatura de estagnação do gás.

O calor total imposto a um elemento de superfície de um veículo atravessando a atmosfera é a soma das Expressões (7.7) e (7.8). Na maioria dos estudos realizados, a contribuição térmica da radiação para a superfície é ignorada, pois a radiação emitida por um gás contribui com uma porcentagem muito pequena para o calor total imposto.

O fluxo de calor irradiado (ou re-irradiado) pela superfície do veículo, Q'_{Rad} , pode ser expresso por (Duncan, 1962)

$$Q'_{Rad} = K_{Rad} K_{Boltz} T_{Sup}^4 \quad (7.9)$$

em que K_{Rad} é a emissividade de radiação da superfície e T_{Sup} é a temperatura de estagnação da superfície. K_{Rad} é da ordem de 0,8 para superfícies a altas temperaturas para determinados tipos de metais que revestem a estrutura de um veículo espacial.

Desconsiderando-se a contribuição do calor imposto por radiação gasosa, uma missão pode ser projetada para que o veículo opere em situação de equilíbrio térmico durante a passagem pela atmosfera. Nesse caso:

$$Q'_C = Q'_{Rad} \quad (7.10)$$

$$\frac{C_{atm}}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/2} \left(\frac{V}{(gR)^{1/2}} \right)^3 = K_{Rad} K_{Boltz} T_S^4 \quad (7.11)$$

na qual T_S é a temperatura no ponto de estagnação.

A Equação (7.11) expressa os vínculos sobre uma trajetória resultantes de aquecimento cinético. A temperatura nas vizinhanças do ponto de estagnação pode ser importante do ponto de vista de controle.

O histórico de temperatura de um veículo particular entrando na atmosfera terrestre pode, agora, ser previsto.

Para um dado sistema de proteção térmica, existe um limite superior da taxa de transferência de calor que pode ser tolerado. Mesmo para vôos que apenas tangenciam a atmosfera (*nearly-grazing*) e que, assim, exibem baixa taxa de aquecimento, a violação desse limite tende a acontecer conforme a variação de plano orbital é maior. Uma alternativa para contornar esse limite imposto pelos vínculos térmicos é a utilização de empuxos durante a passagem atmosférica para compensar o arrasto aerodinâmico, que é o maior responsável pelo aquecimento.

7.3 Resultados das Simulações

Várias simulações de passagens atmosféricas foram realizadas para avaliar as condições térmicas enfrentadas por um veículo espacial. Essas condições são chamadas de vínculos térmicos neste trabalho.

Um vínculo térmico importante se refere à energia cinética do veículo. Ao passar pela atmosfera, o satélite perde, para esta, energia de sua órbita. A variação em energia cinética sofrida pela passagem através da atmosfera pode ser visualizada na Figura 7.1 para um caso específico de transferência. Esta figura apresenta o mesmo tipo de representação que já foi mostrada nos Capítulos 4 e 5. No eixo horizontal, são encontrados diferentes valores de ângulo de ataque α , enquanto, no eixo vertical, estão os valores de ângulo de rolamento σ . Ambos estão medidos em graus. Com um gráfico como este é possível avaliar as condições térmicas enfrentadas por diferentes configurações aerodinâmicas (conjuntos de ângulos de ataque e rolamento).

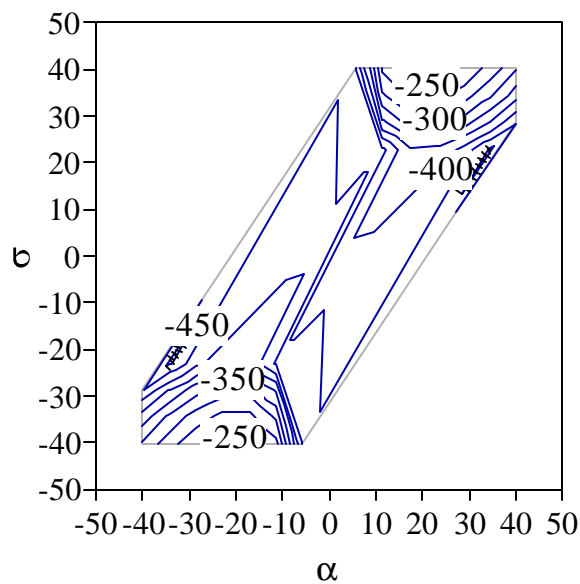


Fig. 7.1 – Variação em energia cinética ($\text{kg}\cdot\text{km}^2/\text{s}^2$). Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

Uma transferência orbital que utiliza a atmosfera para realizar uma manobra pressupõe um determinado valor para o perigeu da órbita inicial. A Figura 7.2 apresenta uma simulação da variação de energia cinética esperada para diferentes valores de raio de perigeu, ou seja, para transferências distintas. Os gráficos foram separados em dois por questão de escala.

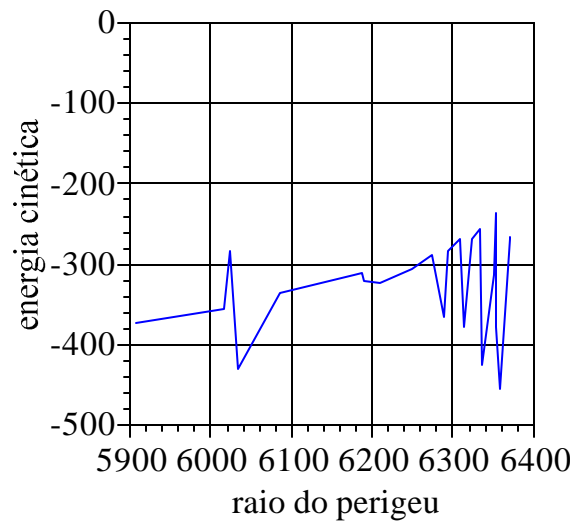


Fig. 7.2 – Variação em energia cinética ($\text{kg}\cdot\text{km}^2/\text{s}^2$) em função do raio do perigeu (km).

Outro vínculo térmico importante é o fluxo de calor convectivo. As Figuras 7.3 e 7.4 apresentam resultados de simulações numéricas para este parâmetro.

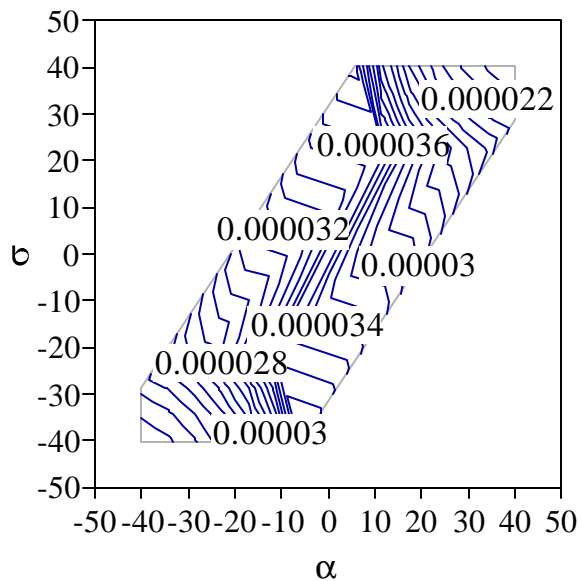


Fig. 7.3 – Fluxo de calor convectivo (kW/m^2). Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

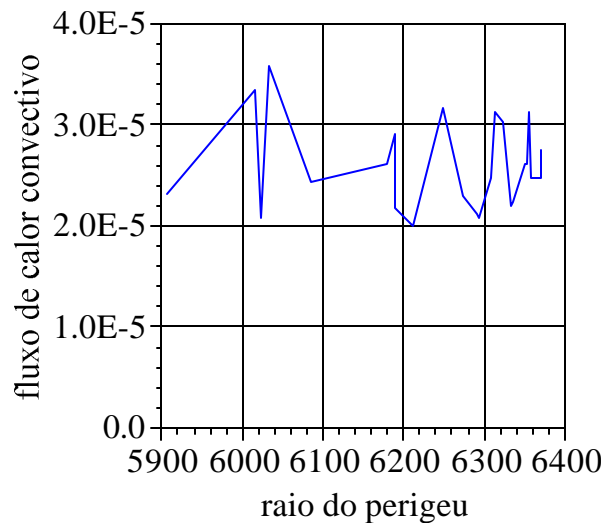


Fig. 7.4 – Fluxo de calor convectivo (kW/m^2) em função do raio do perigeu (km).

Nas simulações realizadas, com apenas uma passagem pela atmosfera, os valores encontrados tanto para a variação de energia cinética, quanto para o fluxo de calor convectivo são muito pequenos. Mesmo para os valores mais baixos de perigeu testados (trajetória de penetração profunda na atmosfera), o fluxo de calor convectivo é praticamente insignificante. Esses pequenos valores estão relacionados com as características dimensionais e aerodinâmicas do veículo utilizadas para os cálculos.

No próximo capítulo será simulada a realização de uma manobra orbital completa. Na análise dessa simulação, o tipo de resultado deste capítulo será importante para avaliar se a transferência é possível no que concerne aos vínculos envolvidos.

CAPÍTULO 8

UMA MANOBRA COMPLETA COM ERROS ASSOCIADOS

O propósito deste capítulo é reunir as ferramentas e os resultados apresentados nos capítulos anteriores em uma única manobra atmosférica e realizar uma análise dos erros associados. Com isso espera-se obter uma visão mais geral do problema complexo de efetuar transferências utilizando-se a atmosfera terrestre como redutor do consumo de combustível relacionado com uma manobra orbital.

A transferência a ser realizada pretende modificar o plano orbital de um veículo em órbita circular ao redor da Terra. Para tal, dois tipos de manobras atmosféricas são avaliados. O primeiro é uma passagem profunda pela atmosfera, na qual o satélite pode estar sujeito a sérios vínculos térmicos. O segundo trata de múltiplas passagens rasantes, para se evitar, justamente, o perigo de superaquecimento.

As órbitas iniciais e finais em ambas manobras são iguais, ou seja, deseja-se realizar a mesma transferência orbital. O desenvolvimento de cada uma, assim como os vínculos associados, define a manobra mais adequada para este caso específico. Uma análise dos erros associados é apresentada na parte final deste capítulo.

8.1 Manobra Profunda

Nesta manobra, a órbita inicial é circular e deseja-se realizar uma mudança de inclinação de 5° . Com uma análise do tipo da apresentada no Capítulo 4, pode-se estabelecer que a solução mais econômica para este caso não é uma manobra impulsiva fora da atmosfera. Por sua proximidade com o centro de forças, uma manobra atmosférica, para a qual utilizam-se jatos contínuos para transferir o veículo da órbita inicial circular para uma órbita excêntrica com perigeu dentro da atmosfera, é mais econômica. O gasto de combustível relacionado com cada uma das manobras está indicado na Tabela 8.1.

TABELA 8.1 – CONSUMO DE COMBUSTÍVEL (kg) – $a = 7.500$ km (PROFUNDA)

Tipo de Empuxo	Manobra sem atmosfera		Manobra com atmosfera	
	Impulsiva		Contínua	
			IDA	VOLTA
Consumo			7,7	11,1
Consumo Total	31,4		18,8	

A Tabela 8.2 apresenta os valores dos elementos keplerianos das órbitas inicial, intermediárias e final da transferência com passagem profunda pela atmosfera.

TABELA 8.2 – ELEMENTOS ORBITAIS DO VEÍCULO (PROFUNDA)

Elementos Orbitais	Órbita Inicial	1 ^a Órbita de Transf.	2 ^a Órbita de Transf.	Órbita Final
Semi-eixo maior (km)	7500,000	6990,377	6748,198	7500,000
Excentricidade	0,0	0,0728	0,0392	0,0
Inclinação (graus)	0,0	0,0	5,0	5,0

A primeira órbita de transferência foi escolhida de forma a provocar uma passagem de aproximadamente 100 quilômetros de profundidade na atmosfera terrestre. Uma vez nesta órbita, o veículo sofre a ação do arrasto e da sustentação de acordo com suas características aerodinâmicas. Através da Figura 8.1, pode-se observar o par de ângulos de ataque e rolamento que corresponde à mudança de inclinação desejada de 5°. Uma vez escolhido este conjunto, o veículo entra na atmosfera e sofre seus efeitos, saindo desta com uma nova órbita: a segunda órbita de transferência.

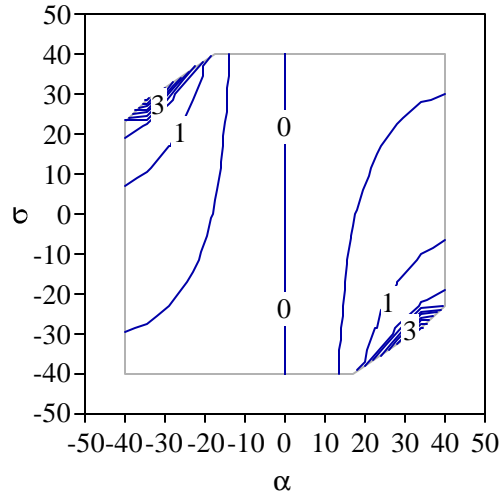


Fig. 8.1 – Variação em inclinação (graus) induzida pela manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.500$ km e $r_p = 6.481$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

A Figura 8.2 mostra a diferença entre o consumo de combustível da manobra atmosférica e da impulsiva fora da atmosfera.

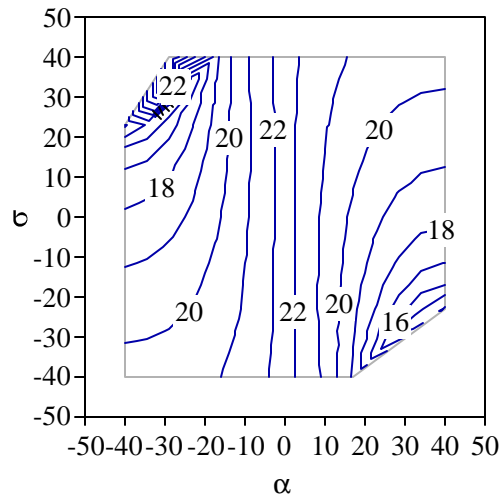


Fig. 8.2 – Economia em massa de combustível (kg) entre a manobra fora da atmosfera e a manobra aeroassistida para órbita inicial com $a = 7.500$ km e $r_p = 6.481$ km. Ângulos de ataque (α) e rolamento (σ) em graus.

Observando-se as Figuras 8.1 e 8.2 em conjunto pode-se perceber que para valores de ângulos de ataque e de rolamento mais próximos de zero a economia é maior, no entanto, a variação em inclinação é nula. Conforme se aumentam os efeitos da manobra aeroassistida, supondo valores maiores para esses pares de ângulos, a variação sobre a inclinação orbital cresce e a economia diminui porque mais combustível tem que ser gasto para corrigir os efeitos da manobra atmosférica sobre os outros elementos orbitais. Os valores positivos na Figura 8.2 provam que a manobra aeroassistida é mais vantajosa que a não-aeroassistida nesse caso.

A desaceleração e o aquecimento enfrentados pelo veículo dentro da atmosfera são os efeitos mais importantes da passagem. As trocas de energia entre o satélite e a atmosfera são examinadas aqui do ponto de vista de restrições impostas a trajetórias possíveis. As conseqüências térmicas de uma passagem atmosférica se tornam mais importantes à medida que há um aumento da densidade atmosférica e da velocidade envolvida. Altitudes baixas apresentam uma combinação perigosa desses fatores.

Para esta manobra atmosférica específica, a variação em energia cinética foi de 153,65 $\text{kg}\cdot\text{km}^2/\text{s}^2$ e o fluxo de calor convectivo é igual a $5,3 \times 10^{-6} \text{ kW}/\text{m}^2$. São valores muito pequenos e que não comprometem a estrutura do veículo. No item seguinte, é demonstrada uma manobra atmosférica múltipla com passagens rasantes. Os resultados desta simulação e da seguinte são comparados.

8.2 Manobra Rasante

Nesta manobra, assim como na anterior, a órbita inicial é circular e deseja-se realizar uma mudança de inclinação de 5° . Entretanto, optou-se por realizar múltiplas passagens rasantes para obter este resultado. O consumo de combustível desta manobra e da manobra não-aeroassistida equivalente pode ser visto da Tabela 8.3.

TABELA 8.3 – CONSUMO DE COMBUSTÍVEL (kg) – $a = 7.500$ km (RASANTE)

Tipo de Empuxo	Manobra sem atmosfera		Manobra com atmosfera	
	Impulsiva		Contínua	
			IDA	VOLTA
Consumo			7,2	6,9
Consumo Total	31,4		14,1	

A Tabela 8.4 apresenta os valores dos elementos keplerianos das órbitas inicial, intermediárias e final da transferência com passagem rasa pela atmosfera. Apenas algumas órbitas intermediárias estão demonstradas, pois são muitas.

TABELA 8.4 – ELEMENTOS ORBITAIS DO VEÍCULO (RASANTE)

Elementos Orbitais	Órbita Inicial	1 ^a Órbita de Transf.	90 ^a Órbita de Transf.	Órbita Final
Semi-eixo maior (km)	7500,0	7028,0	7019,0	7500,0
Excentricidade	0,0	0,067	0,066	0,0
Inclinação (graus)	0,0	0,0	5,0	5,0

As variações sobre os elementos orbitais sofridas por uma passagem atmosférica tão superficial como esta são muito pequenas. Como os efeitos são cumulativos, é possível realizar muitas passagens para encontrar a mudança de plano desejada de 5° . Esta manobra foi realizada com aproximadamente 90 passagens pela atmosfera. É importante ressaltar que, para uma manobra de duração tão longa, os efeitos sobre elementos orbitais, tais como argumento do perigeu e nodo ascendente, devem ser seriamente investigados ao analisar a sua viabilidade.

Neste caso, a variação máxima, por passagem, em energia cinética é da ordem de 10^{-1} $\text{kg}\cdot\text{km}^2/\text{s}^2$ e o maior fluxo de calor convectivo encontrado é igual a $1,7 \times 10^{-7}$ kW/m^2 . Os valores são tão baixos que não impõem qualquer condicionante.

Assim, pode-se perceber que, dependendo das características do veículo relativas à proteção térmica, uma ou outra manobra deve ser preterida. Dependendo das características do veículo, uma manobra profunda pode leva-lo a enfrentar situações extremas do ponto de vista dos vínculos térmicos, enquanto a manobra rasa não sugere a necessidade de proteção térmica muito significativa. Por outro lado, a manobra rasa pode ter de ser descartada por limitações de tempo. Todos esses fatores devem ser analisados pelo projetista da missão. O que se demonstra aqui, é a ferramenta para realizar essa análise.

8.3 Análise dos Erros Associados

As simulações realizadas até agora não levaram em conta a possibilidade de haver erro. Uma das dificuldades encontradas em qualquer estudo prático da dinâmica de satélites dentro de uma atmosfera vem da incerteza na determinação de parâmetros que influenciam a trajetória. Os coeficientes de arrasto e de sustentação de veículos com velocidades muito altas podem diferir consideravelmente dos seus valores esperados, uma vez que esses parâmetros são estimados teoricamente. As propriedades da atmosfera, em particular a densidade desta em altitudes superiores, estão sujeitas a muita incerteza.

O efeito das incertezas nos parâmetros, como os coeficientes aerodinâmicos, sobre a trajetória de um veículo aeroespacial é extremamente dependente de outras características orbitais. Para realizar uma análise dos erros associados ao problema de manobras aeroassistidas é preciso antes de tudo especificar a missão a ser estudada. Foi escolhida a manobra profunda descrita no Item 8.1, por sujeitar o satélite a uma influência maior da atmosfera.

Como método para avaliar o efeito da indeterminação dos parâmetros, foi escolhida a matriz de sensibilidade sugerida por Broucke (1979). Esse método consiste em determinar as derivadas parciais dos parâmetros finais em função das condições iniciais. Essas derivadas são encontradas numericamente utilizando expressões do tipo

$$\frac{\partial f_i}{\partial g_h} = \frac{f_i(g_h + \xi) - f_i(g_h)}{\xi} \quad (8.1)$$

nas quais f_i são os elementos orbitais da órbita final resultante da passagem pela atmosfera, g_h são os parâmetros iniciais (densidade atmosférica e coeficientes de arrasto e de sustentação) e ξ é uma pequena variação sobre os g_h .

Uma vez escolhido o valor de ξ , é possível calcular a matriz de sensibilidade para os três principais elementos orbitais, a saber, semi-eixo maior a , excentricidade e e inclinação i . Os elementos dessa matriz são normalizados para que se possam realizar comparações entre eles.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial \rho} & \frac{\partial a}{\partial C_D} & \frac{\partial a}{\partial C_L} \\ \frac{\partial e}{\partial \rho} & \frac{\partial e}{\partial C_D} & \frac{\partial e}{\partial C_L} \\ \frac{\partial i}{\partial \rho} & \frac{\partial i}{\partial C_D} & \frac{\partial i}{\partial C_L} \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Para a manobra profunda definida pelos elementos orbitais da Tabela 8.2 e para $\xi = 1\%$, esta matriz é dada por:

$$M_{1\%} = \begin{bmatrix} 5,46 \times 10^{-3} & 1,39 & -0,54 \\ 5,14 \times 10^{-3} & 1,28 & -0,49 \\ -4,00 \times 10^{-3} & -0,93 & 0,39 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Uma vez que os elementos desta matriz não possuem unidades de medida diferentes, ou seja, eles foram normalizados, torna-se possível comparar os efeitos dos diferentes parâmetros de entrada (densidade da atmosfera e coeficientes aerodinâmicos) sobre os elementos orbitais considerados. Pode-se notar que o efeito absoluto da densidade atmosférica sobre o semi-eixo maior, a excentricidade e a inclinação é duas ordens de grandeza menor do que os efeitos induzidos pelos coeficientes de arrasto e de sustentação. Também se nota que a variação absoluta sobre o semi-eixo maior decorrente de qualquer parâmetro é maior que sobre os outros elementos.

A utilidade deste procedimento é tornar possível a previsão do impacto que um determinado erro em ρ , C_D e/ou C_L pode provocar nas condições finais da órbita.

Como exemplo de aplicação dessa matriz, calcula-se o efeito nos elementos orbitais finais de uma órbita quando os erros nas condições iniciais são iguais a 0,5 %, ou seja, $\xi_\rho = 1,42$; $\xi_{CD} = 0,002$; $\xi_{CL} = -0,014$. A matriz de erros previstos é então dada por:

$$\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta e \\ \Delta i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,46 \times 10^{-3} & 1,39 & -0,54 \\ 5,14 \times 10^{-3} & 1,28 & -0,49 \\ -4,00 \times 10^{-3} & -0,93 & 0,39 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi_\rho \\ \xi_{CD} \\ \xi_{CL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0181 \\ 0,0167 \\ -0,0130 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Os resultados simulados para essas variações são:

$$\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta e \\ \Delta i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,016 \\ 0,014 \\ -0,011 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

Assim, pode-se notar que, com um afastamento da matriz de sensibilidade inicial, que foi encontrada para erros da ordem de 1%, os resultados simulados e os calculados diferem de, aproximadamente, 10 %.

Com a matriz de sensibilidade é possível realizar uma previsão de impactos sobre os elementos da órbita encontrada após a passagem atmosférica. Cada elemento dessa matriz demonstra uma relação entre características iniciais e finais do problema proposto. A primeira coluna mostra o quanto a órbita final pode ser afetada por uma medida errônea da densidade atmosférica, enquanto as outras colunas estão relacionadas com as características aerodinâmicas do veículo.

Outras matrizes de sensibilidade podem ser calculadas. Por exemplo, uma matriz de cinco linhas que inclua o argumento do perigeu e o nodo ascendente. O mais importante é avaliar a relação de causa e efeito entre os parâmetros envolvidos em uma trajetória transatmosférica através dos termos dessa matriz.

CAPÍTULO 9

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

9.1 Comentários

O objetivo de um desenvolvimento teórico sobre transferências orbitais aeroassistidas ótimas é estabelecer as bases matemáticas para se determinar a melhor estratégia. Além disso, ao se considerar a possibilidade de realização dessas transferências em conjunto com manobras propulsivas, procura-se descobrir os fundamentos principais que caracterizam o melhor desempenho.

O presente trabalho realizou uma análise de missões espaciais através do desenvolvimento de *softwares* (Capítulos 3 e 4) para o cálculo de manobras aeroassistidas e das manobras propulsivas necessárias para sua implementação. Além do desenvolvimento numérico, um estudo analítico (Capítulo 6) contemplou a realização desse tipo de manobra.

Nas transferências orbitais aeroassistidas, existe um forte acoplamento entre o traçado da trajetória e as características físicas do veículo. Uma trajetória que minimiza o consumo de combustível, sem dar atenção ao aquecimento, pode necessitar um sistema de proteção térmica tão pesado que inviabilize a missão. Se uma transferência aeroassistida for escolhida em detrimento de uma transferência totalmente propulsiva, ela deve propiciar uma redução em massa de combustível que compense a quantidade de massa de material termoprotetor necessária. Medidas do limite de massa desse material podem ser transformadas em índices de desempenho ou vínculos de desigualdade relacionados com a taxa de aquecimento (Capítulo 7). Se um vínculo de desigualdade for imposto sobre a taxa de aquecimento de forma a impedir uma descida mais profunda na atmosfera, onde a eficiência da manobra aerodinâmica é maior, uma alternativa é a utilização de propulsão dentro da atmosfera para compensar o arrasto e

diminuir o aquecimento sofrido. Esta alternativa não foi testada neste trabalho, mas sua realização é uma sugestão para trabalhos futuros.

Neste trabalho, inicialmente, admite-se que o veículo espacial tem formato cônico e coifa arredondada (Figura 2.3). Os valores escolhidos para determinar o tamanho e a forma desse satélite estão baseados no trabalho de Guedes (1997), que simula uma reentrada atmosférica. Entretanto, em determinados casos esse formato não produz a variação em inclinação desejada pela manobra por diminuir os efeitos atmosféricos induzidos. Nesses casos, substituiu-se a escolha do formato do veículo pela determinação teórica de que a razão entre os coeficientes de sustentação e de arrasto seja da ordem de um fator igual a 3.

A fase propulsiva das simulações foi realizada de duas formas distintas. Uma hipótese impulsiva foi considerada, na qual o motor do satélite é suposto capaz de aplicar uma propulsão de grande magnitude durante um intervalo de tempo infinitesimal. A outra hipótese estudada foi a de propulsão finita, na qual o motor do veículo aplica uma propulsão de menor magnitude por um intervalo de tempo finito. O objetivo era encontrar o melhor perfil quanto ao consumo de combustível fora da atmosfera, uma vez que dentro desta não são disparados jatos.

Os gráficos do tipo “curva de nível” apresentados nos Capítulos 4 e 5 são importantes subprodutos do programa de simulações de manobras orbitais. Com esses, é possível avaliar as conseqüências de uma determinada passagem atmosférica sobre os elementos orbitais do satélite individualmente e funções destes, tais como economia em massa de combustível. Nenhum resultado desse tipo foi encontrado na literatura, podendo esse tipo de gráfico e conseqüentes análises serem considerados como uma nova contribuição.

Neste trabalho são apresentadas novas relações analíticas entre as variações sobre os elementos orbitais resultantes de uma passagem pela atmosfera. São equações baseadas

na teoria de King-Hele (1987) e cujo desenvolvimento foi realizado de forma diferente do dele. A consideração da sustentação atmosférica nessas equações realizada neste trabalho é um passo necessário para o estudo de manobras com mudança de plano. Uma comparação entre os resultados analíticos e as simulações numéricas mostrou-se de acordo com o esperado. Ou seja, os resultados são coincidentes em manobras cujas passagens pela atmosfera são rápidas (condição do modelo proposto por King-Hele).

Outro resultado importante da comparação entre a formulação analítica e a solução numérica é o gráfico da razão entre a variação em velocidade devida ao decaimento do semi-eixo maior (ΔVa) e a variação em velocidade devida à mudança de inclinação (ΔVi), como uma função do raio do perigeu (r_p). Esse gráfico tem como objetivo prever o custo/benefício relacionado com cada manobra atmosférica e também se mostra como uma contribuição deste trabalho.

Em se tratando de vínculos térmicos, para que a manobra atmosférica seja vantajosa, a economia em quantidade de combustível deve ser maior do que o aumento em material para proteção térmica necessário para a realização de vôo atmosférico. Uma análise das conseqüências da consideração de vínculos térmicos sobre uma manobra atmosférica é apresentada no Capítulo 7. Gráficos do tipo “curva de nível” podem ser gerados para avaliar tanto a variação em energia cinética quanto o fluxo de calor convectivo enfrentados por uma missão atmosférica.

Por último, apresenta-se uma comparação simulada entre uma manobra aeroassistida com passagem profunda única e outra rasante com múltiplas passagens. Nessa simulação, todas as ferramentas desenvolvidas ao longo do trabalho são utilizadas e acrescenta-se uma análise de erros associados ao problema proposto. Essa análise de erros é desenvolvida utilizando-se a Matriz de Sensitividade proposta por Broucke (1979). Com ela é possível avaliar a relação de causa e efeito entre os parâmetros envolvidos no problema, realizando-se, assim, uma previsão de impactos de uma

passagem atmosférica. Uma sugestão para comparação seria considerar a possibilidade de implementar uma matriz de covariância para analisar erros de entrada.

Entre os futuros tópicos a serem investigados inclui-se a consideração de outros modelos atmosféricos. Por se tratar de uma rotina computacional, a adaptação de um novo modelo é um processo fácil e rápido.

Um estudo mais aprofundado das características do material necessário para a proteção térmica do satélite é recomendado, assim como a comparação dos resultados atuais com os relativos a outros tipos de veículos espaciais. Pode-se considerar, em uma etapa posterior, diferentes formatos, dimensões, massas e, conseqüentemente, diferentes coeficientes aerodinâmicos. Outras órbitas também devem ser investigadas.

No que se refere à fase analítica do trabalho, uma sugestão para estudos futuros é uma expansão em ordens superiores, seguida de comparação com os resultados apresentados aqui. As se realizarem expansões até a 6ª e até a 8ª ordem, neste trabalho, percebeu-se que em alguns casos houve um aumento de precisão, em outros não. Um estudo de ordens superiores poderia mapear o comportamento das expansões para os elementos orbitais distintos.

Um passo mais sofisticado e de relativamente fácil implementação é a aplicação do desenvolvimento apresentado neste trabalho na realização de manobras aeroassistidas em outros planetas.

Nas manobras realizadas aqui, não houve interesse em estudar as conseqüências do acionamento de jatos dentro dos limites da atmosfera. Mas esse é um problema previsto na literatura e que pode ter grande utilidade no futuro. Sua investigação é recomendada.

9.2 Conclusões

A alternativa mais econômica encontrada entre as simulações realizadas foi a da utilização de jatos contínuos para trazer o veículo até a atmosfera e, após a manobra aerodinâmica, levá-lo de volta à órbita circular. A economia de combustível encontrada entre a realização de manobras dentro e fora da atmosfera apresenta uma tendência a diminuir com o aumento do semi-eixo maior da órbita inicial.

Este comportamento se justifica porque, em uma manobra de mudança de plano realizada sem passagem atmosférica, quanto mais afastado do planeta, menor a influência deste sobre o satélite e menos dispendiosa se torna a manobra. Por outro lado, na manobra aeroassistida o consumo de combustível é decorrente da mudança sobre o raio da órbita inicial. Quanto mais afastado do planeta, maior será a variação a ser realizada, tanto para ir quanto para voltar.

As várias simulações realizadas mostraram que o problema de realizar manobras atmosféricas, quaisquer que sejam os seus objetivos, é altamente dependente de condições iniciais, tais como massa e características físicas do veículo, elementos orbitais das órbitas inicial e final e condições atmosféricas a serem enfrentadas. Desta forma, cabe ao projetista de cada missão realizar as análises necessárias para viabilizar a realização de uma ou mais manobras desse tipo. O material aqui apresentado pretende ser uma ferramenta para esse projetista.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Allen, H. J.; Eggers, A. J. **A study of the motion and aerodynamic heating of missiles entering the earth's atmosphere at high supersonic speeds**. Washington, DC: NACA, 1958. 13 p. (NACA TR 1381).
- Beiner, L. Optimal re-entry maneuvers with bounded lift control. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 10, n. 4, p. 321-329, July-Aug. 1987.
- Biggs, M. C. B. **The optimisation of spacecraft orbital manoeuvres part I: linearly varying thrust angles**. Connecticut: The Hattfield Polytechnic, 1978. 25 p. (Numerical Optimisation Centre TR 98).
- Biggs, M. C. B. **The optimisation of spacecraft orbital manoeuvres part II: using Pontryagin's maximum principle**. Connecticut: The Hattfield Polytechnic, 1979. 24 p. (Numerical Optimisation Centre TR 101).
- Broucke, R. Traveling between the Lagrange points and the Moon. **Journal of Guidance and Control**, v. 2, n. 4, p. 257-263, July-Aug. 1979.
- Bruce, R. W. Combined aerodynamic-propulsive orbital plane change maneuver. **AIAA Journal**, v. 3, n. 7, p. 1286-1289, Jul. 1965.
- Calise, A. J. Singular perturbation analysis of the atmospheric orbital plane change problem. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 36, n. 1/2, p. 35-43, Jan.-June 1988.

- Chapman, D. R. **An approximate analytical method for studying entry into planetary atmospheres.** Washington, DC: NASA, 1959. 47 p. (NASA TR R-11).
- Chapman, D. R. **An analysis of the corridor and guidance requirements for supercircular entry into planetary atmospheres.** Washington, DC: NASA, 1960. 47 p. (NASA TR R-55).
- Chobotov, V. A. **Orbital mechanics.** Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1991. 365 p.
- Cochran Jr., J. E.; Lee, S.; No, T. S. Control of gradual plane change during aerocruise. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 42, n. 3, p. 285-300, July-Sep. 1994.
- Duncan, R. C. **Dynamics of atmospheric entry.** New York: McGraw-Hill Book Company, 1962. 306 p.
- Etkin, B. **Dynamics of flight.** New York: John Wiley & Sons, 1959. 519 p.
- Goester, J. F. Return opportunities on European and Russian sites. In: Space Flight Dynamics Symposium, St.-Petersburg, Moscow, 1994. **Proceedings.** Moscow: Association for the Advancement of Space Science and Technology, 1994. Entry Problem, p. 1-10.
- Guedes, U. T. V. **Análise de dispersão da trajetória de reentrada em relação ao ponto de pouso, utilizando sistema geocêntrico inercial e manobras laterais.** São José dos Campos. 142 p. Tese (Doutorado em Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1997.
<http://www.dem.inpe.br/~ulisses/doutorado.htm>

- Guedes, U. T. V. Análise da Manobra de Injeção de Reentrada Comandada com Aumento e Redução da Velocidade de Injeção. In: Colóquio de Dinâmica Orbital, 20., Nazaré Paulista, 2000: **Anais**. No prelo.
<http://www2.dem.inpe.br/~ulisses/trab-publicados.htm>
- Hanson, J. M. Combining propulsive and aerodynamic maneuvers to achieve optimal orbital transfer. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 12, n. 5, p. 732-738, Sept.-Oct. 1989.
- Hull, D. G.; McClendon, J. R.; Speyer, J. L. Aeroassisted orbital plane change using an elliptic drag polar. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 36, n. 1/2, p. 73-87, Jan.-June 1988.
- Hull, D. G.; McClendon, J. R.; Speyer, J. L. Improved aeroassisted plane change using successive approximation. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 36, n. 1/2, p. 89-101, Jan.-June 1988.
- Jesus, A. D. C. de; Souza, M. L. O.; Prado, A. F. B. A. Monte-Carlo analysis of nonimpulsive orbital transfers under thrust errors. **AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference**, paper AAS 99-424, 13 p., Aug. 1999.
- King-Hele, D.G. **Satellite orbits in an atmosphere** : theory and applications. Glasgow: Bell & Bain, 1987. 291 p.
- Loh, W. H. T. Dynamics and thermodynamics of re-entry. **Journal of the Aerospace Sciences**, v. 27, n. 10, p. 748-762, Oct. 1960.
- Luemberger, D. G. **Introduction to linear and non-linear programming**. New York: Addison-Wesley, 1973. 256 p.

- Ma, D.-M. Explicit guidance for aeroassisted orbital plane change. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 19, n. 6, p. 1390-1392, Nov.-Dec. 1996.
- Ma, D.-M.; Wu, C.-H.; Vinh, N. X. Analytic theory of optimal plane change by low aerodynamic forces. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 45, n. 3, p. 329-347, July-Sep. 1997.
- Marec, J. P. **Optimal space trajectories**. Amsterdam: Elsevier, 1979. 329 p.
- Martin, J. J. **Atmospheric reentry**. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1966. 264 p.
- Mease, K. D. Optimization of aeroassisted orbital transfer: current status. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 36, n. 1/2, p. 7-33, Jan.-June 1988.
- Mease, K. D.; Lee, J. Y.; Vinh, N. X. Orbital changes during hypersonic aerocruise. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 36, n. 1/2, p. 103-137, Jan.-June 1988.
- Miele, A.; Lee, W. Y.; Mease, K. D. Nearly-grazing optimal trajectories for noncoplanar, aeroassisted orbital transfer. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 36, n. 1/2, p. 139-157, Jan.-June 1988.
- Miele, A. Recent advances in the optimization and guidance of aeroassisted orbital transfers. **Acta Astronautica**, v. 38, n. 10, p. 747-768, May 1996.

Mishne, D.; Idan, M.; Laufer, Y. Approximate optimal planar guidance of an aeroassisted space vehicle. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 20, n. 4, p. 780-788, July-Aug. 1997.

Prado, A. F. B. A. **Análise, seleção e implementação de procedimentos que visem manobras ótimas de satélites artificiais**. São José dos Campos. 246 p. (INPE-5003-TDL/397). Dissertação (Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 1989.

Regan, F. J.; Anandakrishnan, S. M. **Dynamics of atmospheric re-entry**. Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993. 584 p.

Ruger, C. J. Skip-impact criteria of a re-entry trajectory with negative lift. **AIAA Journal**, v. 2, n. 3, p. 585-587, Mar. 1964.

Schaaf, S. A.; Chambré, P. L. Flow of rarefied gases. In: **Princeton Aeronautical Paperbacks**. Princeton: Princeton University Press, 1961. v. 8, Section H, p. 687-715.

Shen, Y. C. Series solution of equations for re-entry vehicles with variable lift and drag coefficients. **AIAA Journal**, v. 1, n. 11, p. 2487-2490, Nov. 1963.

Stalder, J. R.; Goodwin, G.; Creager, M. O. **Heat transfer to bodies in a high-speed rarefied-gas stream**. Washington, DC: NACA, 1951. 25 p. (NACA TN 2438).

Stalder, J. R.; Jukoff, D. **Heat transfer to bodies traveling at high speed in the upper atmosphere**. Washington, DC: NACA, 1949. 13 p. (NACA Report 944).

Talbot, L. Free molecular flow forces and heat transfer for an infinite circular cylinder at angle of attack. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 24, n. 6, p. 458-459, June 1957.

Vinh, N. X. **Optimal trajectories in atmospheric flight**. Amsterdam: Elsevier, 1981. 402 p.

Vinh, N. X.; Hanson, J. M. Optimal aeroassisted return from high Earth orbit with plane change. **Acta Astronautica**, v. 12, n. 1, p. 11-25, Jan. 1985.

Vinh, N. X.; Kuo, Z. S. Improved matched asymptotic solutions for deceleration control during atmospheric entry. **Acta Astronautica**, v. 40, n. 1, p. 1-11, Jan. 1997.

Vinh, N. X.; Ma, D.-M. Optimal multiple-pass aeroassisted plane change. **Acta Astronautica**, v. 21, n. 11/12, p. 749-758, Nov. 1990.

Vlassov, V. V. **Thermal model of multi-layer protection shield of a satellite utilizing aerodynamic drag**. (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2000). Comunicação pessoal.

Walberg, G. D. A survey of aeroassisted orbit transfer. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 22, n. 1, p. 3-18, Jan.-Feb. 1985.

Wingrove, R. C. Survey of atmosphere re-entry guidance and control methods. **AIAA Journal**, v. 1, n. 9, p. 2019-2029, Sep. 1963.

Yeo, B. P.; Sng, K. B. Numerical solution of the constrained re-entry vehicle trajectory problem via quasilinearization. **Journal of Guidance and Control**, v. 3, n. 5, p. 392-397, Sep.-Oct. 1980.

APÊNDICE A

O MÉTODO DA PROJEÇÃO DO GRADIENTE

Apresenta-se a seguir a formulação do Método da Projeção do Gradiente de Rosen descrito em Luenberger (1973).

Considere o seguinte problema:

$$\text{minimizar } f(\bar{x}) \tag{A.1}$$

$$\text{sujeito a: } \bar{A} \times \bar{x} \leq \bar{b} \tag{A.2}$$

$$\bar{E} \times \bar{x} = \bar{e} \tag{A.3}$$

em que \bar{A} é uma matriz $m \times n$, \bar{E} é uma matriz $l \times n$, \bar{b} é um vetor de m linhas, \bar{e} é um vetor de l linhas, e f é uma função diferenciável. Dado um \bar{x} que satisfaça os vínculos, a direção de descida mais rápida é $-\nabla f(\bar{x})$. Entretanto, o movimento ao longo de $-\nabla f(\bar{x})$ pode acabar com a satisfação dos vínculos. De forma a mantê-la, $-\nabla f(\bar{x})$ é projetada e, assim, o movimento é ao longo de $\bar{d} = -\bar{P}\nabla f(\bar{x})$, em que \bar{P} é uma matriz de projeção adequada. O lema seguinte garante a forma da matriz dessa projeção e mostra que \bar{d} é realmente a melhor direção possível, desde que $-\bar{P}\nabla f(\bar{x}) \neq 0$.

Lema: Considerando o problema de minimizar $f(\bar{x})$, sujeito a $\bar{A} \times \bar{x} \leq \bar{b}$ e $\bar{E} \times \bar{x} = \bar{e}$, \bar{x} é tal que $\bar{A}_1 \times \bar{x} = \bar{b}_1$ e $\bar{A}_2 \times \bar{x} < \bar{b}_2$, em que $\bar{A}' = (\bar{A}'_1, \bar{A}'_2)$ e $\bar{b}' = (\bar{b}'_1, \bar{b}'_2)$. Admite-se que f é diferenciável em \bar{x} . Se \bar{P} é uma matriz de projeção tal que $\bar{P}\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, então $\bar{d} = -\bar{P}\nabla f(\bar{x})$ é uma direção melhorada de f em \bar{x} . Além

disso, se $\vec{M}' = (\vec{A}_1', \vec{E})$ tem linhas independentes e se \vec{P} tem a forma $\vec{P} = \vec{I} - \vec{M}'(\vec{M}\vec{M}')^{-1}\vec{M}$, então \vec{d} é a melhor direção possível.

Nota-se que a matriz \vec{P} do lema acima é de fato uma matriz de projeção que satisfaz $\vec{P} = \vec{P}'$ e $\vec{P} \times \vec{P} = \vec{P}$. Além disso, $\vec{M} \times \vec{P} = 0$, ou seja, $\vec{A}_1 \times \vec{P} = 0$ e $\vec{E} \times \vec{P} = 0$. Em outras palavras, a matriz \vec{P} projeta cada linha de \vec{A}_1 e cada linha de \vec{E} no vetor zero. Mas, uma vez que as linhas de \vec{A}_1 e \vec{E} são gradientes dos vínculos, \vec{P} é a matriz que projeta os gradientes dos vínculos no vetor zero.

A Figura A.1 demonstra o processo de projeção do gradiente para um problema de vínculos de desigualdade. Em \vec{x} , existe apenas um vínculo com gradiente \vec{A}_1 . Nota-se que a matriz \vec{P} projeta qualquer vetor no espaço vazio de \vec{A}_1 e que $\vec{d} = -\vec{P}\nabla f(\vec{x})$ é uma melhoria de direção.

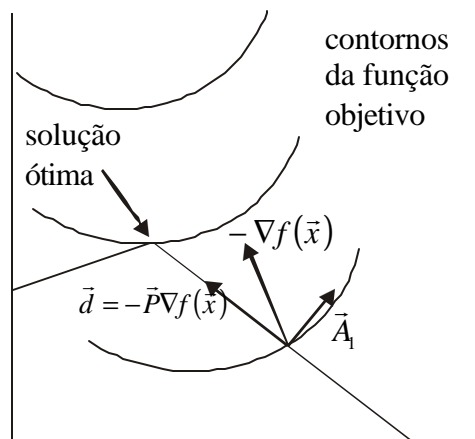


Fig. A.1 – Projeção do gradiente.

FONTE: Luemberger (1973, p.391).