

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-7530-TDI/736

**MANOBRAS ORBITAIS APLICADAS AOS PROBLEMAS DE DOIS
E TRÊS CORPOS**

Gislaine de Felipe

Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais, orientada pelo Dr.
Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, aprovada em 03 fevereiro de 2000.

INPE
São José dos Campos
2000

629.015.3

FELIPE, G.

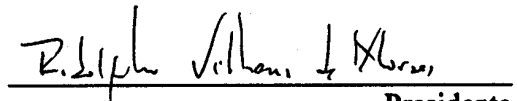
Manobras orbitais aplicadas aos problemas de dois e três corpos / G. Felipe. – São José dos Campos: INPE, 2000.

170p. – (INPE-7530-TDI/736).

1.Mecânica Celeste. 2.Problema de dois corpos. 3. Problema de três corpos. 4.Transferência orbital. 5.Órbita de satélites. 6.Trajetórias. 7.Astrodinâmica. I.Título.

Aprovado pela Banca Examinadora em
cumprimento a requisito exigido para a
obtenção do Título de **Mestre** em
Engenharia e Tecnologia
Espaciais/Mecânica Espacial e
Controle.

Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes



Presidente

Dr. Antonio F. Bertachini de A Prado



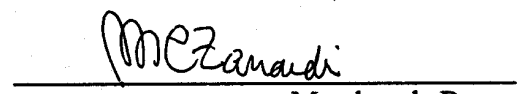
Orientador

Dr. Othon Cabo Winter



Membro da Banca

Drª Maria Cecília F. de P. S. Zanardi



**Membro da Banca
Convidada**

Candidato (a) : Gislaine de Felipe

São José dos Campos, 03 de fevereiro de 2000.

Reaja inteligentemente mesmo a um tratamento não inteligente.

(Lao-Tse)

Se você rouba idéias de um autor, é plágio. Se você rouba de muitos autores, é pesquisa.

(Wilson Mizner, 1876-1933)

Hipótese é uma coisa que não é, mas a gente faz de conta que é, pra ver como seria se ela fosse.

(Anônimo)

Se você não perguntar o por quê das coisas, logo estarão perguntado o por quê de você.

(Anônimo)

No fim tudo dá certo, se não deu certo é porque ainda não chegou ao fim.

(Fernando Sabino)

Quando o futuro vira passado, é fácil ver o que tinha que ser feito.

(Anônimo)

Nunca ande por caminhos já traçados, pois eles conduzem somente até onde os outros já foram.

(Anônimo)

Não ria das desgraças dos outros, pois um dia você pode ouvir o som de sua própria gargalhada.

(Anônimo)

Vale mais um inimigo sábio que um amigo ignorante.

(Anônimo)

A meus avós que sempre torceram por mim, mas não puderam compartilhar da minha
alegria em vê-la terminada e à Felicia A. J. Velludo, uma avó maravilhosa e ainda
companheira, dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) que possibilitou a realização deste trabalho, através da Divisão de Mecânica Espacial e Controle.

À FAPESP pela confiança depositada financiando essa pesquisa.

Aos membros da Banca Examinadora pelas importantes sugestões nas apresentações preliminar e final desta Dissertação.

Ao Dr. Fernando Bertachini de Almeida Prado que além de orientar, fez despertar minha vontade em continuar a pesquisa ajudando sempre com dedicação e amizade, para que se tornasse possível este e muitos outros trabalhos.

À Walkiria Schulz pela amizade em todos os momentos do curso, as sugestões e correções ortográficas deste trabalho.

A meus pais, que sempre me apoiaram e compreenderam, nunca deixando que eu desistisse mediante as dificuldades enfrentadas.

Ao Alexandre Augusto Rocha da Costa pelo incentivo desde o início da Iniciação Científica.

Aos amigos e professores que em todas as fases da minha vida, compartilharam de minhas alegrias e tristezas, cada um com sua particular ajuda, contribuindo direta ou indiretamente para a confecção deste trabalho.

A todos que, de alguma forma duvidaram que este trabalho pudesse se realizar, pois sem saber, me incentivavam cada vez mais.

RESUMO

Nas atividades espaciais, é de grande importância o estudo das trajetórias que os veículos espaciais devem seguir para completar uma missão. Com essa motivação, o presente trabalho está concentrado no estudo dessas trajetórias, dentro da dinâmica dada por: a) o problema tradicional de dois corpos com órbitas keplerianas, onde é suposto que o veículo espacial se move em torno de um corpo celeste modelado por um ponto de massa; b) o famoso problema restrito de três corpos, onde o veículo espacial é assumido como sendo um ponto de massa que se move devido às forças gravitacionais de dois primários que são dois corpos celestes modelados como pontos de massa e em órbitas keplerianas ao redor de um centro de massa comum. Serão estudadas manobras realizadas com o uso de propulsores capazes de prover variações instantâneas de velocidade em um veículo espacial e manobras que usam apenas forças gravitacionais. Serão feitas comparações entre opções diferentes para as respectivas manobras. As manobras que requerem que dois veículos espaciais se encontrem no espaço (Rendezvous) também são considerados, assim como manobras que consideram constelações de satélites.

ORBITAL MANEUVERS APPLIED TO THE PROBLEMS OF TWO AND THREE BODIES

ABSTRACT

In the space activities, it is of great importance the study of the trajectories that the space vehicles should follow to complete a mission. With that motivation, the present research is concentrated in the study of those trajectories, under the dynamics given by: a) The traditional Problem of Two Bodies with Keplerian orbits where the space vehicle is supposed to move around a heavenly body modeled by a point of mass; b) The well-known Restricted Problem of Three Bodies Model, where the space vehicle is assumed as being a point of mass that moves due to the gravitational forces of two primaries, that are two heavenly bodies modeled as point of mass and that are in Keplerian orbits around a common center of mass. Maneuvers accomplished with the use of engines capable to supply instantaneous variations of velocity in a space vehicle and maneuver that use only gravitational forces will be studied. Comparisons among different options for the respective maneuvers will be made. The maneuvers that requires that two spacecrafts encounter in the space (*Rendezvous*) are also considered, as well as maneuvers considering constellations of satellites.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS.....	17
LISTA DE TABELAS.....	21
LISTA DE SÍMBOLOS.....	23
CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO.....	27
1.1 – Introdução.....	27
1.2 - Objetivos do Trabalho.....	27
1.3 – Organização do Trabalho.....	28
CAPÍTULO 2 – TRANSFERÊNCIA DE ÓRBITAS: MANOBRAS BÁSICAS E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	31
2.1 - Revisão da Literatura.....	32
2.2 - Velocidade no apogeu e no perigeu da órbita.....	34
2.3 - Transferência entre órbitas concêntricas, coplanares e circulares.....	35
2.4 - Transferência entre uma órbita circular e uma órbita elíptica, coplanares e concêntricas.....	36
2.5 - Transferência entre órbitas elípticas, coplanares e coaxiais.....	38
2.6 – Transferência entre órbitas elípticas, coplanares e não coaxiais	39
CAPÍTULO 3 – MANOBRAS COM DOIS E TRÊS IMPULSOS PARA SATÉLITES ARTIFICIAIS.....	43

3.1 – Introdução.....	43
3.2 – Manobra bi-impulsiva ótima.....	43
3.3 – Resultados.....	45
3.4 – Conclusão.....	55
CAPÍTULO 4 – MANOBRAS ORBITAIS DE RENDEZVOUS.....	57
4.1 – Método Direto Interno.....	58
4.2 – Método Direto Externo.....	60
4.3 – Método Indireto.....	63
4.4 – Método Numérico.....	65
4.5 – Resultados.....	68
4.6 – Conclusões.....	82
CAPÍTULO 5 – MANUTENÇÃO DE ÓRBITAS DE CONSTELAÇÃO DE SATÉLITES ARTIFICIAIS.....	85
5.1 – Manobras para constelações de satélites.....	85
5.2 – Resultados.....	86
5.3 – Conclusões.....	89
CAPÍTULO 6 – A MANOBRA ASSISTIDA POR GRAVIDADE.....	91
6.1 – Descrição matemática da manobra gravitacionalmente assistida em duas dimensões.....	92

6.2 – O problema restrito de três corpos.....	99
6.3 – Algoritmo.....	101
6.4 – Resultados no caso plano.....	102
6.4.1 – Resultados para R_p fixo.....	102
6.4.2 – Resultados para V_p fixo.....	104
6.5 – Problemas ótimos no caso plano.....	107
6.5.1 – Problema 1.....	108
6.5.2 – Problema 2.....	108
6.5.3 – Problema 3.....	109
6.5.4 – Problema 4.....	109
6.6 – Conclusões no caso plano.....	110
6.7 – A manobra gravitacionalmente assistida em três dimensões.....	110
6.8 – Algoritmo para resolver o problema tridimensional.....	112
6.9 – Resultados para o caso tridimensional.....	115
6.9.1 – Resultados para o sistema Sol-Terra.....	115
6.9.2 – Resultados para o sistema Sol-Marte.....	117
6.9.3 – Resultados para o sistema Sol-Vênus.....	118
6.9.4 – Resultados para o sistema Sol-Saturno.....	119

6.9.5 – Resultados para o sistema Sol-Urano.....	120
6.9.6 – Resultados para o sistema Sol-Júpiter.....	123
6.9.1 – Resultados para o sistema Terra-Lua.....	124
6.10 – Efeitos da variação dos parâmetros.....	132
6.11 – Efeitos da componente não planar da velocidade no perigeu.....	139
6.12 – Problemas ótimos no caso tridimensional.....	153
6.12.1 – Problema 1.....	154
6.12.2 – Problema 2.....	155
6.13 – Conclusões para o caso tridimensional.....	156
CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	157
7.1 – Conclusões.....	157
7.2 – Sugestões para extensão deste trabalho.....	159
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	163

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Transferência do tipo <i>Hohmann</i> entre órbitas concêntricas, coplanares e circulares.....	35
2.2 - Transferência do tipo <i>Hohmann</i> entre uma órbita circular e uma órbita elíptica, coplanares e concêntricas.....	37
2.3 - Transferência do tipo <i>Hohmann</i> entre órbitas elípticas, coplanares e coaxiais.....	38
2.4 - Transferência entre órbitas elípticas, coplanares, não coaxiais, com a mesma dimensão.....	38
2.5 - Transferência entre órbitas elípticas, coplanares, não coaxiais, com dimensões diferentes.....	42
3.1 - Geometria do “Problema de <i>Lambert</i> com Mínimo Delta-V”.....	44
4.1 - Encontro de veículos espaciais pelo Método Direto Interno.....	58
4.2 - Encontro de veículos espaciais pelo Método Direto Externo.....	60
4.3 - Encontro de veículos espaciais pelo Método Indireto.....	63
4.4 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Interno ($R_{c2} = 1.0$).....	69
4.5 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1.0$ e $\Delta\alpha = 0^\circ$	70
4.6 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1,0$ e $\Delta\alpha = 30^\circ$	71

4.7 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1,0$ e $\Delta\alpha = 60^\circ$	72
4.8 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1,0$ e $\Delta\alpha = 90^\circ$	73
4.9 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$) com $R_{c1} = 5,0$	75
4.10 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$) com $R_{c1} = 10,0$	75
4.11 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$) com $R_{c1} = 20,0$	76
4.12 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$) com $R_{c1} = 50,0$	76
4.13 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$).....	81
5.1 - Geometria da Manobra de Constelação.....	86
6.1 - A manobra <i>Swing-by</i> e algumas de suas variáveis.....	93
6.2 - Soma de vetores velocidade.....	95
6.3 - Vetores velocidade.....	96
6.4 - Resultados para R_p fixo.....	103
6.5 - Resultados para V_p fixo.....	105
6.6 - Solução do Problema 2.....	108
6.7 - Solução do Problema 4.....	109
6.8 - Geometria da manobra <i>Swing-by</i> em três dimensões.....	111
6.9 - Resultados para o sistema Sol - Terra.....	116

6.10 - Resultados para o sistema Sol – Marte.....	117
6.11 - Resultados para o sistema Sol – Vênus.....	118
6.12 - Resultados para o sistema Sol – Saturno com $R_p = 6,348 \times 10^{-5}$	119
6.13 - Resultados para o sistema Sol – Saturno com $R_p = 8,464 \times 10^{-5}$	120
6.14 - Resultados para o sistema Sol – Urano com $R_p = 16,4 \times 10^{-6}$	121
6.15 - Resultados para o sistema Sol – Urano com $R_p = 8,2 \times 10^{-5}$	122
6.16 - Resultados para o sistema Sol – Júpiter com $R_p = 0,137595 \times 10^{-3}$	123
6.17 - Resultados para o sistema Sol – Júpiter com $R_p = 0,18346 \times 10^{-3}$	124
6.18 - Resultados para o sistema Terra-Lua.....	125
6.19 – Variação de Inclinação (a), Inclinação antes (b) e Inclinação depois (c) para $R_p = 0,00476$ e $V_p = 2,6$	135
6.20 – Variação de Inclinação.....	136
6.21 - Inclinação antes (a), Inclinação depois (b) e Variação de Inclinação (c) para $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 0^\circ$	140
6.22 - γ vs Variação de Inclinação.....	141
6.23 - γ vs Variação de Energia.....	146
6.24 - Soluções para o Problema 1.....	154
6.25 - Soluções para o Problema 2.....	155

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Manobras que alteram somente ω_f	46
3.2 - Manobras que alteram somente e_f	47
3.3 - Manobras que alteram ω_f , e_f	49
3.4 - Manobras que alteram somente a_f	51
3.5 - Manobras que alteram ω_f , a_f	52
3.6 - Manobras que alteram e_f e a_f	54
4.1 - Método Direto Interno para $R_{c2} = 1,0$	68
4.2 - Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1,0$ e $\Delta\alpha = 0^\circ$	70
4.3 - Método Direto Externo ($R_{c2} = 1,0$), para $\Delta\alpha = 30^\circ$	71
4.4 - Método Direto Externo ($R_{c2} = 1,0$), para $\Delta\alpha = 60^\circ$	72
4.5 - Método Direto Externo ($R_{c2} = 1,0$), para $\Delta\alpha = 90^\circ$	73
4.6 - Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$).....	74
4.7 - Método Numérico para $R_{c2} = 1,0$	79
4.8 - Comparação entre os métodos.....	81
5.1 - Método Direto Interno para $R_{c2} = 8100$	87
5.2 - Método Direto Externo ($R_a = N \cdot R_{c1}$) para $R_{c2} = 8100$	88

5.3 - Método Indireto para $R_{c2} = 8100$	89
6.1 - Regras para o estabelecimento de letras para as órbitas.....	99

LISTA DE SÍMBOLOS

Latinos

a	- Semi eixo maior da elipse
C	- Momento angular
$C -$	- Momento angular antes do encontro
$C +$	- Momento angular depois do encontro
C_z	- Componente Z do momento angular
e	- Excentricidade
E	- Energia
$E -$	- Energia antes do encontro
$E +$	- Energia depois do encontro
G	- constante gravitacional
i	- Inclinação da órbita
J	- Constante Jacobiana
m_1	- Massa real do corpo primário
m_2	- Massa real do corpo secundário
M_1	- Corpo primário
M_2	- Corpo secundário
n	- Constante de proporcionalidade entre R_a e R_{c1}
O_0	- Órbita inicial
O_1	- Órbita intermediária
O_2	- Órbita final
P	- Ponto de máxima aproximação
P_1 e P_2	- Pontos da órbita de transferência
\vec{r}	- Raio-vetor
r_1	- Distância do veículo espacial de M_1
r_2	- Distância do veículo espacial de M_2
R	- Raio

R_a	- Raio do apogeu
R_c	- Raio da órbita circular
R_{c1}	- Raio da órbita do veículo alvo
R_{c2}	- Raio da órbita do veículo interceptador
R_{ct}	- Raio da órbita circular de transferência
R_p	- Raio do perigeu
t	- Tempo
t_i	- Órbita intermediária
T	- Tempo da passagem pelo perigeu.
\vec{v}	- Vetor velocidade
V_a	- Velocidade no apogeu
V_p	- Velocidade no perigeu
V_{xi}, V_{yi}, V_{zi}	- Velocidade inicial do veículo espacial
\vec{V}_2	- Velocidade de M_2 relativa a M_1 ;
\vec{V}_i, \vec{V}_o	- Vetores velocidade do veículo espacial relativas a M_1 antes e depois do encontro;
$\vec{V}_\infty^-, \vec{V}_\infty^+$	- Vetores velocidade do veículo espacial relativas a M_2 antes e depois do encontro;
x_1, y_1	- Posição de M_1
x_2, y_2	- Posição de M_2
X_i, Y_i, Z_i	- Posição inicial do veículo espacial

Gregos

α	- Ângulo entre a linha de projeção do perigeu no plano x-y e a linha que conecta o dois primários
β	- Ângulo fora do plano da posição do periapse
β_c	- Ângulo que o veículo viaja entre os dois primeiros impulsos

γ	- Ângulo entre a velocidade no perigeu e a interseção entre o plano horizontal que passa pelo perigeu e plano perpendicular a R_p que contém V_p .
δ	- Metade do ângulo de curvatura (o ângulo entre \vec{V}_∞^- and \vec{V}_∞^+);
$\Delta\alpha$	- Ângulo entre os planos orbitais
ΔC	- Variação em momento angular
ΔE	- Variação em energia
Δt	- Variação de tempo para a transferência
ΔV	- Variação de velocidade obtida através do uso de um propulsor
ΔV_D	- Diferença entre a variação de velocidade bi-impulsiva e tri-impulsiva
ΔV_{bi}	- Variação da velocidade na transferência bi-impulsiva;
ΔV_{tri}	- Variação da velocidade na transferência tri-impulsiva
θ	- Anomalia verdadeira
λ	- Ângulo entre os vetores \vec{V}_1 e \vec{V}_2
λ_f	- Ângulo entre os vetores \vec{V}_0 e \vec{V}_2
μ	- Constante gravitacional (398600,64 km ³ /s ² para a Terra)
σ	- Ângulo de transferência da manobra bi-impulsiva ou tri-impulsiva
Ψ	- Ângulo entre a linha periapse e a linha $M_1 - M_2$ em uma manobra plana
ϕ	- Direção do impulso aplicado
Ω	- Argumento do nodo ascendente
ω	- Argumento do perigeu
ω_a	- Velocidade angular do primário

Índices inferiores

a	- Apogeu
c	- Circular
p	- Perigeu
1, i	- Inicial

2, f

- Final

CAPÍTULO 1

APRESENTAÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

Nas atividades espaciais, é de grande importância o estudo das trajetórias que os veículos devem seguir para completar uma missão. Com essa motivação, o presente trabalho está concentrado no estudo dessas trajetórias, dentro das dinâmicas dadas pelos problemas de dois e três corpos. Manobras realizadas com o uso de motores capazes de fornecer variações de velocidades instantâneas em um veículo espacial e manobras que utilizam apenas forças gravitacionais serão estudadas. Comparações entre diferentes opções para as respectivas manobras serão efetuadas. As manobras que requerem o encontro de veículos espaciais (*Rendezvous*) também serão estudadas, bem como as manobras considerando constelação de satélites.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo desse trabalho é estudar Mecânica Celeste aplicada à trajetória de veículos espaciais, em particular, ao problema de manobras orbitais de veículos espaciais. Para efetuar essa tarefa serão analisados diferentes modelos para a dinâmica e estratégia da manobra. Para a dinâmica, são considerados dois modelos básicos: i) O tradicional Problema de Dois Corpos com órbitas Keplerianas onde o veículo espacial é suposto se mover em torno de um corpo celeste modelado por um ponto de massa; ii) O modelo conhecido como Problema Restrito de Três Corpos, onde o veículo espacial é assumido como sendo um ponto de massa que se move devido à força gravitacional de dois primários, que são dois corpos celestes modelados como ponto de massa e que se encontram em órbitas Keplerianas em torno de um centro de massa comum.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em sete capítulos, os quais foram subdivididos em seções para facilitar a consulta. A seguir são detalhados os conteúdos desses capítulos.

Capítulo 1 - Apresenta uma introdução a este trabalho, abrange os objetivos do mesmo e detalha cada um dos capítulos seguintes.

Capítulo 2 – Apresenta uma rápida descrição de como é realizada uma transferência orbital, mostra as manobras de satélites artificiais e estuda em detalhes manobras para geometrias especiais das órbitas. Ainda apresenta uma Revisão Bibliográfica, apresentado alguns trabalhos mais relevantes na área.

Capítulo 3 - Mostra os testes referentes aos métodos que fornecem a solução do problema de transferência entre duas órbitas coplanares elípticas com dois ou três impulsos, mostrando as vantagens e desvantagens obtidas pela aplicação do terceiro impulso em diversas situações. Para isso utiliza uma nova variante do conhecido "Problema de Lambert", um dos mais importantes e discutidos tópicos em Mecânica Celeste. Nesta versão o requisito de tempo fixo é substituído pelo requisito de tempo mínimo.

Capítulo 4 - Estuda manobras de veículos espaciais quando existe o vínculo de que haja um encontro entre dois veículos em órbita. É a chamada manobra de *Rendezvous*. São estudadas e comparadas soluções analíticas e numéricas para esse problema, com o objetivo de determinar a melhor solução para cada caso.

Capítulo 5 - Estuda e testa métodos de manobras orbitais utilizadas para *Rendezvous* e que sejam aplicáveis para manobras com satélites envolvidos em Constelações.

Capítulo 6 - Estuda trajetórias espaciais dentro do problema restrito de três corpos. Em particular é descrita a manobra que consiste na passagem de um veículo espacial por um corpo celeste, conhecida como Manobra de *Swing-by*. Mostra simulações de manobras assistidas por gravidade com o objetivo de estudar a alteração sofrida por uma órbita devido à manobra de passagem próxima bi-dimensional e tri-dimensional. Em particular, é medido esse efeito sobre o valor da inclinação da órbita do veículo espacial considerado.

Capítulo 7 - Apresenta uma conclusão geral dos capítulos apresentados neste trabalho.

CAPÍTULO 2

TRANSFERÊNCIA DE ÓRBITAS: MANOBRAS BÁSICAS E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Realizar uma transferência orbital significa transladar um veículo espacial de um ponto para outro no espaço entre órbitas diferentes.

Uma transferência orbital torna-se necessária, por exemplo, quando ocorrem erros nos parâmetros nominais da órbita do satélite no momento de sua injeção, fazendo com que o mesmo se encontre em uma trajetória diferente da preestabelecida. Ou ainda, esta transferência pode estar prevista pela própria missão, pois, muitas vezes, é mais fácil colocar o satélite em uma órbita intermediária (devido a limitações do lançador) e, posteriormente, colocá-lo em sua órbita final desejada.

O interesse em se realizar uma otimização em manobras de transferência se baseia no consumo de combustível e/ou no tempo gasto para a realização destas.

Inicialmente, somente os casos de gasto de combustível mínimo e as transferências do tipo *Hohmann* serão analisados. Esses casos se caracterizam pelos impulsos serem aplicados no apogeu e/ou no perigeu das órbitas consideradas e por serem transferências ótimas (do ponto de vista de consumo de combustível) para os casos bi-impulsivos.

Algumas considerações e simplificações feitas neste capítulo são:

- a) Utilizam-se órbitas concêntricas: o centro de atração é sempre a Terra;
- b) Inicialmente, serão utilizadas órbitas coplanares: órbitas (inicial e final) que se encontram no mesmo plano;

c) Por fim, motores com impulso de curta duração (instantâneos) serão adotados: assim pode-se ignorar a variação do vetor posição do veículo espacial com relação ao centro da Terra durante as eventuais mudanças de direção e magnitude da velocidade.

2.1 REVISÃO DA LITERATURA

Goddard (1919), foi um dos primeiros pesquisadores a estudar transferências ótimas de uma espaçonave entre dois pontos. Ele propôs soluções ótimas aproximadas para o problema de enviar um foguete para grandes altitudes com consumo de combustível mínimo.

Em seguida, um trabalho desenvolvido por Hohmann (1925) resolveu o problema de transferência com mínimo ΔV (alteração instantânea da velocidade devido a aplicação de uma força) entre duas órbitas coplanares e circulares. O resultado deste trabalho é, hoje em dia, muito utilizado como uma primeira aproximação para modelos mais complexos. Depois, Shternfeld (1959) e Hoelker e Silber (1959) mostraram independentemente que esta transferência não era a melhor para todos os casos. Um estudo detalhado destas transferências pode ser encontrado em Marec (1979) e uma prova analítica que a manobra de Hohmann é um mínimo local pode ser obtida em Barrar (1963).

Logo, a transferência de Hohmann foi generalizada por Marchal (1965) para o caso elíptico (transferência entre duas órbitas elípticas coaxiais). Smith (1959) mostra resultados para alguns outros casos especiais, como órbitas elípticas coaxiais e quase-coaxiais, órbitas circulares-elípticas e duas órbitas quase-circulares. Um esquema numérico para resolver a transferência entre duas órbitas elípticas coplanares genéricas é apresentado por Bender (1962).

O conceito de três impulsos foi introduzido na literatura por Shternfeld (1959), na Rússia. Ele derivou a transferência bi-elíptica (de acordo com Edelbaum, 1967). Esta transferência foi derivada depois independentemente por Hoelker e Silber (1959) e Edelbaum (1959). Esses trabalhos mostraram que é possível encontrar uma transferência bi-elíptica entre duas órbitas circulares que têm um ΔV mais baixo que o necessário para a transferência de *Hohmann* correspondente, quando a relação entre o raio das órbitas inicial e final é maior que 11,93875. Depois, Roth (1967) obtém a solução de mínimo ΔV para uma transferência bi-elíptica entre duas órbitas inclinadas.

Seguindo a idéia de mais que dois impulsos apresentam-se, também os trabalhos de Prussing (1970) que admite dois ou três impulsos; Prussing (1969) que admite quatro impulsos; Eckel (1963) que admite N impulsos e Broucke e Prado (1995) que utiliza três ou quatro impulsos passando pelo infinito.

Outra linha de pesquisa que deriva da transferência de *Hohmann* é o estudo de transferências de multi-revolução, com N impulsos aplicados durante N passagens sucessivas pelos apsides. Spencer *et al* (1982) mostra equações e gráficos para obter o ΔV requerido para essas transferências, como uma função do número de revoluções permitidas por manobra. Logo, estende este conceito de transferência de multi-revolução ao caso não-impulsivo, aplicando um empuxo finito ao redor dos apsides.

Alguns outros pesquisadores trabalharam em métodos onde o número de impulsos é um parâmetro livre e não um valor fixado com antecedência. É o caso dos artigos de Lion e Handelsman (1968) e Jezewski e Rosendaal (1968). A maioria das pesquisas realizadas sobre este assunto em particular, estão baseadas na teoria do “Primer-Vector”, desenvolvida por Lawden (1953, 1954).

Dois artigos que documentam e resumem o conhecimento sobre transferências impulsivas são os escritos por Edelbaum (1967) e Gobetz e Doll (1969).

2.2 VELOCIDADE NO APOGEU E NO PERIGEU DA ÓRBITA

Nas transferências do tipo *Hohmann* (1925) ocorrem incrementos de velocidade no apogeu e/ou no perigeu das órbitas consideradas. Lembrando-se que existem transferências a serem realizadas entre órbitas circulares, observa-se também a necessidade do cálculo da velocidade do veículo na órbita circular. Esses incrementos, são calculados através do valor da velocidade do veículo espacial nesses pontos.

Assim sendo, alguns resultados básicos conhecidos na literatura e necessários para este trabalho são mostrados a seguir.

$$\text{Velocidade no perigeu: } V_p^2 = \frac{\mu}{R_p}(1+e) \quad (2.1)$$

$$\text{Velocidade no apogeu: } V_a^2 = \frac{\mu}{R_a}(1-e) \quad (2.2)$$

$$\text{Velocidade circular: } V_c^2 = \frac{\mu}{R_c} \quad (2.3)$$

Onde:

R_p = Raio do perigeu

R_a = Raio do apogeu

R_c = Raio da órbita circular

μ = Constante gravitacional (398600,64 km³/s² para a Terra)

e = Excentricidade

2.3 TRANSFERÊNCIA ENTRE ÓRBITAS CONCÊNTRICAS, COPLANARES E CIRCULARES

Como pode ser visto na Figura 2.1, a transferência ótima entre órbitas circulares coplanares é uma semi-elipse que tangencia em seu apogeu e em seu perigeu as duas órbitas circulares. Os impulsos são aplicados nos pontos A e B.

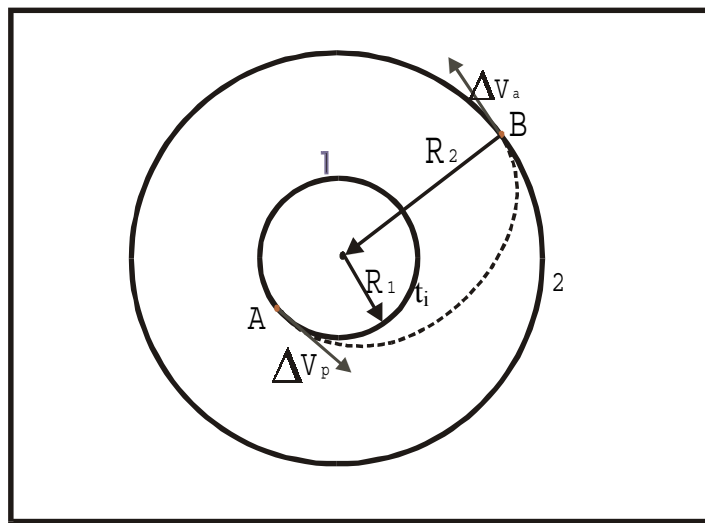


Fig. 2.1 –Transferência do tipo *Hohmann* entre órbitas concêntricas, coplanares e circulares.

No ponto A da órbita interna (1) a velocidade é aumentada tangencialmente por um impulso de magnitude ΔV_p , colocando o satélite em uma órbita elíptica (t_i) tal que seu apogeu coincida com o ponto B da órbita externa (2). Nesse ponto um segundo impulso tangencial ΔV_a ajustará o satélite à órbita final desejada. Os valores dos impulsos são dados por:

$$\Delta V_p = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} \left\{ (1+e)^{1/2} - 1 \right\} \quad (2.4)$$

$$\Delta V_a = \sqrt{\frac{\mu}{R_2}} \left\{ 1 - (1-e)^{1/2} \right\} \quad (2.5)$$

Onde:

R_1 = Raio da órbita 1

R_2 = Raio da órbita 2

O incremento total em velocidade é dado por: $\Delta V = |\Delta V_p| + |\Delta V_a|$.

O tempo total gasto durante a transferência é dado por: $t = \frac{\pi (R_1 + R_2)^{3/2}}{2 (2\mu)^{1/2}}$.

2.4 TRANSFERÊNCIA ENTRE UMA ÓRBITA CIRCULAR E UMA ÓRBITA ELÍPTICA, COPLANARES E CONCÊNTRICAS

A transferência esquematizada na Figura 2.2, entre uma órbita circular (1) e uma órbita elíptica (2), de excentricidade e_2 e semi-eixo maior a_2 , situadas no mesmo plano, requer dois impulsos (aumentos de velocidade) aplicados nos pontos A e B. O ponto B coincide com o apogeu da órbita elíptica, enquanto que o ponto A situa-se na órbita inicial e fica do lado oposto ao ponto B.

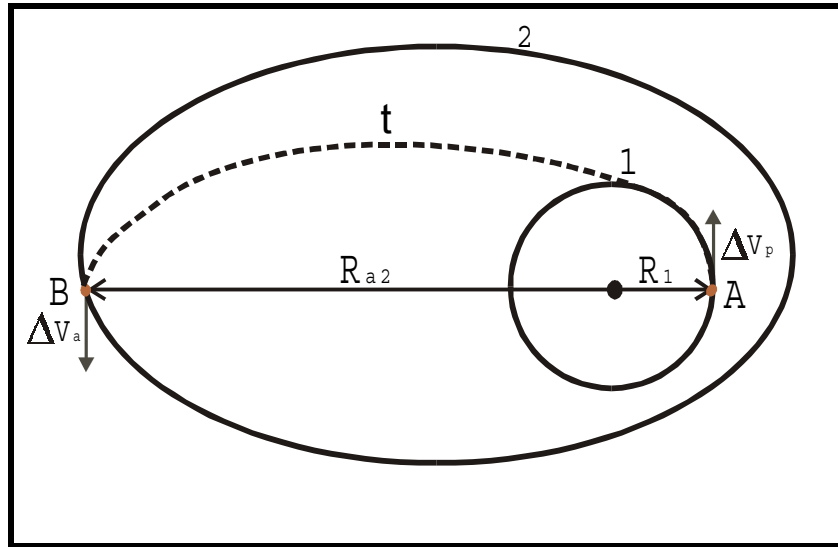


Fig.2.2 - Transferência do tipo *Hohmann* entre uma órbita circular e uma órbita elíptica, coplanares e concêntricas.

Os incrementos de velocidade podem ser calculados por:

$$\Delta V_p = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} \left\{ (1 + e_t)^{1/2} - 1 \right\} \quad (2.6)$$

$$\Delta V_a = \sqrt{\frac{\mu}{R_{p_2}}} \left\{ (1 + e_2)^{1/2} - (1 - e_1)^{1/2} \right\} \quad (2.7)$$

Onde:

e_t = Excentricidade da elipse de transferência

R_{p_2} = Raio do perigeu da órbita 2

R_{a_2} = Raio do apogeu da órbita 2

O incremento total em velocidade é dado por: $\Delta V = |\Delta V_p| + |\Delta V_a|$.

O tempo total gasto durante a transferência é dado por: $t = \frac{\pi (R_1 + R_{a_2})^{3/2}}{2 (2\mu)^{1/2}}$.

2.5 TRANSFERÊNCIA ENTRE ÓRBITAS ELÍPTICAS, COPLANARES E COAXIAIS

Como mostra a Figura 2.3, a trajetória de mínima energia entre duas órbitas elípticas, coplanares e coaxiais é uma elipse que as tangencia.

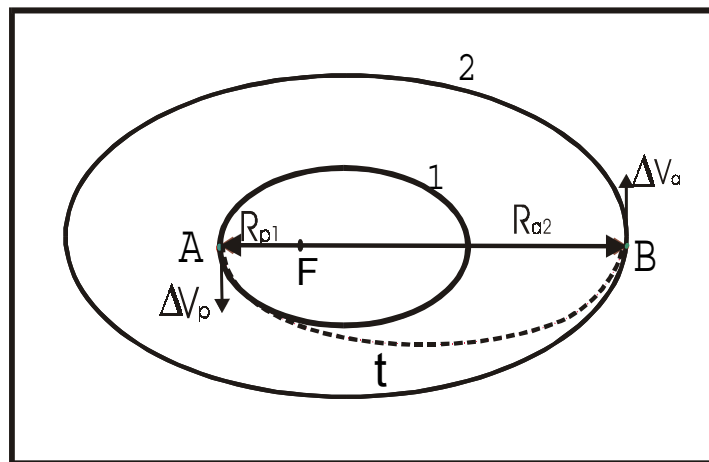


Fig.2.3 - Transferência do tipo *Hohmann* entre órbitas elípticas, coplanares e coaxiais.

O primeiro impulso é aplicado no perigeu da elipse interna (1) (ΔV_p) e o segundo impulso no apogeu da elipse externa (2) (ΔV_a). Os incrementos de velocidade podem ser obtidos a partir de:

$$\Delta V_p = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} \left\{ (1+e_t)^{1/2} - (1+e_1)^{1/2} \right\} \quad (2.8)$$

$$\Delta V_a = \sqrt{\frac{\mu}{R_{a_2}}} \left\{ (1-e_2)^{1/2} - (1-e_t)^{1/2} \right\} \quad (2.9)$$

O incremento total em velocidade é dado por: $\Delta V = |\Delta V_p| + |\Delta V_a|$.

O tempo total gasto durante a transferência é dado por: $t = \frac{\pi (R_{p_1} + R_{a_2})^{3/2}}{2 (2\mu)^{1/2}}$.

Onde:

e_1 = Excentricidade da órbita 1

R_{p1} = Raio do perigeu da órbita 1

2.6 TRANSFERÊNCIA ENTRE ÓRBITAS ELÍPTICAS, COPLANARES, NÃO COAXIAIS

Nesse caso, duas situações diferentes podem se apresentar, segundo Zanardi (1988).

- a) quando as elipses têm a mesma dimensão;
- b) quando as elipses não têm a mesma dimensão.

Ambas podem ser explicadas, porém separadamente.

a) Órbitas com a mesma dimensão

A técnica utilizada para esta transferência consiste em aplicar um impulso ΔV_c no apogeu da órbita inicial (1), colocando o satélite em uma órbita circular de raio R_a .

Assim que o satélite atingir a linha axial da órbita (2) (tangenciando a órbita final), um segundo incremento ΔV_c é aplicado em sentido contrário à velocidade, o que faz com que o satélite entre na órbita (2).

A magnitude desses impulsos pode ser obtida da equação: $\Delta V_c = \sqrt{\frac{\mu}{R_a}} \{1 - (1 - e)^{1/2}\}$.

O incremento total em velocidade é dado por: $\Delta V = |2\Delta V_c|$.

O tempo de duração da transferência será: $t = \frac{\beta_c (R_a)^{3/2}}{(\mu)^{1/2}}$, onde β_c é o ângulo percorrido entre os dois impulsos.

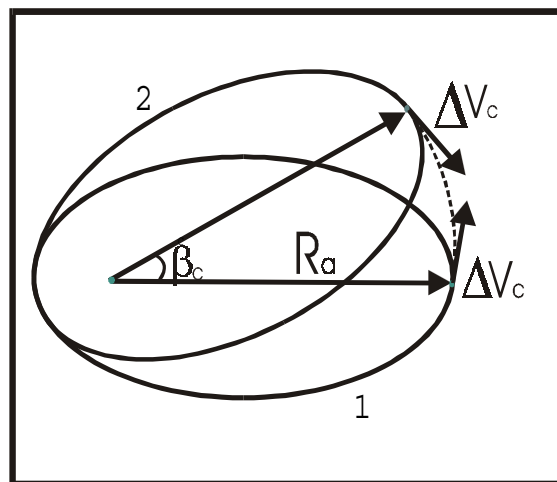


Fig.2.4 - Transferência entre órbitas elípticas, coplanares, não coaxiais, com a mesma dimensão.

b) Órbitas de dimensões diferentes

Existem vários modos de se efetuar uma transferência desse tipo. Neste Capítulo será apresentada a opção tri-impulsiva que aparece detalhada em Zanardi (1988) e Ball e Osborne (1967). No Capítulo 3 será estudada a versão bi-impulsiva.

A transferência, neste caso, é efetuada com 3 impulsos, em 3 etapas diferentes:

1º) Coloca-se o satélite em uma órbita coaxial com a órbita final desejada, através de uma órbita circular de raio R_{a1} ;

2º) Usa-se uma elipse de transferência (t) para alcançar a elipse desejada (2). Isto pode ser feito de várias maneiras dependendo-se dos parâmetros nominais de cada órbita. No exemplo mostrado na Figura 2.5, aplica-se um impulso ΔV_p para atingir esse objetivo;

3º) Quando a órbita final é atingida aplica-se um impulso ΔV_a para completar a transferência.

Os incrementos de velocidade são dados por:

$$\Delta V_c = \sqrt{\frac{\mu}{R_{a1}}} \left\{ -(1 - e_1)^{1/2} \right\} \quad (2.10)$$

$$\Delta V_p = \sqrt{\frac{\mu}{R_{a1}}} \left\{ (1 + e_t)^{1/2} - 1 \right\} \quad (2.11)$$

$$\Delta V_a = \sqrt{\frac{\mu}{R_{p_2}}} \left\{ (1 - e_2)^{1/2} - (1 - e_1)^{1/2} \right\} \quad (2.12)$$

O incremento total agora é dado por: $\Delta V = |\Delta V_c| + |\Delta V_p| + |\Delta V_a|$.

O tempo total gasto é: $t = \frac{1}{(\mu)^{1/2}} \left\{ \beta_c R_{a_1}^{3/2} + \frac{\pi(R_{a_1} + R_{p_2})^{3/2}}{2\sqrt{2}} \right\}$.

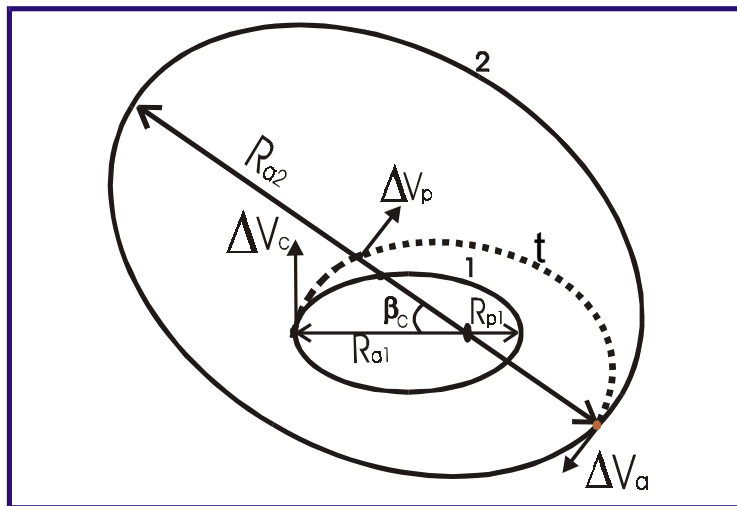


Fig.2.5 - Transferência entre órbitas elípticas, coplanares, não coaxiais, com dimensões diferentes.

Os métodos descritos foram implementados e testados exaustivamente e apresentaram resultados corretos nos testes efetuados. Esses métodos serão utilizados para comparação conforme descrito no próximo capítulo do presente trabalho.

CAPÍTULO 3

MANOBRAS COM DOIS E TRÊS IMPULSOS PARA SATÉLITES ARTIFICIAIS

3.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é comparar o método mais geral de transferências planas mostrado no final do Capítulo 2 com uma manobra bi-impulsiva ótima e obter resultados que quantifiquem essa comparação. A manobra tri-impulsiva considerada não é ótima, do ponto de vista de consumo, porém uma manobra tri-impulsiva ótima contém uma passagem pelo infinito. Isso faz da manobra tri-impulsiva aqui considerada, uma manobra mais realista, pois o tempo requerido para a transferência não vai ao infinito.

3.2 MANOBRA BI-IMPULSIVA ÓTIMA

Supõe-se que exista uma nave espacial em uma órbita Kepleriana chamada O_0 (a órbita inicial). Deseja-se transferir essa nave espacial para a órbita Kepleriana final O_2 , que é coplanar com a órbita O_0 . Para efetuar essa transferência, parte-se do ponto $P_1 (r_1, \theta_1)$, onde é aplicado um impulso com magnitude ΔV_1 que tem um ângulo ϕ_1 com a direção transversa local. A órbita de transferência cruza a órbita final no ponto $P_2 (r_2, \theta_2)$, onde é aplicado um impulso com magnitude ΔV_2 , que tem um ângulo ϕ_2 com a direção local transversa. Para definir o problema básico é necessário especificar o ângulo de posição (θ_1) do ponto de partida na órbita O_0 (P_1) e o ângulo de posição (θ_2) do ponto de chegada na órbita O_2 (P_2). Com esses dois valores dados e todos os elementos Keplerianos das duas órbitas conhecidos, é possível determinar os raios-vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 no início e no fim da transferência. Então, o problema é encontrar qual é a órbita de transferência que, conectando esses dois vetores e utilizando somente dois impulsos,

requer o mínimo ΔV para a manobra. Este problema foi chamado de “Problema de Lambert com mínimo Delta-V” (Prado, 1993; Prado e Broucke, 1996).

A formulação desse problema é “uma órbita kepleriana ao redor de um dado centro de força gravitacional deve ser encontrada conectando dois pontos dados (P_1 que pertence a uma órbita inicial e P_2 que pertence a uma órbita final), de forma que o ΔV (consumo de combustível) necessário para realizar a transferência, seja mínimo”.

O esquema da transferência e as variáveis utilizadas são mostrados na Figura 3.1.

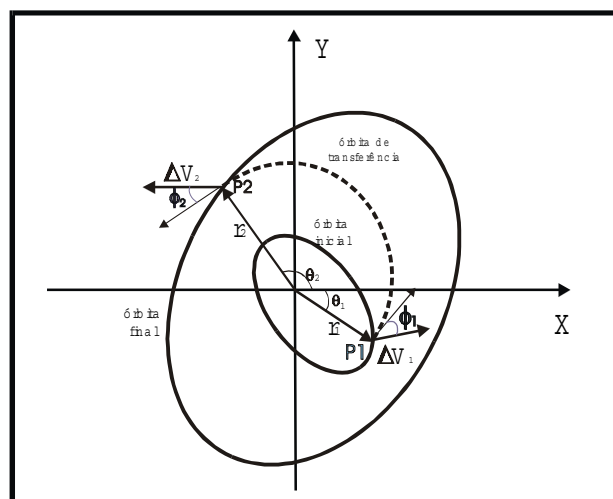


Fig.3.1 - Geometria do “Problema de Lambert com Mínimo Delta-V”.

Para resolver este problema, são obtidas as expressões analíticas para o incremento total de velocidade requerido ΔV (como uma função de apenas uma variável independente) e para sua primeira derivada com respeito a esta variável. Então, é utilizado um esquema numérico para obter a raiz da primeira derivada e o valor numérico do ΔV neste ponto.

A partir desta informação é possível obter todos os outros parâmetros envolvidos, como as componentes dos impulsos, suas localizações, etc. Assim, pode-se obter a

transferência bi-impulsiva de consumo mínimo entre duas órbitas coplanares dadas variando os pontos iniciais e finais da transferência nas duas órbitas dadas.

O equacionamento desse problema pode ser encontrado em Prado (1993) e Prado e Broucke (1996). No presente trabalho, esse método foi implementado e utilizado para comparação com o método tri-impulsivo mostrado no Capítulo anterior.

3.3 RESULTADOS

Foram testados os métodos que fornecem a solução para a transferência entre duas órbitas coplanares, elípticas, com dois ou três impulsos mostrados anteriormente.

Para uma melhor análise dos resultados foi feita uma tabela, variando separadamente os parâmetros de entrada dos programas, permitindo assim a comparação entre os mesmos.

Os parâmetros de entrada são os seguintes:

a = semi-eixo maior (para órbita inicial e final);

e = excentricidade (para órbita inicial e final);

ω = argumento do perigeu (para órbita inicial e final), que é o ângulo entre o perigeu da órbita e uma linha de referência.

Os parâmetros de saída são os seguintes:

ΔV_{bi} = variação da velocidade na transferência bi-impulsiva;

ΔV_{tri} = variação da velocidade na transferência tri-impulsiva;

σ = ângulo da transferência bi-impulsiva que o veículo deve percorrer para completar a manobra.

$$\Delta VD = |\Delta V_{bi} - \Delta V_{tri}| \quad (3.1)$$

Onde ΔVD é o módulo da diferença da variação da velocidade entre as manobras bi-impulsiva e tri-impulsiva.

a) Estudo de manobras no argumento do perigeu

Para estudar este caso, são utilizados os seguintes valores, em unidades canônicas: $a_i = a_f = 1,0$; $\omega_i = 0$; $e_i = e_f = 0,2; 0,4; 0,6$. Para ω_f são utilizados os valores: $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$ e 300° . Nos resultados observa-se que para todas as situações testadas, a transferência bi-impulsiva mostrou-se mais econômica e o ângulo σ tornou-se igual a 180° somente quando $\omega_f = 180^\circ$ (Tabela 3.1). Os sombreados das Tabelas 3.1 a 3.6 mostram a transferência mais econômica. Nesse caso particular, a manobra tri-impulsiva se transforma em uma bi-impulsiva ($\Delta V_3 = 0$) com o vínculo $\sigma = \omega_f$, o que impede a busca de manobras com σ próximo de 180° (manobras próximas das do tipo de *Hohmann*).

TABELA 3.1. MANOBRAS QUE ALTERAM SOMENTE ω_f

e_i	e_f	ω_f	ΔV_{bi}	ΔV_{tri}	ΔVD	σ ($^\circ$)
0,2	0,2	60°	0,0987	0,4082	0,3094	168
0,2	0,2	120°	0,1679	0,4082	0,2403	172
0,2	0,2	180°	0,1927	0,4082	0,2155	180
0,2	0,2	240°	0,1681	0,4082	0,2401	172
0,2	0,2	300°	0,0990	0,4082	0,3092	168
0,4	0,4	60°	0,2004	0,8728	0,6724	152
0,4	0,4	120°	0,3257	0,8728	0,5471	162

(CONTINUA)

TABELA 3.1 (CONCLUSÃO). MANOBRAS QUE ALTERAM SOMENTE ω_f

e_i	e_f	ω_f	ΔV_{bi}	ΔV_{tri}	ΔVD	σ (°)
0,4	0,4	180°	0,3810	0,8728	0,4918	180
0,4	0,4	240°	0,3345	0,8728	0,5383	164
0,4	0,4	300°	0,2009	0,8728	0,6719	152
0,6	0,6	60°	0,3149	1,500	1,1851	134
0,6	0,6	120°	0,5133	1,500	0,9867	156
0,6	0,6	180°	0,5811	1,500	0,9189	180
0,6	0,6	240°	0,5137	1,500	0,9863	156
0,6	0,6	300°	0,3157	1,500	1,1843	134

b) Estudo de manobras na excentricidade

Para estudar este caso, são utilizados os seguintes valores: $a_i = a_f = 1,0$; $\omega_i = \omega_f = 0$; $e_i = 0$ e $0,2$. Para e_f são utilizados valores no intervalo $0,02$ até $0,8$. Nos resultados observa-se que para todas as variações a transferência bi-impulsiva mostrou-se mais econômica (Tabela 3.2). O ângulo σ manteve-se igual a 180° sempre, por isso não é mostrado na Tabela 3.2. Nesse caso, a manobra bi-impulsiva ótima é do tipo *Hohmann*, com o primeiro impulso aplicado no perigeu da órbita inicial e o segundo impulso aplicado no apogeu da órbita final. A manobra tri-impulsiva irá circularizar a órbita inicial pelo apogeu e depois fazer uma transferência do tipo *Hohmann* dessa órbita circular para a órbita final desejada, acrescentando um consumo desnecessário.

TABELA 3.2. MANOBRAS QUE ALTERAM SOMENTE e_f

e_i	e_f	ΔV_{bi}	ΔV_{tri}	ΔVD
0,0	0,020	0,0099	0,0202	0,0103
0,0	0,040	0,0199	0,0408	0,0209
0,0	0,060	0,0297	0,0619	0,0321
0,0	0,080	0,0396	0,0834	0,0438
0,0	0,100	0,0494	0,1055	0,0561
0,0	0,110	0,0543	0,1167	0,0624

(CONTINUA)

TABELA 3.2 (CONCLUSÃO). MANOBRAS QUE ALTERAM SOMENTE e_f

e_i	e_f	ΔV_{bi}	ΔV_{tri}	ΔVD
0,0	0,130	0,0641	0,1396	0,0755
0,0	0,140	0,0690	0,1513	0,0823
0,0	0,150	0,0739	0,1631	0,0892
0,0	0,200	0,0983	0,2247	0,1264
0,0	0,225	0,1105	0,2572	0,1467
0,0	0,250	0,1227	0,2909	0,1682
0,0	0,275	0,1350	0,3261	0,1914
0,0	0,300	0,1472	0,3627	0,2155
0,0	0,400	0,1969	0,5275	0,3306
0,0	0,500	0,2483	0,7320	0,4837
0,0	0,600	0,3277	1,0000	0,6723
0,0	0,800	0,4305	2,0000	1,5695
0,2	0,300	0,0510	0,5462	0,4952
0,2	0,400	0,1026	0,7110	0,6084
0,2	0,500	0,1557	0,9155	0,7598
0,2	0,600	0,2117	1,1835	0,9718
0,2	0,700	0,2725	1,5639	1,2914
0,2	0,800	0,3422	2,1835	1,8413

c) Estudo de manobras na excentricidade e argumento do perigeu

Para estudar este caso, utilizam-se os seguintes valores: $a_i = a_f = 1,0$; $\omega_i = 0$; $e_i = 0$ e $0,2$. Para e_f utilizam-se os valores: $e_f = 0,3$ e $0,5$. Para ω_f utilizam-se os seguintes valores: 60° , 120° , 180° , 240° e 300° . Nos resultados observa-se que para todas as situações testadas a transferência bi-impulsiva mostrou-se mais econômica (Tabela 3.3). O ângulo σ manteve-se igual a 180° sempre. Esse resultado é esperado, já que as manobras individuais para argumento do perigeu e excentricidade possuem esse resultado, pelas razões já explicadas.

TABELA 3.3. MANOBRAS QUE ALTERAM ω_f , e_f

e_i	e_f	ω_f	ΔV_{bi}	ΔV_{tri}	ΔVD
0,0	0,3	60°	0,1473	0,3628	0,2155
0,0	0,3	120°	0,1473	0,3628	0,2155
0,0	0,3	180°	0,1473	0,3628	0,2155
0,0	0,3	240°	0,1473	0,3628	0,2155
0,0	0,3	300°	0,3147	0,3628	0,0480
0,0	0,5	60°	0,2484	0,7321	0,4837
0,0	0,5	120°	0,2484	0,7321	0,4837
0,0	0,5	180°	0,2484	0,7321	0,4837
0,0	0,5	240°	0,2484	0,7321	0,4837
0,0	0,5	300°	0,2484	0,7321	0,4837
0,2	0,3	60°	0,1309	0,5463	0,4153
0,2	0,3	120°	0,2108	0,5463	0,3354
0,2	0,3	180°	0,2399	0,5463	0,3063
0,2	0,3	240°	0,2110	0,5463	0,3352
0,2	0,3	300°	0,1312	0,5463	0,4150
0,2	0,5	60°	0,2194	0,9155	0,6961
0,2	0,5	120°	0,3049	0,9155	0,6106
0,2	0,5	180°	0,3338	0,9155	0,5817
0,2	0,5	240°	0,3051	0,9155	0,6104
0,2	0,5	300°	0,2196	0,9155	0,6959

d) Estudo de manobras no semi - eixo maior

Para estudar este caso, são utilizados os seguintes valores: $a_i = 1,0$; $\omega_i = \omega_f = 0$; $e_i = e_f = 0,1$; $0,05$; $0,2$ e $0,0$. Para a_f , utiliza-se valores no intervalo $1,1$ até $20,0$. Os sombreados agora variam caso a caso (Tabela 3.4). O ângulo σ manteve-se igual a 180° sempre. A análise sobre qual tipo de transferência consome menos energia mostra resultados mais complexos. Para $e_i = e_f = 0,0$, a manobra mais econômica é sempre a bi-impulsiva. Isso é esperado, pois trata-se da transferência de *Hohmann* com $R_p/R_0 \leq 5,0$ para os casos simulados, além do fato da manobra tri-impulsiva não ser ótima. Para $e_i = e_f = 0,05$, existe uma região de valores de a_f ($1,2 < a_f < 2,7$) na qual a manobra tri-impulsiva é mais econômica. Fora dessa região é mantida a tendência de obter maiores economias com a manobra bi-impulsiva. Essa situação se repete para os casos $e_i = e_f = 0,1$ e $e_i = e_f = 0,2$. A diferença é que quanto menor a excentricidade mais rápida é a transição entre

os tipos de manobras ótimas (bi ou tri-impulsiva). Devido a essas mudanças de resultados, novos testes foram feitos com um espaçamento menor entre as anomalias, durante o processo numérico da obtenção da manobra bi-impulsiva, reduzindo-as de 5° para $0,5^\circ$ e para $0,05^\circ$. Ainda assim os resultados mostraram-se iguais aos anteriores. A seguir, esses resultados foram verificados analiticamente, já que todas as transferências bi-impulsivas são do tipo de *Hohmann*. Os resultados continuam mostrando-se iguais aos já encontrados.

A primeira transição da manobra ótima de bi-impulsiva para tri-impulsiva se explica pelos valores dos raios no apogeu da primeira órbita e perigeu da segunda órbita. Quando $R_{a1} < R_{p2}$ a manobra tri-impulsiva é superior, pois em relação a manobra bi-impulsiva, ela substitui o impulso no perigeu por dois impulsos na altura do apogeu (um no apogeu da órbita inicial e outro na órbita circular intermediária, na posição que forma 180° com a aplicação do primeiro impulso). A diferença de consumo entre a soma desses dois impulsos e o impulso no perigeu é uma função do semi - eixo maior da órbita final, que é favorável, a manobra tri-impulsiva nos valores iniciais de a_f . Depois, com o aumento de a_f , a situação se inverte e a manobra tri-impulsiva passa a ser mais econômica. Porém, existe uma faixa intermediária, aonde $R_{a1} > R_{p2}$ e a órbita de transferência passa além do perigeu e desperdiça energia. Nessa faixa, a manobra tri-impulsiva é mais econômica.

TABELA 3.4. MANOBRAS QUE ALTERAM SOMENTE a_f

e_i	a_f	e_f	ΔV_{bi}	ΔV_{tri}	ΔVD
0,00	1,2	0,00	0,0869	0,0871	0,0002
0,00	1,5	0,00	0,1816	0,1835	0,0019
0,00	3,1	0,00	0,4009	0,4320	0,0311
0,00	3,3	0,00	0,4139	0,4495	0,0356
0,00	5,0	0,00	0,4800	0,5527	0,0727
0,05	1,1	0,05	0,0463	0,0511	0,0048
0,05	1,2	0,05	0,0865	0,0490	0,0374
0,05	1,3	0,05	0,1216	0,0785	0,0430
0,05	2,7	0,05	0,3625	0,3608	0,0017
0,05	2,8	0,05	0,3709	0,3723	0,0014
0,05	3,3	0,05	0,4052	0,4218	0,0166
0,05	3,4	0,05	0,4108	0,4304	0,0196
0,05	3,5	0,05	0,4161	0,4386	0,0225
0,10	1,1	0,10	0,0461	0,1495	0,3116
0,10	1,2	0,10	0,0859	0,1046	0,0187
0,10	1,3	0,10	0,1206	0,0947	0,0259
0,10	1,4	0,10	0,1511	0,0955	0,0556
0,10	1,5	0,10	0,1780	0,0997	0,0783
0,10	3,0	0,10	0,3776	0,3641	0,0135
0,10	3,1	0,10	0,3842	0,3744	0,0098
0,10	3,2	0,10	0,3902	0,3843	0,0059
0,10	3,3	0,10	0,3959	0,3938	0,0021
0,10	3,4	0,10	0,4013	0,4028	0,0015
0,10	3,5	0,10	0,4062	0,4114	0,0052
0,10	4,0	0,10	0,4271	0,4496	0,0225
0,10	4,5	0,10	0,4427	0,4812	0,0384
0,10	5,0	0,10	0,4547	0,5079	0,0532
0,10	10,0	0,10	0,4964	0,6527	0,1563
0,10	20,0	0,10	0,4980	0,7551	0,2571
0,20	1,1	0,20	0,0452	0,3512	0,3060
0,20	1,2	0,20	0,0840	0,3015	0,2175
0,20	1,3	0,20	0,1176	0,2576	0,1400
0,20	3,3	0,20	0,3755	0,3350	0,0405
0,20	3,4	0,20	0,3803	0,3450	0,0353
0,20	3,5	0,20	0,3848	0,3545	0,0302

e) Estudo de manobras no argumento do perigeu e semi - eixo maior

Para estudar este caso, são utilizados os seguintes valores: $a_i = 1,0$; $\omega_i = 0$; $e_i = e_f = 0,2$. Para a_f utiliza-se valores no intervalo 2,0 até 30,0. Para ω_f utiliza-se os seguintes valores: 60° , 120° , 180° , 240° e 300° . Os resultados são mostrados na Tabela 3.5. Pode-se concluir que, para valores de a_f menores do que 5,0, a manobra tri-impulsiva é sempre mais econômica e para valores de a_f maiores do que 5,0, a escolha da melhor manobra depende do valor de ω_f . Na região em torno de $\omega_f = 180^\circ$, a manobra tri-impulsiva é mais econômica e na região em torno de $\omega_f = 0^\circ$, a manobra bi-impulsiva é mais econômica. O ângulo σ mostrou-se igual a 180° apenas quando $\omega_f = 180^\circ$.

Nota-se que para a manobra tri-impulsiva, o consumo não depende da variação do argumento do perigeu entre as órbitas inicial e final. Esse fato está correto, pois alterar o argumento do perigeu é apenas uma questão do tempo decorrido entre os dois primeiros impulsos. Já a manobra bi-impulsiva por ser ótima, economiza combustível na manobra com argumento do perigeu. Isso explica a oscilação ocorrida em $a_f = 5,0$, aonde as duas manobras consideradas alternam a condição de maior economia em função de ω . Nos demais casos, essa oscilação não predomina sobre o fator semi - eixo maior na diferença entre os primeiros impulsos. A explicação do caso anterior se aplica, e quando aumento o valor de a_f a manobra bi-impulsiva possui menor consumo.

TABELA 3.5. MANOBRAS QUE ALTERAM ω_f , a_f

a_f	ω_f	ΔV_{bi}	ΔV_{tri}	ΔVD	σ
2,0	60°	0,2719	0,1849	0,0870	144
2,0	120°	0,2830	0,1849	0,0981	130
2,0	180°	0,2867	0,1849	0,1018	180
2,0	240°	0,2830	0,1849	0,0981	130
2,0	300°	0,2719	0,1849	0,0558	156
3,0	60°	0,3679	0,3021	0,0658	158
3,0	120°	0,3860	0,3021	0,0658	146

(CONTINUA)

TABELA 3.5 (CONCLUSÃO). MANOBRAS QUE ALTERAM ω_f , a_f

a_f	ω_f	ΔV_{bi}	ΔV_{tri}	ΔVD	σ
3,0	180°	0,3952	0,3021	0,0931	180
3,0	240°	0,3861	0,3021	0,0840	146
3,0	300°	0,6794	0,3021	0,3773	156
4,0	60°	0,4135	0,3968	0,0167	162
4,0	120°	0,4356	0,3968	0,0388	152
4,0	180°	0,4482	0,3968	0,0514	180
4,0	240°	0,4357	0,3968	0,0389	152
4,0	300°	0,4136	0,3968	0,0158	162
5,0	60°	0,4385	0,4615	0,0230	146
5,0	90°	0,4502	0,4615	0,0113	158
5,0	120°	0,463	0,4615	0,0014	156
5,0	150°	0,4736	0,4615	0,0121	164
5,0	180°	0,4777	0,4615	0,0161	180
5,0	210°	0,4737	0,4615	0,1220	164
5,0	240°	0,4631	0,4615	0,0015	156
5,0	270°	0,4503	0,4615	0,1120	158
5,0	300°	0,4386	0,4615	0,0230	164
5,0	360°	0,4601	0,4615	0,0014	180
6,0	60°	0,4534	0,5092	0,0556	166
6,0	90°	0,4656	0,5092	0,0437	160
6,0	120°	0,4792	0,5092	0,0300	158
6,0	150°	0,4907	0,5092	0,1857	166
6,0	180°	0,4951	0,5092	0,0141	180
6,0	210°	0,4907	0,5092	0,0186	166
6,0	240°	0,4793	0,5092	0,0299	158
6,0	270°	0,4656	0,5092	0,0436	160
6,0	300°	0,4534	0,5092	0,0558	166
10,0	60°	0,4742	0,6219	0,1477	168
10,0	120°	0,5019	0,6219	0,1200	164
10,0	180°	0,5193	0,6219	0,1026	180
10,0	240°	0,5020	0,6219	0,1199	164
10,0	300°	0,4743	0,6219	0,1476	168
30,0	60°	0,4639	0,7856	0,3217	172
30,0	120°	0,4879	0,7856	0,2977	170
30,0	180°	0,5024	0,7856	0,2832	180
30,0	240°	0,4879	0,7856	0,2977	170
30,0	300°	0,4639	0,7856	0,3217	172

f) Estudo de manobras na excentricidade e semi - eixo maior

Para estudar este caso, são utilizados os seguintes valores: $a_i = 1,0$; $\omega_i = \omega_f = 0$. Para a_f utilizam-se valores na faixa que vai de 2,0 até 50,0. Para e_i utilizam-se valores na faixa que vai de 0,0 até 0,2 e para e_f de 0,2 até 0,8. O ângulo σ manteve-se igual a 180° sempre. A manobra tri-impulsiva é mais econômica na maioria das situações com exceção de alguns poucos intervalos mostrados na Tabela 3.6. As razões para a oscilação são obtidas a partir das análises feitas para as manobras individuais. Quando a órbita final possui um semi - eixo maior e o padrão segue o mesmo da análise individual dessa situação, ou seja, domínio da manobra bi-impulsiva. Para valores menores de a_f , a excentricidade final desempenha um papel importante, pois ela controla a variável R_{p2} , conforme já explicado. Por exemplo, considere as duas primeiras manobras listadas na Tabela 3.6. Para ambos os casos temos $R_{a1} = 1,2$, já que $e_i = 0,2$ e $a_i = 1,0$ nos dois casos.

Porém, quando $e_f = 0,3$, temos $R_{p2} = 1,4$ (logo $R_{p2} > R_{a2}$) e a manobra tri-impulsiva é mais econômica, conforme explicado no item d. O mesmo padrão se repete nos demais casos. Em particular, nota-se que quando $R_{p2} = R_{a1}$ (linha 8 da Tabela 3.6: $e_i = 0,0$; $a_f = 2,0$; $e_f = 0,5$), temos que o consumo das duas manobras são iguais.

TABELA 3.6. MANOBRAS QUE ALTERAM e_f e a_f

e_i	a_f	e_f	ΔV_{bi}	ΔV_{tri}	ΔVD
0,2	2,0	0,3	0,25136	0,21875	0,0326
0,2	2,0	0,5	0,21375	0,40825	0,1945
0,1	2,0	0,2	0,26636	0,14709	0,1193
0,1	2,0	0,3	0,25342	0,17716	0,0763
0,1	2,0	0,5	0,21792	0,32021	0,1023
0,0	2,0	0,2	0,27045	0,13397	0,1365
0,0	2,0	0,3	0,25848	0,13788	0,1230

(CONTINUA)

TABELA 3.6 (CONCLUSÃO). MANOBRAS QUE ALTERAM e_f e a_f

e_i	a_f	e_f	ΔV_{bi}	ΔV_{tri}	ΔVD
0,0	2,0	0,5	0,22475	0,22475	0,0000
0,0	2,0	0,6	0,26663	0,41421	0,1476
0,2	5,0	0,3	0,41178	0,39979	0,0120
0,2	5,0	0,5	0,37614	0,31341	0,0627
0,1	5,0	0,2	0,44119	0,45467	0,0135
0,1	5,0	0,3	0,42629	0,39294	0,0333
0,1	5,0	0,5	0,39222	0,28627	0,1060
0,0	5,0	0,2	0,45624	0,45228	0,0040
0,0	5,0	0,3	0,44218	0,39056	0,0516
0,0	5,0	0,5	0,40950	0,26274	0,1467
0,1	10,0	0,3	0,46834	0,57145	0,1031
0,1	20,0	0,6	0,43509	0,55518	0,1201
0,1	30,0	0,7	0,42281	0,56778	0,1449
0,1	40,0	0,8	0,41013	0,53912	0,1290
0,1	50,0	0,8	0,41008	0,57813	0,1681

3.4 CONCLUSÕES

Foram testados dois métodos para o cálculo de manobras orbitais coplanares e impulsivas. Um método é baseado no “Problema de *Lambert* com um mínimo ΔV ” e soluciona numericamente o problema para a manobra com dois impulsos. O segundo método adiciona a possibilidade de um terceiro impulso na manobra. Outra questão analisada é o ângulo de transferência para a manobra bi-impulsiva.

Os resultados mostram que a transferência bi-impulsiva é vantajosa para transferências envolvendo mudanças apenas no argumento do perigeu e/ou na excentricidade. Já a manobra tri-impulsiva apresenta maior economia em algumas regiões (em termos de e_i e e_f) quando a manobra altera apenas o semi-eixo maior da órbita. Nos casos onde o semi-eixo maior é alterado juntamente com o argumento do perigeu ou com a excentricidade, a decisão sobre qual a melhor manobra tem que ser feita caso a caso,

conforme mostrado na seção de resultados. As razões que determinam a manobra mais econômica foram investigadas e explicadas.

Do ponto de vista de ângulo de transferência da manobra bi-impulsiva, os resultados mostram que todas as manobras que envolvem excentricidade possuem como solução σ igual a 180° , bem como manobras que alteram somente o semi-eixo maior. Manobras que alteram somente o argumento do perigeu ou o argumento do perigeu e o semi-eixo maior possuem soluções com σ diferente de 180° a menos que $\omega_i = 0^\circ$ e $\omega_f = 180^\circ$.

CAPÍTULO 4

MANOBRAS ORBITAIS DE RENDEZVOUS

Para ocorrer um encontro entre dois veículos espaciais (*Rendezvous*) é necessário que o instante de suas chegadas em um ponto pré-determinado no espaço seja o mesmo para os dois veículos considerados. O veículo a ser transferido chama-se “*interceptor*” e o veículo a ser interceptado chama-se “*alvo*”.

Muitos trabalhos nesse assunto foram publicados na literatura a partir da década de 60 até os dias atuais. Em geral são estudados métodos impulsivos que executem a manobra desejada. Alguns dos trabalhos pioneiros nessa linha são: Billik e Roth (1967); Prussing (1969 e 1970); Gross e Prussing (1974). Trabalhos mais recentes considerando o mesmo modelo impulsivo e também a possibilidade de empuxo contínuo também existem na literatura. Entre eles podem ser destacados: Prussing (1969), Wolfsberger, *et al* (1983); Prussing e Chiu (1986); Prussing (1988); Mirfakhraie (1990); Humi (1993); Lee e Cochran (1993); Lembeck e Prussing (1993); Mirfakhraie e Conway (1994); Shaohua, *et al* (1994); Yuan e Hsu (1994); Pardis e Carter (1995), Tauer, *et al* (1995); Stern e Fowler (1985); Yu (1995); Lopez e Mcinnes (1995).

Neste trabalho, serão analisados três métodos analíticos: Método Direto Interno, Método Direto Externo e Método Indireto (Ball e Osborne, 1967; Zanardi, 1988) e um Método Numérico mais genérico (Prado, 1996), que pode resolver o problema sem as hipóteses simplificadoras utilizadas nos métodos analíticos. A escolha do método a ser aplicado dependerá das circunstâncias particulares envolvidas.

Serão apresentados aqui, encontros entre veículos que estejam inicialmente em órbitas circulares, não coplanares e de raios diferentes. As equações estão derivadas com o veículo alvo encontrando-se em uma órbita mais alta que a do veículo interceptor,

porém os cálculos do ΔV valem para o caso em que o veículo alvo encontra-se em uma órbita mais baixa dado que uma inversão no sinal das equações não altera a magnitude dos impulsos calculados.

4.1 MÉTODO DIRETO INTERNO

O Método Direto Interno utiliza uma semi-elipse de transferência interna entre o veículo alvo e o interceptador para a realização da manobra de *Rendezvous*.

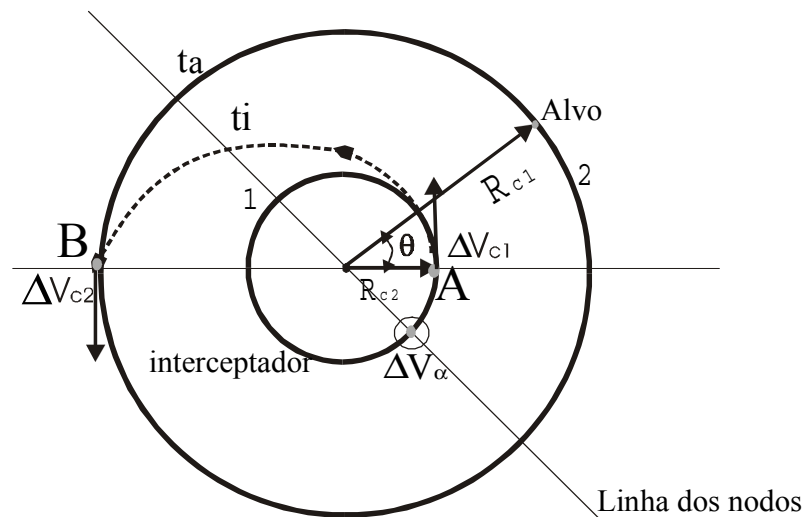


Fig 4.1 - Encontro de veículos espaciais pelo Método Direto Interno.

O veículo alvo encontra-se em uma órbita circular de raio R_{c1} , sendo que a órbita está inclinada de um ângulo $\Delta\alpha$ com relação à órbita do interceptador. Quando o interceptador cruza a linha dos nodos (intercessão entre dois planos orbitais), receberá um impulso para girar seu vetor velocidade, colocando-o no plano da órbita do veículo alvo (ΔV_α), de tal forma que ambas as órbitas se tornem coplanares. A fase seguinte inicia-se no ponto A, onde o alvo encontra-se adiantado do interceptador de um ângulo predeterminado θ (Figura 4.1). É neste ponto que o interceptador recebe um incremento de velocidade ΔV_{c1} , que causa a entrada na elipse de transferência (t_i), com o objetivo

de atingir o ponto B no mesmo instante que o alvo. No ponto B, a velocidade deve ser aumentada novamente, aplicando-se um impulso ΔV_{c2} , a fim de possibilitar a entrada do interceptador na órbita do veículo alvo, igualando-se assim suas velocidades para completar o *Rendezvous*. O incremento total será de: $\Delta V = |\Delta V_{\alpha}| + |\Delta V_{c1}| + |\Delta V_{c2}|$. Essas grandezas podem ser calculadas utilizando-se as equações abaixo:

$$V_{c2} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{c2}}} \quad (4.1)$$

$$\Delta V_{\alpha} = 2V_{c2} \operatorname{sen} \frac{\Delta\alpha}{2} \quad (4.2)$$

$$a_t = \frac{R_{c1} + R_{c2}}{2} \quad (4.3)$$

$$V_{pt} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{c2}} - \frac{\mu}{a_t}} \quad (4.4)$$

$$\Delta V_{c1} = V_{pt} - V_{c2} \quad (4.5)$$

$$V_{at} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{c1}} - \frac{\mu}{a_t}} \quad (4.6)$$

$$V_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{c1}}} \quad (4.7)$$

$$\Delta V_{c2} = V_{c1} - V_{at} \quad (4.8)$$

$$R_{pt} = R_{c2}; R_{at} = R_{c1} \quad (4.9)$$

Onde:

a_t = semi eixo maior da elipse de transferência t_i ;

V_{at} = velocidade no apogeu da elipse de transferência t_i ;

V_{pt} = velocidade no perigeu da elipse de transferência t_i ;

R_{at} = raio do apogeu da elipse de transferência t_i ;

R_{pt} = raio do perigeu da elipse de transferência t_i .

Para realizar uma transferência de A para B, o interceptador descreve uma semi-elipse

$$t_i, \text{ e o tempo gasto nessa etapa é dado por: } t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{R_{c1} + R_{c2}}{2} \right)^{3/2}.$$

O tempo correspondente para que o veículo alvo se desloque de um ângulo $(\pi - \theta)$

$$\text{radianos é: } t_a = \frac{(\pi - \theta) R_{c1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}}.$$

Para que ambos os veículos se encontrem em B no mesmo instante, deve-se ter: $t = t_a$.

Assim, pode-se concluir que para se dar início a esse processo de transferência:

$$\theta = \pi \left\{ 1 - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R_{c2}}{R_{c1}} + 1 \right) \right]^{3/2} \right\}.$$

4.2 MÉTODO DIRETO EXTERNO

O Método Direto Externo utiliza uma semi-elipse de transferência externa entre o veículo alvo e o interceptador para a realização da manobra de *Rendezvous*.

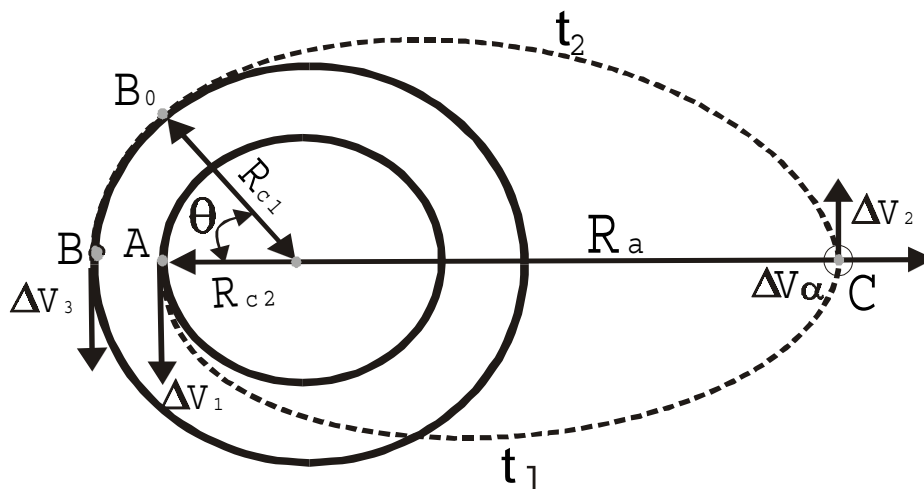


Fig.4.2 - Encontro de veículos espaciais pelo Método Direto Externo

Quando o interceptador cruza a linha dos nodos em A, sua velocidade é impulsivamente aumentada (ΔV_1) para colocá-lo em uma primeira elipse de transferência (t_1) com o apogeu em C. Nesse ponto, os planos orbitais do alvo e do interceptador são alinhados (ΔV_α) e a velocidade deste último é incrementada (ΔV_2) para colocá-lo na segunda elipse de transferência (t_2), cujo perigeu é o próprio ponto de *Rendezvous* B. B_0 é o ponto onde o alvo está localizado no início da manobra. Em B, o interceptador é posto na órbita circular final (ΔV_3) e o *Rendezvous* é completado. Quando a manobra é iniciada, o alvo está atrasado com respeito ao interceptador de um ângulo θ (Figura 4.2). O incremento total é dado por: $\Delta V = |\Delta V_1| + |\Delta V_\alpha| + |\Delta V_2| + |\Delta V_3|$.

As equações utilizadas são:

$$R_a = n \cdot R_{c1} \quad (4.10)$$

$$a_1 = \frac{R_{c2} + R_a}{2} \quad (4.11)$$

$$a_2 = \frac{R_{c1} + R_a}{2} \quad (4.12)$$

$$V_{a1} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_a} - \frac{\mu}{a_1}} \quad (4.13)$$

$$\Delta V_\alpha = 2V_{a1} \operatorname{sen} \frac{\Delta\alpha}{2} \quad (4.14)$$

$$V_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{c1}}} \quad (4.15)$$

$$V_{c2} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{c2}}} \quad (4.16)$$

$$\Delta V_3 = V_{c1} - V_{p2} \quad (4.17)$$

$$V_{p1} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{c2}} - \frac{\mu}{a_1}} \quad (4.18)$$

$$\Delta V_1 = V_{p1} - V_{c2} \quad (4.19)$$

$$V_{a2} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_a} - \frac{\mu}{a_2}} \quad (4.20)$$

$$\Delta V_2 = V_{a2} - V_{a1} \quad (4.21)$$

$$V_{p2} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{c2}} - \frac{\mu}{a_2}} \quad (4.22)$$

$$R_{pt} = R_{c2}; \quad R_{a1} = R_{a2} = R_a; \quad R_{p2} = R_{c1}.$$

Onde:

n = constante de proporcionalidade entre R_a e R_{c1} ;

R_a = raio do apogeu;

R_{a1} = raio do apogeu da órbita 1;

R_{a2} = raio do apogeu da órbita 2;

R_{p1} = raio do perigeu da órbita 1;

R_{p2} = raio do perigeu da órbita 2;

a_1 = semi-eixo maior da elipse de transferência t_1 ;

a_2 = semi-eixo maior da elipse de transferência t_2 ;

V_{a1} = velocidade no apogeu da elipse de transferência t_1 ;

V_{a2} = velocidade no apogeu da elipse de transferência t_2 ;

V_{p1} = velocidade no perigeu da elipse de transferência t_1 ;

V_{p2} = velocidade no perigeu da elipse de transferência t_2 .

O tempo gasto pelo interceptador para ir de A até B é dado por:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} \left\{ \left(\frac{R_a + R_{c2}}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{R_a + R_{c1}}{2} \right)^{3/2} \right\}.$$

O tempo gasto pelo alvo para chegar em B é: $t_a = \frac{(2\pi - \theta)R_{c1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$.

Para que ambos os veículos se encontrem no mesmo instante, deve-se ter: $t = t_a$; de onde

$$\text{se conclui que: } \theta = \pi \left\{ \frac{1}{R_{c1}^{3/2}} - \left[\left(\frac{R_{c1} + R_a}{2} \right)^{3/2} \right] + \left[\left(\frac{R_{c2} + R_a}{2} \right)^{3/2} \right] - 2 \right\}.$$

4.3 - MÉTODO INDIRETO

O Método Indireto utiliza uma órbita intermediária entre o alvo e o interceptador, na qual o interceptador permanece até que o alvo se encontre na posição correta para que a manobra de *Rendezvous* se inicie.

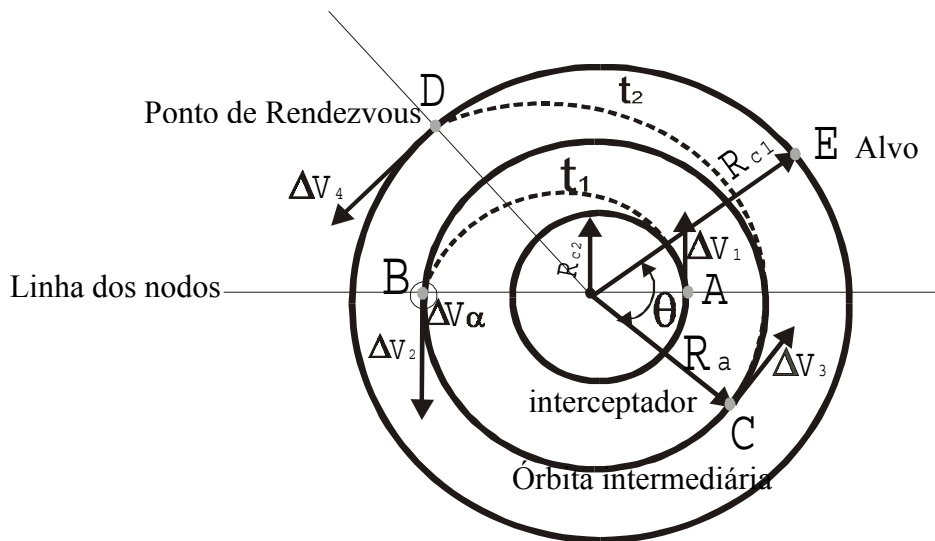


Fig.4.3 - Encontro de veículos espaciais pelo Método Indireto.

Para colocar o interceptador em uma órbita elíptica de transferência t_1 é feito um incremento impulsivo de velocidade no ponto A (ΔV_1). Em B é feita a correção dos planos (ΔV_α) e dado um incremento de velocidade (ΔV_2) para o interceptador entrar em uma órbita circular intermediária, coplanar com a trajetória do alvo. Nessa órbita

intermediária o interceptador esperará o veículo alvo até estarem defasados de um ângulo θ , quando então o *Rendezvous* efetuado por meio de uma segunda elipse de transferência t_2 , aplicando-se um impulso em C (ΔV_3). Em D, o *Rendezvous* é completado com um aumento de velocidade (ΔV_4), aplicado como descrito no Método Direto Interno. O incremento total é dado por:

$$\Delta V = |\Delta V_\alpha| + |\Delta V_1| + |\Delta V_2| + |\Delta V_3| + |\Delta V_4|.$$

As equações utilizadas para esses cálculos são:

$$a_1 = \frac{R_{c2} + R_a}{2} \quad (4.23)$$

$$a_2 = \frac{R_{c1} + R_a}{2} \quad (4.24)$$

$$V_{a1} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_a} - \frac{\mu}{a_1}} \quad (4.25)$$

$$\Delta V_\alpha = 2V_{a1} \operatorname{sen} \frac{\Delta\alpha}{2} \quad (4.26)$$

$$V_{p1} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{c2}} - \frac{\mu}{a_1}} \quad (4.27)$$

$$V_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{c1}}} \quad (4.28)$$

$$V_{c2} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{c2}}} \quad (4.29)$$

$$\Delta V_1 = V_{p1} - V_{c2} \quad (4.30)$$

$$V_{ct} = \sqrt{\frac{\mu}{R_a}} \quad (4.31)$$

$$V_{a2} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_a} - \frac{\mu}{a_2}} \quad (4.32)$$

$$\Delta V_2 = V_{ct} - V_{a1} \quad (4.33)$$

$$V_{p2} = \sqrt{\frac{2\mu}{R_{c2}} - \frac{\mu}{a_2}} \quad (4.34)$$

$$\Delta V_3 = V_{p2} - V_{ct} \quad (4.35)$$

$$\Delta V_4 = V_{c1} - V_{a2} \quad (4.36)$$

$$R_{p1} = R_{c2}; R_{a1} = R_{p2} = R_a = R_{ct}; R_{a2} = R_{c1}$$

Onde:

R_{ct} = raio circular da órbita intermediária;

V_{ct} = velocidade circular da órbita intermediária.

O ângulo θ que irá determinar a posição relativa entre o alvo e o interceptador é obtido igualando-se o tempo gasto pelo interceptador para ir de C a D com o tempo gasto pelo

alvo para ir de E a D. O resultado é: $\theta = \pi \left\{ 1 - \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_a}{R_{c1}} \right) \right]^{3/2} \right\}$.

4.4 MÉTODO NUMÉRICO

Após o estudo das soluções analíticas encontradas na literatura, o próximo passo consiste em um estudo numérico do problema. As condições iniciais para resolver este problema são: as órbitas do alvo e do interceptador, incluindo-se a informação requerida para especificar as suas posições nas órbitas (a anomalia verdadeira ou qualquer outra quantidade equivalente) e o tempo máximo de vôo para a manobra. A solução que é procurada é a transferência de órbita que satisfaça todas as condições iniciais e que necessite de um impulso total mínimo (a adição das magnitudes de todos impulsos aplicados). Para obter a solução deste problema, é formulado e resolvido o Problema de *Lambert* associado com cada transferência particular. Com as soluções dadas por esta rotina, é possível calcular a magnitude de todos os impulsos que devem ser aplicados. O

método aqui exposto foi desenvolvido em Prado (1996) e é utilizado para a comparação com as soluções existentes na literatura.

A Figura 3.1 mostra a geometria da manobra. Existem muitas alternativas para resolver este problema, como as mostradas na seções anteriores. Para a pesquisa numérica presente, o modelo assumido para o controle do interceptador é uma manobra bi-impulsiva, onde o primeiro impulso é aplicado em um tempo t_0 , de tal modo que o interceptador e o alvo se encontrarem em t_f , quando o segundo impulso é, então aplicado, com a intenção de colocar o interceptador na mesma órbita do alvo. A Figura 3.1 mostra um exemplo de uma transferência direta, onde o interceptador intercepta o alvo antes de fazer uma revolução completa ao redor do corpo atrator. Transferências onde uma ou mais revoluções são completadas pelo interceptador antes de se encontrar com o alvo também são possíveis e são consideradas no presente trabalho. A questão considerada aqui é como (magnitude e direção) e quando executar esses dois impulsos para obter a manobra que tem o consumo de combustível mínimo (ΔV total mínimo). Para responder esta pergunta, foi utilizado o procedimento descrito a seguir. As órbitas inicial e final são determinadas, como uma condição do procedimento. A informação sobre a posição das espaçonaves em suas órbitas (a anomalia verdadeira ou alguma quantidade equivalente) também é requerida e é dada. Então, os parâmetros seguintes são especificados: o tempo inicial da manobra t_0 , um valor para o limite inferior do tempo de transferência ($t_f - t_0$), um valor para o limite superior do mesmo tempo de transferência, um valor para o incremento do tempo de transferência e o número de revoluções do interceptador antes de encontrar o alvo. Com esses parâmetros, aplica-se um algoritmo, cujas etapas são: (Prado, 1996).

- a) O valor do limite inferior para o tempo de transferência, é considerado como sendo o tempo de transferência Δt da manobra;
- b) Utilizando-se a Mecânica Celeste de dois corpos, os elementos Cartesianos do interceptador no momento inicial da manobra t_0 são calculados. Esta posição é chamada de \vec{r}_i e esta velocidade de \vec{v}_i ;

- c) Utilizando-se novamente a mecânica celeste de dois corpos, os elementos Cartesianos do alvo no momento final da manobra $t_f = t_0 + \Delta t$ são calculados. Esta posição é chamada de \vec{r}_f e esta velocidade de \vec{v}_f ;
- d) Assume-se um valor para o número de revoluções K do interceptador (número de órbitas completas que o interceptador realiza durante a manobra). Então, com \vec{r}_i , \vec{v}_i , \vec{r}_f , \vec{v}_f , Δt e K , têm-se todos os dados necessários para resolver o Problema de *Lambert*. A solução do Problema de *Lambert* dá a órbita de transferência, o tempo de transferência e o ΔV requerido, podendo ter nenhuma, uma ou duas soluções;
- e) Então, soma-se um passo de tempo para o tempo de transferência e retorna-se ao segundo passo com o novo tempo de transferência Δt .

Vários autores importantes trabalharam neste problema e tentaram encontrar maneiras mais eficientes para resolver as dificuldades numéricas envolvidas. São eles: Breakwell *et al* (1961); Battin (1965 e 1968); Lancaster *et al* (1966); Herrick (1971); Sun e Vinh (1983); Taff e Randall (1985); Gooding (1990). No presente trabalho a rotina desenvolvida por Gooding (1990) foi utilizada.

Para estudar a manobra de *Rendezvous* ótima serão executadas várias simulações utilizando o algoritmo descrito acima. Todos os valores serão expressos em unidades canônicas, e os ângulos em graus. As unidades canônicas são adimensionais.

A nomenclatura utilizada aqui é: a = eixo semi-eixo maior, e = excentricidade, i = inclinação da órbita, Ω = argumento do nodo ascendente, ω = argumento do perigeu, T é o tempo da passagem pelo perigeu. O subscrito “c” representa a órbita do interceptador e o subscrito “t” representa a órbita do alvo.

4.5 RESULTADOS

Os métodos acima foram implementados e testados em trabalhos anteriores, tais como: Felipe e Prado (1997a); Felipe e Prado (1997b); Felipe (1997); Felipe e Prado (1998). Os quatro métodos de manobras de *Rendezvous* aqui mostrados serão aplicados com o objetivo de identificar o consumo (medido em termos da magnitude do impulso total aplicado) e o tempo requerido para cada manobra. Para o Método Indireto existe um parâmetro extra, o raio da órbita intermediária de estacionamento que deve ser variado e cujo valor deve estar entre os raios das órbitas inicial e final. Para o Método Direto Externo também é requerido um parâmetro extra para ser considerado, que é a distância entre o ponto C (ponto de aplicação do impulso que altera a inclinação do plano orbital) e o centro de gravidade (centro da Terra). Com esses dados é possível oferecer informações para um analista de missões tomar uma decisão sobre qual a melhor estratégia a ser adotada, respeitando-se os requisitos de tempo e a minimização do consumo de combustível. Os resultados obtidos são mostrados abaixo nas Tabela 4.1 para o Método Direto Interno, Tabela 4.2 para o Método Direto Externo com $\Delta\alpha = 0^\circ$, Tabela 4.3 para o Método Direto Externo com $\Delta\alpha = 30^\circ$, Tabela 4.4 para o Método Direto Externo com $\Delta\alpha = 60^\circ$, Tabela 4.5 para o Método Direto Externo com $\Delta\alpha = 90^\circ$, Tabela 4.6 para o Método Indireto, Tabela 4.7 para o Método Numérico e Tabela 4.8 para a comparação entre os métodos utilizados. MDI representa o Método Direto Interno e MDE o Método Direto Externo.

TABELA 4.1 - MÉTODO DIRETO INTERNO PARA $R_{c2} = 1,0$

R_{c1}	$\Delta V(\Delta\alpha = 0^\circ)$	$\Delta V(\Delta\alpha = 30^\circ)$	$\Delta V(\Delta\alpha = 60^\circ)$	$\Delta V(\Delta\alpha = 90^\circ)$	$t_i = t_a$	θ
1,1	0,0465	0,5641	1,0465	1,4607	3,3801	0,2117
1,5	0,1816	0,6993	1,1816	1,5959	4,3905	0,7517
2,0	0,2845	0,8021	1,2845	1,6987	5,7715	1,1011
2,5	0,3496	0,8672	1,3496	1,7638	7,2729	1,3017
3,0	0,3938	0,9115	1,3938	1,8081	8,8858	1,4315
3,5	0,4254	0,9430	1,4254	1,8396	10,6029	1,5223
4,0	0,4487	0,9663	1,4487	1,8629	12,4182	1,5893

(CONTINUA)

TABELA 4.1 (CONCLUSÃO) - MÉTODO DIRETO INTERNO PARA $R_{c2} = 1,0$

R_{c1}	$\Delta V(\Delta\alpha = 0^\circ)$	$\Delta V(\Delta\alpha = 30^\circ)$	$\Delta V(\Delta\alpha = 60^\circ)$	$\Delta V(\Delta\alpha = 90^\circ)$	$t_i = t_a$	θ
4,5	0,4663	0,9840	1,4663	1,8806	14,3268	1,6408
5,0	0,4800	0,9976	1,4800	1,8942	16,3242	1,6815
5,5	0,4908	1,0084	1,4908	1,9050	18,4067	1,7146
6,0	0,4993	1,0170	1,4993	1,9136	20,5708	1,7419
6,5	0,5062	1,0239	1,5062	1,9205	22,8138	1,7649
7,0	0,5119	1,0295	1,5119	1,9261	25,1327	1,7846
7,5	0,5164	1,0341	1,5164	1,9307	27,5254	1,8015
8,0	0,5202	1,0379	1,5202	1,9344	29,9895	1,8162
8,5	0,5233	1,0410	1,5233	1,9375	32,5230	1,8292
9,0	0,5259	1,0435	1,5259	1,9401	35,1241	1,8407
9,5	0,5280	1,0457	1,5280	1,9422	37,7910	1,8510
10,0	0,5298	1,0474	1,5298	1,9440	40,5223	1,8602
15,0	0,5362	1,0539	1,5362	1,9504	71,0861	1,9180
20,0	0,5347	1,0524	1,5347	1,9489	106,8892	1,9465
25,0	0,5313	1,0489	1,5313	1,9455	147,2533	1,9636

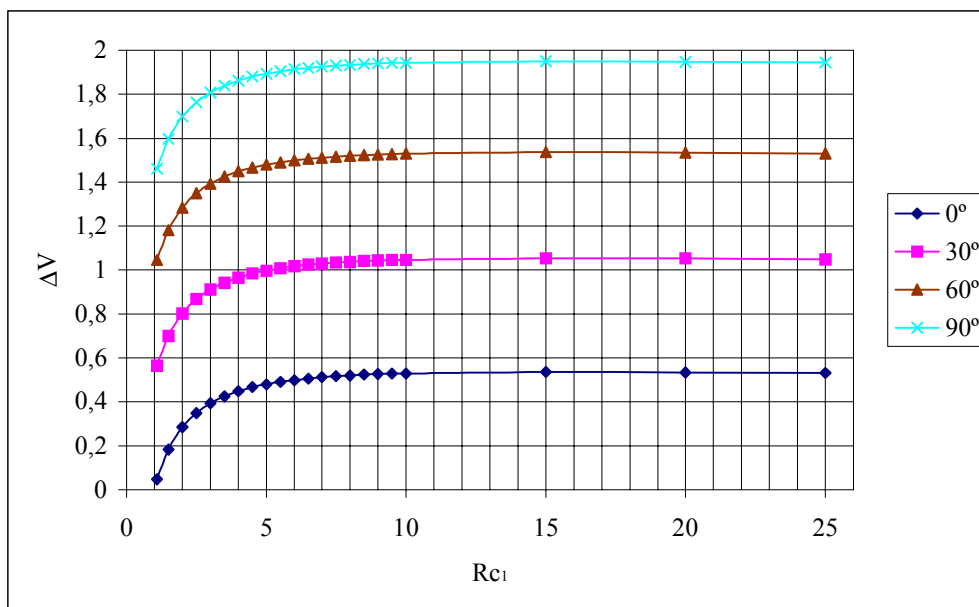


Fig.4.4 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Interno ($R_{c2} = 1,0$)

TABELA 4.2 - MÉTODO DIRETO EXTERNO ($R_a = N \times R_{c1}$) PARA $R_{c2} = 1,0$ e

$$\Delta\alpha = 0^\circ$$

R_{c1}	$\Delta V(N=2)$	$\Delta V(N=10)$	$\Delta V(N=50)$	$\Delta V(N=200)$	$t_i = t_a$	θ
1,1	0,3376	0,6917	0,7844	0,8029	7300,8034	6321,9377
1,5	0,4142	0,6726	0,7358	0,7482	11615,1698	6316,2144
2,0	0,4663	0,6528	0,6960	0,7043	17871,6004	6312,2817
2,5	0,4958	0,6369	0,6682	0,6742	24966,9967	6309,9229
3,0	0,5137	0,6238	0,6474	0,6519	32811,7999	6308,3506
3,5	0,5252	0,6129	0,6311	0,6345	41340,2411	6307,2278
4,0	0,5327	0,6036	0,6178	0,6204	50501,3512	6306,3857
4,5	0,5377	0,5955	0,6067	0,6088	60254,1168	6305,7308
5,0	0,5409	0,5884	0,5973	0,5989	70564,6050	6305,2070
5,5	0,5431	0,5821	0,5891	0,5904	81404,1318	6304,7784
6,0	0,5444	0,5765	0,5820	0,5830	92748,0339	6304,4212
6,5	0,5451	0,5714	0,5757	0,5764	104574,8076	6304,1190
7,0	0,5454	0,5668	0,5700	0,5706	116865,4869	6303,8600
7,5	0,5453	0,5626	0,5650	0,5653	129603,1801	6303,6355
8,0	0,5451	0,5587	0,5603	0,5606	142772,7171	6303,4391
8,5	0,5446	0,5552	0,5561	0,5563	156360,3753	6303,2658
9,0	0,5440	0,5519	0,5523	0,5523	170353,6631	6303,1117
9,5	0,5434	0,5488	0,5487	0,5486	184741,1460	6302,9739
10,0	0,5426	0,5459	0,5454	0,5453	199512,3054	6302,8499
15,0	0,5339	0,5249	0,5220	0,5214	366481,8721	6302,0643

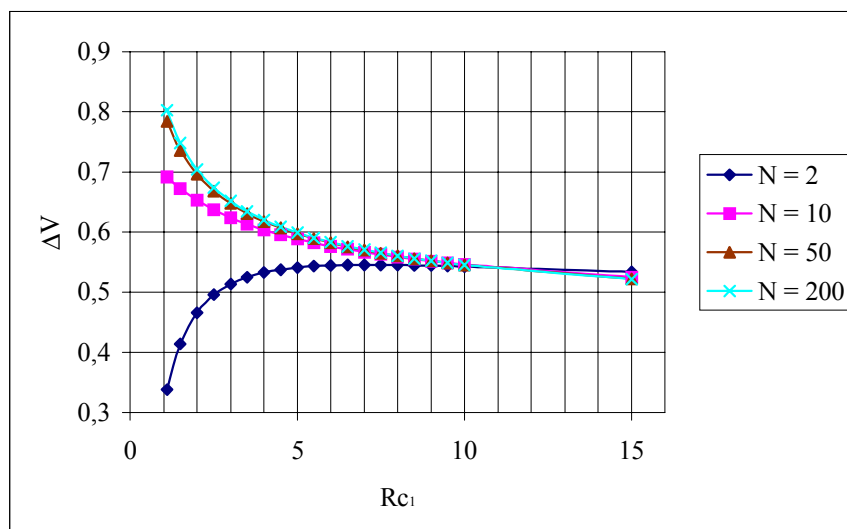


Fig.4.5 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1,0$ e $\Delta\alpha = 0^\circ$

TABELA 4.3 - MÉTODO DIRETO EXTERNO ($R_{c2} = 1,0$), PARA $\Delta\alpha = 30^\circ$

R_{c1}	$\Delta V(N=2)$	$\Delta V(N=10)$	$\Delta V(N=50)$	$\Delta V(N=200)$	$t_i = t_a$	θ
1,1	0,6135	0,7554	0,7976	0,8062	7300,8034	6321,9377
1,5	0,6255	0,7198	0,7455	0,7507	11615,1698	6316,2144
2,0	0,6300	0,6885	0,7033	0,7061	17871,6004	6312,2817
2,5	0,6294	0,6656	0,6740	0,6756	24966,9967	6309,9229
3,0	0,6267	0,6478	0,6523	0,6531	32811,7999	6308,3506
3,5	0,6230	0,6335	0,6352	0,6355	41340,2411	6307,2278
4,0	0,6190	0,6216	0,6214	0,6214	50501,3512	6306,3857
4,5	0,6148	0,6116	0,6100	0,6096	60254,1168	6305,7308
5,0	0,6107	0,6029	0,6002	0,5996	70564,6050	6305,2070
5,5	0,6068	0,5953	0,5918	0,5911	81404,1318	6304,7784
6,0	0,6030	0,5886	0,5844	0,5836	92748,0339	6304,4212
6,5	0,5993	0,5826	0,5779	0,5770	104574,8076	6304,1190
7,0	0,5959	0,5772	0,5721	0,5711	116865,4869	6303,8600
7,5	0,5926	0,5723	0,5669	0,5658	129603,1801	6303,6355
8,0	0,5894	0,5678	0,5622	0,5610	142772,7171	6303,4391
8,5	0,5865	0,5637	0,5579	0,5567	156360,3753	6303,2658
9,0	0,5836	0,5600	0,5539	0,5527	170353,6631	6303,1117
9,5	0,5809	0,5565	0,5502	0,5490	184741,1460	6302,9739
10,0	0,5783	0,5532	0,5469	0,5456	199512,3054	6302,8499
15,0	0,5579	0,5298	0,5229	0,5216	366481,8721	6302,0643

Fig.4.6 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1,0$ e $\Delta\alpha = 30^\circ$

TABELA 4.4. MÉTODO DIRETO EXTERNO ($R_{c2} = 1,0$), PARA $\Delta\alpha = 60^\circ$

R_{c1}	$\Delta V(N=2)$	$\Delta V(N=10)$	$\Delta V(N=50)$	$\Delta V(N=200)$	$t_i = t_a$	θ
1,1	0,8706	0,8148	0,8099	0,8093	7300,8034	6321,9377
1,5	0,8225	0,7639	0,7546	0,7529	11615,1698	6316,2144
2,0	0,7825	0,7218	0,7100	0,7078	17871,6004	6312,2817
2,5	0,7540	0,6924	0,6795	0,6770	24966,9967	6309,9229
3,0	0,7320	0,6702	0,6568	0,6542	32811,7999	6308,3506
3,5	0,7142	0,6527	0,6391	0,6365	41340,2411	6307,2278
4,0	0,6994	0,6385	0,6248	0,6222	50501,3512	6306,3857
4,5	0,6867	0,6266	0,6130	0,6104	60254,1168	6305,7308
5,0	0,6758	0,6164	0,6029	0,6003	70564,6050	6305,2070
5,5	0,6662	0,6076	0,5943	0,5917	81404,1318	6304,7784
6,0	0,6576	0,5999	0,5867	0,5842	92748,0339	6304,4212
6,5	0,6499	0,5930	0,5800	0,5775	104574,8076	6304,1190
7,0	0,6429	0,5869	0,5741	0,5716	116865,4869	6303,8600
7,5	0,6366	0,5813	0,5687	0,5663	129603,1801	6303,6355
8,0	0,6308	0,5763	0,5639	0,5615	142772,7171	6303,4391
8,5	0,6255	0,5717	0,5595	0,5571	156360,3753	6303,2658
9,0	0,6205	0,5675	0,5554	0,5531	170353,6631	6303,1117
9,5	0,6159	0,5636	0,5517	0,5494	184741,1460	6302,9739
10,0	0,6116	0,5600	0,5482	0,5460	199512,3054	6302,8499
15,0	0,5802	0,5343	0,5239	0,5218	366481,8721	6302,0643

Fig.4.7 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1,0$ e $\Delta\alpha = 60^\circ$

TABELA 4.5 - MÉTODO DIRETO EXTERNO ($R_c^2 = 1,0$), PARA $\Delta\alpha = 90^\circ$

R_{c1}	$\Delta V(N=2)$	$\Delta V(N=10)$	$\Delta V(N=50)$	$\Delta V(N=200)$	$t_i = t_a$	θ
1,1	1,0914	0,8657	0,8204	0,8120	7300,8034	6321,9377
1,5	0,9916	0,8017	0,7623	0,7549	11615,1698	6316,2144
2,0	0,9135	0,7504	0,7159	0,7093	17871,6004	6312,2817
2,5	0,8609	0,7154	0,6841	0,6782	24966,9967	6309,9229
3,0	0,8223	0,6894	0,6607	0,6552	32811,7999	6308,3506
3,5	0,7925	0,6692	0,6425	0,6373	41340,2411	6307,2278
4,0	0,7684	0,6529	0,6278	0,6229	50501,3512	6306,3857
4,5	0,7485	0,6394	0,6156	0,6110	60254,1168	6305,7308
5,0	0,7316	0,6280	0,6053	0,6009	70564,6050	6305,2070
5,5	0,7171	0,6181	0,5964	0,5922	81404,1318	6304,7784
6,0	0,7045	0,6095	0,5887	0,5847	92748,0339	6304,4212
6,5	0,6933	0,6019	0,5818	0,5780	104574,8076	6304,1190
7,0	0,6834	0,5952	0,5757	0,5720	116865,4869	6303,8600
7,5	0,6744	0,5891	0,5703	0,5667	129603,1801	6303,6355
8,0	0,6663	0,5836	0,5653	0,5618	142772,7171	6303,4391
8,5	0,6589	0,5786	0,5608	0,5574	156360,3753	6303,2658
9,0	0,6522	0,5740	0,5567	0,5534	170353,6631	6303,1117
9,5	0,6460	0,5697	0,5529	0,5497	184741,1460	6302,9739
10,0	0,6402	0,5658	0,5494	0,5463	199512,3054	6302,8499
15,0	0,5994	0,5382	0,5246	0,5220	366481,8721	6302,0643

Fig.4.8 - Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Direto Externo ($R_a = N \times R_{c1}$) para $R_{c2} = 1,0$ e $\Delta\alpha = 90^\circ$

TABELA 4.6. MÉTODO INDIRETO ($R_{c2} = 1,0$)

R_a	R_{c1}	$\Delta V (\Delta\alpha=0^\circ)$	$\Delta V (\Delta\alpha=30^\circ)$	$\Delta V (\Delta\alpha=60^\circ)$	$\Delta V (\Delta\alpha=90^\circ)$	θ
1,5	5,0	1,2316	1,6096	1,9619	2,2644	1,3601
2,0	5,0	1,2846	1,5835	1,8619	2,1011	1,2898
2,5	5,0	1,3168	1,5643	1,7949	1,9929	1,2196
3,0	5,0	1,3377	1,5490	1,7459	1,9150	1,1493
3,5	5,0	1,3519	1,5363	1,7082	1,8558	1,0791
4,0	5,0	1,3618	1,5255	1,6781	1,8091	1,0088
4,5	5,0	1,3691	1,5162	1,6534	1,7711	0,9386
2,0	10,0	1,5280	1,8269	2,1054	2,3445	1,4715
3,0	10,0	1,5751	1,7864	1,9834	2,1525	1,4218
4,0	10,0	1,5928	1,7565	1,9091	2,0401	1,3721
5,0	10,0	1,5992	1,7329	1,8574	1,9644	1,3224
6,0	10,0	1,6006	1,7136	1,8188	1,9092	1,2728
7,0	10,0	1,5996	1,6974	1,7886	1,8669	1,2231
8,0	10,0	1,5975	1,6838	1,7642	1,8332	1,1734
9,0	10,0	1,5948	1,6720	1,7439	1,8056	1,1237
2,0	20,0	1,6889	1,9878	2,2663	2,5054	1,5357
5,0	20,0	1,7605	1,8942	2,0187	2,1257	1,4830
8,0	20,0	1,7544	1,8406	1,9210	1,9901	1,4303
10,0	20,0	1,7455	1,8153	1,8804	1,9362	1,3952
12,0	20,0	1,7366	1,7952	1,8498	1,8967	1,3601
15,0	20,0	1,7243	1,7716	1,8156	1,8534	1,3074
18,0	20,0	1,7137	1,7533	1,7902	1,8219	1,2547
5,0	50,0	1,8957	2,0293	2,1539	2,2608	1,5486
10,0	50,0	1,8828	1,9526	2,0176	2,0735	1,5264
15,0	50,0	1,8601	1,9074	1,9514	1,9892	1,5042
20,0	50,0	1,8410	1,8768	1,9100	1,9386	1,4819
25,0	50,0	1,8256	1,8543	1,8810	1,9040	1,4597
30,0	50,0	1,8129	1,8369	1,8593	1,8785	1,4375
40,0	50,0	1,7935	1,8116	1,8284	1,8429	1,3931

Fig.4.9 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$) com $R_{c1} = 5,0$.

Fig.4.10 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$) com $R_{c1} = 10,0$.

Fig.4.11 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$) com $R_{c1} = 20,0$.

Fig.4.12 - Consumo (ΔV) vs. R_a para o Método Indireto ($R_{c2} = 1,0$) com $R_{c1} = 50,0$.

Para o Método Direto Interno diversos fatos são dignos de nota. Em primeiro lugar nota-se que o consumo de combustível em cada coluna cresce com o aumento de R_{c1} até

o valor de $R_{c1} = 15,0$. Isso se explica pelo fato de que uma manobra de maior magnitude requer um maior consumo de combustível para a sua realização. Nesse aspecto, a Tabela 4.1 serve para quantificar um resultado já esperado. Da mesma forma, o tempo da manobra e o ângulo θ também aumentam com R_{c1} . A partir do valor $R_{c1} = 20,0$, ocorre uma inversão e o consumo passa a diminuir com o aumento de R_{c1} . A razão desse fato é que com o aumento de R_{c1} , a magnitude do primeiro impulso aumenta para que o veículo atinja a órbita final, por outro lado a magnitude do segundo impulso diminui, devido à maior distância do centro de atração. Essa economia aumenta com R_{c1} , de tal forma que a partir de um certo valor de R_{c1} o ganho no segundo impulso compensa a perda no primeiro e o saldo líquido é uma manobra mais econômica. Esse fato não se altera quando as manobras com variação de inclinação são consideradas, porque nesse método a mudança de plano orbital ocorre com um impulso na linha de nodos na altitude da órbita inicial, que é a mesma para todas as situações estudadas. Por isso, existe um valor constante adicionado ao consumo para efetuar as mudanças de plano orbital. Os mesmos dados, colocados em forma gráfica, são exibidos na Figura 4.4 e ilustram melhor essas observações.

Para o Método Direto Externo, pode ser visto a partir da Tabela 4.2 que, no caso $\Delta\alpha = 0^\circ$ e $N = 2$, o consumo cresce com R_{c1} até o valor $R_{c1} = 7,0$ e depois passa a decrescer. A razão é a mesma explicada no caso anterior: com o aumento de R_{c1} o consumo no primeiro e segundo impulsos aumentam, mas o do terceiro impulso diminui, de tal forma que existe um valor para R_{c1} no qual o saldo líquido passa a ser positivo. Com o distanciamento de R_a (aumento de N) o ganho aumenta e desde o primeiro ponto estudado ($R_{c1} = 1,1$) o saldo já é positivo. A Tabela 4.2 também mostra que existe um valor de ($R_{c1} = 15,0$) a partir do qual é compensador enviar o veículo até uma grande distância para efetuar a manobra. Por esse método nota-se também que, quando ocorre esse fato a mudança da estratégia ótima passa diretamente do menor valor simulado ($N = 2$) para o maior valor simulado ($N = 200$). A Figura 4.5 mostra esses dados em forma gráfica.

A Tabela 4.3 mostra que, quando existe uma mudança no plano orbital, o ponto de inversão de consumo para um valor de $N = 2$ ocorre mais cedo ($R_{c1} = 2,5$) e a mudança do ponto de ótimo, entre as manobras com diferentes R_a também ($R_{c1} = 4,0$). Da mesma forma, a manobra mais econômica para diferentes valores de N ocorre em $N = 200$ para valores menores de R_{c1} ($= 4,5$). A razão desses dois fatos é que a manobra de alteração de plano orbital é feita em R_a e uma grande economia é gerada por um valor da força elevado de R_a , devido à maior distância desse ponto ao centro de atração. Esse fato é confirmado pelas Tabelas 4.4 e 4.5, pois desde o primeiro valor estudado, as manobras são mais econômicas para o caso $N = 200$. A mudança direta da estratégia ótima do menor valor simulado ($N = 2$) para o maior valor ($N = 200$) também ocorre aqui. As Figuras 4.6 a 4.8 mostram os mesmos resultados em forma gráfica.

Para o Método Indireto, a Tabela 4.6 e as Figuras 4.9 a 4.12 mostram que, para o caso coplanar ($\Delta\alpha = 0^\circ$), o Método Direto Interno é sempre mais econômico. O custo extra requerido pelo Método Indireto cresce com R_a até um ponto próximo de $R_a = 5,0$ e decresce a partir daí em todos os casos. A Tabela 4.6 também mostra que quando existe mudança no plano orbital a manobra de menor consumo é sempre a que possui o valor maior de R_a , pois a manobra de inclinação é efetuada nesse ponto. Conforme esperado, quanto maior a mudança de plano orbital maior é o consumo requerido, embora a diferença diminua com o crescimento de R_a .

Para o Método Numérico, os resultados mostram que para a mudança plana ($\Delta\alpha = 0^\circ$) o consumo cresce com o aumento de R_{c1} , o que está de acordo com o esperado, pois quanto maior for a amplitude da manobra maior será o consumo necessário para atingi-la. Para as manobras que contém variação do plano orbital existem dois fatores a serem considerados: de um lado uma maior amplitude requer um maior consumo para ser atingida, de outro lado a manobra de mudança de plano tem o seu consumo reduzido quando efetuada mais distante do centro atrator. As simulações numéricas aqui efetuadas possuem um limite de tempo que impedem a obtenção da transferência de mínimo consumo. A razão disso está nos valores das anomalias verdadeiras nos

instantes de início e fim da manobra, que definem o plano da órbita de transferência e consequentemente o valor da mudança de inclinação em cada impulso. Quando o tempo limite para a duração da manobra não é suficiente para cobrir todas as combinações possíveis para as anomalias verdadeiras, o valor ótimo pode não ser encontrado. Combinando esses dois fatos, existem situações onde ocorrem oscilações no consumo ($\Delta\alpha = 90^\circ$), diminuição contínua com o aumento de R_{c1} ($\Delta\alpha = 30^\circ$) ou até mesmo crescimento contínuo ($\Delta\alpha = 60^\circ$). Comparando esse método e todos os anteriormente estudados, podemos ver que o Método Numérico apresenta resultados muito semelhantes ao Método Direto Interno para as manobras planas. Isso ocorre devido a ambos os métodos serem bi-impulsivos. O consumo levemente superior do Método Numérico se deve a discretização utilizada na sua solução. Já no caso de manobras com mudança de plano, o Método Direto Externo é superior aos demais (inclusive o Numérico). Isso se explica pela redução do consumo requerido pela mudança de plano, por esta ser efetuada mais afastada do centro de atração. A Tabela 4.7 e a Figura 4.13 foram construídas com o limite de tempo de 100 unidades canônicas. Foram feitas algumas simulações com limites maiores e elas demonstram a existência de manobras com consumos menores, principalmente para valores de R_{c1} maiores.

TABELA 4.7. MÉTODO NUMÉRICO PARA $R_{c2} = 1,0$

R_{c1}	$\Delta v (\Delta\alpha = 0^\circ)$	θ	$\Delta v (\Delta\alpha = 30^\circ)$	θ
1,1	0,0476	-1,8288	2,0016	-1,7452
1,5	0,1816	-12,377	1,9956	-12,3778
2,0	0,2848	-34,9345	1,7606	-35,4371
2,5	0,3497	-71,2748	1,6086	-71,2748
3,0	0,3939	-124,3442	1,5010	-124,3442
3,5	0,4254	-198,4544	1,4202	-198,4544
4,0	0,4488	-295,3097	1,3569	-295,3097
4,5	0,4663	-417,4077	1,3057	-417,4077
5,0	0,4800	-567,0574	1,2634	-567,0574
5,5	0,4908	-756,8332	1,2277	-756,8332
6,0	0,4994	-970,8777	1,1971	-970,8777

(CONTINUA)

TABELA 4.7. MÉTODO NUMÉRICO PARA $R_{c2} = 1,0$

R_{c1}	$\Delta v (\Delta\alpha = 0^\circ)$	θ	$\Delta v (\Delta\alpha = 30^\circ)$	θ
6,5	0,5062	-1236,0910	1,1704	-1236,0910
7,0	0,5120	-1545,4122	1,1471	-1545,4122
7,5	0,5165	-1875,7271	1,1263	-1875,7271
8,0	0,5202	-2277,7803	1,1078	-2277,7803
8,5	0,5233	-2733,3662	1,0911	-2733,3662
9,0	0,5259	-3245,8306	1,0760	-3245,8306
9,5	0,5282	-3818,5194	1,0622	-3818,5194
10,0	0,5299	-4391,9465	1,0495	-4391,9465
15,0	0,5364	-14625,6845	0,9634	-14625,6845
20,0	0,5357	-34174,2448	0,9152	-33671,5900
25,0	0,5658	63807,3175	0,9041	-58898,5790

(CONTINUA)

TABELA 4.7 (CONCLUSÃO). MÉTODO NUMÉRICO PARA $R_{c2} = 1,0$

R_{c1}	$\Delta v (\Delta\alpha = 60^\circ)$	θ	$\Delta v (\Delta\alpha = 90^\circ)$	θ
1,1	0,8525	-1,8288	1,6542	-1,8288
1,5	0,9492	-12,3778	1,7762	-12,3778
2,0	1,0239	-34,9345	1,8690	-34,9345
2,5	1,0713	-71,2748	1,9276	-71,2748
3,0	1,1035	-124,3442	1,9673	-124,3442
3,5	1,1262	-198,4544	1,9955	-198,4544
4,0	1,1428	-295,3097	2,0161	-295,3097
4,5	1,1552	-417,4077	2,0317	-417,4070
5,0	1,1646	-567,0574	2,0437	-567,0574
5,5	1,1718	-756,8332	2,0460	-756,8332
6,0	1,1775	-970,8777	2,0157	-970,8777
6,5	1,1819	-1236,0910	1,9892	-1236,0910
7,0	1,1854	-1545,4122	1,9660	-1545,4122
7,5	1,1881	-1875,7271	1,9454	-1875,7271
8,0	1,1902	-2277,7803	1,9270	-2277,7803
8,5	1,1918	-2733,3662	1,9103	-2733,3662
9,0	1,1931	-3245,8306	1,8953	-3245,8306
9,5	1,1941	-3818,5194	1,8815	-3818,5194
10,0	1,1948	-4391,9465	1,8689	-4391,9465
15,0	1,1946	-14625,6845	1,7829	-14625,6845
20,0	1,1906	-34174,2448	1,7347	-33671,5900
25,0	1,2177	-63807,3175	1,7235	-58898,5790

Fig.4.13 Consumo (ΔV) vs. R_{c1} para o Método Numérico ($R_{c2} = 1,0$).

TABELA 4.8 – COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS

R_{c1}	$\Delta V(\Delta\alpha = 0^\circ)$	$\Delta V(\Delta\alpha = 30^\circ)$	$\Delta V(\Delta\alpha = 60^\circ)$	$\Delta V(\Delta\alpha = 90^\circ)$
1,1	MDI	MDE	MDE	MDE
1,5	MDI	MDE	MDE	MDE
2,0	MDI	MDE	MDE	MDE
2,5	MDI	MDE	MDE	MDE
3,0	MDI	MDE	MDE	MDE
3,5	MDI	MDE	MDE	MDE
4,0	MDI	MDE	MDE	MDE
4,5	MDI	MDE	MDE	MDE
5,0	MDI	MDE	MDE	MDE
5,5	MDI	MDE	MDE	MDE
6,0	MDI	MDE	MDE	MDE
6,5	MDI	MDE	MDE	MDE
7,0	MDI	MDE	MDE	MDE
7,5	MDI	MDE	MDE	MDE
8,0	MDI	MDE	MDE	MDE
8,5	MDI	MDE	MDE	MDE
9,0	MDI	MDE	MDE	MDE
9,5	MDI	MDE	MDE	MDE
10,0	MDI	MDE	MDE	MDE
15,0	MDE	MDE	MDE	MDE
20,0	MDE	MDE	MDE	MDE
25,0	MDE	MDE	MDE	MDE

4.6 CONCLUSÕES

Conforme esperado, um aumento na inclinação entre os planos demanda um maior custo de combustível para a realização da manobra. Porém, a razão desse aumento varia de método para método. Para os Métodos Direto Interno, Indireto e Numérico o aumento é muito rápido. Para o Método Direto Externo esse aumento é mais lento. A razão física desse fato é que a manobra de mudança de plano deste método é feita em um ponto (ponto C) distante da Terra. Como esse consumo é diretamente proporcional à velocidade do veículo no ponto da manobra, ele decresce com a distância entre o veículo e a Terra. Pode-se também notar que o custo de uma correção de inclinação de plano orbital é bastante elevado, se comparado ao custo de uma correção de semi-eixo maior. A razão desse fato reside na necessidade de efetuar uma rotação no vetor velocidade para alterar o plano orbital e este custo é proporcional à velocidade orbital do veículo espacial naquele ponto, que é elevada.

No Método Direto Interno, nota-se que, a medida que o veículo se afasta de $R_{c1} = 1,0$ o consumo de combustível vai aumentando na maioria dos casos, porque está afastando-se o alvo e por isso, precisa-se de um impulso maior para a órbita de transferência atingi-lo. As poucas regiões de decréscimo são para valores mais elevados de R_{c1} , aonde a economia obtida no segundo impulso é superior ao maior gasto do primeiro impulso. Esse resultado é esperado, porém as simulações aqui efetuadas servem para quantificar essas variações.

Esse fato também ocorre para o Método Direto Externo no caso $N = 2$. Para $N \geq 10$, o consumo diminuiu quanto aumenta-se R_{c1} , porque $R_a = N \times R_{c1}$ e como o método é externo quanto mais longe estiver o alvo menos o veículo espacial sofre a influência da gravidade no momento do impulso intermediário. Porém, quando todos os valores de N são comparados, o valor maior ($N = 200$) só supera o menor ($N = 2$) para valores elevados de R_{c1} ($R_{c1} \geq 15,0$).

No caso coplanar ($\Delta\alpha = 0^\circ$), o Método Indireto é sempre menos econômico que o Método Direto Interno. O custo extra requerido pelo Método Indireto cresce com R_a até um ponto próximo de $R_a = 5,0$ e decresce a partir daí em todos os casos. Para manobras não coplanares, a manobra de menor consumo é sempre a que possui o valor maior de R_a , pois a manobra de inclinação é efetuada nesse ponto.

Para o Método Numérico, para a mudança plana ($\Delta\alpha = 0^\circ$) o consumo cresce com o aumento de R_{c1} . Para as manobras que contém variação do plano orbital, existem situações onde ocorrem oscilações no consumo ($\Delta\alpha = 90^\circ$), diminuição contínua com o aumento de R_{c1} ($\Delta\alpha = 30^\circ$) ou até mesmo crescimento contínuo ($\Delta\alpha = 60^\circ$). O Método Numérico apresenta resultados muito semelhantes ao Método Direto Interno para as manobras planas. Já no caso de manobras com mudança de plano, o Método Direto Externo é superior aos demais (inclusive o Numérico). Isso se explica pela redução do consumo requerido pela mudança de plano, por esta ser efetuada mais afastada do centro de atração.

CAPÍTULO 5

MANUTENÇÃO DE ÓRBITAS DE CONSTELAÇÕES DE SATÉLITES ARTIFICIAIS

Um tópico de grande importância atualmente em Astrodinâmica é o estudo do comportamento orbital de constelações de satélites. Desse estudo, fazem parte a propagação individual das órbitas de cada satélite e também a precisão e cálculo das manobras orbitais que devem ser efetuadas pelos satélites com o objetivo de mantê-los dentro de uma configuração que satisfaça os vínculos da missão. Com essa idéia em mente, este trabalho pretende testar métodos de manobras orbitais que sejam aplicáveis para manobras com satélites envolvidos em Constelações. A principal diferença entre uma manobra orbital de um satélite artificial com tempo livre em uma missão individual e a manobra de um satélite envolvido em uma constelação é o vínculo existente quanto ao ponto de inserção do satélite na órbita final. Em uma manobra de um satélite individual, o objetivo é alterar os cinco elementos keplerianos que definem a forma geométrica e a orientação no espaço da órbita do satélite: semi-eixo maior (a), excentricidade (e), inclinação (i), argumento do perigeu (ω), longitude do nodo ascendente (Ω). Numa manobra de um satélite que faz parte de uma constelação, existe um vínculo adicional na anomalia verdadeira na órbita final do satélite, pois ele precisa estar localizado em um ponto específico para manter a sua posição em relação aos demais satélites. Esse fato caracteriza uma manobra onde todos os elementos keplerianos da órbita final estão vinculados e que é conhecida na literatura como manobra de *Rendezvous*.

5.1 MANOBRAS PARA CONSTELAÇÕES DE SATÉLITES

Desenvolvida com o objetivo de realizar manobras espaciais entre dois veículos espaciais que precisam se encontrar no espaço, as técnicas de *Rendezvous*, descritas no

Capítulo 4, são adequadas e utilizadas para manobras que precisam ser realizadas por constelações de satélites. Para isso basta substituir o veículo alvo pelo ponto na órbita aonde o veículo deve ser inserido, como mostra a Figura 5.1. Assim, podemos organizar os resultados de forma idêntica as do caso de *Rendezvous*.

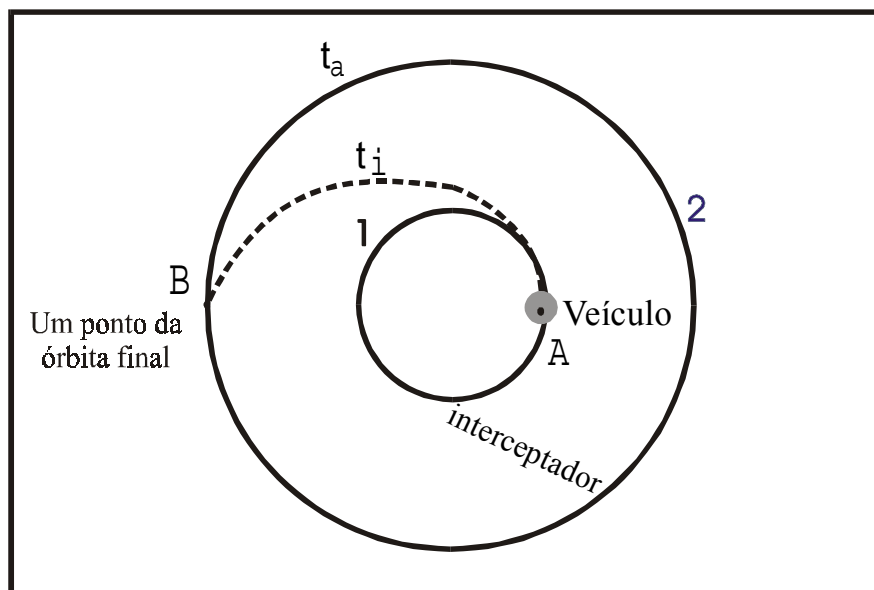


Fig. 5.1 - Geometria da Manobra de Constelação

Uma referência bastante atual sobre o assunto é: Proulx *et al.* (1997).

5.2 RESULTADOS

No presente capítulo, o objetivo é testar a validade dos métodos direto interno, direto externo e indireto descritos no Capítulo 4, para o problema de constelações. Para isso foram utilizados os dados da órbita nominal dos satélites que compõem a Constelação GLOBALSTAR: $a = 8100$ km, $e = 0,0$, $i = 52^\circ$. A seguir, as condições nominais da órbita são levemente alteradas para simular o efeito de uma perturbação e uma manobra de retorno às condições nominais é realizada. Como os métodos implementados

possuem a restrição de serem válidos apenas para órbitas circulares, a excentricidade é mantida no valor nominal igual a zero. O semi-eixo maior é variado de acordo com os valores mostrados nas Tabelas 5.1 a 5.3. As variações do ângulo entre os planos são de $0, \pm 1, \pm 2$ e ± 3 graus. Com essas combinações, são simuladas um total de 42 manobras que recolocam o satélite em sua órbita nominal a partir de uma órbita um pouco mais baixa ou mais alta e com um ângulo entre os planos orbitais real e nominal diferente de zero. Os três métodos de manobras de *Rendezvous* são aplicados aqui com o objetivo de identificar o consumo (medido em termos da magnitude do impulso total aplicado) e o tempo requerido para cada manobra.

Para o Método Indireto existe um parâmetro extra, o raio da órbita, que deve ser variado e cujo valor deve estar entre os raios das órbitas inicial e final. Os valores utilizados estão mostrados nas Tabelas 5.1 a 5.3.

O Método Direto Externo também requer um parâmetro extra a ser considerado, que é a distância entre o ponto C (ponto de aplicação do impulso que altera a inclinação do plano orbital) e o centro de gravidade (centro da Terra). Neste trabalho, foram utilizados os valores: $R_a = 2 \times R_{c1}$; $R_a = 10 \times R_{c1}$; $R_a = 50 \times R_{c1}$; $R_a = 200 \times R_{c1}$.

Os resultados obtidos são mostrados abaixo nas Tabelas 5.1 a 5.3. As unidades estão em km para distância, km/s para velocidade e minutos para tempo.

TABELA 5.1 MÉTODO DIRETO INTERNO PARA $R_{c2} = 8100$

R_{c1}	$\Delta V(\alpha = 0)$	$\Delta V(\alpha = +/-1)$	$\Delta V(\alpha = +/-2)$	$\Delta V(\alpha = +/-3)$	$t_i = t_a$	θ
8200	0,0427	0,1648	0,2876	0,4096	61,01	1,63
8150	0,0210	0,1438	0,2658	0,3886	60,73	0,81
8100	0,0000	0,1227	0,2448	0,3675	60,45	0,00
8050	0,0217	0,1445	0,2665	0,3893	60,17	-0,84
8000	0,0441	0,1662	0,2890	0,4110	59,89	-1,69

TABELA 5.2. MÉTODO DIRETO EXTERNO ($R_a = N \cdot R_{c1}$) PARA $R_{c2} = 8100$

a) ($N = 2$)

R_{c1}	$\Delta V(\alpha = 0)$	$\Delta V(\alpha = +/-1)$	$\Delta V(\alpha = +/-2)$	$\Delta V(\alpha = +/-3)$	$t_i = t_a$	θ
8200	2,1963	2,2665	2,3366	2,4068	225,56	299,35
8150	2,1837	2,2538	2,3240	2,3941	223,83	300,36
8100	2,1704	2,2412	2,3121	2,3822	222,13	301,36
8050	2,1739	2,2447	2,3156	2,3871	220,41	302,39
8000	2,1774	2,2489	2,3198	2,3913	218,70	303,43

b) ($N = 10$)

R_{c1}	$\Delta V(\alpha = 0)$	$\Delta V(\alpha = +/-1)$	$\Delta V(\alpha = +/-2)$	$\Delta V(\alpha = +/-3)$	$t_i = t_a$	θ
8200	4,8837	4,8999	4,9160	4,9321	1587,21	4279,66
8150	4,8858	4,9020	4,9188	4,9349	1573,30	4281,59
8100	4,8879	4,9048	4,9209	4,9377	1559,66	4283,51
8050	4,8956	4,9125	4,9286	4,9455	1545,83	4285,48
8000	4,9034	4,9202	4,9363	4,9532	1532,05	4287,48

c) ($N = 50$)

R_{c1}	$\Delta V(\alpha = 0)$	$\Delta V(\alpha = +/-1)$	$\Delta V(\alpha = +/-2)$	$\Delta V(\alpha = +/-3)$	$t_i = t_a$	θ
8200	5,6013	5,6042	5,6077	5,6112	15855,61	45988,44
8150	5,6084	5,6119	5,6154	5,6189	15711,57	45992,59
8100	5,6161	5,6189	5,6224	5,6259	15570,29	45996,72
8050	5,6245	5,6280	5,6315	5,6350	15427,12	46000,98
8000	5,6336	5,6371	5,6406	5,6441	15284,40	46005,28

d) ($N = 200$)

R_{c1}	$\Delta V(\alpha = 0)$	$\Delta V(\alpha = +/-1)$	$\Delta V(\alpha = +/-2)$	$\Delta V(\alpha = +/-3)$	$t_i = t_a$	θ
8200	5,7452	5,7459	5,7466	5,7473	124073,70	362326,92
8150	5,7536	5,7543	5,7550	5,8295	122938,37	362335,15
8100	5,7620	5,7627	5,7634	5,7648	121824,76	362343,36
8050	5,7711	5,7718	5,7725	5,7732	120696,36	362351,80
8000	5,7802	5,7809	5,7816	5,7823	119571,46	362360,35

TABELA 5.3. MÉTODO INDIRETO PARA $R_{c2} = 8100$

R_a	R_{c1}	$\Delta V(\alpha = 0)$	$\Delta V(\alpha = +/-1)$	$\Delta V(\alpha = +/-2)$	$\Delta V(\alpha = +/-3)$	θ
8020	8000	0,1225	0,2459	0,3692	0,4925	1,5532
8040	8000	0,1137	0,2368	0,3599	0,4830	1,5531
8060	8000	0,1049	0,2278	0,3507	0,4735	1,5531
8080	8000	0,0961	0,2188	0,3414	0,4640	1,5531
8060	8050	0,0609	0,1838	0,3067	0,4296	1,5533
8070	8050	0,0566	0,1793	0,3021	0,4249	1,5532
8080	8050	0,0522	0,1749	0,2975	0,4201	1,5532
8090	8050	0,0478	0,1704	0,2929	0,4154	1,5532
8100	8100	0,0000	0,1224	0,2449	0,3673	1,5533
8110	8150	0,0474	0,1697	0,2921	0,4143	1,5535
8120	8150	0,0517	0,1739	0,2961	0,4183	1,5535
8130	8150	0,0560	0,1781	0,3002	0,4223	1,5534
8140	8150	0,0603	0,1823	0,3043	0,4262	1,5534
8120	8200	0,0944	0,2167	0,3388	0,4610	1,5536
8140	8200	0,1030	0,2250	0,3469	0,4689	1,5536
8160	8200	0,1115	0,2333	0,3550	0,4767	1,5535
8180	8200	0,1200	0,2415	0,3630	0,4846	1,5535

5.3 CONCLUSÕES

As simulações efetuadas demonstram que os métodos descritos são aplicáveis ao problema de manobras orbitais de satélites envolvidos em constelações de satélites.

Também foi notado que desvios angulares positivos e negativos requerem o mesmo consumo para a manobra de correção, logo foram agrupados em uma mesma coluna nas Tabelas 5.1-5.3. Desta forma as Conclusões do Capítulo 4 referentes a esses três métodos podem ser utilizadas aqui. Do ponto de vista de consumo, pode-se notar que o Método Direto Externo é inadequado para as manobras de correção simuladas no presente trabalho. Esse método possui como principal vantagem o ganho na mudança de plano orbital realizada a uma distância grande do centro de atração gravitacional. Quando essa mudança é de pequena magnitude, a economia gerada não é suficiente para compensar o consumo extra para enviar o satélite até o ponto C. Porém, esse método

pode ser vantajoso para as manobras requeridas para a colocação do satélite na órbita nominal, pois essas manobras possuem amplitudes maiores. Além disso, esse método possui a desvantagem de requerer um tempo de manobra muito maior que os demais métodos. Dentre os outros dois métodos, o Direto Interno mostrou-se mais econômico que o Indireto, porém com pequena margem.

CAPÍTULO 6

A MANOBRA ASSISTIDA POR GRAVIDADE

A manobra *Swing-by* é uma técnica muito utilizada para diminuir o consumo de combustível em missões espaciais. O modelo mais habitual de se estudar esta manobra é dividir o problema em três fases dominadas pela Mecânica Celeste de dois-corpos. Outros modelos utilizados para estudar esta manobra são o Problema Restrito Circular de Três-Corpos (Felipe e Prado, 1999; Prado, 1999; Prado e Broucke, 1995a e 1995b; Prado, 1996a e 1996b; Broucke, 1988; Broucke e Prado, 1993; Prado, 1993) e o Problema Restrito Elíptico de Três-Corpos (Prado, 1997).

No presente capítulo as manobras *Swing-by* são descritas, estudadas e classificadas utilizando-se o modelo dado pelo Problema Restrito Circular de Três-Corpos em duas e três dimensões. Assume-se que o sistema é formado por dois corpos principais que estão em órbitas circulares em torno do seu centro de massa e um terceiro corpo de massa desprezível que está se movendo sob a atração gravitacional dos dois primários.

O objetivo do presente estudo é simular uma grande variedade de condições iniciais para essas órbitas e classificá-las de acordo com os efeitos causados por essa aproximação na órbita do veículo espacial. Assume-se que este *Swing-by* é executado ao redor do corpo secundário do sistema.

Para um número grande de valores destas três variáveis, as equações de movimento são integradas numericamente para frente (até atingir um ponto denominado A) e para trás no tempo (até atingir um ponto denominado B), sendo que nesses pontos A e B, considera-se que o veículo espacial esteja em uma distância que pode ser assumida como longe o suficiente de M_2 . É necessário integrar em ambas as direções de tempo porque a série de condições iniciais usadas dão informações sobre o veículo espacial

exatamente no momento da máxima aproximação. Nestes dois pontos A e B, pode-se negligenciar o efeito de M_2 e o sistema formado por M_1 e o veículo espacial pode ser considerado um sistema de dois-corpos. Sendo assim, as fórmulas da Mecânica Celeste de dois-corpos são válidas para computar a energia e o momento angular antes e depois da máxima aproximação. Com esses resultados, as órbitas são classificadas em quatro categorias: elíptica direta (energia negativa e momento angular positivo), elíptica retrógrada (energia negativa e momento angular negativo), hiperbólica direta (energia positiva e momento angular positivo) e hiperbólica retrógrada (energia positiva e momento angular negativo).

Então, o problema passa a ser identificar a categoria da órbita do veículo espacial antes e depois do encontro com M_2 . Depois disso, esses resultados são usados para identificar até dezesseis classes de transferências, de acordo com as trocas na categoria da órbita causada pelo encontro.

Usando um número grande de simulações é possível entender a influência de cada parâmetro e melhorar a compreensão sobre esse problema. Também podem ser formulados vários problemas ótimos que envolvem esta manobra e que podem ser resolvidos com ajuda de gráficos construídos e descritos nesse capítulo. Alguns exemplos incluem a possibilidade de encontrar tipos específicos de órbitas (escape, captura, etc.) que tenham velocidade máxima ou mínima no perigeu (ou qualquer outro parâmetro, como a distância do perigeu ou o ângulo de aproximação).

6.1 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DA MANOBRA GRAVITACIONALMENTE ASSISTIDA EM DUAS DIMENSÕES

A manobra completa é dividida em três partes distintas. Em todas elas o modelo simples de dois corpos é utilizado. Esta abordagem é usualmente chamada de *patched conics* e pode ser encontrada em diversos trabalhos disponíveis na literatura, tais como Broucke (1988) e Prado (1993).

É assumido que o sistema é formado por três corpos: M_1 , um corpo primário; M_2 , um planeta ou satélite de M_1 que é um corpo menor em uma órbita Kepleriana; M_3 , um veículo espacial com massa desprezível ou uma partícula que está viajando em uma órbita genérica ao redor de M_1 , quando se aproxima de M_2 . Este encontro altera a órbita de M_3 e este evento é chamado de uma Manobra *Swing-by*. De acordo com as hipóteses do modelo assumido (Problema Restrito de Três Corpos), as órbitas de M_1 e M_2 não se alteram. A Figura 6.1 descreve o evento e mostra algumas das variáveis envolvidas.

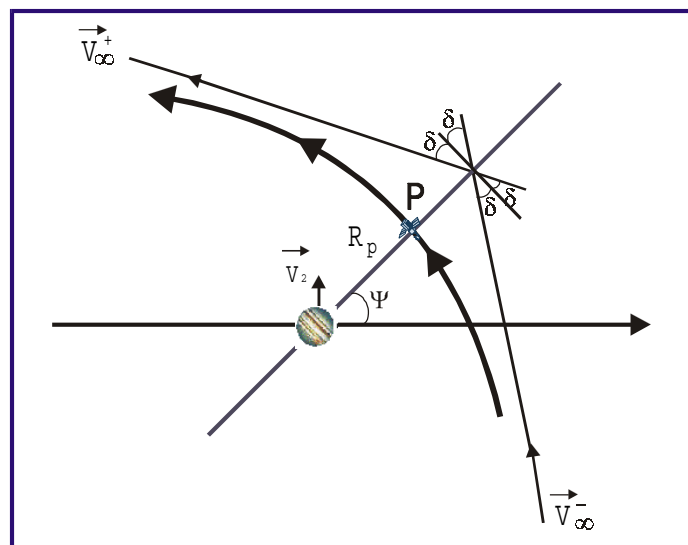


Fig. 6.1 - A manobra *Swing-by* e algumas de suas variáveis

As variáveis são:

\vec{V}_2 = velocidade de M_2 relativa a M_1 ;

$\vec{V}_\infty^-, \vec{V}_\infty^+$ = vetores velocidade do veículo espacial relativas a M_2 antes e depois do encontro, respectivamente;

\vec{V}_i^-, \vec{V}_o^+ = vetores velocidade do veículo espacial relativas a M_1 antes e depois do encontro em um movimento inercial, respectivamente;

δ = metade do ângulo de curvatura (o ângulo entre \vec{V}_∞^- and \vec{V}_∞^+)

Para encontrar as equações necessárias é preciso primeiro usar a teoria das órbitas hiperbólicas para se obter uma expressão para δ . Esta expressão é:

$$\text{sen}(\delta) = \frac{1}{1 + \frac{R_p V_\infty^2}{\mu_2}} \quad (6.1)$$

onde: $\mu_2 = G \times m_2$, sendo G a constante gravitacional.

À partir desta equação e da Figura 6.1 é possível identificar que as variáveis independentes que descrevem completamente a manobra *Swing-by* plana são os três parâmetros seguintes:

$|\vec{V}_\infty|$ = a magnitude da velocidade do veículo espacial quando este atinge infinito com respeito ao corpo M_2 ;

R_p = distância de máximo encontro (ponto P) entre M_2 e M_3 ;

Ψ = ângulo entre a linha do periapse (linha conectando M_2 a P) e a linha $M_1 - M_2$.

A aproximação *patched conics* tem três fases:

a) Na primeira, M_2 é negligenciado e o movimento de M_3 ao redor de M_1 é considerado uma órbita Kepleriana;

b) Na segunda, é admitido que M_3 entra na esfera de influência de M_2 . Então a velocidade \vec{V}_∞^- é calculada à partir da equação abaixo:

$$\vec{V}_{\infty}^{-} = \vec{V}_i - \vec{V}_2 \quad (6.2)$$

(Figura 6.2) e o efeito de M_1 é negligenciado. O movimento de M_3 ao redor de M_2 é hiperbólico no caso que tem interesse para a presente pesquisa. Nesta órbita hiperbólica o veículo espacial M_3 é “expulso” por M_2 e seu vetor velocidade (com relação a M_2) rotaciona por um ângulo 2δ , mas mantém sua magnitude constante. Então o veículo espacial cruza novamente a esfera de influência de M_2 e a abandona para retornar para uma órbita Kepleriana em volta de M_1 . Nesse ponto, a velocidade \vec{V}_{∞}^{+} é dada por:

$$\vec{V}_{\infty}^{+} = \vec{V}_o - \vec{V}_2 \quad (6.3)$$

c) Após o que, o veículo espacial está em uma nova órbita Kepleriana ao redor de M_1 e o *Swing-by* está completo.

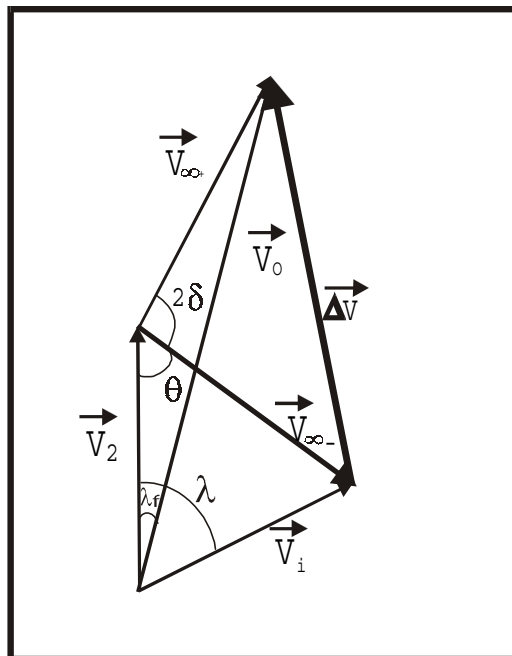


Fig. 6.2 - Soma de vetores velocidade

O estudo das diferenças entre as órbitas antes e após esse encontro (etapas i e iii) é o principal objetivo nesse estágio.

A primeira quantidade importante calculada é $\Delta\vec{V} = \vec{V}_o - \vec{V}_i$, a diferença entre as velocidades inerciais antes e após o *Swing-by*. A partir do diagrama de adição de vetores (Fig. 6.2) e utilizando geometria básica é possível demonstrar que:

$$\Delta V = |\Delta\vec{V}| = 2|\vec{V}_\infty| \text{sen}(\delta) = 2V_\infty \text{sen}(\delta) \quad (6.4)$$

e que $\Delta\vec{V}$ faz um ângulo $\Psi + 180^\circ$ com a linha M_1 - M_2 (Figura 6.3).

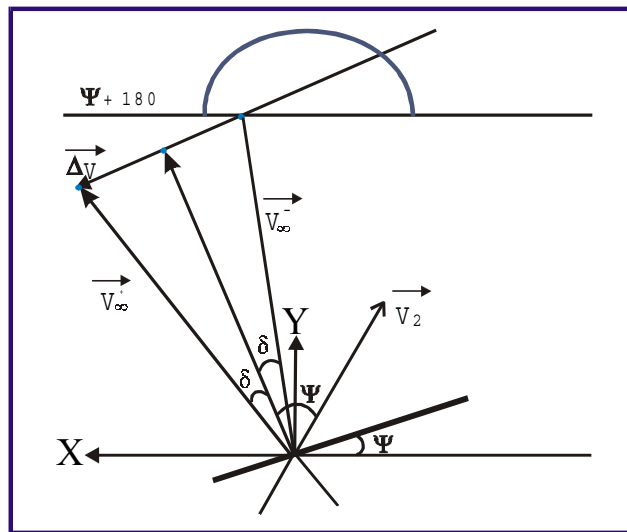


Fig. 6.3 - Vetores velocidade

Este fato fornece os seguintes componentes para o incremento na velocidade:

$$\Delta\dot{X} = -2V_\infty \text{sen}(\delta)\cos(\psi) \quad (6.5a)$$

$$\Delta\dot{Y} = -2V_\infty \text{sen}(\delta)\text{sen}(\psi) \quad (6.5b)$$

A segunda quantidade importante é o momento angular C . A partir de sua definição, é possível obter a expressão $C = X\dot{Y} - Y\dot{X}$, que resulta na equação $\Delta C = X\Delta\dot{Y} + \Delta X\dot{Y} - Y\Delta\dot{X} - \Delta Y\dot{X}$ para sua primeira variação. Esta equação se torna $\Delta C = d\Delta\dot{Y}$ sob a condição de que o encontro é instantâneo ($\Delta X = \Delta Y = 0$) e que $t = 0$. Tem-se $X = d$ e $Y = 0$. Então, combinando este resultado com a expressão de $\Delta\dot{Y}$ (Equação (6.5b)), o resultado é:

$$\omega_a \Delta C = -2V_2 V_\infty \sin(\delta) \sin(\psi) \quad (6.6)$$

Aonde ω_a é a velocidade angular do sistema.

A terceira e última quantidade derivada aqui, é a troca em energia, feita por subtração direta da energia após o encontro: $E_+ \left(= \frac{1}{2} \left[(\dot{X} + \Delta\dot{X})^2 + (\dot{Y} + \Delta\dot{Y})^2 \right] \right)$, da energia antes deste $E_- \left(= \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \right)$.

O resultado é:

$$\Delta E = E_+ - E_- = 2V_\infty \sin(\delta) \left[V_\infty \sin(\delta) - (\dot{X} \cos(\psi) + \dot{Y} \sin(\psi)) \right] \quad (6.7)$$

Esta equação pode ser simplificada (Broucke, 1988) para

$$\Delta E = -2V_2 V_\infty \sin(\delta) \sin(\psi) \quad (6.8)$$

Olhando para as Equações (6.6) e (6.8) um resultado fundamental pode ser encontrado:

$$\Delta E = \omega_a \Delta C \quad (6.9)$$

Algumas conseqüências importantes dessas equações podem ser derivadas estudando-se a Equação (6.8) com maiores detalhes. Os parâmetros V_2 e V_∞ são quantidades positivas (representam as magnitudes dos dois vetores), assim como o $\sin(\delta)$ (porque $0 < \delta < 90^\circ$). Então o único parâmetro que afeta o sinal de ΔE é o $\sin(\psi)$.

A conclusão é que para valores de ψ no intervalo $0^\circ < \psi < 180^\circ$, ΔE é negativo (decrece em energia) e para ψ no intervalo $180^\circ < \psi < 360^\circ$, ΔE é positivo (aumenta em energia).

Então as conclusões finais são:

Se o *Swing-by* ocorre na frente de M_2 , há um decréscimo na energia de M_3 com uma perda máxima quando $\psi = 90^\circ$ ($\Delta \vec{V}$ oposto a \vec{V}_2);

Se o *Swing-by* ocorre atrás de M_2 , há um aumento na energia de M_3 com um ganho máximo quando $\psi = 270^\circ$ ($\Delta \vec{V}$ alinhado a \vec{V}_2).

Diversas equações mostradas aqui utilizam V_∞ como um parâmetro. A variável V_p (velocidade no momento de máxima aproximação) será utilizada posteriormente. O fato é que ambos os parâmetros são equivalentes, ainda na aproximação utilizada para derivar essas equações (*patched conics*), pois a órbita ao redor de M_2 é considerada Kepleriana (Hiperbólica). Eles estão relacionadas pela expressão:

$$V_\infty^2 = V_p^2 - \frac{2\mu}{R_p} \quad (6.10)$$

Dessa forma, os resultados consistem em gráficos que mostram a mudança da órbita do veículo espacial devida ao encontro com o planeta Júpiter para uma grande variedade de condições iniciais. Primeiramente, é feita a classificação de todos os encontros entre Júpiter e o veículo espacial, de acordo com a alteração obtida na órbita do veículo espacial.

São usadas as letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O e P para esta classificação. Elas estão relacionadas com as órbitas de acordo com as regras mostradas na tabela abaixo. Além disso, utiliza-se a letra Z para representar uma órbita que permaneceu capturada em torno de M_2 durante todo o tempo de integração.

TABELA 6.1 - REGRAS PARA O ESTABELECIMENTO DE LETRAS PARA AS ÓRBITAS

Antes:	Depois:	Elíptica Direta	Elíptica Retrógrada	Hiperbólica Direta	Hiperbólica Retrógrada
Elíptica Direta		A	E	I	M
Elíptica Retrógrada		B	F	J	N
Hiperbólica Direta		C	G	K	O
Hiperbólica Retrógrada		D	H	L	P

6.2 O PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Neste tópico, assume-se que as equações de movimento para o veículo espacial sejam as equações válidas para o problema restrito de circular de três-corpos tridimensional. Utiliza-se o sistema canônico adimensional de unidades padrão, isso implica que:

- A unidade de distância é a distância entre M_1 e M_2 ;
- Assume-se que a velocidade angular média (ω_α) do movimento de M_1 e M_2 é igual a 1 (um);

- A massa do menor primário (M_2) é determinada por $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$, (onde m_1 e m_2 são as massas reais de M_1 e M_2 , respectivamente) e a massa de M_1 é $(1-\mu)$;
- A unidade de tempo é definida tal que o período do movimento dos dois corpos primários é igual a 2π ;
- a constante gravitacional é igual a 1 (um).

Vários sistemas de referência podem ser utilizados para descrever o problema restrito de três-corpos tridimensional (Szebehely, 1967).

No sistema rotacional de referência, a origem é o centro de massa dos dois corpos primários. O eixo horizontal (x) é a linha que conecta o dois primários em qualquer tempo. Este sistema rotaciona com uma velocidade angular variável de tal modo que os dois primários estão sempre neste eixo. O eixo vertical (y) é perpendicular ao eixo (x). Neste sistema, as posições dos primários são: $x_1 = -\mu$, $x_2 = 1-\mu$, $y_1 = y_2 = 0$.

As equações de movimento, neste sistema, para a partícula de massa desprezível são (Szebehely, 1969):

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - (1-\mu)\frac{x+\mu}{r_1^3} - \mu\frac{x-1+\mu}{r_2^3} \quad (6.11)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3} \quad (6.12)$$

$$\ddot{z} = -(1-\mu)\frac{z}{r_1^3} - \mu\frac{z}{r_2^3} \quad (6.13)$$

onde r_1 e r_2 são as distâncias de M_1 a M_2 , dados por:

$$r_1 = ((x+\mu)^2 + y^2)^{1/2} + z^2 \quad (6.14)$$

$$r_2 = ((x-\mu)^2 + y^2)^{1/2} + z^2 \quad (6.15)$$

6.3 ALGORÍTMO

Sendo assim, o algoritmo descrito abaixo é utilizado para as simulações numéricas efetuadas.

- 1) Assumem-se valores arbitrários para os parâmetros: R_p , V_p , Ψ ;
- 2) A posição inicial e velocidade são calculadas pelas equações:

$$x = (1-\mu) + R_p \cdot \cos \Psi$$

$$y = R_p \cdot \cos \Psi$$

$$z = 0$$

$$V_x = -V_p \cdot \sin \Psi + R_p \cdot \cos \Psi$$

$$V_y = -V_p \cdot \sin \Psi + R_p \cdot \cos \Psi$$

$$V_z = 0$$

- 3) As equações de Movimento são integradas para frente no tempo até que a distância entre M_2 e a espaçonave seja maior do que o limite d . Calcula-se então, a Energia ($E+$) e o Momento Angular ($C+$) depois do encontro através das Equações 6.16 e 6.17, respectivamente;

$$E = \frac{(x + \dot{y})^2 + (x - \dot{y})^2}{2} - \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (6.16)$$

$$C = x^2 + y^2 + x\dot{y} - y\dot{x} \quad (6.17)$$

- 4) A seguir, a nave espacial é recolocada no perigeu P e a partir desse ponto, integra-se numericamente sua órbita de retorno no tempo até que a distância d seja alcançada

novamente. Calcula-se então, a Energia (E-) e o Momento Angular (C-) antes do encontro através das Equações 6.16 e 6.17, respectivamente.

Com isso, o problema consiste em estudar o movimento do veículo espacial próximo ao encontro com o planeta Júpiter (seu movimento é estudado somente próximo a este ponto, porque quando o veículo espacial está distante de Júpiter o sistema é governado pela dinâmica de dois corpos, Sol + veículo espacial, onde não há variação de energia ou momento angular).

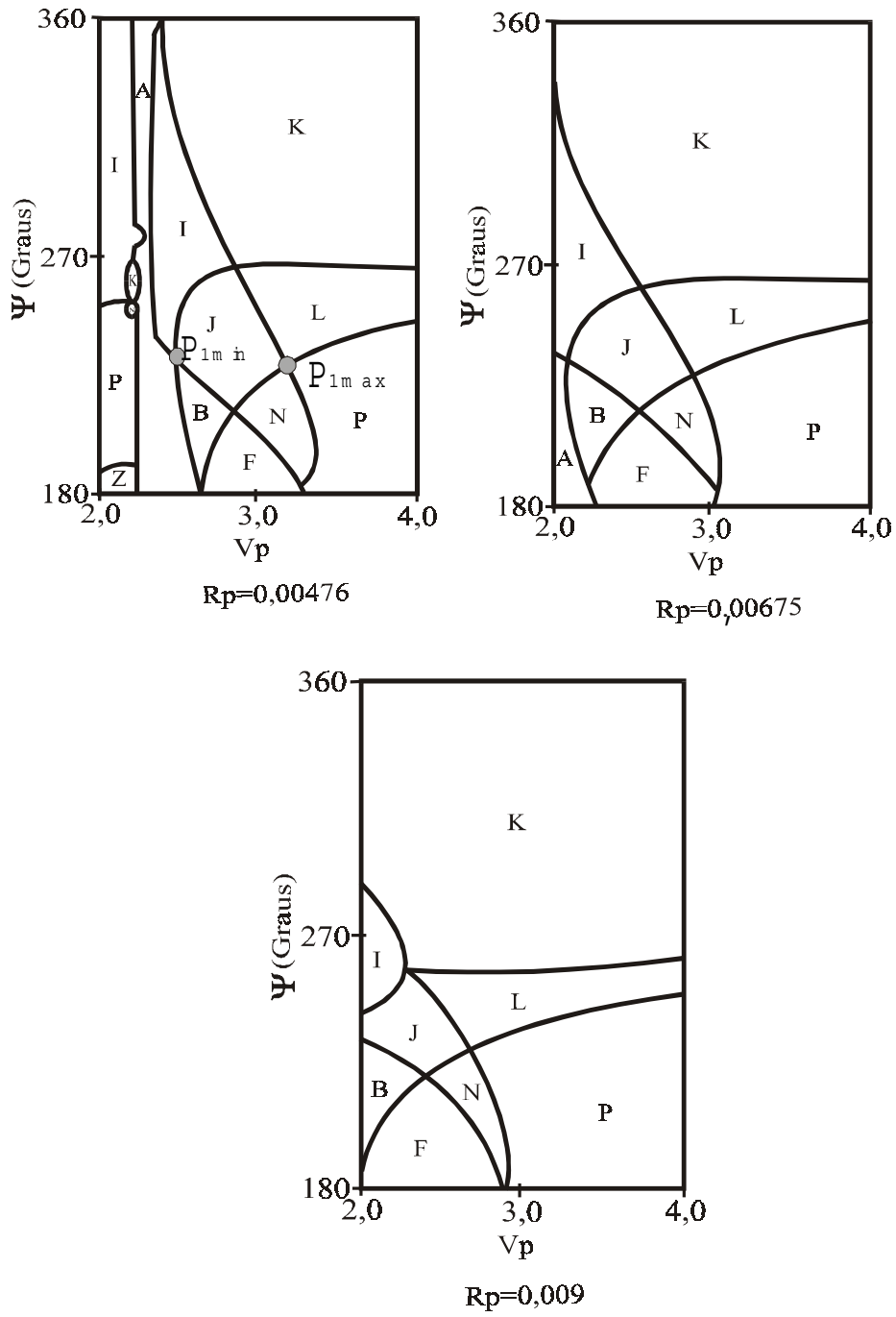
6.4 RESULTADOS NO CASO PLANO

Os resultados consistem em atribuir uma das letras A-P ou Z a uma posição em um diagrama bi-dimensional que tem o ângulo Ψ (em graus) no eixo vertical e valores de R_p ou de V_p , ambos em unidades canônicas, no eixo horizontal. Este tipo de diagrama é chamado aqui de "gráfico de letras" e foi utilizado anteriormente em Broucke (1988) e Prado (1993).

Neste capítulo são simuladas algumas combinações de R_p e V_p que são mostradas nas Figuras 6.4 a 6.5. Para todos os gráficos os parâmetros utilizados são $\mu = 0,00121$ e $d = 0,5$ em unidades canônicas. O intervalo plotado para Ψ é de $180^\circ < \Psi < 360^\circ$ porque há uma simetria com respeito ao eixo vertical $\Psi = 180^\circ$. Com respeito ao eixo horizontal são construídos gráficos com valores para R_p fixos e variando-se V_p ou com valores fixos para V_p e variando-se R_p .

6.4.1 RESULTADOS PARA R_p FIXO

Nesta seção são apresentados gráficos onde são fixados os valores de R_p em 0,00476; 0,00675; 0,009; 0,0225 e 0,045 e variam-se os valores de V_p dentro do intervalo $2,0 < V_p < 4,0$, conforme visto na Figura 6.4.



(continua)

Fig. 6.4 – Resultados para R_p fixo

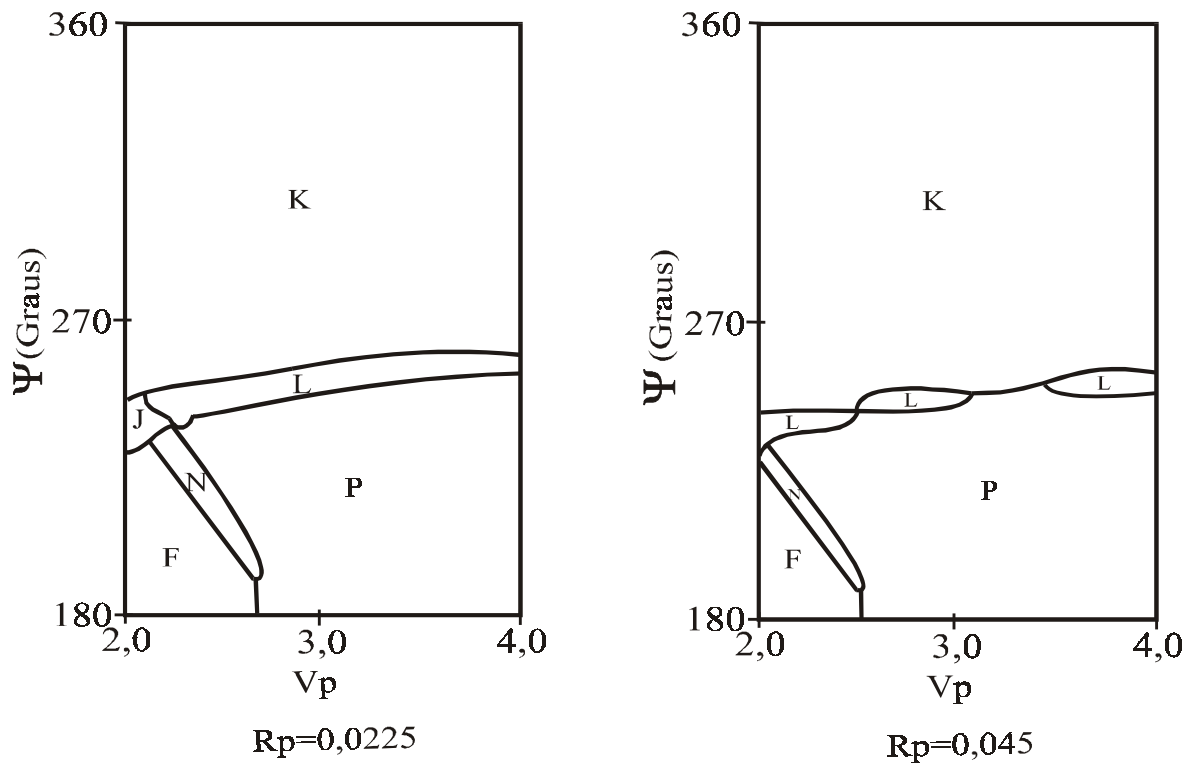


Fig. 6.4 (Conclusão)– Resultados para R_p fixo

6.4.2 RESULTADOS PARA V_p FIXO

Nesta seção são apresentados gráficos onde são fixados os valores de V_p em 2,2; 2,6; 3,0 e 3,4 e variam-se os valores de R_p dentro do intervalo $0,00476 < R_p < 0,045$, conforme visto na Figura 6.5.

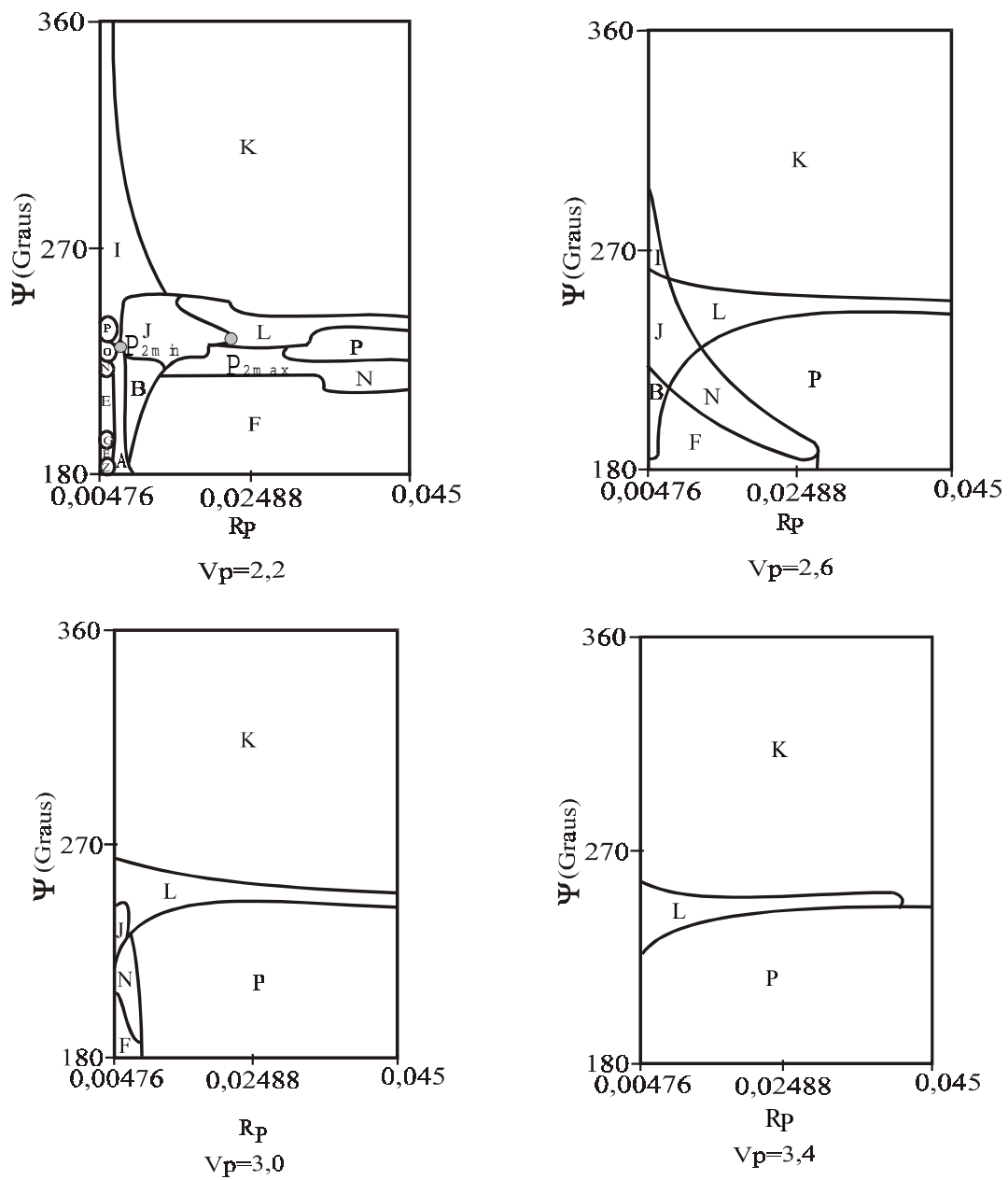


Fig. 6.5 Resultados para V_p fixo

Examinando as Figuras 6.4 e 6.5 podemos notar algumas famílias de órbitas:

Órbitas de escape (I, J, M, N) que aparecem, em geral, na metade inferior ($180^\circ < \psi < 270^\circ$);

Órbitas de Captura (C, D, G, H) que não aparecem nas figuras mostradas, mas existem nas partes simétricas, não mostradas;

Órbitas Elípticas (A, B, E, F) que aparecem na faixa inferior a esquerda;

Órbitas Hiperbólicas (K, L, O, P) que aparecem na faixa superior e na faixa da direita;

Órbitas que mudam a direção de movimento do sentido direto para retrógrado (E, M, G, O) que aparecem na metade inferior a esquerda de algumas figuras e nas partes simétricas não mostradas;

Órbitas que mudam a direção de movimento do sentido retrógrado para direto (B, D, J, L) que aparecem na faixa central inferior;

Órbitas retrógradas (F, H, N, P) que aparecem na faixa inferior;

Órbitas diretas (A, C, I, K) que aparecem na faixa central superior e na faixa esquerda;

Órbitas capturadas pelo secundário que permanecem em torno de M_2 (Z) que aparecem para valores pequenos de V_p .

A seguir são estudadas as tendências na variação dos parâmetros na manobra de encontro. Os parâmetros que governam o sistema estudado são:

- A distância do perigeu R_p ,
- A velocidade no perigeu V_p ,

- O ângulo Ψ que define a posição do perigeu.

O parâmetro Ψ influencia o tipo de órbita. Fornece máximo efeito para $\Psi = 270^\circ$ e $\Psi = 90^\circ$. O mínimo efeito ocorre em $\Psi = 180^\circ$ e $\Psi = 360^\circ$.

O parâmetro distância do perigeu (R_p) influencia a magnitude do efeito. Quanto menor o valor maior o efeito.

O parâmetro velocidade no perigeu (V_p) influencia o tipo de órbita. Valores menores geram órbitas elípticas e valores maiores órbitas hiperbólicas.

6.5 PROBLEMAS ÓTIMOS NO CASO PLANO

Os resultados gerados nesta pesquisa podem ser usados para ajudar os analistas de missão a planejar missões que envolvam otimização de parâmetros em uma manobra swing-by. É possível utilizar os gráficos desenvolvidos para encontrar situações onde um caso específico (representado pelas letras A-P) pode ser obtido com uma ou mais variáveis (como V_p ou R_p) extremizadas. Exemplos de situações parecidas são:

- 1) Coletar dados de M_2 no caso de não existir nenhuma ameaça a missão. Nesse caso deseja-se minimizar R_p (para passar mais próximo de M_2) e/ou V_p (para permanecer mais tempo perto de M_2).
- 2) Executar uma mudança orbital em um planeta que representa um risco para o veículo devido à presença de radiação e/ou de atmosfera, etc. Nesse caso, é necessário maximizar V_p e/ou R_p , sujeito à restrição de se obter a mudança desejada na trajetória.

6.5.1 PROBLEMA 1

Deseja-se obter uma trajetória do Tipo J (antes uma Elíptica Retrógrada e depois uma Hiperbólica Direta) no sistema Terra-Lua, com $R_p = 0,00476$ (100 km sobre a superfície) e com velocidade no perigeu máxima (ou mínima). As soluções estão nos pontos P_{1max} e P_{1min} da Figura 6.4.

6.5.2 PROBLEMA 2

Deseja-se obter uma trajetória do Tipo J (antes uma Elíptica Retrógrada e depois uma Hiperbólica Direta) no sistema Terra-Lua, com R_p livre e com uma velocidade no perigeu mínima. Vê-se que a otimização ocorre no intervalo $0,0225 < R_p < 0,045$, porque a família J existe em $R_p = 0,00225$ e não existe mais em $R_p = 0,045$. Constrói-se então, a Figura 6.6 para resolver o problema. Vê-se que a solução ocorre para $0,040 \leq R_p \leq 0,044$, com $\Psi = 234^\circ$ e $V_p = 2,0$ porque este foi o limite estabelecido no problema. Observa-se que existe uma faixa para R_p e não um único ponto.

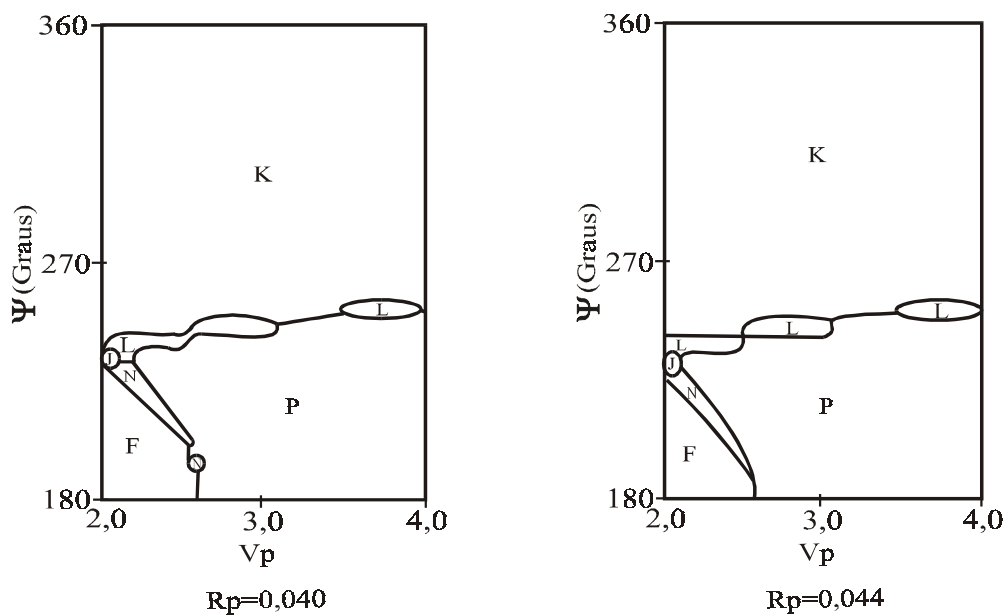


Fig. 6.6 - Solução do Problema 2

6.5.3 PROBLEMA 3

Deseja-se obter uma trajetória do Tipo J (antes uma Elíptica Retrógrada e depois uma Hiperbólica Direta) no sistema Terra-Lua, com $V_p = 2,2$ e distância do perigeu máxima ou mínima. As soluções estão nos pontos P_{2max} e P_{2min} da Figura 6.5.

6.5.4 PROBLEMA 4

Deseja-se obter uma trajetória do Tipo N (antes uma Elíptica Retrógrada e depois uma Hiperbólica Direta) no sistema Terra-Lua, com V_p livre e requerer um raio no perigeu mínimo. Vê-se que a otimização ocorre no intervalo $3,0 < R_p < 3,4$, pois a família J existe no caso $R_p = 3,0$ e não existe no caso $R_p = 3,4$. Constrói-se, então, a Figura 6.7 para resolver o problema. Vê-se que a solução ocorre para $V_p = 3,29$ com $192^\circ \leq \Psi \leq 204^\circ$ e $R_p = 0,00476$, porque este foi o limite estabelecido no problema. Observa-se que a solução não é única em Ψ .

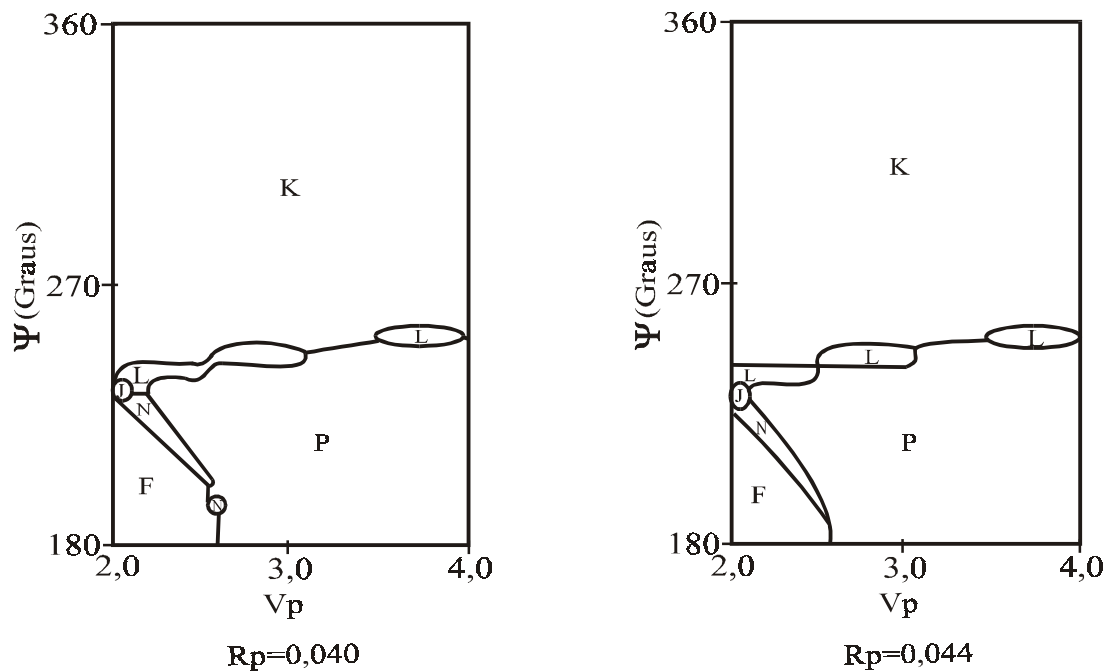


Fig. 6.7 - Solução do Problema 4

6.6 CONCLUSÕES NO CASO PLANO

Os gráficos de letras representam os efeitos do encontro na órbita do veículo espacial em duas dimensões. Nota-se que as órbitas hiperbólicas (família K) dominam a região $\Psi > 270^\circ$ e quando as velocidades vão aumentando, as famílias K, L, e P dominam os gráficos. Famílias de órbitas parabólicas ou de momento angular zero, existem nas bordas das principais famílias.

A seguir, propõe-se resolver problemas de otimização.

Das soluções dos problemas ótimos, encontra-se trajetórias específicas (escape, captura, etc.) que contém variáveis que extremizam algumas outras, como a distância do perigeu e/ou velocidade do perigeu. Dessa forma podemos usar estes dados para missões específicas.

6.7 A MANOBRA GRAVITACIONALMENTE ASSISTIDA EM TRÊS DIMENSÕES

A manobra gravitacionalmente assistida tri-dimensional consiste em utilizar um encontro com um corpo celeste para mudar a velocidade, energia, e momento angular de um corpo menor (um cometa ou um veículo espacial) utilizando o espaço tri-dimensional. Nesta versão a manobra pode ser identificada através de quatro parâmetros independentes:

- a) V_p , a magnitude da velocidade do veículo espacial no perigeu. Para o caso mais geral, seria necessário dar uma informação sobre a direção da velocidade. Como modelo inicial somente são consideradas velocidades paralelas ao plano x-y. Utiliza-se esta limitação porque a situação mais habitual é a pesquisa interplanetária e os planetas têm órbitas que são quase coplanares. Considerando

esta aproximação, e levando em conta que a velocidade do perigeu é perpendicular ao vetor do perigeu, a informação sobre a magnitude da velocidade é suficiente para especificar completamente o vetor velocidade. Essa restrição será removida no final do presente capítulo;

- b) R_p , a distância entre o veículo espacial e o corpo celeste durante a máxima aproximação;
- c) α , o ângulo entre a linha de projeção do perigeu no plano x-y e a linha que conecta o dois primários;
- d) β , o ângulo entre a linha de perigeu e o plano x-y.

A Figura 6.8 mostra esta manobra e algumas variáveis importantes.

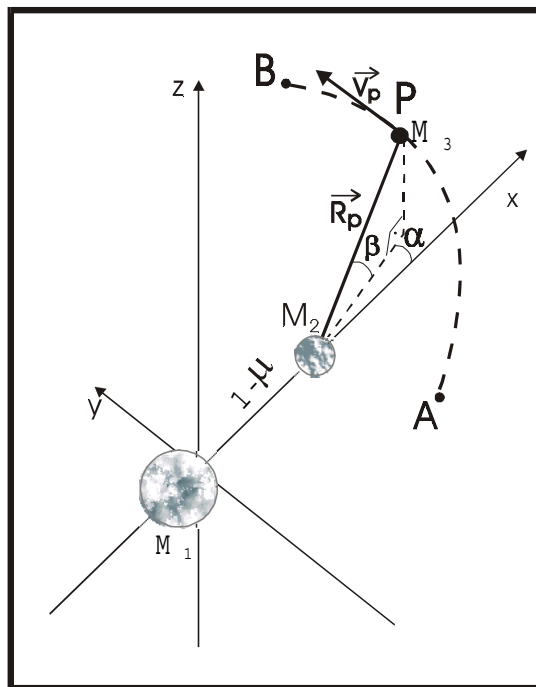


Fig.6.8 – Geometria da manobra Swing-by em três dimensões

Assume-se que o sistema tem três corpos: um primário (M_1) e um secundário (M_2) com massas finitas que estão em órbitas circulares ao redor do seu centro de massa comum e um terceiro corpo com massa desprezível (o veículo espacial) o qual tem seu movimento governado pelos dois outros corpos. O veículo espacial deixa o ponto A, passa pelo ponto P (o perigeu da trajetória do veículo espacial em sua órbita ao redor M_2) e vai para o ponto B. Os pontos A e B são escolhidos de tal modo que a influência de M_2 nesses dois pontos pode ser negligenciada e, conseqüentemente, assume-se que a energia pode permanecer constante depois de B e antes de A (neste sistema aplica-se Mecânica Celeste de dois-corpos).

As condições iniciais são identificadas claramente na Figura 6.8: a distância do perigeu R_p (distância medida entre o ponto P e o centro de M_2); os ângulos α e β ; a velocidade V_p . A distância R_p não está em escala para facilitar o entendimento da figura. O resultado desta manobra é uma mudança na velocidade, energia e momento angular na órbita kepleriana do veículo espacial ao redor do corpo central.

Há muitas publicações que estudam a manobra *Swing-by* em missões diferentes. Alguns exemplos são: o estudo de missões para os satélites dos planetas gigantes (D'Amário *et al*, 1982), novas missões para Netuno (Swenson, 1992) e Plutão (Weinstein, 1992), o estudo das vizinhanças da Terra (Farquhar e Dunham, 1981; Farquhar *et al*, 1985); missões de reconhecimento do sistema solar (Flandro, 1966; Carvell, 1986) e transferências entre assíntotas hiperbólicas (Gobet, 1963; Walton *et al*, 1975).

6.8 ALGORITMO PARA RESOLVER O PROBLEMA TRIDIMENSIONAL

O problema principal é simular e classificar trajetórias passando próximo a um corpo celeste, medindo sua energia e momento angular antes e depois do encontro, determinando o seu tipo de órbita, assim como foi feito no caso bi-dimensional.

Um algoritmo numérico para resolver o problema tem as seguintes etapas:

- 1) Escolhem-se valores arbitrários para os quatro parâmetros R_p , V_p , α e β ;
- 2) Com estes valores são computadas as condições iniciais no sistema rotacional. A posição inicial é o ponto (X_i, Y_i, Z_i) e a velocidade inicial é $(V_{X_i}, V_{Y_i}, V_{Z_i})$, onde:

$$X_i = 1 - \mu + R_p \cos(\beta)\cos(\alpha) \quad (6.18)$$

$$Y_i = R_p \cos(\beta)\sin(\alpha) \quad (6.19)$$

$$Z_i = R_p \sin(\beta) \quad (6.20)$$

$$V_{X_i} = -V_p \sin(\alpha) + R_p \cos(\beta)\sin(\alpha) \quad (6.21)$$

$$V_{Y_i} = V_p \cos(\alpha) - R_p \cos(\beta)\cos(\alpha) \quad (6.22)$$

$$V_{Z_i} = 0 \quad (6.23)$$

A última equação vem da decisão de estudar as manobras com V_p paralelo ao plano orbital dos primários;

- 3) Com estas condições iniciais, as equações de movimento são integradas para frente no tempo até que a distância entre M_2 e o veículo espacial seja maior que um limite especificado d . Neste momento a integração numérica é parada e a energia (E^+) e o momento angular (C^+) depois do encontro são calculados pela Mecânica Celeste de Dois Corpos;
- 4) A partícula retorna para suas condições iniciais no ponto P e as equações de movimento são integradas para trás no tempo, até que a distância d seja alcançada novamente. Então a energia (E^-) e o momento angular (C^-) antes do encontro são calculados pela Mecânica Celeste de Dois Corpos.

Para todas as simulações mostradas nesse capítulo, foram utilizados como integrador numérico um método de Runge-Kutta de quarta ordem com controle do tamanho do passo e um Runge-Kutta de oitava ordem. Os resultados dessa comparação mostram que não há nenhuma distinção entre os gráficos obtidos. É também calculado o valor da constante *Jacobiana* para todas as trajetórias envolvidas e usa-se, entre as várias formas disponíveis na literatura, a expressão:

$$J = \frac{V^2}{2} - \frac{(x^2 + y^2)}{2} - \frac{(1-\mu)}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} \quad (6.24)$$

O fato desta grandeza ter se mantido efetivamente constante é uma prova que ambos os métodos de integração numérica são adequados. Cada ponto nos gráficos mostrados representa uma trajetória e apresenta um único valor para a constante Jacobiana. O critério para parar a integração numérica é a distância entre o veículo espacial e M_2 . Quando esta distância alcança o valor $d = 0,5$ (a metade do semi-eixo maior dos dois primários), a integração numérica é interrompida. O valor 0,5 é muito maior que a esfera de influência de M_2 para todos os sistemas utilizados nesse trabalho o que evita quaisquer efeitos de M_2 a estes pontos. Como exemplo, o sistema Terra-Lua possui $d = 0,00077$, em unidades canônicas. Efetuou-se simulações usando-se valores maiores para esta distância e também aumentando-se o tempo de integração, sem que tenha ocorrido alteração significativa nos resultados.

Com este algoritmo disponível, as condições iniciais dadas (valores de R_p , V_p , α , β) são variadas em qualquer intervalo desejado e são estudados os efeitos da aproximação próxima sobre a órbita do veículo espacial.

6.9 RESULTADOS NO CASO TRIDIMENSIONAL

Para classificar as órbitas tridimensionais, utiliza-se as mesmas definições e a Tabela 6.1 utilizada para o estudo bi-dimensional.

Neste capítulo são simuladas algumas combinações de R_p e V_p para sistemas diferentes que são mostradas nas Figuras 6.7 a 6.16. Para os gráficos, os parâmetros utilizados são descritos em cada figura com uma distância $d = 0,5$ unidades canônicas. Para cada gráfico foi gerado um total de 961 trajetórias que dividem cada eixo em 31 segmentos. O intervalo plotado para α é $180^\circ < \alpha < 360^\circ$, pois existe uma simetria com respeito à linha vertical $\alpha = 180^\circ$. O gráfico para o intervalo $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ é uma imagem de espelho da região $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ com as substituições de letras seguintes: L se torna O, N se torna H, I se torna C, B se torna E, M se torna D e J se torna G. As letras K, P, F e A permanecem inalteradas

6.9.1 RESULTADOS PARA O SISTEMA SOL-TERRA

Nesta seção, são mostrados gráficos de letras para o sistema Sol-Terra. Para todos os gráficos os parâmetros utilizados são $\mu = 0,000003$ e $R_p = 8,52 \times 10^{-5}$ e variam-se os valores de V_p conforme mostrado na Figura 6.9.

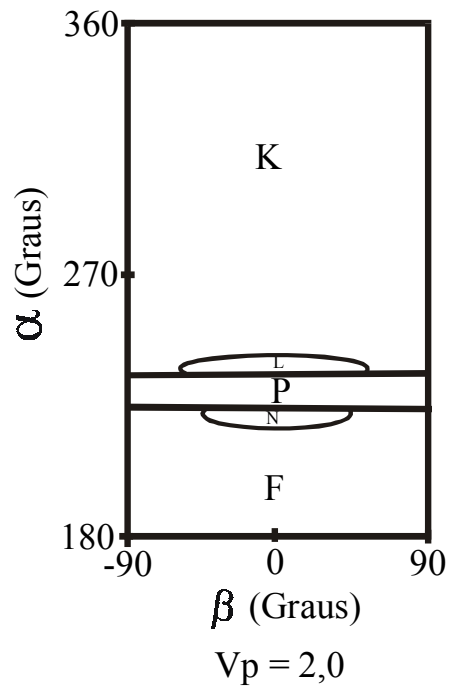
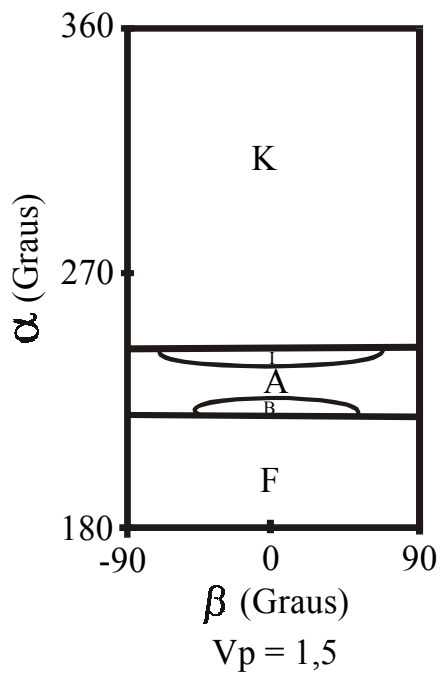
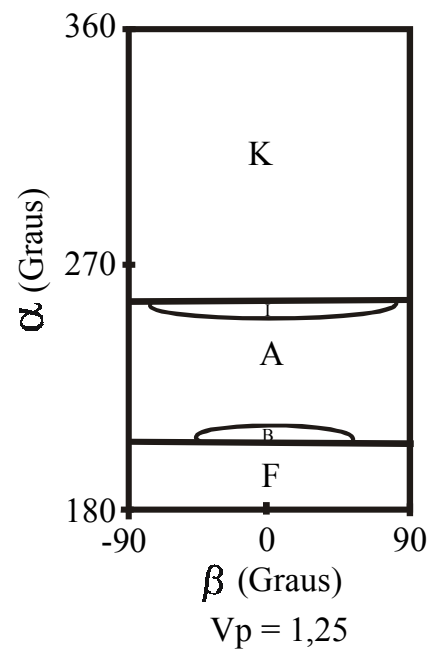
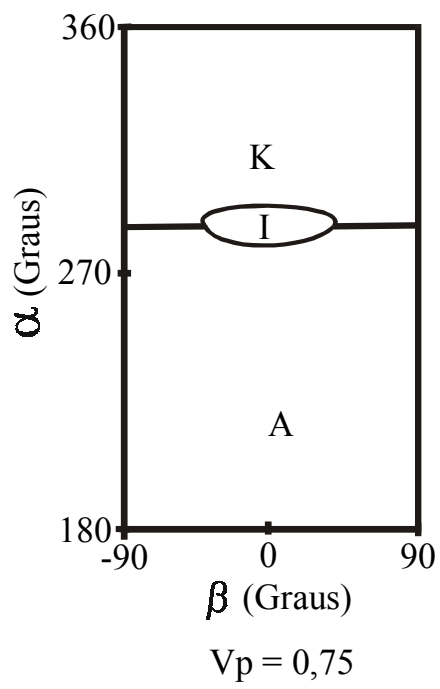


Fig. 6.9 - Resultados para o sistema Sol - Terra

6.9.2 RESULTADOS PARA O SISTEMA SOL – MARTE

Nesta seção, são mostrados gráficos de letras para o sistema Sol-Marte. Para todos os gráficos os parâmetros utilizados são $\mu = 0,3245 \times 10^{-6}$ e $R_p = 7,45 \times 10^{-5}$ e variam-se os valores de V_p conforme mostrado na Figura 6.10.

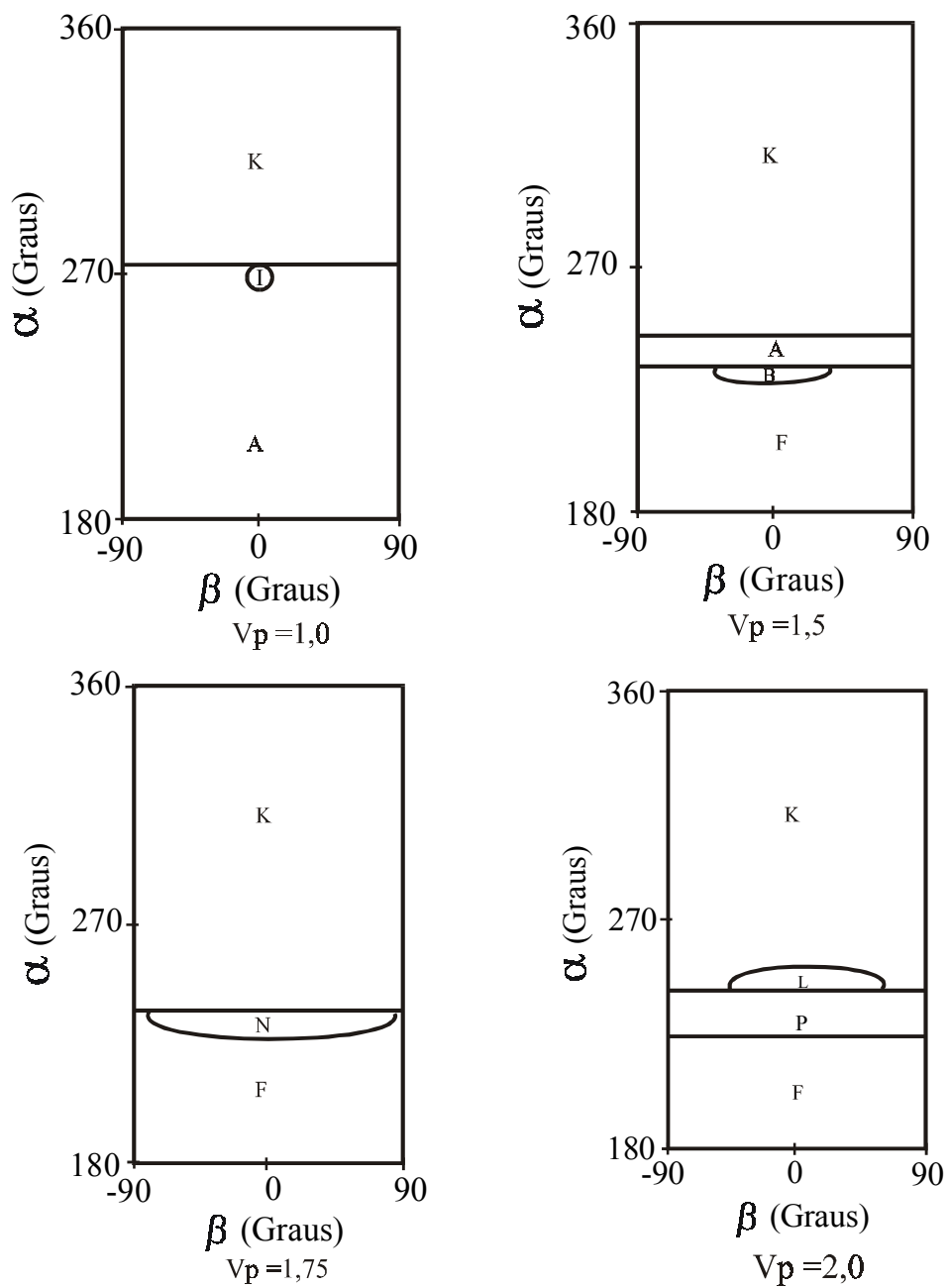


Fig. 6.10 Resultados para o sistema Sol – Marte

6.9.3 RESULTADOS PARA O SISTEMA SOL – VÊNUS

Nesta seção, são mostrados gráficos de letras para o sistema Sol-Vênus. Para todos os gráficos os parâmetros utilizados são $\mu = 0,2455 \times 10^{-5}$ e $R_p = 11,46 \times 10^{-5}$ e variam-se os valores de V_p conforme mostrado na Figura 6.11.

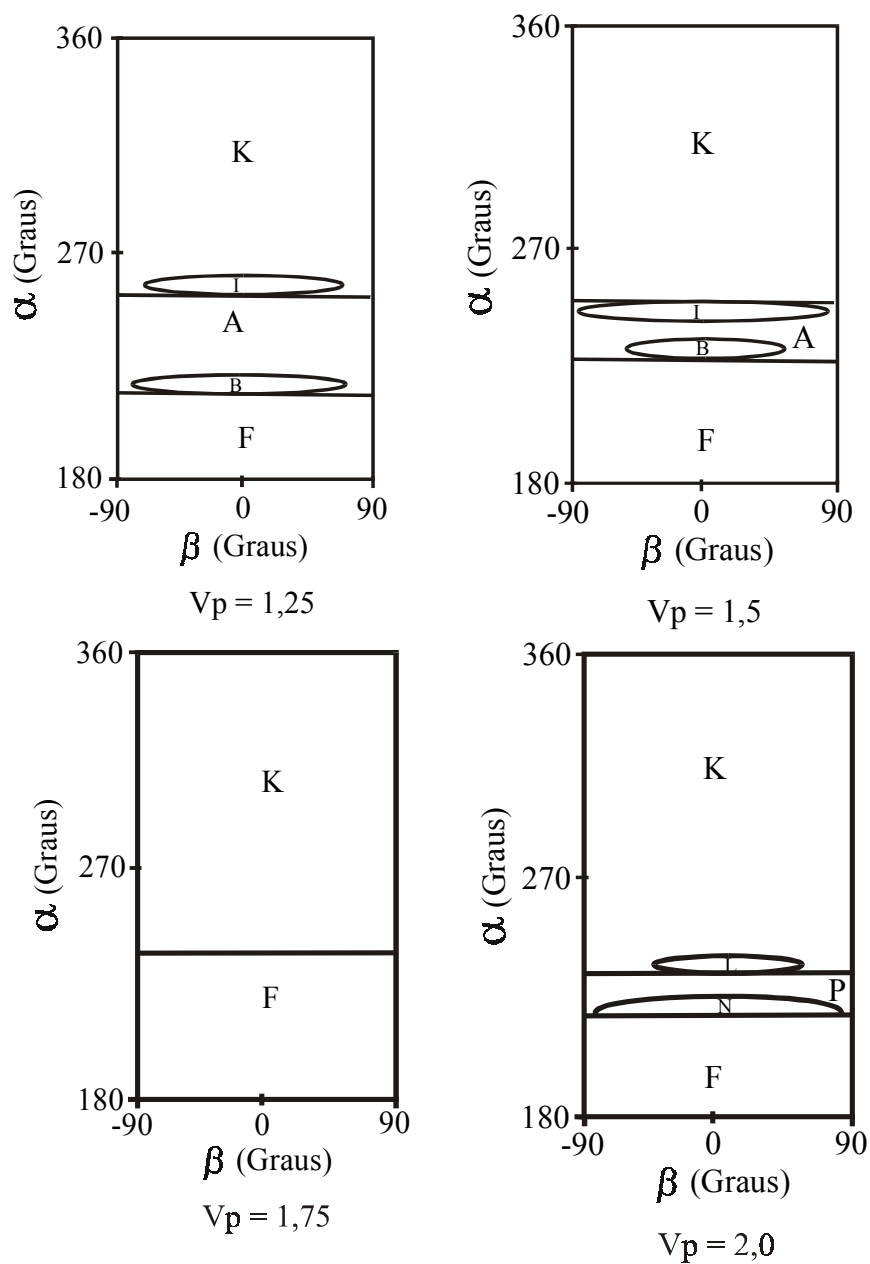


Fig. 6.11 - Resultados para o sistema Sol – Vênus

6.9.4 RESULTADOS PARA O SISTEMA SOL – SATURNO

Nesta seção, são mostrados gráficos de letras para o sistema Sol-Saturno. Para todos os gráficos os parâmetros utilizados são $\mu = 0,286 \times 10^{-3}$, $R_p = 6,348 \times 10^{-5}$ e $8,464 \times 10^{-5}$ variam-se os valores de V_p conforme mostrado nas Figuras 6.12 e 6.13.

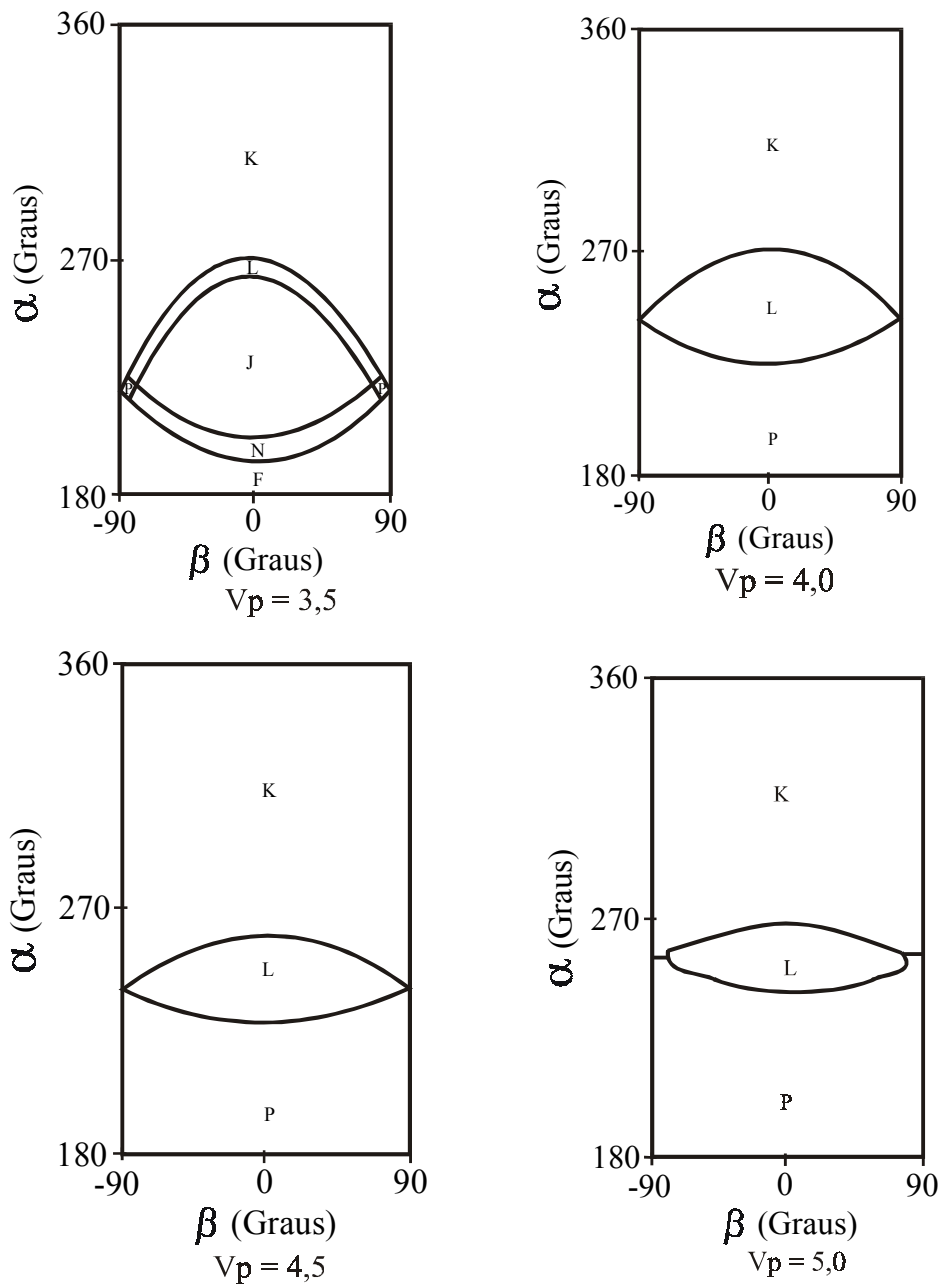


Fig. 6.12 - Resultados para o sistema Sol – Saturno com $R_p = 6,348 \times 10^{-5}$

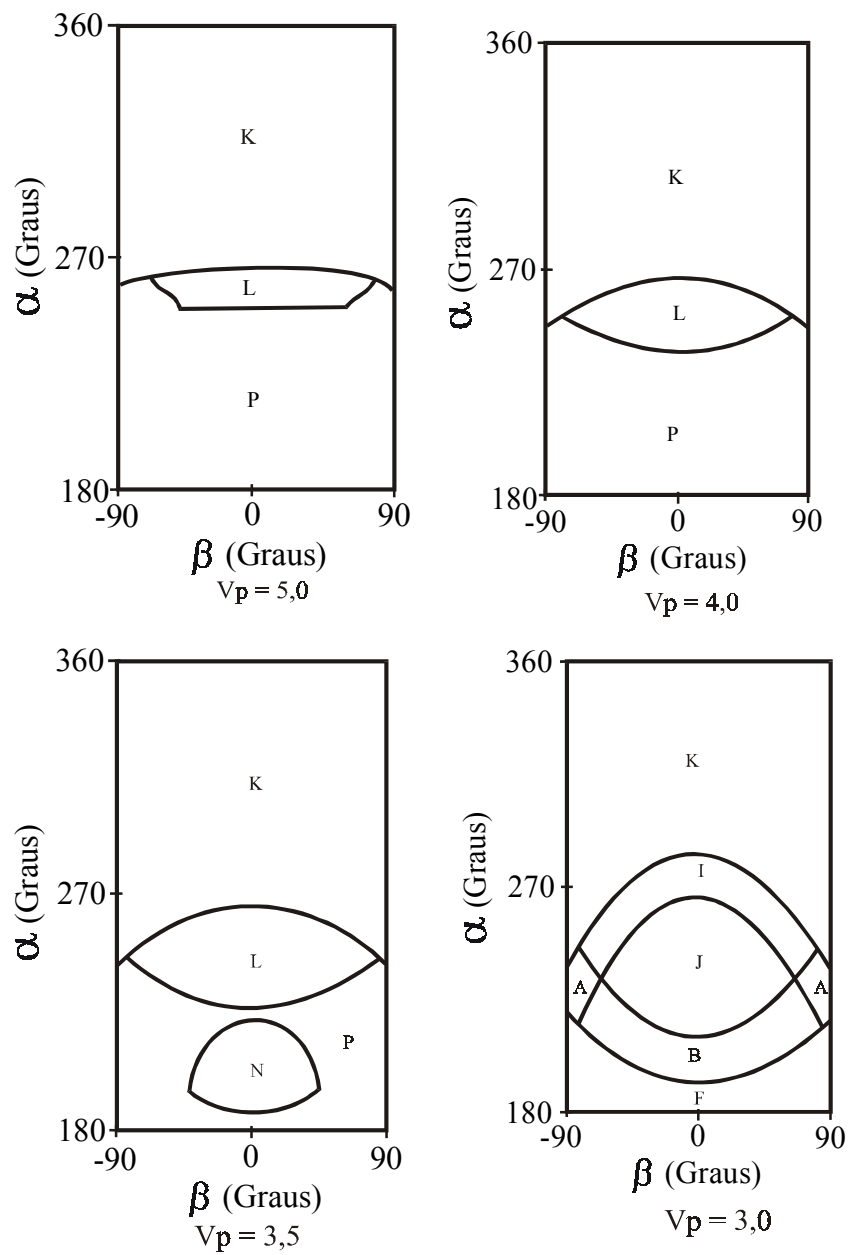


Fig. 6.13 - Resultados para o sistema Sol – Saturno com $R_p = 8,464 \times 10^{-5}$

6.9.5 RESULTADOS PARA O SISTEMA SOL – URANO

Nesta seção, são mostrados gráficos de letras para o sistema Sol-Urano. Para todos os gráficos os parâmetros utilizados são $\mu = 0,4387 \times 10^{-4}$, $R_p = 16,4 \times 10^{-6}$ e $8,2 \times 10^{-5}$ variam-se os valores de V_p conforme mostrado nas Figuras 6.14 e 6.15.

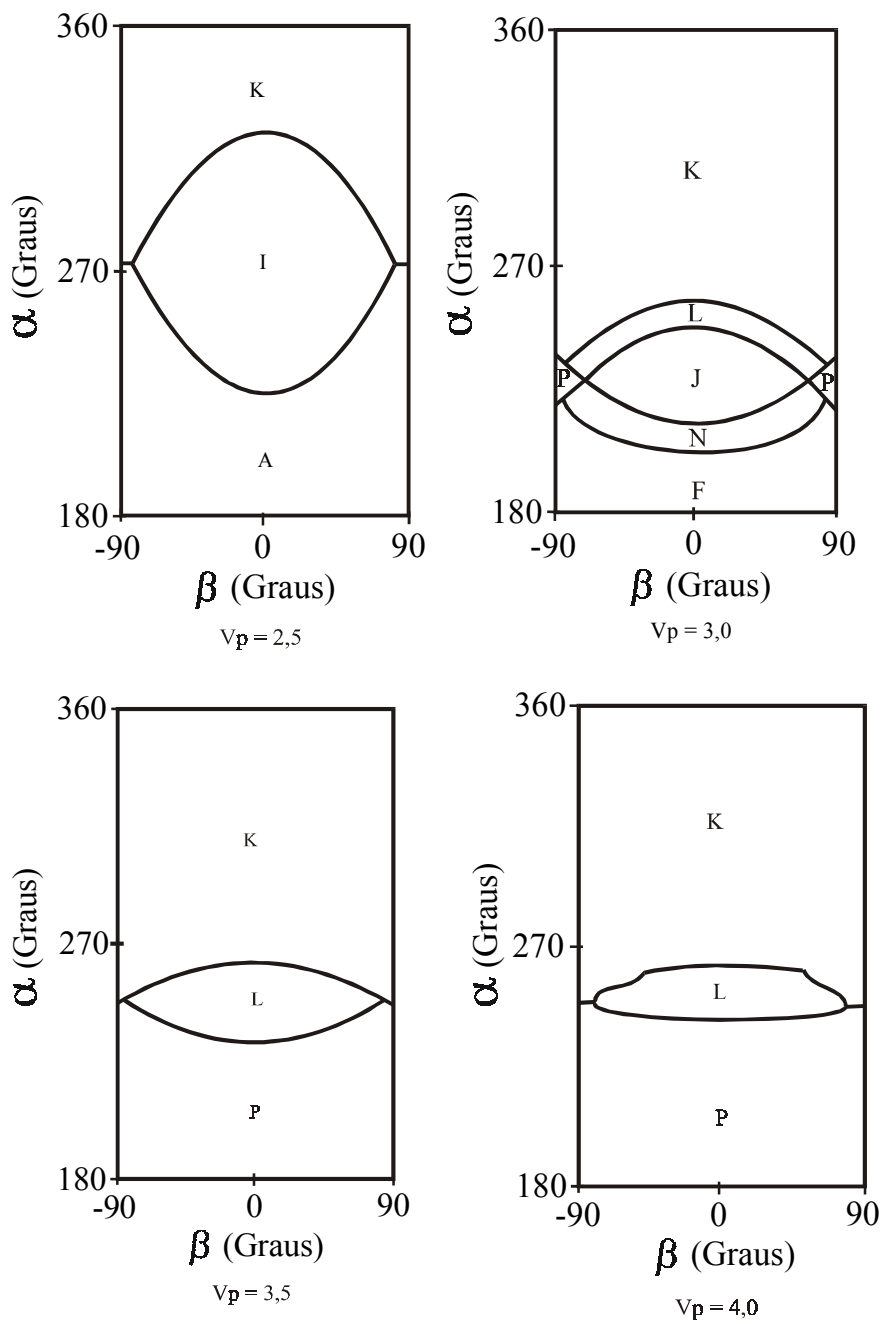


Fig. 6.14 - Resultados para o sistema Sol – Urano com $R_p = 16,4 \times 10^{-6}$

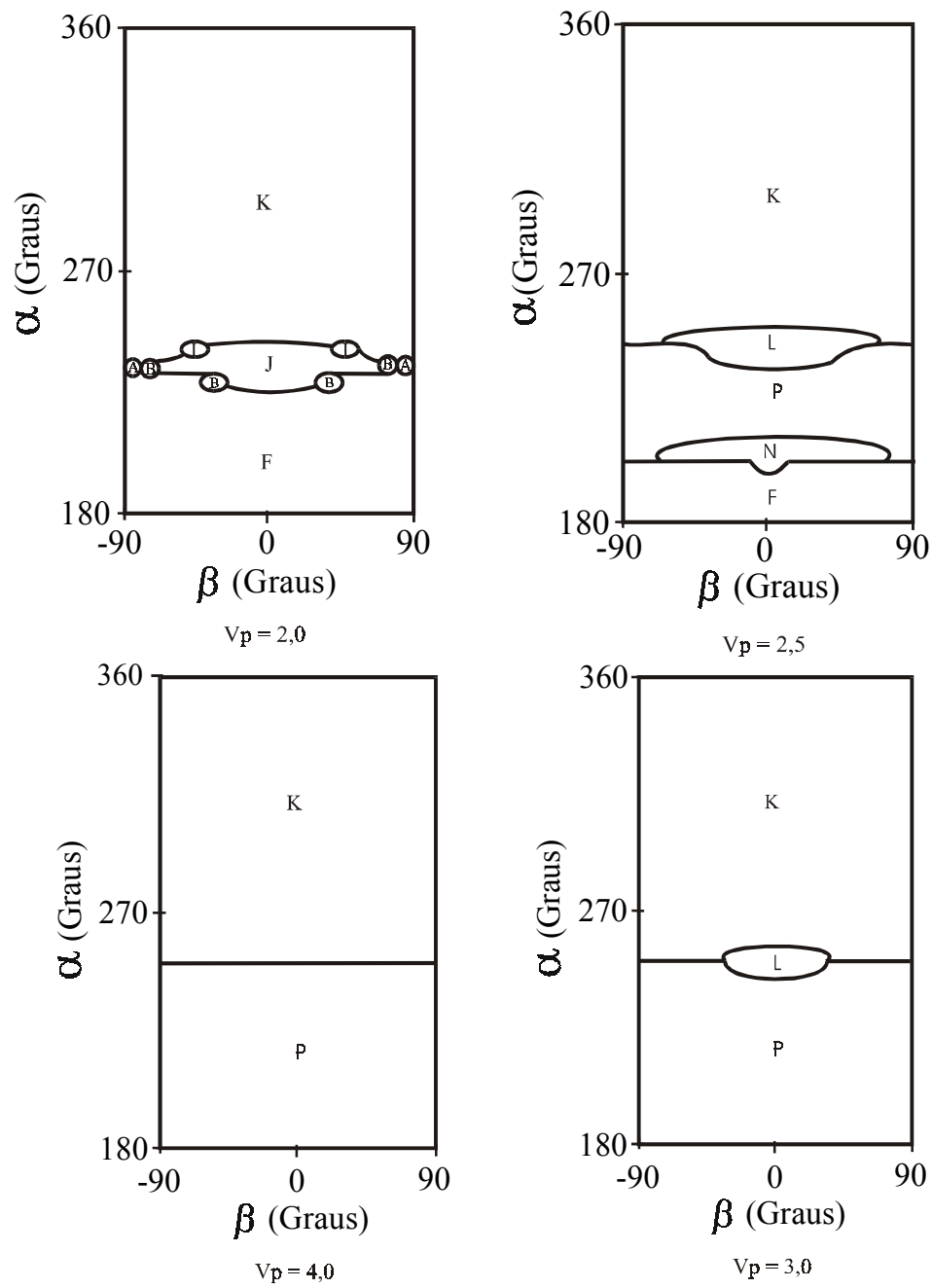


Fig. 6.15 - Resultados para o sistema Sol – Urano com $R_p = 8,2 \times 10^{-5}$

6.9.6 RESULTADOS PARA O SISTEMA SOL – JUPITER

Nesta seção, são mostrados gráficos de letras para o sistema Sol-Jupiter. Para todos os gráficos os parâmetros utilizados são $\mu = 0,955597 \times 10^{-3}$, $R_p = 0,137595 \times 10^{-3}$ e $0,18346 \times 10^{-3}$ e variam-se os valores de V_p conforme mostrado nas Figuras 6.16 e 6.17.

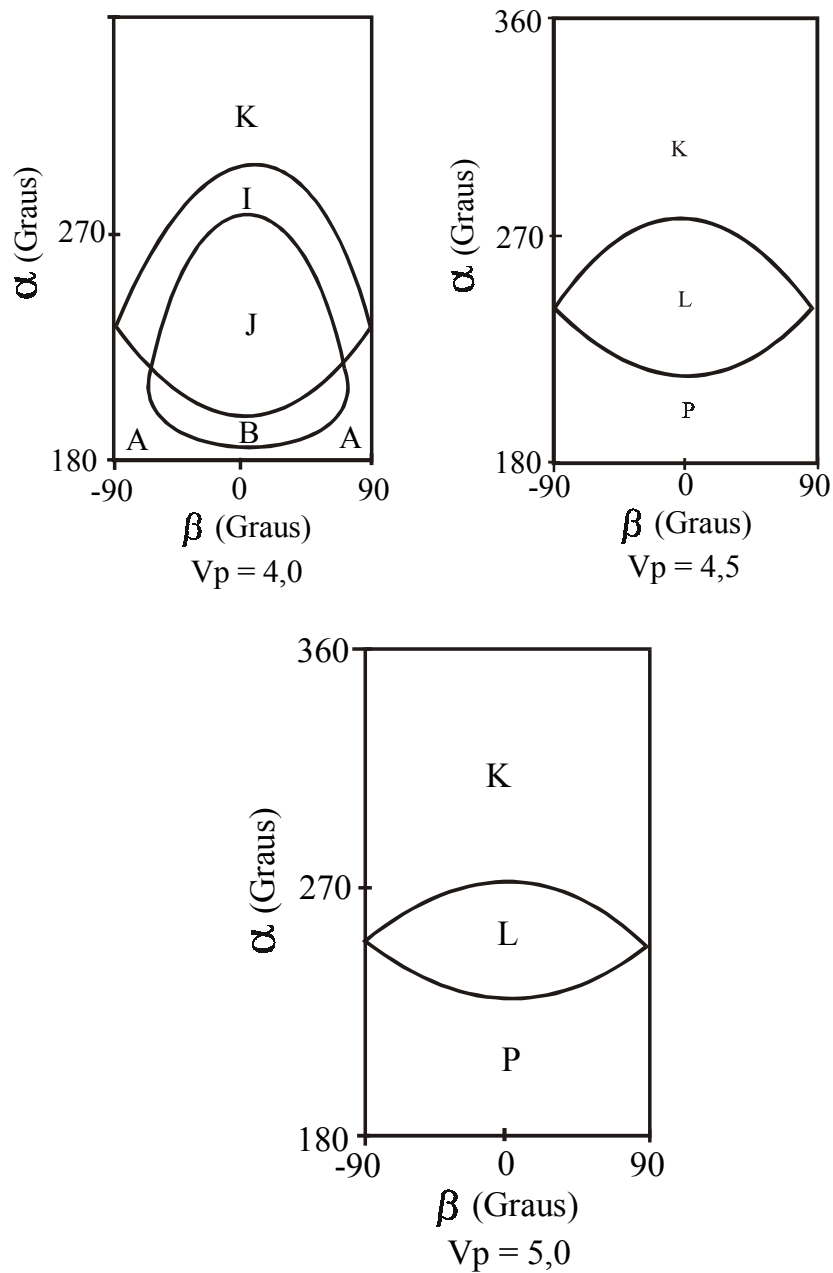


Fig. 6.16 - Resultados para o sistema Sol – Júpiter com $R_p = 0,137595 \times 10^{-3}$

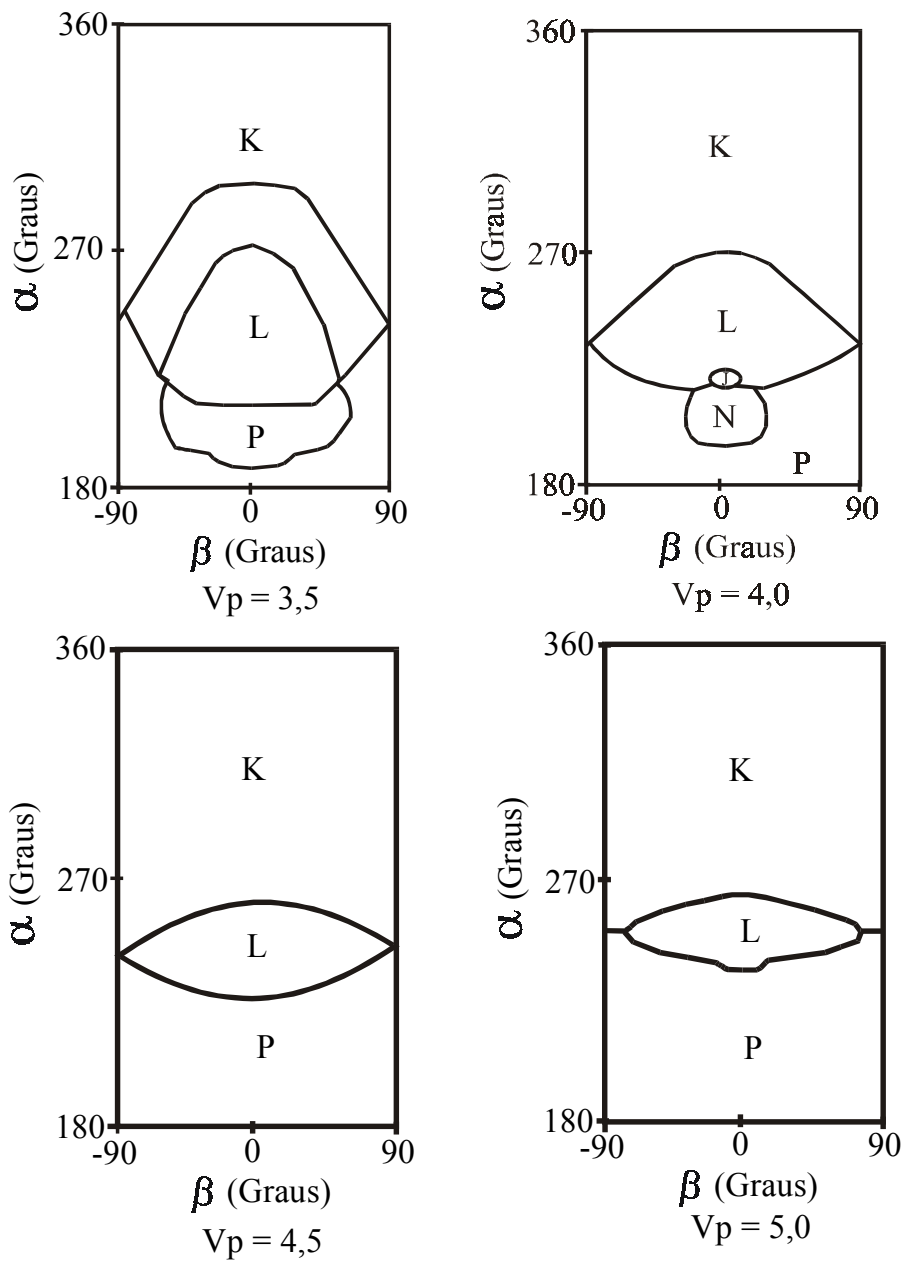
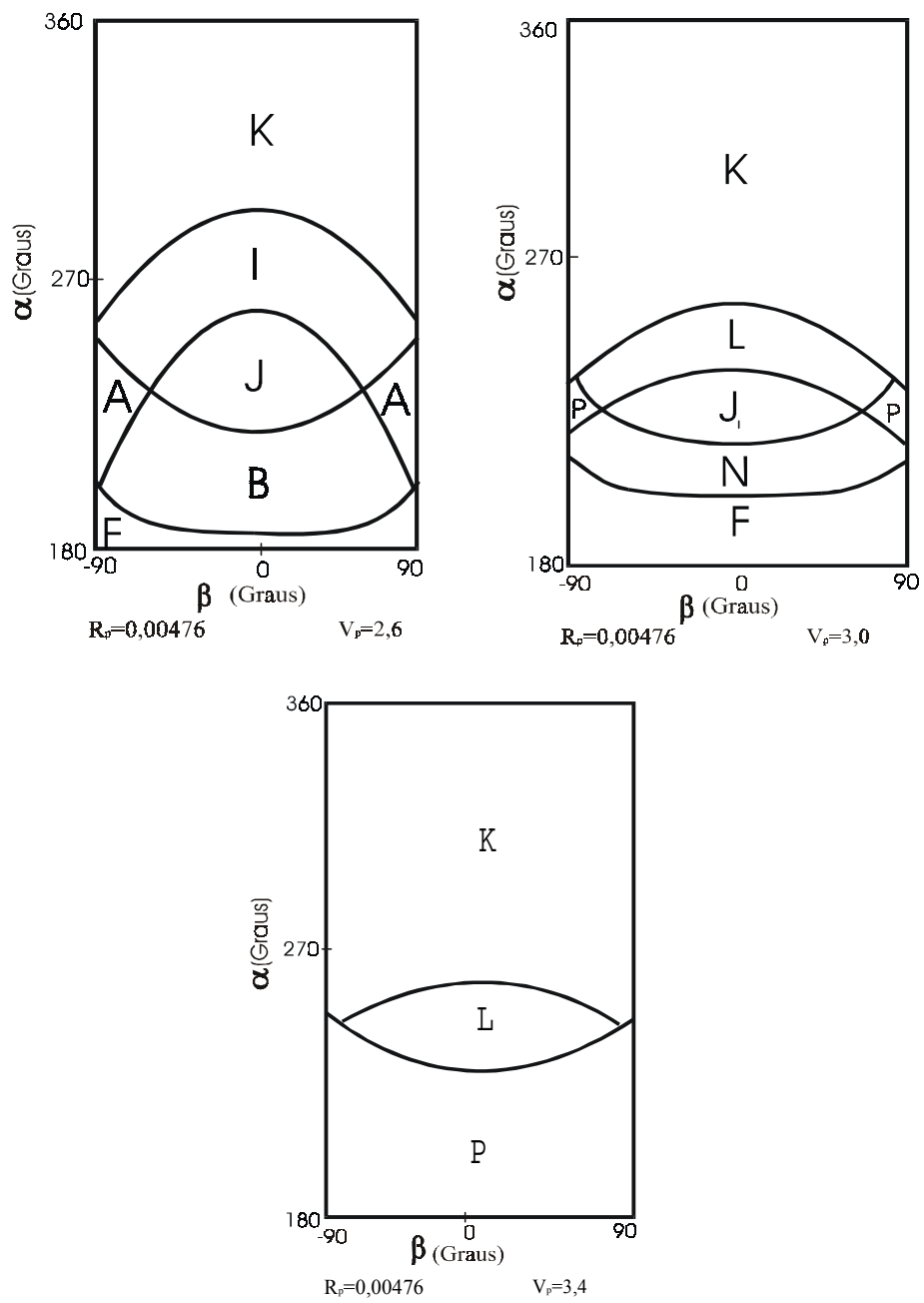


Fig. 6.17 - Resultados para o sistema Sol – Júpiter com $R_p = 0,18346 \times 10^{-3}$

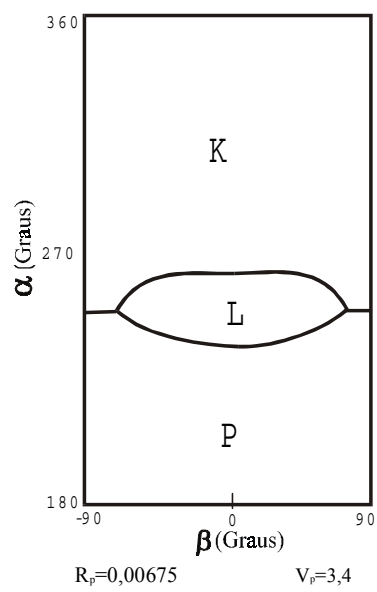
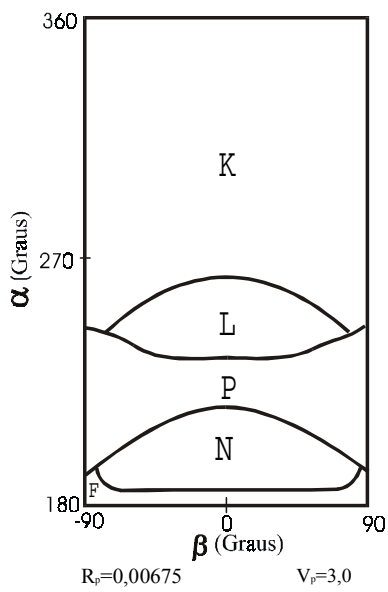
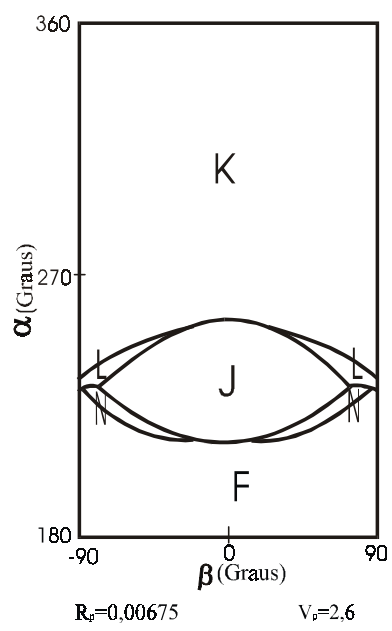
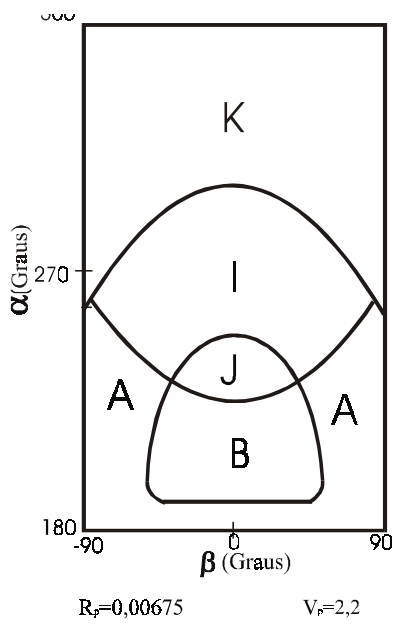
6.9.7 RESULTADOS PARA O SISTEMA TERRA – LUA

Nesta seção, são mostrados gráficos de letras para o sistema Terra - Lua. Para todos os gráficos os parâmetros utilizados estão descritos na Figura 6.18.



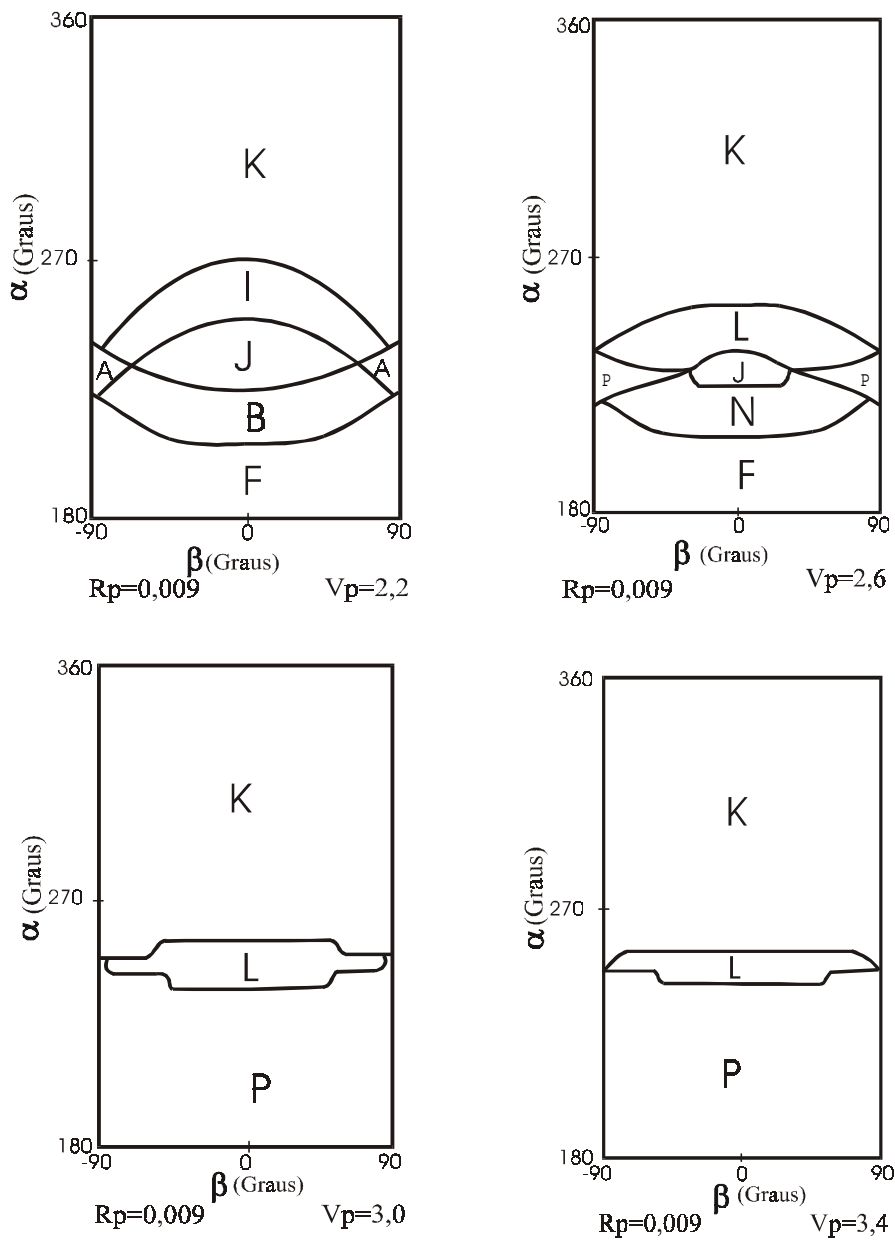
(continua)

Fig. 6.18 - Resultados para o sistema Terra-Lua



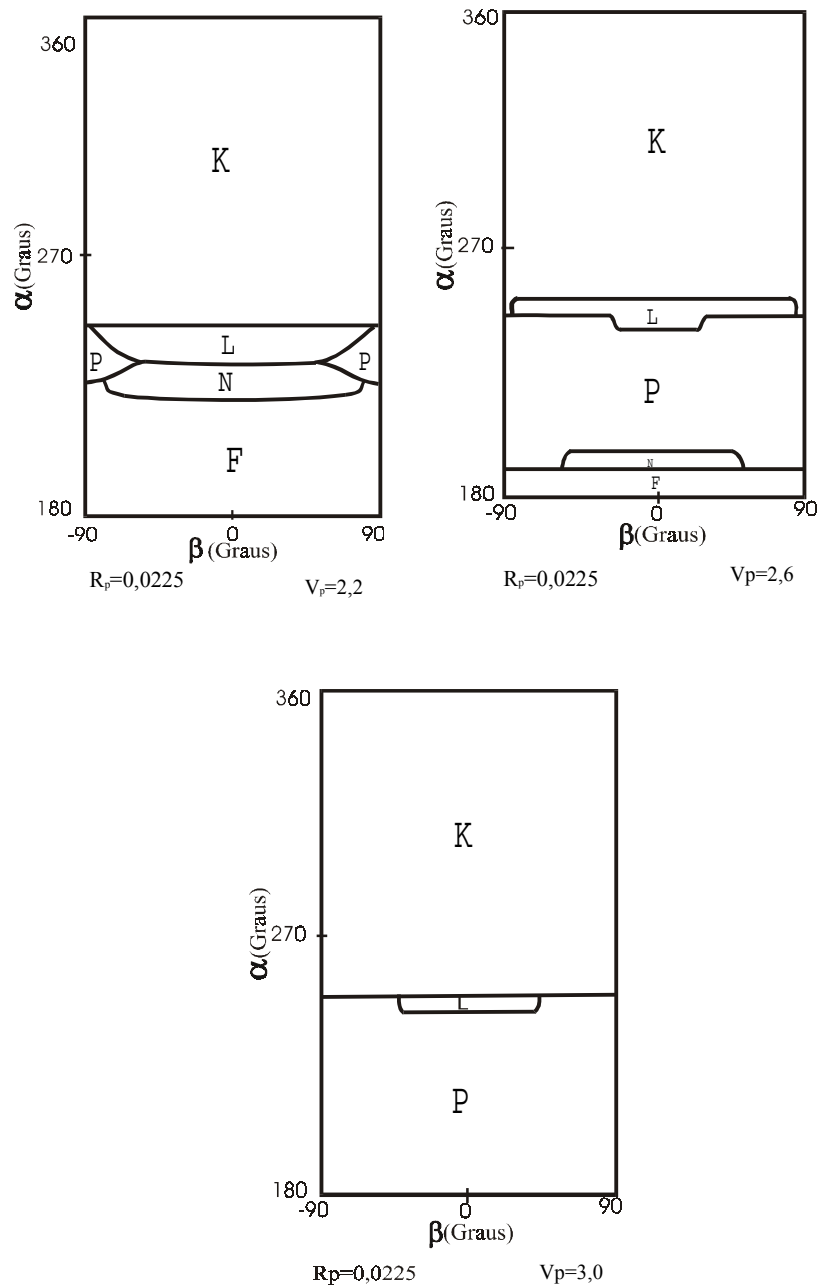
(continua)

Fig. 6.18 - Resultados para o sistema Terra-Lua



(continua)

Fig. 6.18 - Resultados para o sistema Terra-Lua



(continua)

Fig. 6.18 - Resultados para o sistema Terra-Lua

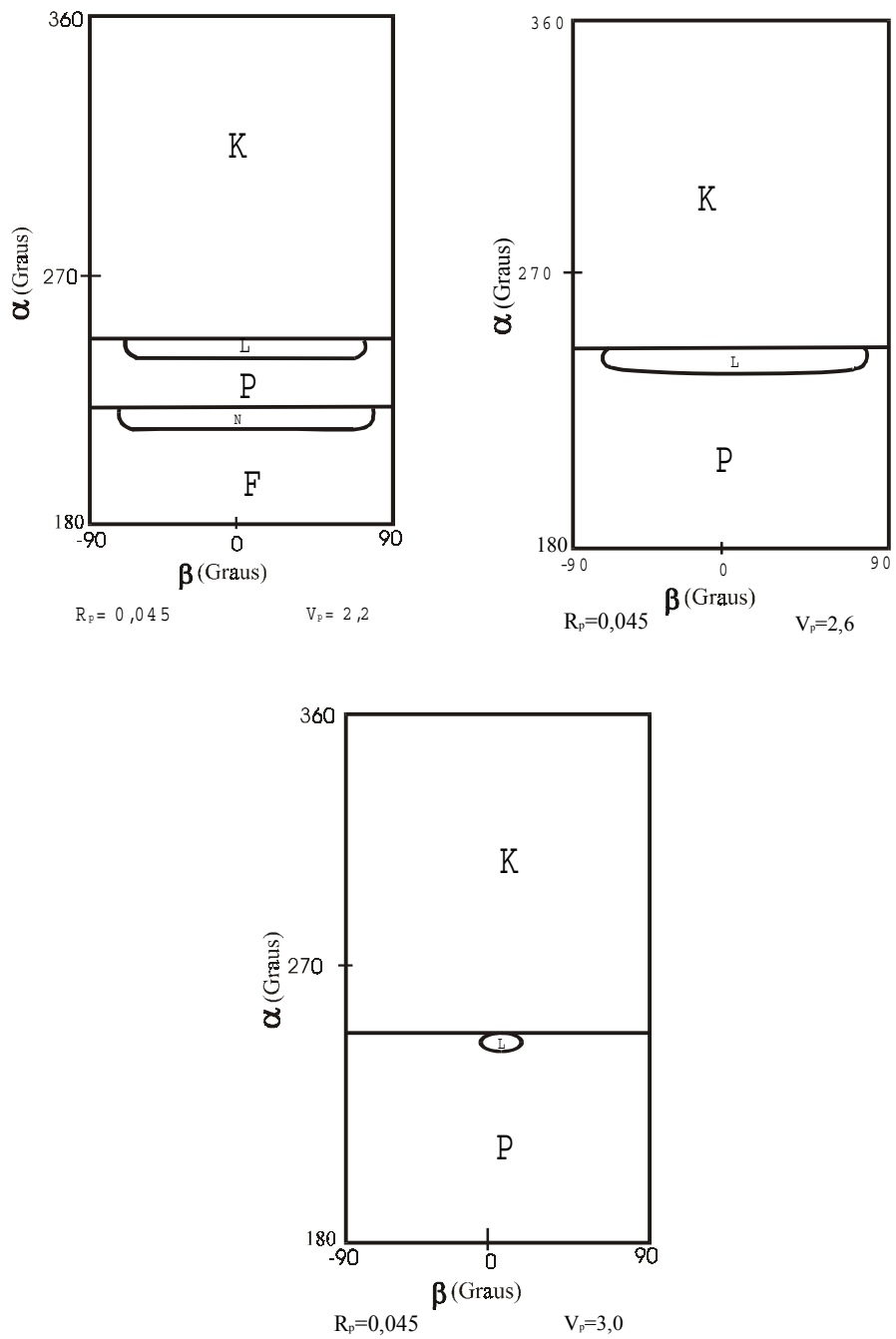


Fig. 6.18 (conclusão) - Resultados para o sistema Terra-Lua

Examinando-se os resultados obtidos é possível identificar as seguintes famílias de órbitas:

Órbitas que resultam em escape (transferência de elípticas para hiperbólicas), que são representadas pelas letras I, J, M, N que aparecem entre o centro ($\alpha = 270^\circ$) e a parte inferior de alguns dos gráficos (aqueles para velocidades inferiores);

Órbitas que resultam em uma captura (transferência de hiperbólica para elíptica), que são representadas pelas letras C, D, G, H e que aparecem raramente nos gráficos mostrados neste capítulo (mas existem em grande quantidade nas formas simétricas não mostradas aqui);

Órbitas elípticas (transferência de elíptica para elíptica), que são representadas pelas letras A, B, E, F e que aparecem na parte inferior de alguns dos gráficos (aqueles para velocidades inferiores);

Órbitas hiperbólicas (transferência de hiperbólica para hiperbólica), que são representadas pelas letras K, L, O, P, aparecem na parte superior dos gráficos e que são as únicas famílias possíveis para velocidades superiores;

Órbitas que trocam a direção do movimento de direta para retrógrada, e que são representadas pelas letras E, M, G, O e que não aparecem nos gráficos mostrados neste capítulo (mas existem em uma forma simétrica não mostrada aqui);

Órbitas que trocam a direção do movimento de retrógrada para direta, e que são representadas pelas letras B, D, J, L e que aparecem no centro inferior do gráfico;

Órbitas retrógradas, que são representadas pelas letras F, H, N, P, que aparecem na maioria das vezes nas partes inferiores dos gráficos;

Órbitas diretas, que são representadas pelas letras A, C, I, K, que aparecem no topo dos gráficos.

As linhas de contorno entre estas famílias são também famílias de órbitas interessantes. Os contornos que separam órbitas elípticas de hiperbólicas são feitos por órbitas parabólicas. Exemplos de contornos que tem órbitas parabólicas após o encontro são: A-I, B-J, F-N, F-J, F-P. Exemplos de contornos que tem órbitas parabólicas antes do encontro são: I-K, J-L, N-P, K-A, K-J, F-P. É interessante notar a existência de um contorno que é feito por órbitas parabólicas antes e após o encontro. E o contorno P-F como exemplo tem-se na Figura 6.18 para o sistema Terra-Lua com $R_p = 0,009$ e $V_p = 2,6$. Os contornos que separam órbitas diretas das retrógradas são feitos de órbitas com momento angular zero. Isto significa que os vetores posição e velocidade são paralelos (órbitas retilíneas). Exemplos de contornos que tem momento angular zero após o encontro são: F-B, N-J, L-P, P-K, N-L, F-A. Exemplos de contornos que tem momento angular zero antes do encontro são: K-L, I-J, A-B, K-P, K-J. De acordo com estes exemplos é fácil de se visualizar estas famílias olhando-se as figuras.

O objetivo dessa pesquisa foi fornecer um estudo genérico dessas trajetórias usando a posição e a velocidade da nave espacial durante o momento do encontro como parâmetros que podem variar num grande intervalo de valores. Por exemplo, a Figura 6.18 do sistema Terra-Lua mostra gráficos com $R_p = 0,00476$ (100 km acima da superfície da Lua) e $R_p = 0,009$ (3500 km acima da superfície da Lua). Alguns dos pontos importantes a serem destacados nestas figuras são:

- a) Regiões onde $\alpha > 270^\circ$ são dominadas pela família K em todos os casos (órbitas hiperbólicas), enquanto regiões onde $\alpha < 270^\circ$ acomodam uma grande variedade de famílias;

- b) Para um valor fixo de R_p , o aumento da velocidade reduz o número de famílias e determina uma tendência a ser exclusivamente formado pelas famílias K, L e P (órbitas hiperbólicas);
- c) quando R_p aumenta, a velocidade mínima requerida para que isto aconteça, também aumenta.

6.10 EFEITOS DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

O problema restrito de três-corpos tem muito poucos resultados analíticos disponíveis na literatura. Uma das melhores alternativas para melhorar o conhecimento deste problema é combinar simulações numéricas com os resultados analíticos que vêm da aproximação *patched conics*. Nesta seção essas ferramentas são usadas para estudar os efeitos da variação dos parâmetros na manobra de encontro.

O comportamento do ângulo de aproximação α obedece a predição da aproximação *patched conic*. O efeito de máximo na manobra acontece perto de $\alpha = 270^\circ$ (e $\alpha = 90^\circ$). As trajetórias mais interessantes (capturas e escapes) estão nessas regiões. Perto das bordas dos gráficos ($\alpha = 180^\circ$ e 360°) há somente trajetórias com pequeno ou nenhum efeito do *Swing-by* (elíptica-elíptica e hiperbólica-hiperbólica). O ângulo α também tem uma influência na definição do tipo da órbita. Seguindo uma linha de β constante (assim todos os parâmetros são fixos, exceto α), nota-se que a órbita inicial não é do mesmo tipo.

Quando a distância do perigeu diminui, os efeitos na manobra aumentam e a área de órbitas interessantes (capturas/escapes) se torna maior. Reciprocamente, aumentando-se a distância do perigeu aumenta-se a área de trajetórias triviais (elíptica para elíptica, hiperbólica para hiperbólica, etc.). Várias simulações foram executadas e confirmaram esta predição.

A velocidade no perigeu representa um papel importante nesta manobra. Os limites para esta variável vêm de um modo muito natural. Se valores acima de um certo limite superior são usados as órbitas antes e após a manobra se tornam hiperbólicas e as famílias K, P, e L dominam os gráficos. Para valores abaixo de um certo limite inferior, ocorre uma captura temporária do veículo espacial pelo corpo celeste. Esses limites mudam de situação a situação, mas em geral eles estão perto de 0,75 no lado inferior e 5,00 no lado superior, mas esses valores variam com o sistema de binários utilizado. Para valores ligeiramente acima do limite inferior, as órbitas são normalmente elípticas antes e/ou após a manobra, como as famílias A, B, F, J que dominam a parte inferior dos gráficos. Nota-se também que há um valor mínimo para esta velocidade que permite uma mudança no sinal do momento angular.

O estudo dos efeitos do ângulo β é um das metas principais deste capítulo. Para estudar este efeito é necessário olhar as linhas horizontais dos gráficos, porque eles representam os lugares onde todos os outros parâmetros são fixos.

Para os valores de velocidade perto do limite superior usados neste capítulo, a análise do efeito de β é muito simplificada. As únicas três famílias disponíveis são K, L e P, e elas não são fortemente dependentes de β . Para um valor fixo de β , tem-se as seguintes situações:

- a) se $\alpha > 270^\circ$ implica que há uma órbita direta antes e depois da manobra (famílias K);
- b) α aproximadamente entre 270° e 240° , o *Swing-by* mudará a órbita de retrógrada para direta;
- c) se α for menor que aproximadamente 240° implica que a órbita é retrógrada antes e depois do encontro.

Os resultados são esperados, porque trajetórias perto dos polos ($\beta = 90^\circ$) tem um pequeno efeito na variação da direção.

Uma pergunta interessante que aparece nesse problema é o que acontece com a inclinação do veículo espacial devido ao encontro. Para investigar essa questão, a inclinação das trajetórias foi calculada antes e depois do encontro. Para obter a inclinação a equação usada é:

$$\cos(i) = \frac{C_z}{C} \quad (6.25)$$

onde C_z é a componente Z do momento angular e C é o momento angular total.

A Figura 6.19 mostra o resultado para a situação dada pelas condições iniciais $V_p = 2,6$, $R_p = 0,00476$ e $\mu = 0,0121$. O eixo horizontal representa o ângulo α e o eixo vertical representa o ângulo β . A variação em inclinação é mostrada em curvas de nível. Todos os ângulos são expressos em graus. Essa figura também mostra os valores da inclinação antes e depois do *swing-by*.

As Figuras 6.19 e 6.20 mostram a variação da inclinação em curvas de nível como função das variáveis α e β para valores de R_p e V_p fixos.

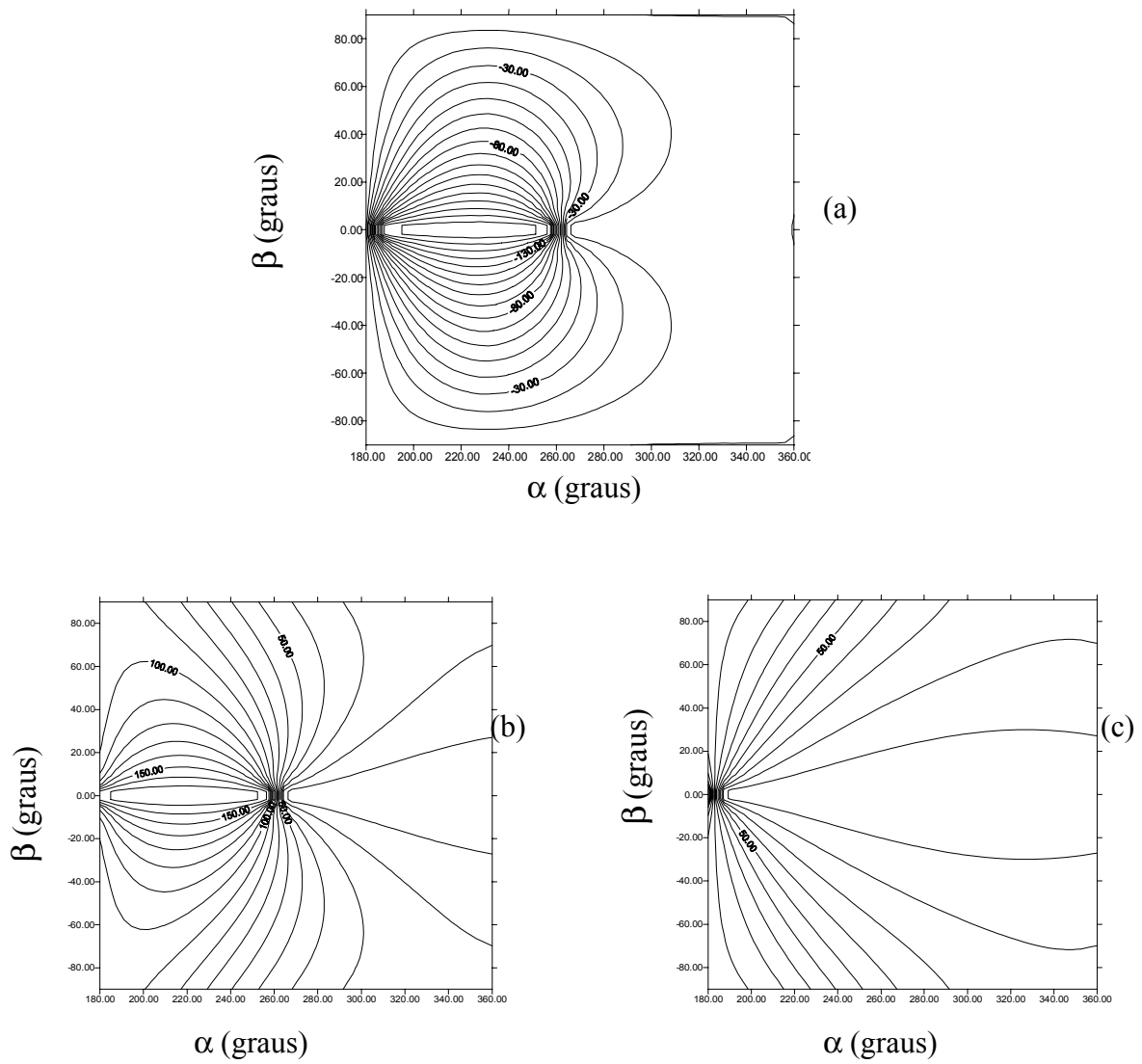
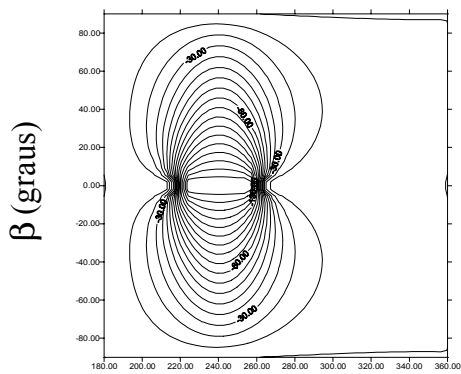
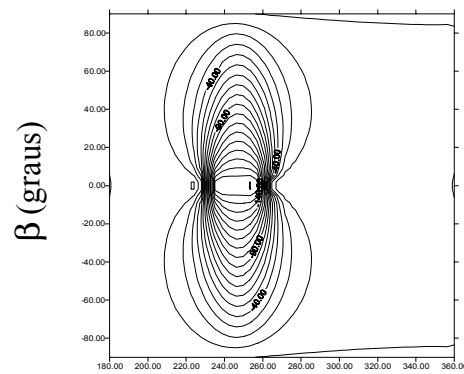


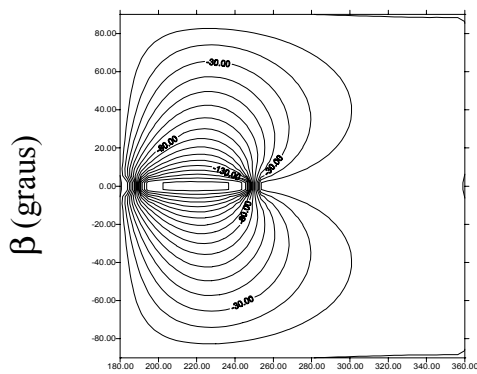
Fig.6.19 – Variação da Inclinação (a), Inclinação antes (b) e Inclinação depois (c) para $R_p = 0,00476$ e $V_p = 2,6$



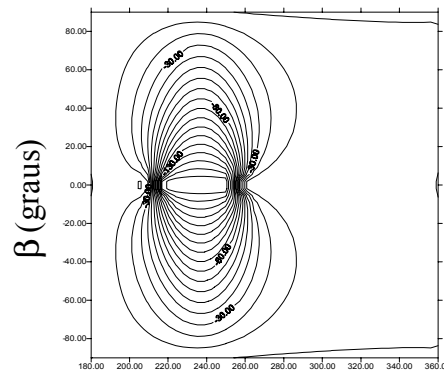
α (graus)
 $R_p = 0,00476$ e $V_p = 3,0$



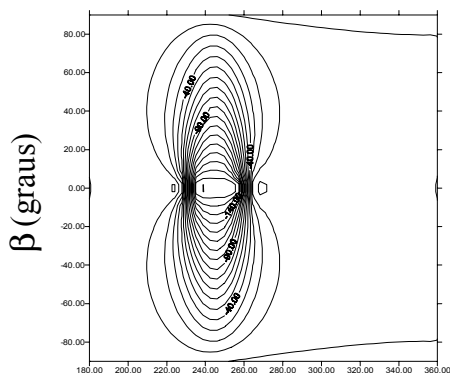
α (graus)
 $R_p = 0,00476$ e $V_p = 3,4$



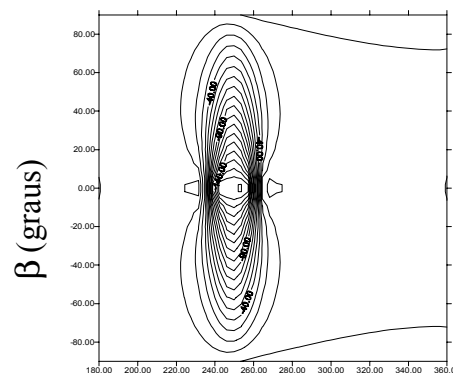
α (graus)
 $R_p = 0,00675$ e $V_p = 2,2$



α (graus)
 $R_p = 0,00675$ e $V_p = 2,6$



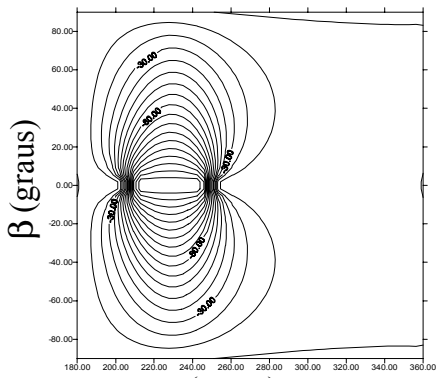
α (graus)
 $R_p = 0,00675$ e $V_p = 3,0$



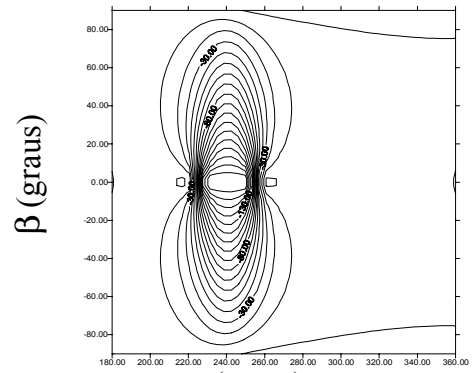
α (graus)
 $R_p = 0,00675$ e $V_p = 3,4$

(continua)

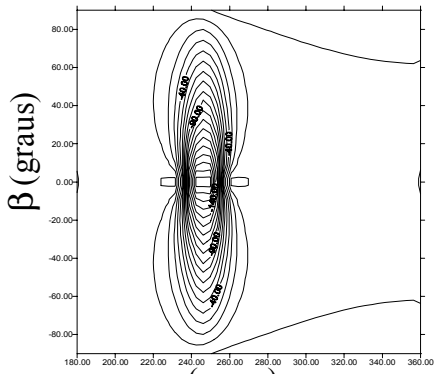
Fig.6.20 – Variação da Inclinação



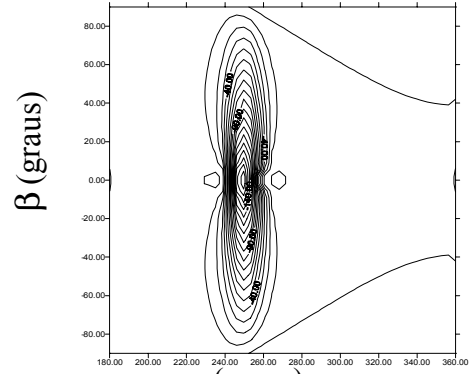
$R_p = 0,009$ e $V_p = 2,0$



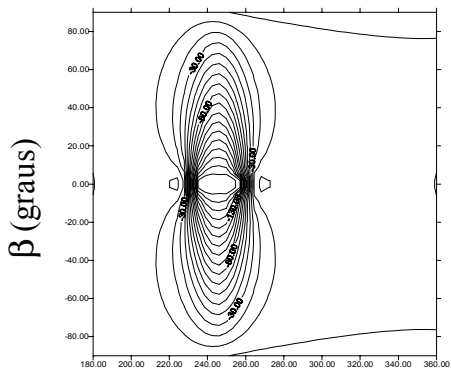
$R_p = 0,009$ e $V_p = 2,6$



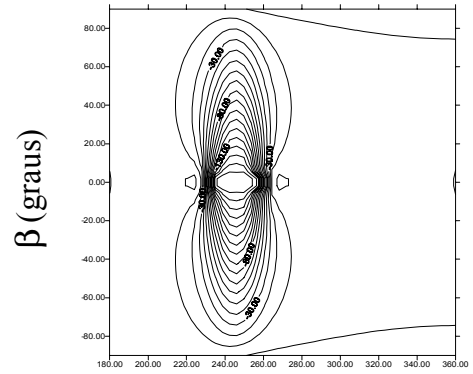
$R_p = 0,009$ e $V_p = 3,0$



$R_p = 0,009$ e $V_p = 3,4$



$R_p = 0,0073125$ e $V_p = 3,0$



$R_p = 0,007576171875$ e $V_p = 3,0$

Fig.6.20 (conclusão) – Variação da Inclinação

Várias conclusões são obtidas desses resultados, bem como de simulações não mostradas aqui. As mais interessantes são:

- a) Quando $\beta = 0^\circ$ (manobra planar), a variação na inclinação pode ter somente três possíveis valores: $\pm 180^\circ$, 0° para uma manobra que reverte o sentido de seu movimento ou 0° para manobra que não reverte seu movimento. Esses resultados numéricos concordam com o modelo físico. Ainda o fato de que $\beta = 0^\circ$ implica em uma manobra plana que não permite valores para inclinação diferentes de 0° ou 180° está mostrado claramente nas figuras. Os gráficos são divididos em duas partes: uma com $\Delta i = \pm 180^\circ$ e outra com $\Delta i = 0^\circ$;
- b) Olhando em qualquer linha vertical (uma linha de α constante) está claro que a mudança na inclinação será nula nos pólos ($\beta = \pm 90^\circ$). Então, no caso onde $\Delta i = \pm 180^\circ$ a mudança na inclinação começa no zero em $\beta = -90^\circ$, aumenta em magnitude até $\beta = 0^\circ$ e então decresce novamente até zero quando $\beta = 90^\circ$. Quando $\Delta i = 0^\circ$ para $\beta = 0^\circ$ o comportamento de Δi oscila, com dois máximos para a magnitude (uma no intervalo $-90^\circ < \beta < 0^\circ$ e a outra no intervalo $0^\circ < \beta < 90^\circ$) e três zeros em $\beta = -90^\circ, 0^\circ, 90^\circ$. Também está claro que a variação em inclinação é simétrica com respeito ao ângulo β ($+\beta$ e $-\beta$ geram o mesmo Δi);
- c) Quando $\beta = \pm 90^\circ$, a variação em inclinação é zero. Isto significa que a passagem pelos pólos com a velocidade paralela ao plano X-Y (esta restrição será alterada posteriormente, mas é válida neste momento) mantém a inclinação da trajetória inalterada;
- d) Quando $\alpha = 360^\circ$ ou $\alpha = 180^\circ$, não há nenhuma mudança na inclinação. Esta conclusão está de acordo com o fato de que uma manobra com esta geometria não altera a trajetória. Olhando em qualquer linha horizontal (uma linha de β

constante) é visível que esta curva tenha um máximo na magnitude de Δi em algum lugar entre os dois zeros fixos com $\alpha = 360^\circ$ e $\alpha = 180^\circ$;

e) Para um valor de R_p fixo, ao aumentarmos a velocidade podemos notar que a figura central fica mais estreita. Esse fato é explicado pelo aumento da região com pequena variação da inclinação, que ocorre com o aumento da velocidade durante a passagem. Como explicado anteriormente, o aumento do valor dessa variável reduz o efeito da manobra gravitacionalmente assistida;

f) o aumento de R_p (para um V_p fixo) produz o mesmo efeito de estreitar a figura central. A explicação é a mesma: aumento de V_p reduz o efeito da manobra gravitacionalmente assistida e aumenta a região aonde ocorrem variações pequenas na inclinação.

6.11 EFEITOS DA COMPONENTE NÃO PLANAR DA VELOCIDADE NO PERIGEU

Nesta seção, uma generalização é feita para velocidade no perigeu, para permitir uma componente fora-do-plano. Para executar este estudo, um ângulo γ é adicionado à geometria. Esse ângulo é medido entre a velocidade no perigeu e a interseção entre o plano horizontal que passa pelo perigeu e o plano perpendicular ao raio vetor que contém a velocidade no periapse. Então, as condições iniciais para a velocidade (Equações. 6.21 – 6.23) alteram-se para:

$$V_{xi} = -V_p \sin(\gamma) \sin(\beta) \cos(\alpha) - V_p \cos(\gamma) \sin(\alpha) + R_p \cos(\beta) \sin(\alpha) \quad (6.26)$$

$$V_{yi} = -V_p \sin(\gamma) \sin(\beta) \sin(\alpha) + V_p \cos(\gamma) \cos(\alpha) - R_p \cos(\beta) \cos(\alpha) \quad (6.27)$$

$$V_{zi} = V_p \cos(\beta) \sin(\gamma) \quad (6.28)$$

As condições iniciais para as posições (Equações 6.18 a 6.20) permanecem inalteradas. Para estudar a influência de γ na manobra, foram calculadas as variações em inclinação (Figs. 6.21 e 6.22), energia e momento angular (Figura 6.23) como uma função desse ângulo. As condições numéricas para a Figura 6.21 são: $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\mu = 0,0121$ e para a Figura 6.22 variam conforme mostrados na própria figura. O objetivo da Figura 6.21 é mostrar tanto a variação da inclinação como os valores antes e depois da manobra., como exemplo. Na Figura 6.22 apenas a variação da inclinação é mostrada, para um número maior de casos. Os resultados mostram que este ângulo ocupa um papel muito importante na manobra.

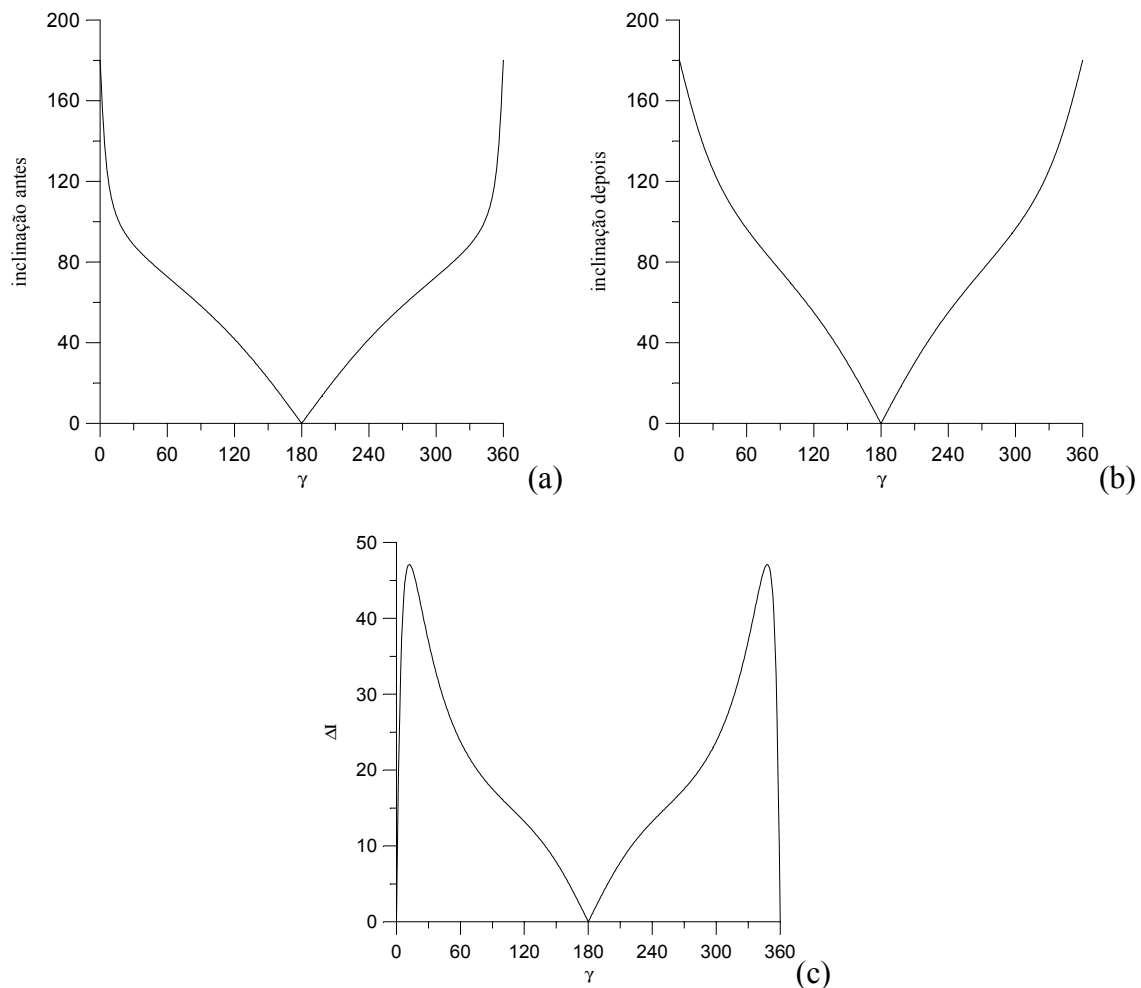
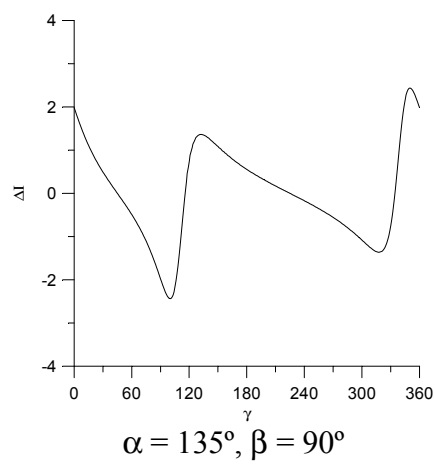
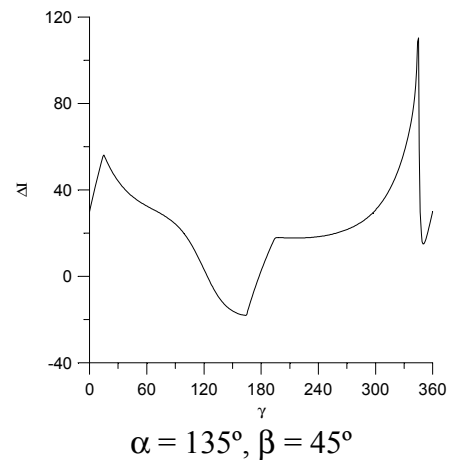
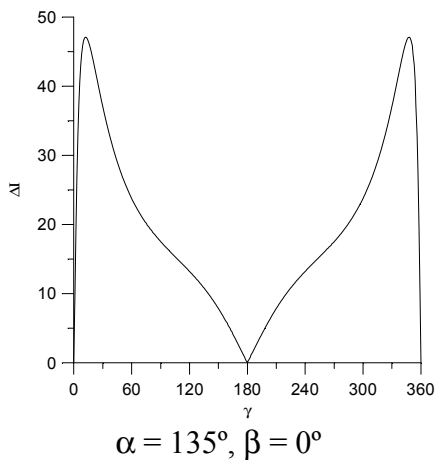
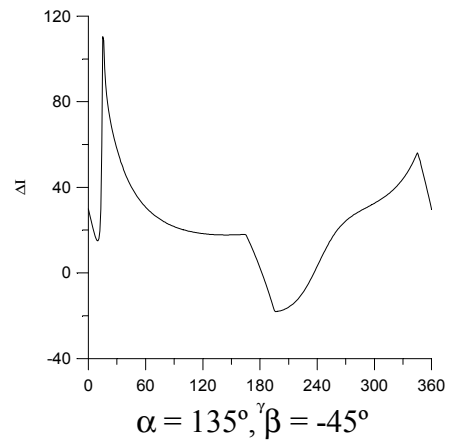
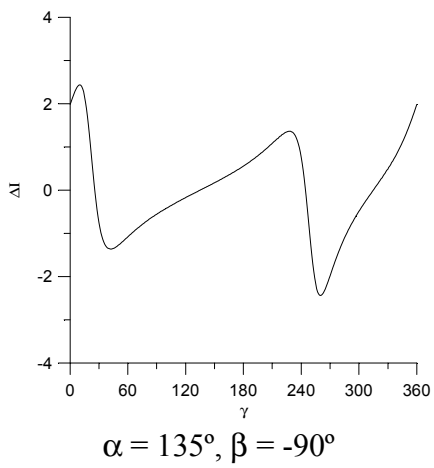
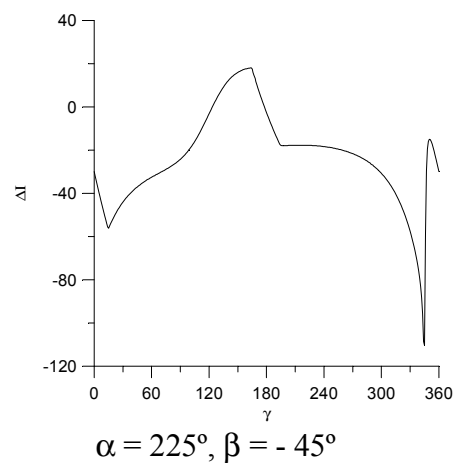
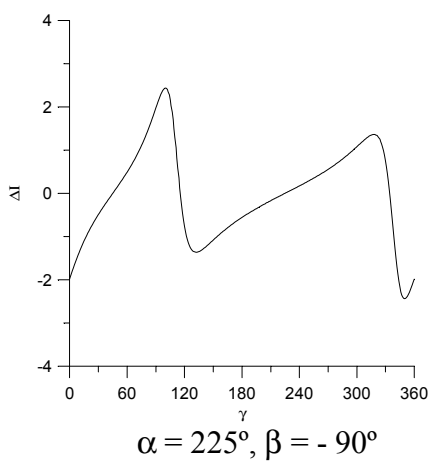
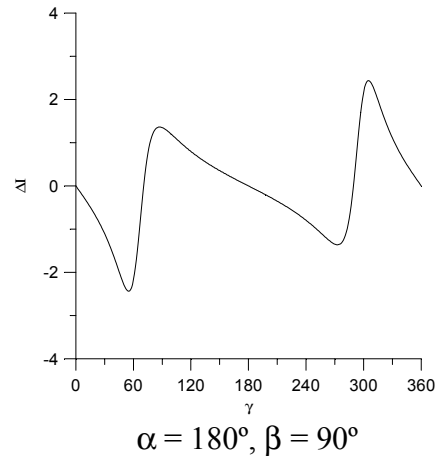
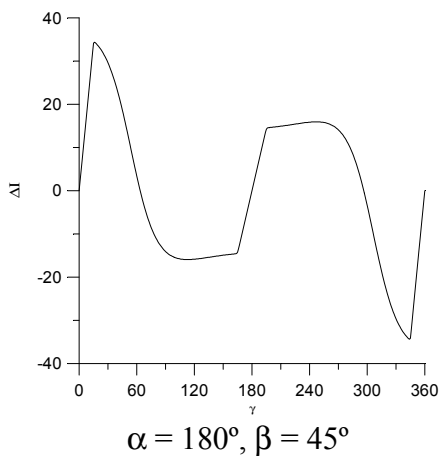
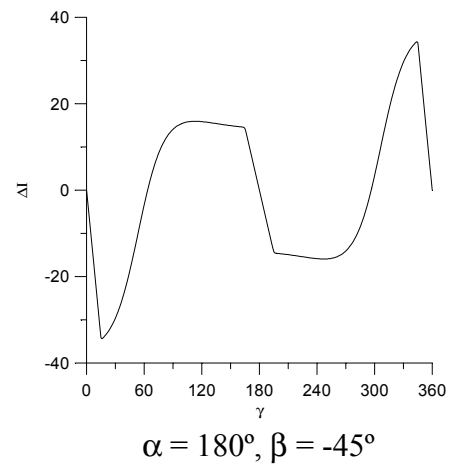
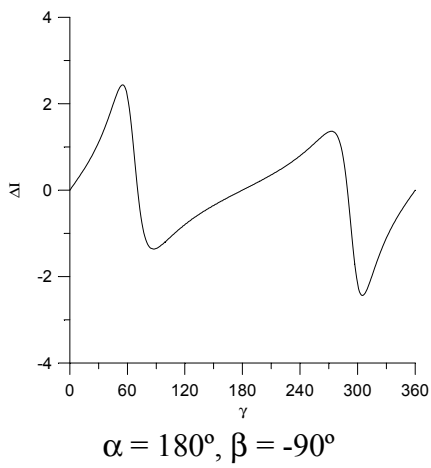


Fig.6.21 - Inclinação antes (a) e Inclinação depois (b); Variação da Inclinação (c) para $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 0^\circ$



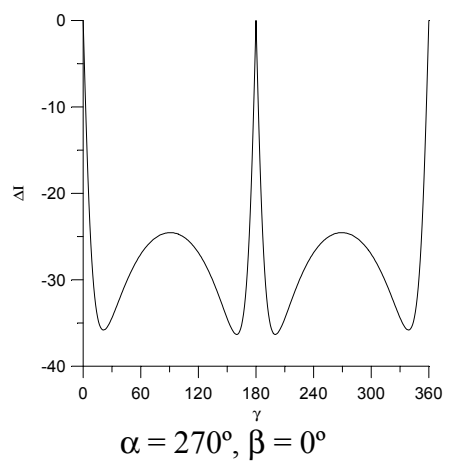
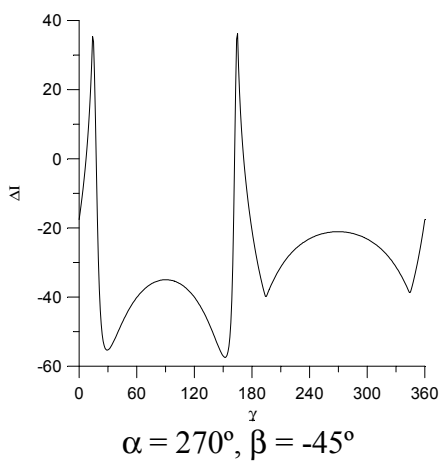
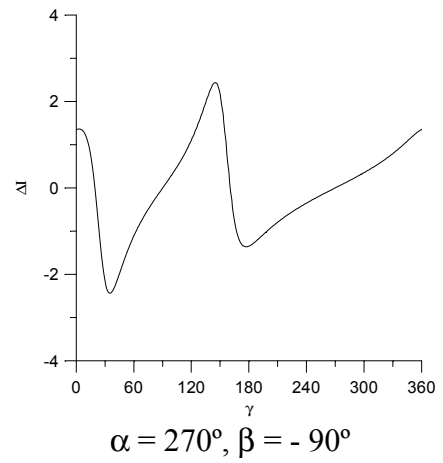
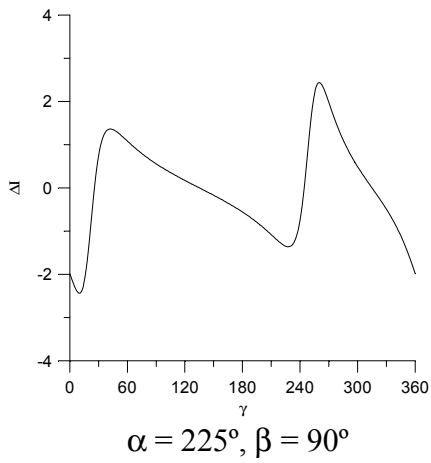
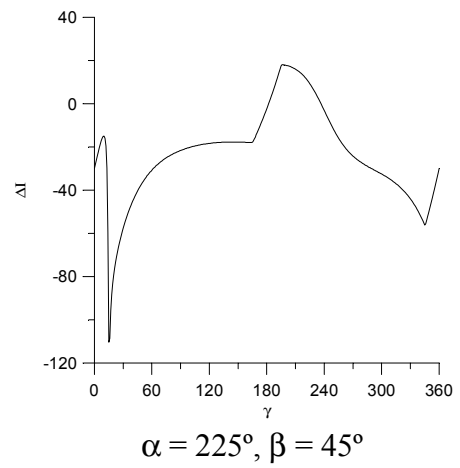
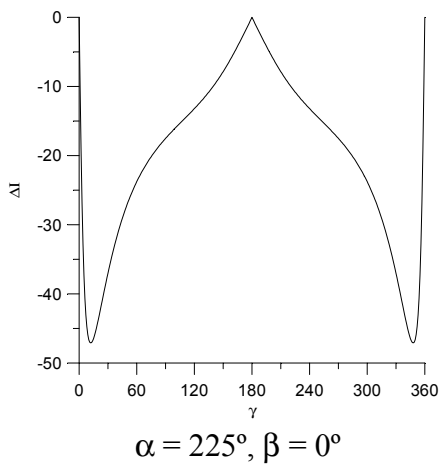
(continua)

Fig.6.22 - γ vs Variação da Inclinação



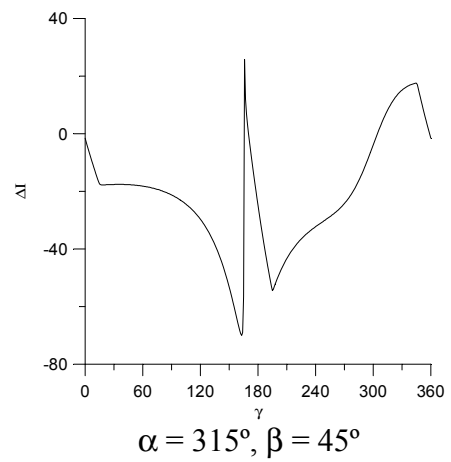
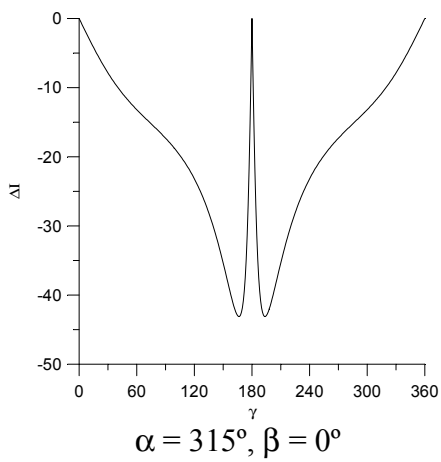
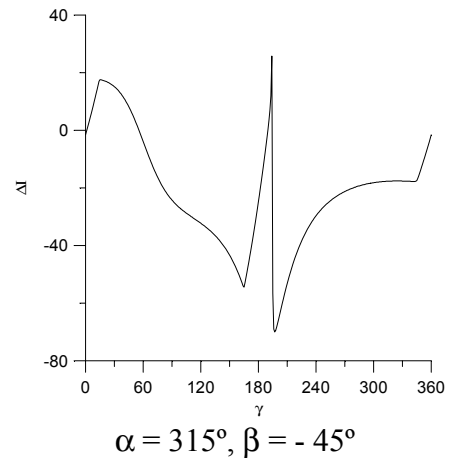
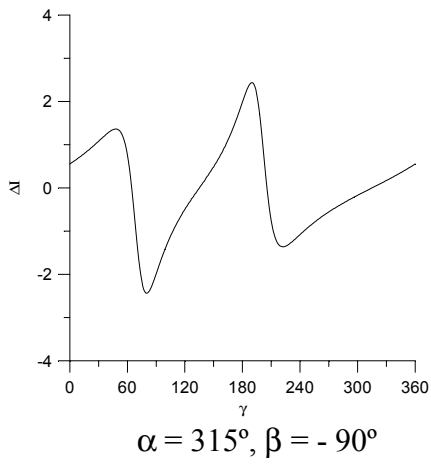
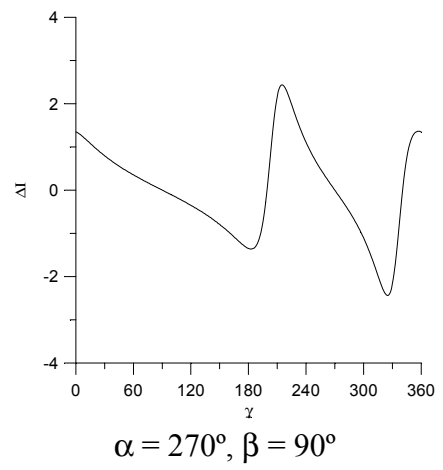
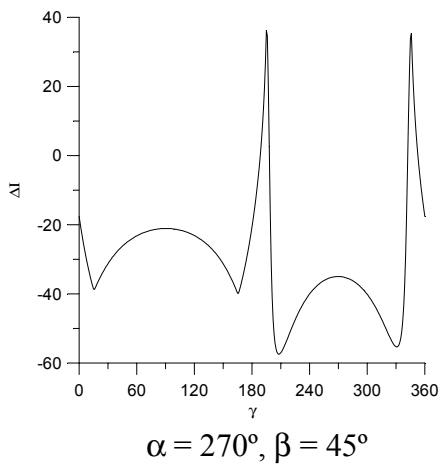
(continua)

Fig.6.22 - γ vs Variação da Inclinação



(continua)

Fig.6.22 - γ vs Variação da Inclinação



(continua)

Fig.6.22- γ vs Variação da Inclinação

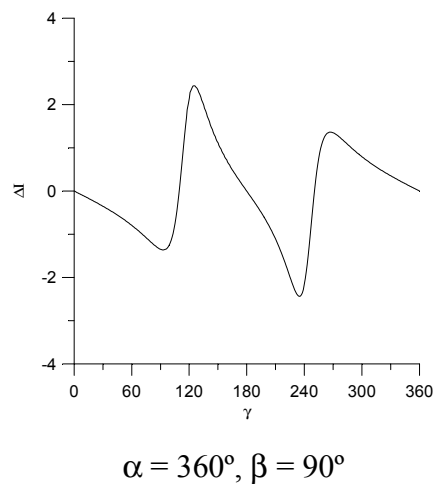
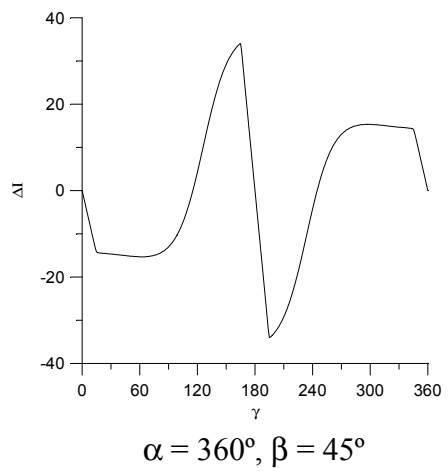
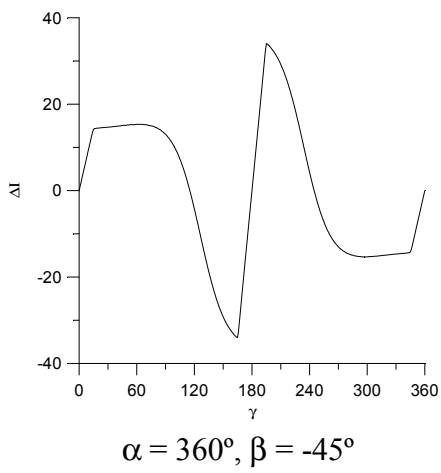
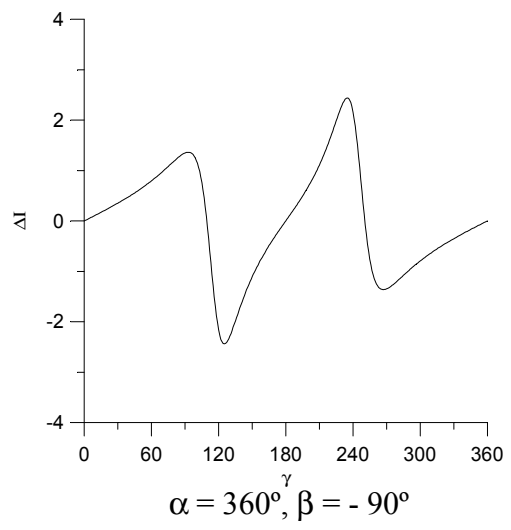
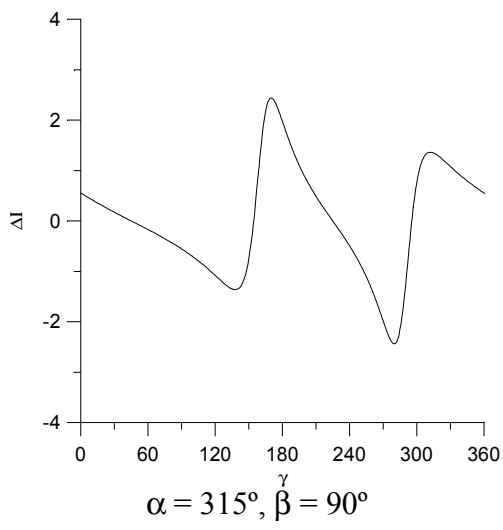
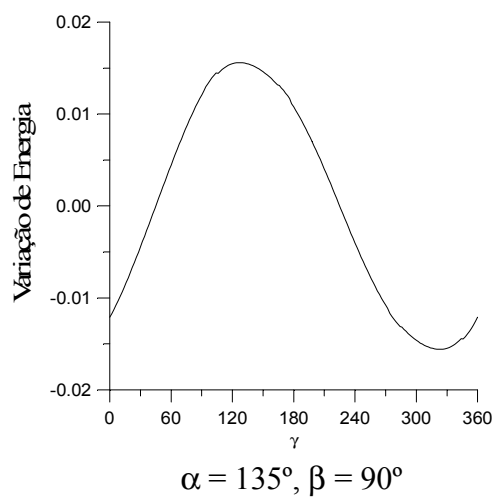
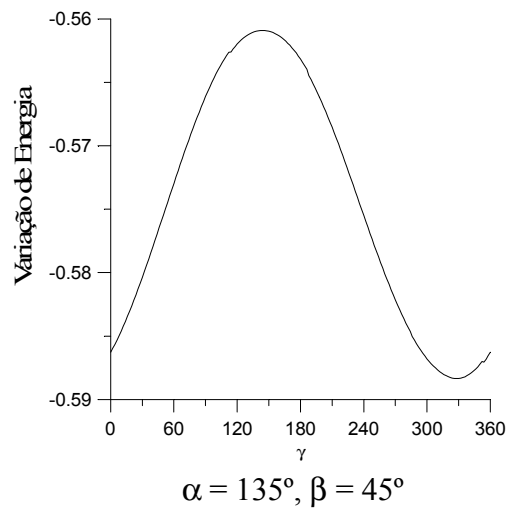
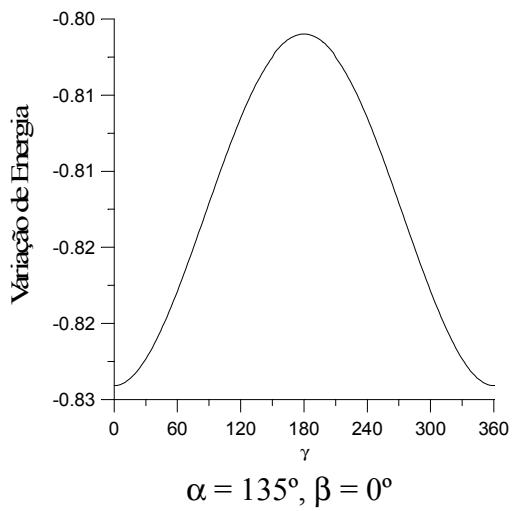
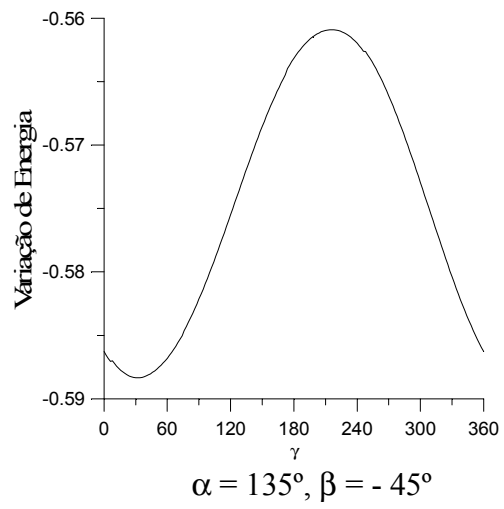
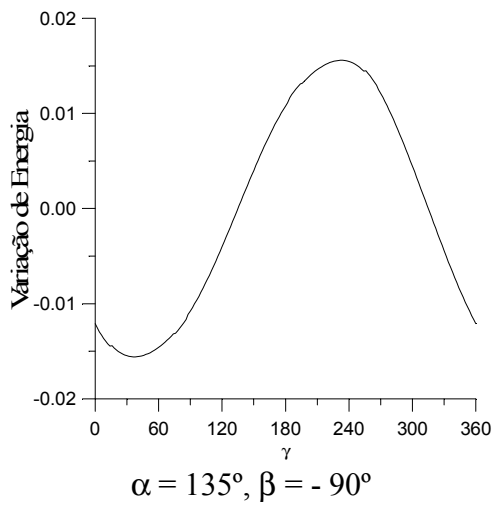
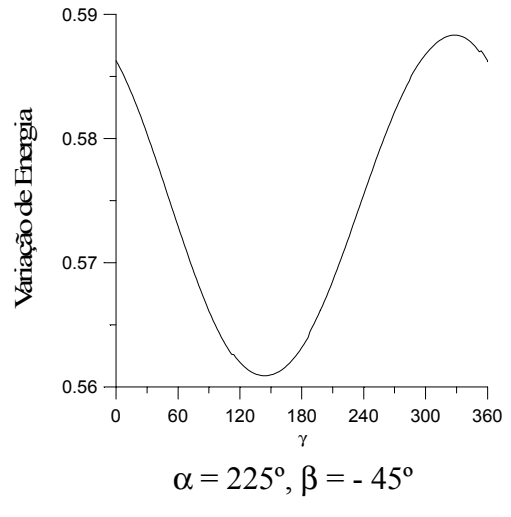
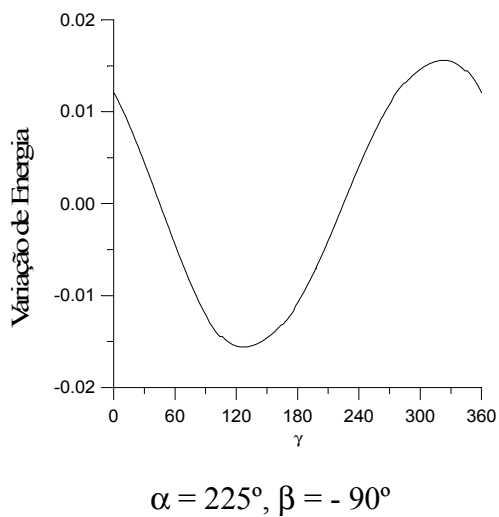
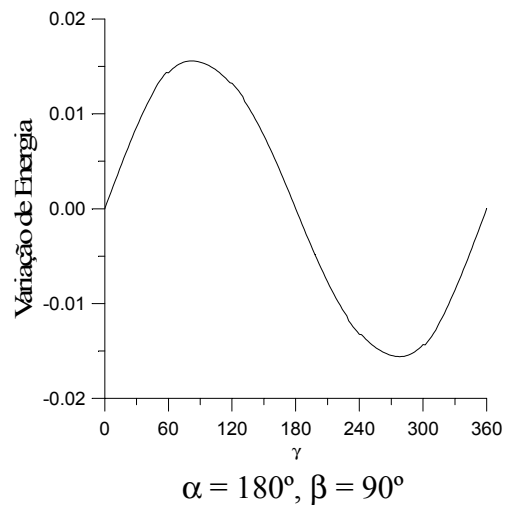
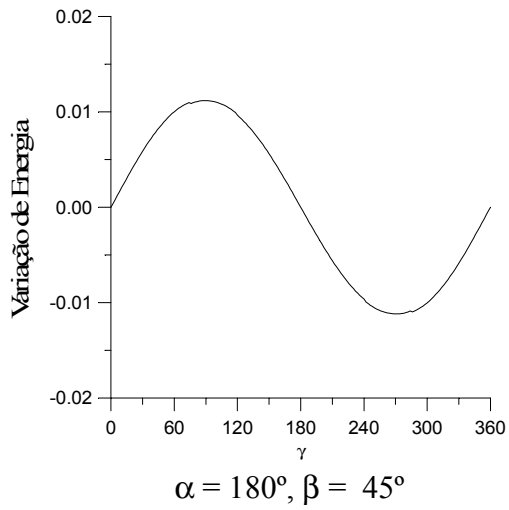
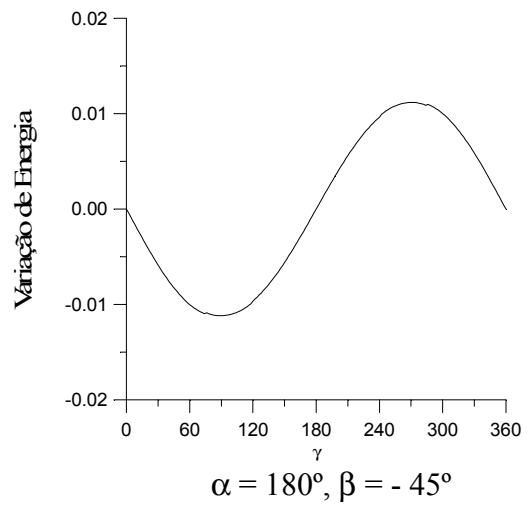
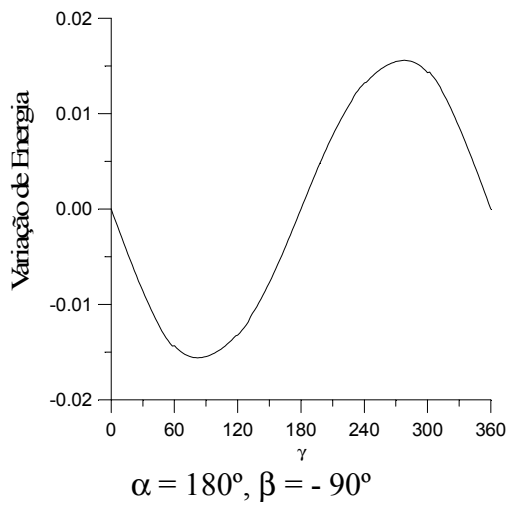


Fig.6.22 (conclusão)- γ vs Variação da Inclinação



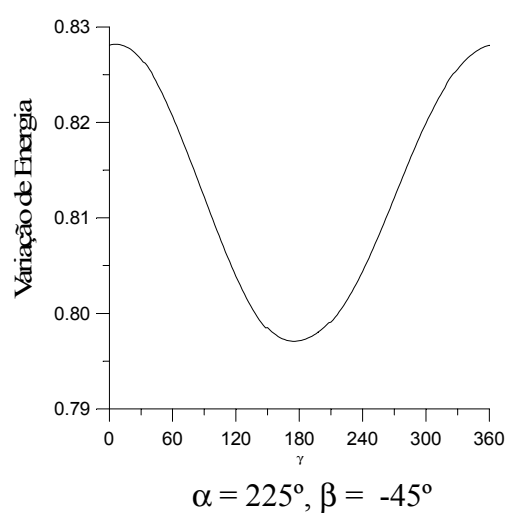
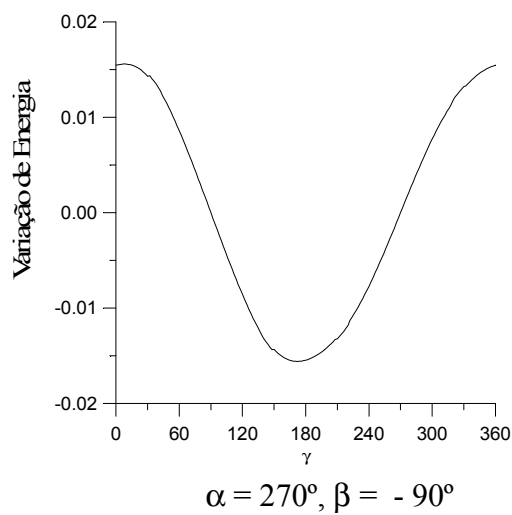
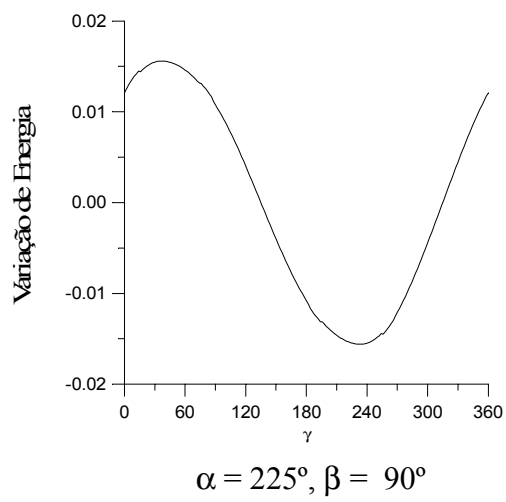
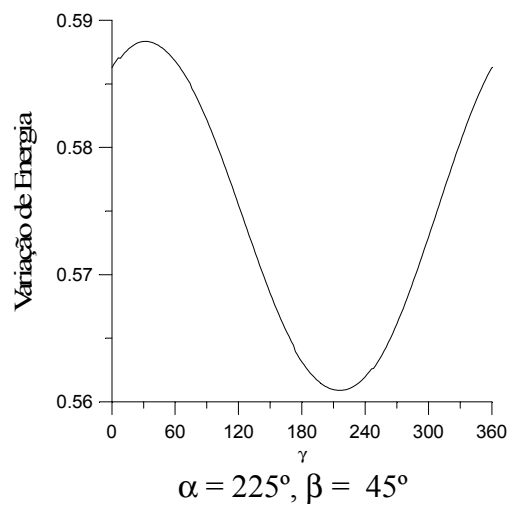
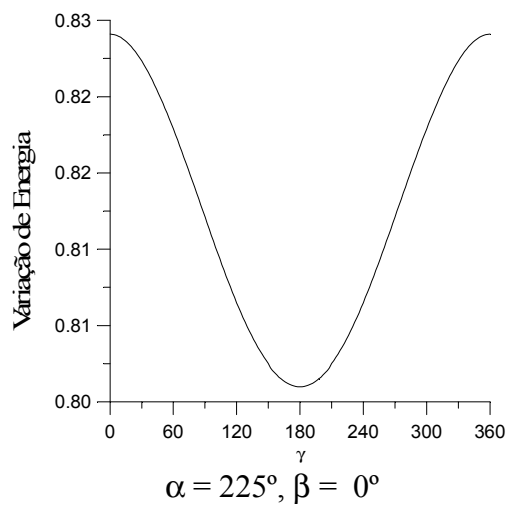
(continua)

Fig.6.23 - γ vs Variação da Energia



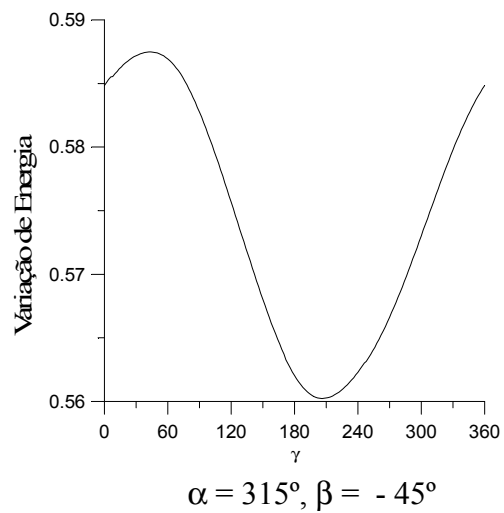
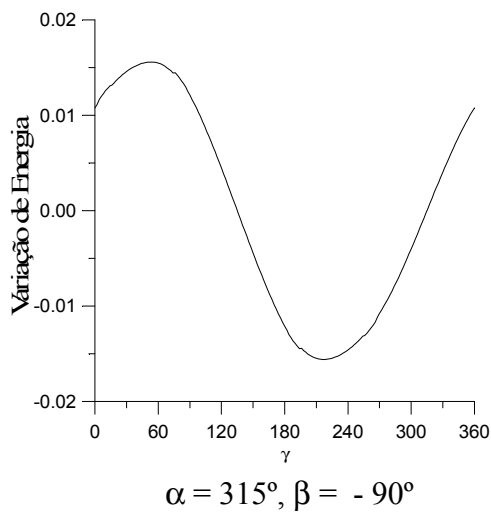
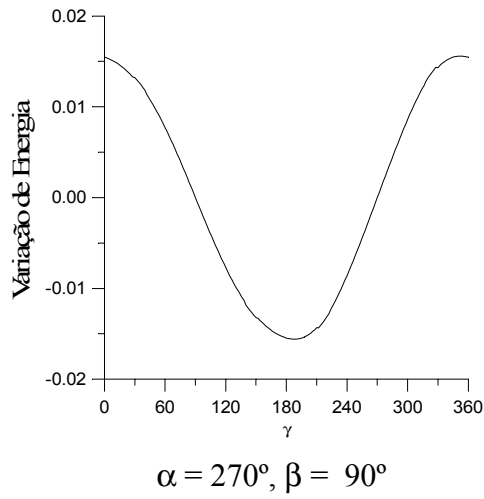
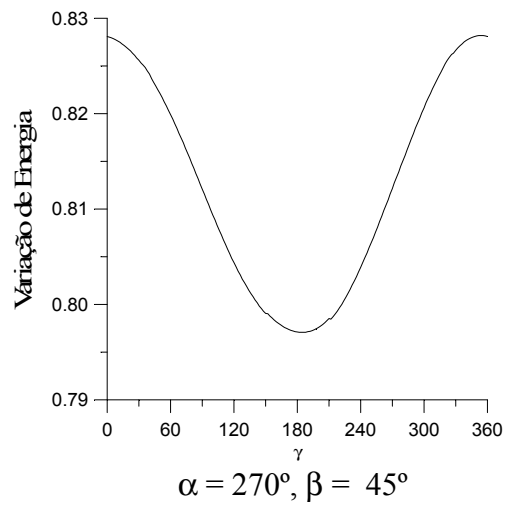
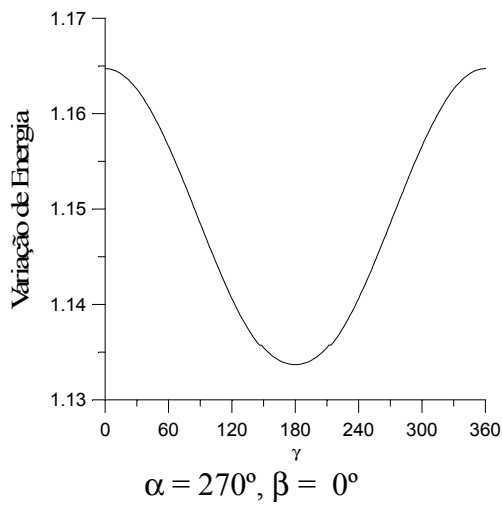
(continua)

Fig.6.23 - γ vs Variação da Energia



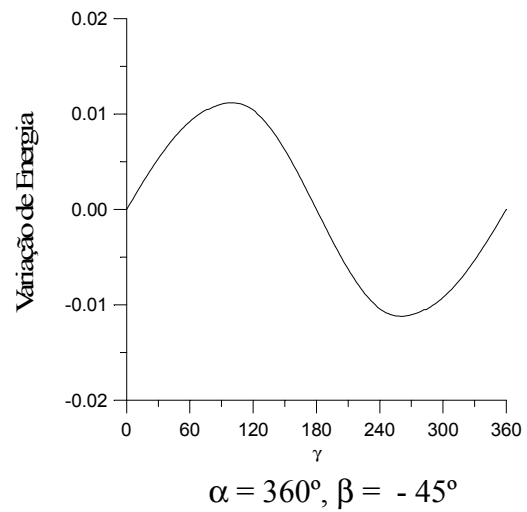
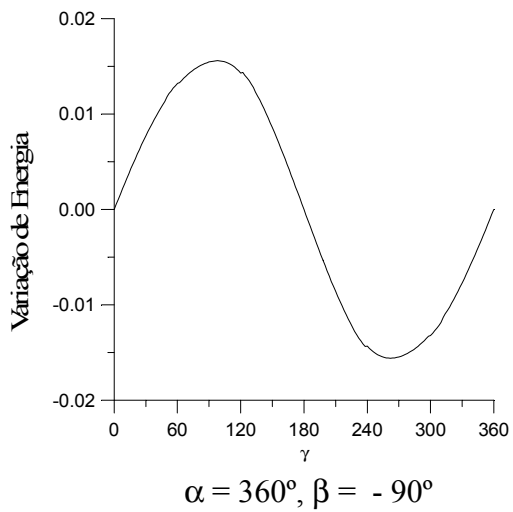
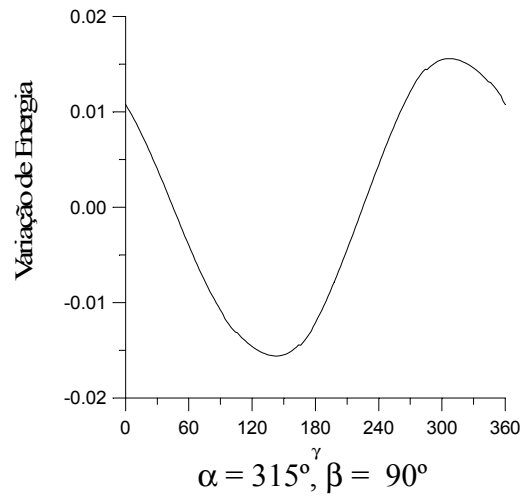
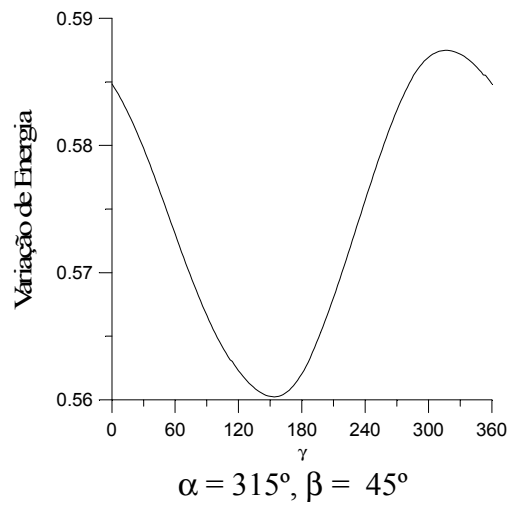
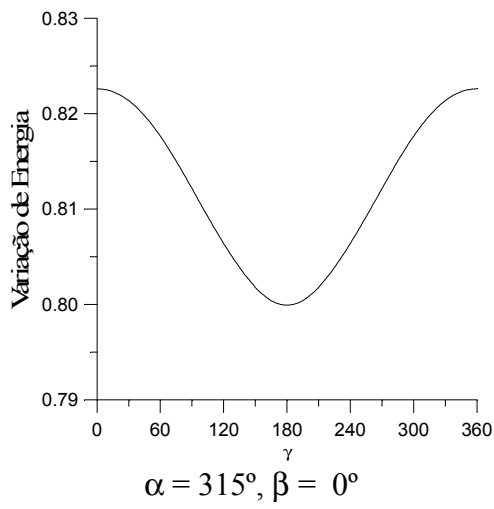
(continua)

Fig.6.23 - γ vs Variação da Energia



(continua)

Fig.6.23 - γ vs Variação da Energia



(continua)

Fig.6.23 - γ vs Variação da Energia

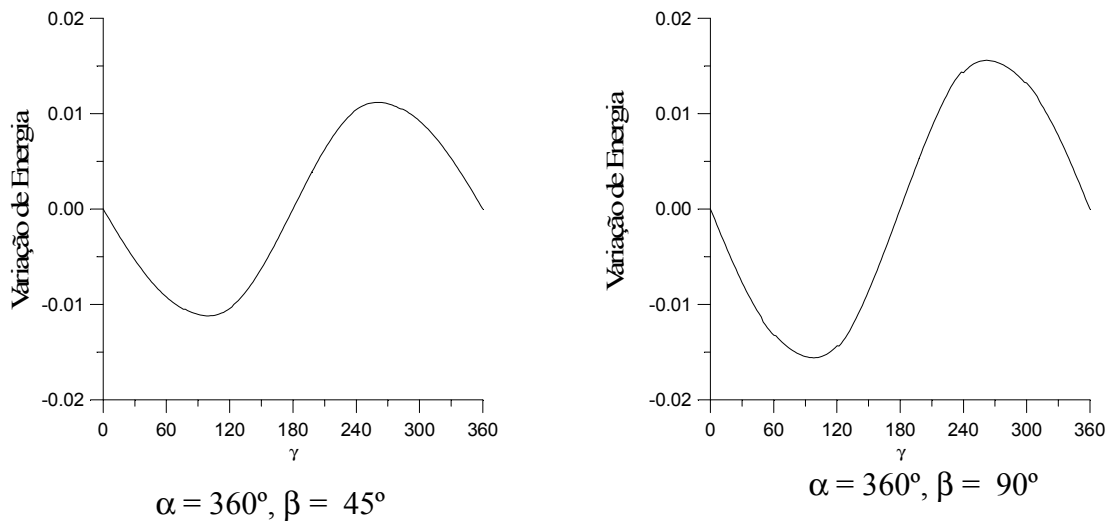


Fig.6.23 (conclusão)- γ vs Variação da Energia

A variação em energia tem um máximo para $\gamma = 180^\circ$ e um mínimo em $\gamma = 0^\circ$ e $\gamma = 360^\circ$. A variação na inclinação tem uma linha de simetria em $\gamma = 180^\circ$. Há dois máximos relacionados com $\gamma = 150^\circ$ e $\gamma = 210^\circ$.

Foram feitas simulações para os casos $\alpha = 180^\circ, \beta = 0^\circ$; $\alpha = 180^\circ, \beta = 90^\circ$; $\alpha = 360^\circ, \beta = 0^\circ$, mas as figuras não foram colocadas no capítulo porque a variação na inclinação foi nula para todos os valores de γ . As Figuras 6.22 revelam algumas características do problema, tais como:

- a) A variação da inclinação é muito pequena (menor que 3° para qualquer valor de γ) quando a passagem ocorre próxima dos pólos ($\beta = \pm 90^\circ$);
- b) Analisando valores intermediários para $\beta = \pm 45^\circ$ pode-se notar uma simetria para valores de $\alpha = 180^\circ$ e 360° . Os valores da variação da inclinação para $\gamma = 180^\circ$ mais um deslocamento (entre 0° e 180°) e 180° menos esse deslocamento possuem a mesma magnitude e sinais opostos.

- c) Em $\beta = \pm 45^\circ$ as figuras para $\alpha = 135^\circ$ e 225° , quando comparadas entre si, possuem a propriedade de que a variação em inclinação para γ e para $360^\circ - \gamma (= -\gamma)$ possuem a mesma magnitude e sinais opostos;
- d) Para $\beta = 0^\circ$, existe uma simetria perfeita em relação a linha $\gamma = 180^\circ$;
- e) Para $\alpha = 270^\circ$ entre as figuras para $\beta = 45^\circ$ e $\beta = -45^\circ$ existe uma simetria aonde os valores da variação da inclinação para $0^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$ de uma das figuras são idênticos aos casos $180^\circ \leq \gamma \leq 360^\circ$ da outra;
- f) Para todos os valor de α , as figuras com um mesmo α e $\beta = +45^\circ$ e $\beta = -45^\circ$ possuem uma simetria do tipo: variação da inclinação para γ de uma figura igual a variação para $360^\circ - \gamma (= -\gamma)$ da outra figura;
- g) A mesma propriedade se repete para qualquer valor de α e $\beta = +90^\circ$ e $\beta = -90^\circ$.

Para as Figura 6.23, nota-se que o efeito de γ é causar uma oscilação periódica na variação de energia na forma de uma senóide. A amplitude dessa oscilação varia com as condições iniciais (valores de α e β). Porém nunca superior a 0,04 unidades de energia em unidades canônicas. Os valores de máximo e mínimo dessas oscilações também variam com as condições iniciais.

6.12 PROBLEMAS ÓTIMOS NO CASO TRIDIMENSIONAL

Os exemplos de problemas ótimos tridimensionais são parecidos com os do caso plano:

- 1) Encontrar uma trajetória N (uma órbita elíptica retrógrada antes do *Swing-by* e uma órbita hiperbólica retrógrada após o *Swing-by*) que tenha um R_p fixo e que minimize o parâmetro V_p ;
- 2) Encontrar uma trajetória E, F, G ou H (uma órbita elíptica retrógrada depois do *Swing-by*) que tenha um R_p fixo e que maximize o parâmetro V_p ;
- 3) Encontrar uma trajetória do tipo L (órbita hiperbólica retrógrada antes do *Swing-by* e uma órbita hiperbólica direta depois do *Swing-by*) que tenha R_p e V_p fixos e que extremizem os parâmetros α ou β ; etc.

Os parâmetros V_p e R_p são importantes para serem extremizados. Se a meta da missão é colecionar dados de M_2 , é interessante minimizar R_p (para ficar mais próximo a M_2) e/ou V_p (para ficar mais tempo próximo de M_2). Pelo contrário, se M_2 é necessário para alterar a trajetória do veículo espacial, mas isto representa um risco ao veículo devido à presença de uma radiação e/ou atmosfera, etc., é necessário maximizar V_p e/ou R_p , sujeitos à restrição de obter a mudança desejada na trajetória. Para utilizar um caso real como um exemplo, o sistema Terra-Lua é descrito para resolver os dois problemas abaixo.

6.12.1 PROBLEMA 1

Deseja-se obter uma trajetória de tipo J no sistema Terra-Lua, sujeita às restrições: $R_p = 0,00476$ (100 km acima da superfície) e requer-se que a velocidade no perigeu seja máxima. Examinando a Figura 6.18, é possível verificar que a trajetória tipo J aparece para $V_p = 3,0$, mas não aparece para $V_p = 3,4$. Assim, a solução está em algum lugar no intervalo $3,0 < V_p < 3,4$. Para encontrar a solução, foram feitos gráficos para vários valores de V_p nesse intervalo. A Figura 6.24 mostram dois gráficos desta sucessão. A solução para esse problema é $V_p = 3,15$, dado que para $V_p = 3,16$, não ocorre nenhum valor de J. Os valores completos para a série de variáveis são: $\alpha = 228^\circ$; $\beta = 0^\circ$.

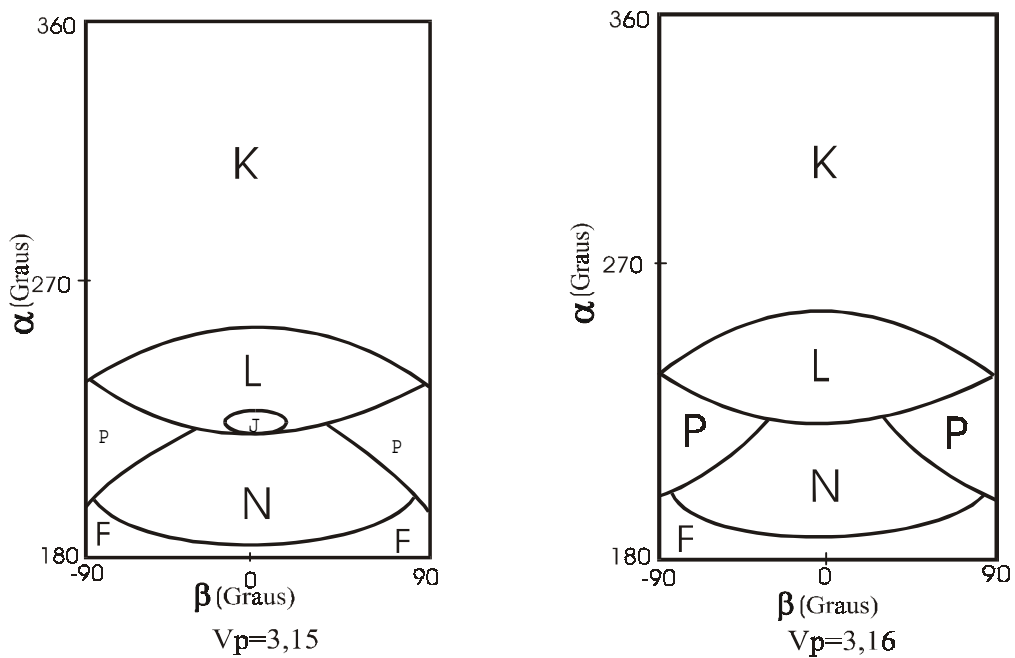


Fig. 6.24 – Soluções para o Problema 1

6.11.2 PROBLEMA 2

Deseja-se encontrar uma trajetória do tipo N no sistema Terra-Lua, sujeita à restrição $V_p = 3,0$ e requer-se R_p máximo. Examinando as Figuras 6.18 é possível verificar que a trajetória tipo N, no caso $V_p = 3,0$, ocorre para $R_p = 0,00476$ e $R_p = 0,00675$, mas não ocorre para $R_p = 0,009$. Assim, a solução está no intervalo $0,00675 < R_p < 0,009$. A Figura 6.25 mostra dois gráficos da seqüência feitos para encontrar a solução. A solução para este problema é $R_p = 0,0075234375$. Os valores completos para a série de variáveis são: $\alpha = 192^\circ$; $\beta = 0^\circ$.

Esta informação fornece condições iniciais que permitem aos projetistas de missão planejarem a trajetória.

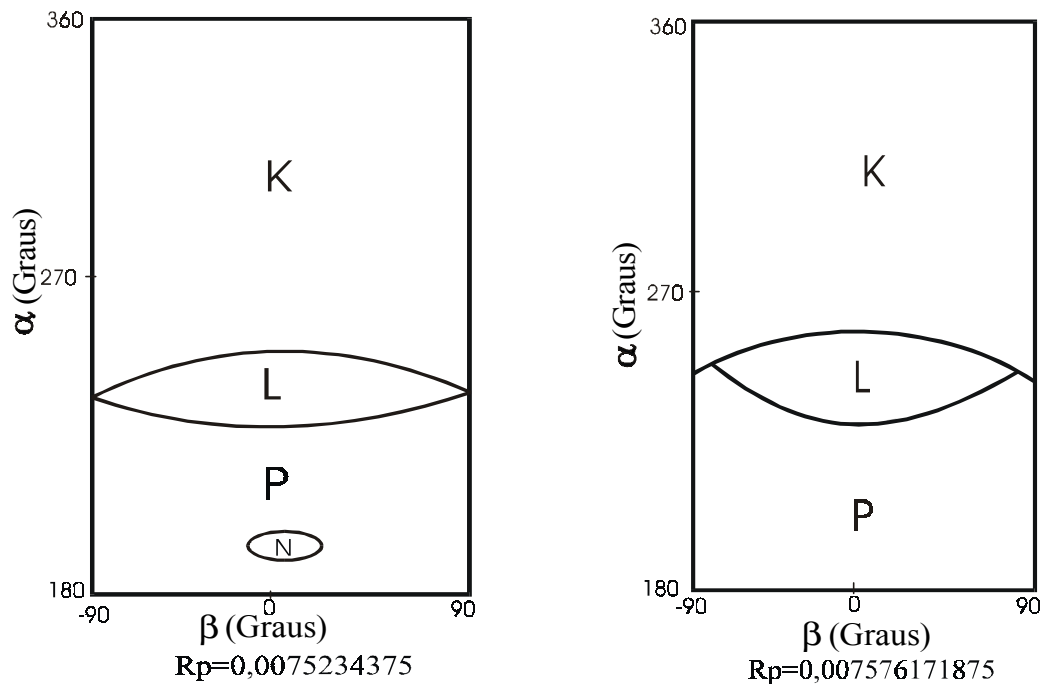


Fig.6.25 – Soluções para o Problema 2.

6.13 CONCLUSÕES PARA O CASO TRIDIMENSIONAL

Neste capítulo a manobra *Swing-by* do Problema Restrito de Três-Corpos Tridimensional é estudada. Alguns tipos de gráficos de letras são apresentados para representar o efeito de uma máxima aproximação sobre a órbita de um veículo espacial. Em particular, são estudados os efeitos da terceira dimensão nesta manobra. Para isto é mostrado que as órbitas hiperbólicas (família K) dominam a região onde $\alpha > 270^\circ$ e que quando a velocidade aumenta, as famílias K, L e P dominam os gráficos. São mostradas famílias com particularidades, como órbitas parabólicas ou órbitas de momento angular zero que existem nas bordas entre as famílias principais. Em geral, está claro que a terceira dimensão da manobra representa um papel muito importante no problema investigado. Para tornar esta pesquisa mais adequada para aplicações práticas os resultados disponíveis foram usados em dois tópicos:

- a) Um estudo das tendências de variação dos parâmetros, que mostram os efeitos do ângulo de aproximação, distância do perigeu, velocidade do perigeu e ângulo fora do plano;
- b) A solução de problemas ótimos, tais como encontrar trajetórias específicas (escape, captura, etc.) que tenham restrições em alguma variável e que extremizem algumas outras, tais como a distância do perigeu e/ou a velocidade do perigeu.

Foram estudados os efeitos do encontro sobre a inclinação do veículo espacial e os resultados mostram várias particularidades, como: $\beta = 0^\circ$ permitindo somente valores iguais a $\pm 180^\circ$ e 0° para Δi , ou $\beta = \pm 90^\circ$, $\alpha = 0^\circ$ ou 180° implicam em $\Delta i = 0^\circ$, etc. Os efeitos de uma componente fora do plano para a velocidade no perigeu são estudados e sua importância é mostrada alterando os valores para a variação da inclinação, energia e momento angular, como descrito nos gráficos mostrados.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES FINAIS

7.1 – CONCLUSÕES

Conforme apresentado no Capítulo 1, o objetivo desse trabalho foi o de estudar Mecânica Celeste aplicada à trajetórias de veículos espaciais, em particular, ao problema de manobras orbitais de veículos espaciais. Para efetuar essa tarefa foram analisados diferentes modelos para a dinâmica e estratégia da manobra. Para a dinâmica, são considerados dois modelos básicos: o tradicional Problema de Dois Corpos e o modelo conhecido como Problema Restrito de Três Corpos, onde o veículo espacial é assumido como sendo um ponto de massa que se move devido à força gravitacional de dois primários, que são dois corpos celestes modelados como pontos de massa.

Com esses dois modelos, diversos tópicos foram estudados. As principais conclusões obtidas são descritas abaixo.

No Capítulo 3, foram testados dois métodos para o cálculo de manobras orbitais coplanares e impulsivas, um primeiro método numérico bi-impulsivo e um segundo método analítico que adiciona um terceiro impulso na manobra. Os resultados mostraram que a transferência bi-impulsiva é vantajosa para transferências envolvendo mudanças no argumento do perigeu e/ou na excentricidade. A manobra tri-impulsiva apresenta maior economia em algumas regiões (em termos de e_i e e_f) em manobras que alteram apenas o semi-eixo maior da órbita. Quando o semi-eixo maior é alterado juntamente com o argumento do perigeu ou com a excentricidade, a melhor manobra varia caso a caso. Do ponto de vista de ângulo de transferência da manobra bi-impulsiva, os resultados mostraram que todas as manobras que envolvem excentricidade ou semi-eixo maior possuem ângulo de transferência igual a 180° . Manobras que

alteram somente o argumento do perigeu ou o argumento do perigeu e o semi-eixo maior possuem soluções com ângulos diferentes de 180° , a menos que $\omega_i = 0^\circ$ e $\omega_f = 180^\circ$.

No Capítulo 4, foram estudados métodos para calcular manobras ótimas de Rendezvous em três dimensões. Conforme esperado, um aumento na inclinação entre os planos demanda um maior custo de combustível. Porém, a razão desse aumento varia de método para método. Para os Métodos Direto Interno e Indireto o aumento é muito rápido e para o Método Direto Externo esse aumento é pequeno. A razão física desse fato é que a manobra de mudança de plano deste método é feita em um ponto distante da Terra e esse consumo decresce com a distância entre o veículo e a Terra. Verificou-se também que o custo de uma correção de inclinação de plano orbital é bastante elevado, se comparado ao custo de uma correção de semi-eixo maior. No Método Direto Interno, nota-se que, a medida que o veículo se afasta de $R_{c1} = 1,0$ o consumo de combustível vai aumentando em todos os casos, porque é necessário um impulso maior para a órbita de transferência atingi-lo. Esse fato também ocorre para o Método Direto Externo no caso $N = 2$. Para $N \geq 10$, o consumo diminuiu quando aumenta-se R_{c1} , porque $R_a = N \times R_{c1}$ e como o método é externo quando mais longe estiver o alvo menos a órbita de transferência sofre a influência da gravidade, fazendo diminuir o valor do impulso. Para o Método Indireto, pode-se notar que mantendo-se R_{c1} constante e aumentando-se R_a o consumo aumenta, porque R_a é o raio da órbita interna, mostrando-se igual ao Método Direto Interno.

No Capítulo 5, esses métodos foram aplicados ao problema de manobras de constelações de satélites. Foi notado que desvios angulares positivos e negativos requerem o mesmo consumo para a manobra de correção. Do ponto de vista de consumo, pode-se notar que o Método Direto Externo é inadequado para as manobras de correção simuladas. Esse método possui como principal vantagem a economia na mudança de plano orbital realizada a uma distância grande do centro de atração gravitacional. Quando essa mudança é de pequena magnitude, a economia gerada não é

suficiente para compensar o consumo extra para enviar o satélite até o ponto da manobra. Dentre os outros dois métodos, o Direto Interno mostrou-se mais econômico que o Indireto, porém com pequena margem.

No Capítulo 6, foi estudada a manobra de *Swing-by* em duas e três dimensões. Encontrou-se órbitas hiperbólicas dominando a região $\Psi > 270^\circ$ e também observou-se que quando as velocidades vão aumentando, a famílias K, L, e P dominam os gráficos. Famílias de órbitas parabólicas ou de momento angular zero, existem nas bordas das principais famílias. Também resolveu-se problemas de otimização. Das soluções dos problemas ótimos, encontra-se trajetórias específicas (escape, captura, etc.) que contém variáveis que extremizam algumas outras, como a distância do perigeu e/ou velocidade do perigeu. Dessa forma podemos usar estes dados para missões específicas.

Depois disso foram estudados os efeitos do encontro sobre a inclinação do veículo espacial e os resultados mostram várias particularidades, como: $\beta = 0^\circ$ permitindo somente valores iguais a $\pm 180^\circ$ e 0° para Δi , ou $\beta = \pm 90^\circ$, $\alpha = 0^\circ$ ou 180° implicam em $\Delta i = 0^\circ$, etc. Os efeitos de uma componente fora do plano para a velocidade no perigeu são estudados e sua importância é mostrada alterando os valores para a variação da inclinação, energia e momento angular, conforme mostrada em detalhes no final do Capítulo 6.

7.2 - SUGESTÕES PARA EXTENSÃO DESTE TRABALHO

Diversas sugestões podem ser feitas para futuras extensões dos tópicos abordados neste trabalho. Entre elas podemos citar as seguintes:

- a) Desenvolvimento e/ou implementação de métodos analíticos de *Rendezvous* para órbitas não circulares para comparação com métodos numéricos;

- b) Estudo mais detalhado de manobras envolvendo constelações de satélites, considerando órbitas não circulares, estudo dos desvios orbitais dos elementos keplerianos em função das perturbações sofridas pelo satélites, incluindo uma previsão da frequência de manobras necessárias;
- c) Desenvolvimento e/ou implementação de um método numérico tri-impulsivo para manobras de *Rendezvous*;
- d) Comparação de manobras orbitais por diferentes métodos no caso tri-dimensional;
- e) Desenvolvimento e/ou implementação de um método analítico bi-impulsivo para manobras entre duas órbitas com variação de semi-eixo maior, excentricidade e argumento de perigeu;
- f) Desenvolvimento e/ou implementação de métodos analíticos e numéricos com mais de três impulsos para manobras orbitais com o objetivo de comparar com os métodos aqui estudados;
- g) Desenvolvimento e/ou implementação de métodos analíticos e numéricos com empuxo contínuo (não impulsivo) para manobras orbitais com o objetivo de comparar com os métodos aqui estudados;
- h) Resolução de mais problemas de otimização envolvendo manobra de *Swing-by*, com o objetivo de executar o mapeamento com mais precisão e englobando outros sistemas de binários;

- i) Elaboração de gráficos de letras referentes as manobras de *Swing-by* com modelo de cônica conjugadas, com o objetivo de estudar a diferença entre os dois modelos dinâmicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Swenson B. L. Neptune atmospheric probe mission. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Hilton Head, Island, 1992, **Proceedings**. Washington, DC: AIAA, 1992. p. 66-75.
- Ball, K.J.; Osborne, F. **Space vehicle dynamics**. Oxford, University Press-Oxford, 1967.
- Barrar, R.B. An analytic proof that the hohmann-type transfer is the true minimum two-impulse transfer. **Astronautica Acta**, v. 9, n. 1, p. 1-11, 1963.
- Battin, R.H. **Astronautical guidance**. New York: McGraw-Hill, 1965.
- Battin, R.H. A new solution for Lambert's problem. In: International Astronautical Congress 19, Oxford, 1968. **Anais**. Oxford: IAF, 1968. v. 2, p. 131-150.
- Bender, D.F. Optimum coplanar two-impulse transfers between elliptic orbits. **Aerospace Engineering**, v. 21, n.10, p. 44-52, Oct. 1962.
- Billik, B. H.; Roth, H. L. Studies relative to rendezvous between circular orbits. **Astronautica Acta**, v. 13, n. 1, p. 23-36, 1967.
- Breakwell, J.V.; Gillespie, R.W.; Ross, S. Researches in interplanetary transfer. **Journal of American Rocket Society**, v. 31, p. 201-208, 1961.
- Broucke, R.A. The celestial mechanics of gravity assist. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Minneapolis, 1988. **Proceedings**. Washington, DC: AIAA, 1988. p. 83-85.
- Broucke, R.A.; Prado, A.F.B.A. Jupiter swing-by trajectories passing near the Earth. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 82, n. 2, p. 1159-1176, 1993.

- Broucke, R.A.; Prado, A.F.B.A. Transfer orbits in restricted problem. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 18, n. 3, p. 593-599, 1995.
- Broucke, R.A.; Prado, A.F.B.A. Orbital planar maneuvers using two and three-four (through infinity) impulses. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 19, n. 2, p. 274-282, Mar. / Apr. 1996.
- Carvell, R. Ulysses-the Sun from above and below. **Space**, v. 1, p. 18-55, 1986.
- D'Amario, L.A., Byrnes, D.V.; Stanford, R.H. Interplanetary trajectory optimization with application to Galileo. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 5, n. 5, p. 465-471, 1982.
- Eckel, K.G. Optimum transfer in a central force field with n impulses. **Astronautica Acta**, v. 9, n. 5/6, p. 302-324, 1963.
- Edelbaum, T.N. Some extensions of the Hohmann transfer maneuver. **ARS Journal**, v. 29, p. 864-865, 1959.
- Edelbaum, T.N. How many impulses? **Astronautics & Aeronautics**, v. 5, n. 11, p. 64-69. Nov. 1967.
- Farquhar, R., Muhonen, D.; Church, L.C. Trajectories and orbital maneuvers for the ISEE-3/ICE comet mission. **Journal of Astronautical Sciences**, v. 33, n. 3, p. 235-254, 1985.
- Farquhar, R.W.; Dunham, D.W. A new trajectory concept for exploring the Earth's geomagnetic tail. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 4, n. 2, p. 192-196, 1981.
- Felipe, G. **Estudo de manobras orbitais**. Taubaté. 220p. (Trabalho de graduação interdisciplinar) - Universidade de Taubaté. Departamento de Informática, nov. 1997.

- Felipe, G.; Prado, A.F.B.A. Estudo de manobras orbitais multi-impulsivas. In: Seminário de Iniciação Científica, 3., 1997. **Anais**. São José dos Campos: INPE, 1997a. p. 13-14.
- Felipe, G.; Prado, A.F.B.A. Manobras orbitais de rendezvous. [CDROM]. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), 20., Gramado, 1997. **Anais**. Gramado: CNMAC, 1997b.
- Felipe, G.; Prado, A.F.B.A. Manobras orbitais de constelação. In: Seminário de Iniciação Científica, 4., São José dos Campos. **Anais**. São José dos Campos: INPE, 1998, p. 31-32.
- Felipe, G.; Prado, A.F.B.A. Classification of out of plane swing-by trajectories. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 22, n. 5, p. 643-649, Sept.-Oct. 1999.
- Flandro, G. Fast reconnaissance missions to the outer solar system, utilizing energy derived from the gravitational field of Jupiter. **Astronautical Acta**. v. 12, n. 4, p. 329-337, 1966.
- Gobet, F.W. Optimum transfers between hyperbolic asymptotes, **AIAA Journal**, v. 1, n. 9, p. 2034-2041, 1963.
- Gobet, F.W.; Doll, J.R. A survey of impulsive transfers. **AIAA Journal**, v. 7, n. 5, p. 801-834, 1969.
- Goddard, R.H. A method of reaching extreme altitudes. **Smithsonian Institute Public Miscelanea Collect**, v. 71, n. 2, p. 1919.
- Gooding, R.H. A procedure for the solution of Lambert's orbital boundary-value problem. **Celestial Mechanics**. v. 48, p. 145-165, 1990.
- Gross, L. R. E.; Prussing, J. E. Optimal multiple-impulse direct ascent fixed-time rendezvous. **AIAA Journal**, v. 12, n. 7, p. 885-889, 1974.

- Herrick, S. **Astrodynamics**. London: Van Nostrand Reinhold, 1971.
- Hoelker, R.F.; Silber, R. **The bi-elliptic transfer between circular co-planar orbits**. Alabama: Army Ballistic Missile Agency. Redstone Arsenal, Jan. 1959. (DA Tech Memo 2-59).
- Hohmann, W. **Die erreichbarheit der himmelskorper**. Oldenbourg: s.ed., 1925.
- Humi, M. Fuel-optimal rendezvous in a general central force field. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v.16, n. 1, p. 215-217, 1993.
- Jezewski, D.J.; Rozendaal, H.L. An efficient method for calculating optimal free-space n-impulsive trajectories. **AIAA Journal**, v. 6, n. 11, p. 2160-2165, 1968.
- Lancaster, E. R., Blanchard, R. C.; Devaney, R. A. A note on Lambert's theorem, **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 3, p. 1436-1438, 1966.
- Lawden, D.F. Minimal rocket trajectories. **ARS Journal**, v. 23, n. 6, p. 360-382, 1953.
- Lawden, D.F. Fundamentals of space navigation, **Journal of British Interplanetary Science**, v. 13, p. 87-101, 1954.
- Lee, S.; Cochran Jr. J. E. High thrust rendezvous via feedback linearization. In: Annual AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, 3., Pasadena, 1993. **Proceedings**. San Diego: Univelt, 1993, p.565-584.
- Lembeck, C. A.; Prussing, J. E. Optimal impulsive intercept with low-thrust rendezvous return. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 16, n. 3, 1993.
- Lion, P.M.; Handelsman, M. Primer vector on fixed-time impulsive trajectories. **AIAA Journal**, v. 6, n. 1, p. 127-132, 1968.
- Lopez, I.; McInnes, C. R. Autonomous rendezvous using artificial potencial function guidance, **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 18, n. 2, p. 237-241, 1995.

- Marchal, C. Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires (Durée Indifférente). **Astronautica Acta**, v. 11, n. 6, p. 432-445, 1965.
- Marec, J.P. **Optimal space trajectories**. New York: Elsevier, 1979.
- Mirfakhraie, K. **Optimal cooperative time-fixed impulsive rendezvous**. Urbana-Champaign. Ph.D. (Thesis) - University of Illinois, 1990.
- Mirfakhraie, K.; Conway, B. A. Optimal cooperative time-fixed impulsive rendezvous, **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 17, n. 3, p. 607-613, 1994.
- Pardis, C. J.; Carter, T. E. Optimal power-limited rendezvous with thrust saturation, **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 18, n. 5, p. 1145-1150, 1995.
- Prado, A.F.B.A. Close-approach trajectories in the elliptic restricted problem. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 20, n. 4, p. 797-802, July-Aug. 1997.
- Prado, A.F.B.A. Delta-v estimate for Jupiter swing-by trajectories. **Applied Mechanics in the Americas**, v. 6, p. 263-266, 1999.
- Prado, A.F.B.A. **Optimal transfer and swing-by orbits in the two- and three-body problems**. Austin. 240p. Thesis (Ph.D.) - Dept. of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics. University of Texas, Dec. 1993.
- Prado, A.F.B.A. Optimal rendezvous maneuvers for space vehicles. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, v. 18, n. 3, p.297-301, 1996a.
- Prado, A.F.B.A. Powered swing-by. **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, v. 19, n. 5, Sept-Oct., p. 1142-1147, 1996b.
- Prado, A.F.B.A.; Broucke, R.A. A Classification of swing-by trajectories using the moon. **Applied Mechanics Reviews**, v. 48, n. 11, part 2, p. 138-142. Nov. 1995b.
- Prado, A.F.B.A.; Broucke, R.A. Effects of atmospheric drag in swing-by trajectory. **Acta Astronautica**, v. 36, n. 6, p. 285-290, Sept. 1995a.

- Prado, A.F.B.A.; Broucke, R.A. The minimum delta-v Lambert's problem. **SBA Controle & Automação**, v. 7, n. 2, p. 84-90, May/Aug. 1996.
- Proulx, R.; Kantsiper, B.; Cefola, P.; Drain, J. Automated station-keeping for satellite constellations. In: AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Sun Valley, 1997. **Proceedings**. Washington, DC: AIAA, 1997. p. 97-623.
- Prussing, J. E. Optimal cooperative time-fixed impulsive rendezvous. In: AIAA/AAS Astrodynamics Specialists Conference, Minneapolis, 1988. **Proceedings**., Washington, DC: AIAA, 1988. p. 49-54.
- Prussing, J. E. Optimal four-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbits. **AIAA Journal**, v. 7, n. 5, p. 928-935, 1969.
- Prussing, J. E. Optimal two- and three-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit. **AIAA Journal**, v. 8, n. 7, p. 1221-1228, 1970.
- Prussing, J. E.; Chiu, J. H. Optimal multiple-impulse time-fixed rendezvous between circular orbits. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 9, n. 1, p. 17-22, 1986.
- Roth, H.L. Minimization of the velocity increment for a bi-elliptic transfer with plane change. **Astronautical Acta**, v. 13, n. 2, p. 119-130, 1967.
- Weinstein, S. S. Pluto flyby mission design concepts for very small and moderate spacecraft. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Hilton Head, Island, 1992.
- Shaohua, Y., Akiba, R.; Matsuo, H. Control of omni-directional rendezvous trajectories. **Acta Astronautica**, v. 32, n. 2, p. 83-87, 1994.
- Shternfeld, A. **Soviet space science**. New York: Basic Books, 1959, p. 109-111.
- Smith, G.C. The calculation of minimal orbits. **Astronautical Acta**, v. 5, n. 5, p. 253-265, 1959.

- Spencer, T.M., Glickman, R.; Bercaw, W. Low-thrust orbit raising for shuttle payloads. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 5, n. 4, p. 372-378, 1982.
- Stern, S. A.; Fowler, W. T. Path constrained rendezvous near large space structures, **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 22, p. 548-553, 1985.
- Sun, F.T.; Vinh, N.X. Lambertian invariance and application to the problem of optimal fixed-time impulsive orbital transfer. **Acta Astronautica**, v. 10, p. 319-330, 1983.
- Swenson, B.L. Neptune atmospheric probe mission. In: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Hilton Head Island, 1992. **Proceedings**. Washington, DC: AIAA, 1992. p. 66-75.
- Szebehely, V. **Theory of orbits**. New York: Academic: 1967. The restricted problem of three bodies, p.7-40.
- Taff, L.G.; Randall, P.M.S. Two locations, two times, and the element set. **Celestial Mechanics**, v. 37, p. 149-159, 1985.
- Tauer, D. R., Coverstone-Carroll, V.; Prussing, J. E. Optimal impulse time-fixed orbital rendezvous and interception with path constraints. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 18, n. 1, p. 54-60, 1995.
- Walton, J. M., Marchal, C.; Culp, R.D. Synthesis of the types of optimal transfers between hyperbolic asymptotes. **AIAA Journal**, v.13, n. 8, p. 980-988, 1975.
- Wolfsberger, W., Weiß, J.; Rangnitt, D. Strategies and schemes for rendezvous on geostationary transfer orbit. **Acta Astronautica**, v. 10, n. 8, p.527-538, 1983.
- Yu, S. Terminal spacecraft coplanar rendezvous control. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 18, n. 4, p. 838-842, 1995.
- Yuan, P. J.; Hsu, S. C. Rendezvous guidance with proportional navigation. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 17, n. 2, p. 409-411, 1994.

Zanardi, M. C. **Fundamentos da Astronáutica**. São José dos Campos: ITA, 1988. v. 21, cap. 8.