

1. Classificação <i>INPE-COM.10/PE</i> <i>C.D.U. 501</i>		2. Período	4. Critério de Distribuição: interna <input type="checkbox"/> externa <input checked="" type="checkbox"/>
3. Palavras Chaves (selecionadas pelo autor) <i>MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA</i> <i>ANÁLISE VETORIAL</i> <i>FÍSICA MATEMÁTICA</i>			
5. Relatório nº <i>INPE-1372-PE/174</i>	6. Data <i>Outubro, 1978</i>	7. Revisado por <i>Antonio Divino Moura</i>	
8. Título e Sub-Título <i>MÉTODOS MATEMÁTICOS DA FÍSICA. I - VETORES, CAMPOS E COORDENADAS.</i>		9. Autorizado por <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor	
10. Setor <i>DCE</i>	Código	11. Nº de cópias <i>15</i>	
12. Autoria <i>René A. Medrano-B.</i>		14. Nº de páginas <i>82</i>	
13. Assinatura Responsável <i>René A. Medrano B.</i>		15. Preço	
16. Sumário/Notas <i>Este trabalho pretende expôr, de uma forma moderna, o estudo dos vetores em seus pontos mais relevantes relacionados com sua utilização nos diferentes campos da física. A manipulação dos vetores (expressos no sistema cartesiano fixo), e suas operações, são feitas com a notação indicial, utilizando-se, para isto, das definições do delta de Kronecker (δ_{ij}) e o símbolo de Levi-Civita (ϵ_{ijk}). Especial ênfase é feita na interpretação física das operações com o operador ∇ (gradiente, divergente e rotacional). Na parte final é feita uma extensão, do estudo dos vetores, a sistemas de coordenadas curvilíneas. O material aqui apresentado, embora destinado a alunos de pós-graduação nos campos da física e Engenharia, podem também ser utilizado no nível de graduação.</i>			
17. Observações			

INDICE

PREFÁCIO	iv
ABSCTRACT	v
LISTA DE FIGURAS	vi
 <u>CAPÍTULO I</u>	
VETORES, CAMPOS E COORDENADAS	1
1.1 - Vetores	1
1.2 - Delta de Kronecker (δ_{ij})	3
1.3 - Produto Escalar	4
1.4 - Tensor Antisimétrico de Levi-Civita (ϵ_{ijk})	5
1.5 - Produto Vetorial	7
1.6 - Relação entre ϵ_{ijk} e δ_{lm} e suas aplicações	11
1.7 - Vetor Normal Unitário	14
1.8 - O Operador ∇	16
1.8.1 - Gradiente	17
1.8.2 - Divergente e Rotacional	22
1.9 - Integração de Campos Vetoriais	25
1.9.1 - Integral de linha	25
1.9.2 - Teorema de Gauss (ou da Divergência)	29
1.9.3 - Teorema de Stokes	38
1.10 - Coordenadas Curvilíneas Ortogonais	46
1.10.1 - Elemento de linha e métricas	47
1.10.2 - Vetores base. Elemento de superfície e o Jacobiano.	53
1.10.3 - Dois importantes sistemas de coordenadas curvilíneas	58
1.10.4 - O operador ∇ em coordenadas curvilíneas	61
BIBLIOGRAFIA	71

PREFÁCIO

O presente relatório consiste no estudo de vetores e campos desde um ponto de vista de ferramenta da física matemática, e não do matemático formal. Isto é, a intenção é tentar transmitir uma técnica moderna na manipulação dos vetores, sem a preocupação precí pua com a formalidade das demonstrações e sua universalidade. Todavia, quase todas as fórmulas e identidades, usadas no conteúdo, são demon tradas no próprio desenvolvimento.

Este trabalho nasceu da preparação das aulas de matemática para estudantes de pós-graduação, ministradas durante 4 anos a alunos dos Departamentos de Ciências Espaciais e Meteorologia do INPE. No entanto, o leitor só precisa ter tido, com o assunto, um relacionamento elementar (que todo aluno de Engenharia ou Ciências Exatas tem), para poder seguir e aproveitar o conteúdo aqui exposto.

O presente trabalho representa o primeiro Capítulo, de um total de quinze, que regularmente são cobertos no transcurso de três trimestres, no curso de pós-graduação do INPE.

Agradeço aos Drs. A. D. Moura, J. A. Bittencourt e J. J. Kantor pela revisão, sugestões e críticas que contribuíram para o aprimora mento deste Capítulo.

ABSTRACT

This work intends to serve as a tool in the study of vectors as they are used in several branches of physics. The handling of the vectors (referred to a fixed cartesian coordinate system) as well as their operations, are made by the use of the indicial representation. This includes the use of the Kronecker delta (δ_{ij}) and the Levi-Civita's symbol (ϵ_{ijk}). It is stressed the physical meaning of the operations with the ∇ operator (grad, div and curl). Extension of the results to curvilinear coordinates is made at the end of this work. Although this material was initially developed for graduate students, it can also be used as part of a Vector Calculus course for undergraduates.

LISTA DE FIGURAS

I.1 - Vetor representado num sistema cartesiano	1
I.2 - Regra da mão direita para o produto vetorial $\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B}$	8
I.3 - Vetor \underline{v} tangente à curva que resulta da intersecção entre o plano $x=x_p$ e a superfície $z = f(x,y)$	15
I.4 - a) Placa (condutora de calor) sendo esquentada no seu ponto central por uma vela. As linhas de traços indicam isotermas. b) A mesma placa vista de cima	19
I.5 - O Gradiente $\nabla\phi$ é calculado para cada ponto 1,2...etc.	26
I.6 - Cubo Elementar num campo Vetorial \underline{F}	31
I.7 - Cubo unitário e sua orientação para o Exemplo 1.7	36
I.8 - Circulação do vetor \underline{F} sobre a curva C	38
I.9 - Circulação ao longo dos caminhos 1 e 2 e equivalente à circulação ao longo da curva C	39
I.10 - Circulação ao longo de um quadrado muito pequeno	40
I.11 - Sistema bidimensional de coordenadas ortogonais, cartesiano e polar, respectivamente	47
I.12 - Sistema de coordenadas esférica-polar. O versor $\hat{\phi}$ é definido por $\hat{\phi} = \hat{r} \times \hat{\theta}$	59
I.13 - Sistema de coordenadas cilíndrico-circular. O versor $\hat{\phi}$ é definido por $\hat{\phi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$	61

CAPÍTULO I

VETORES, CAMPOS E COORDENADAS

1.1 - VETORES

Um vetor \vec{v} é uma entidade que tem magnitude e direção. A força, o campo elétrico, o vento, etc., todos eles são entes (ou quantidades) vetoriais. No sistema de coordenadas cartesianas, em três dimensões, um vetor \vec{v} pode ser representado por suas três componentes (Figura I.1).

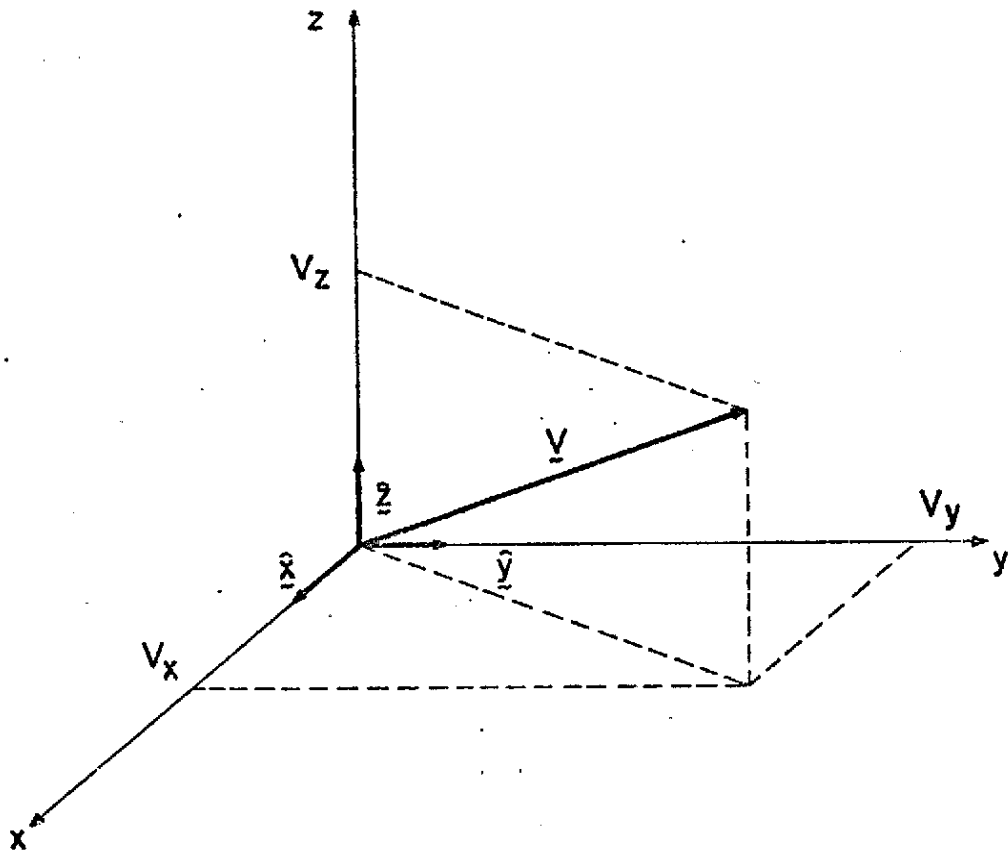


Fig. I.1 - Vetor representado num sistema cartesiano.

$$\underline{v} = v_x \underline{\hat{x}} + v_y \underline{\hat{y}} + v_z \underline{\hat{z}} \quad (\text{I.1})$$

onde os símbolos $\underline{\hat{x}}$, $\underline{\hat{y}}$ e $\underline{\hat{z}}$ simbolizam vetores unitários (chamados também de versores) nas direções x, y e z, respectivamente, do sistema cartesiano ortogonal.

A fórmula (I.1) pode também ser escrita na seguinte forma

$$\underline{v} = v_1 \underline{\hat{e}}_1 + v_2 \underline{\hat{e}}_2 + v_3 \underline{\hat{e}}_3$$

ou mais simplesmente,

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \underline{\hat{e}}_i \quad (\text{I.2})$$

onde os vetores unitários ortogonais, agora, são os $\underline{\hat{e}}_i$, chamados também de "vetores base" do sistema. Esta última notação, por meio de índices, pode ser ainda mais compactada com o uso da convenção de Einstein para os somatórios,

$$\underline{v} \equiv v_i \underline{\hat{e}}_i \quad (\text{I.3})$$

Nesta notação, subentende-se o somatório quando os índices aparecem duplamente repetidos; a soma deverá ser feita de 1 até 3 se o espaço for tri-dimensional, ou de 1 até n se o espaço for de n dimensões. Assim, a quantidade $A_i B_j C_j$ em 3 dimensões representa:

$$A_i B_j C_j \equiv A_i \sum_{j=1}^3 B_j C_j = A_i (B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 C_3)$$

Nesta notação, uma soma de vetores \vec{e} é representada por:

$$\underline{A} + \underline{B} \equiv A_i \underline{\hat{e}}_i + B_i \underline{\hat{e}}_i = (A_i + B_i) \underline{\hat{e}}_i$$

Observe-se que os índices dentro da soma $(A_i + B_i)$ têm que ser os mesmos, de outra maneira não faria sentido (i.e., não se pode somar a componente x de \underline{A} com a componente y de \underline{B}). Também é impróprio usar o mesmo índice mais de duas vezes num mesmo termo (e.g. não faz sentido a expressão $A_i B_i C_i$), exceto em casos especiais como, por exemplo, em coordenadas curvilíneas onde este uso é aparente.

1.2 - DELTA DE KRONECKER (δ_{ij}) -

O Delta de Kronecker, δ_{ij} , é um símbolo definido da seguinte maneira

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{quando } i=j \text{ (Ex. } \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1) \\ 0 & \text{quando } i \neq j \text{ (Ex. } \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{32} = \delta_{13} = \dots = 0) \end{cases}$$

Assim,

$$A_j \delta_{ij} = A_i$$

O exemplo seguinte (tridimensional) ajuda a esclarecer a identidade anterior,

$$A_j \delta_{2j} \equiv A_1 \delta_{21} + A_2 \delta_{22} + A_3 \delta_{23} = A_2$$

1.3 - PRODUTO ESCALAR -

Nas aplicações da física, dois vetores podem associar-se de 3 maneiras diferentes dando como resultado 3 quantidades também diferentes. Eles podem formar uma quantidade escalar (e.g. produto escalar entre dois vetores), um novo vetor (e.g. produto vetorial) e um tensor (e.g. produto diádico). Esta última quantidade será tratada no Capítulo sobre Tensores.

O produto escalar mais simples é aquele entre vetores unitários ortogonais.

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

Portanto, o produto escalar entre dois vetores quaisquer, é dado por,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \equiv (A_i \hat{e}_i) \cdot (B_j \hat{e}_j) = A_i B_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i$$

ou seja:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (I.4)$$

Observe-se que, quando $\underline{A} = \underline{B}$

tem-se:

$$\underline{A} \cdot \underline{A} \equiv A_i A_i \equiv |\underline{A}|^2$$

onde

$$|\underline{A}| = \text{módulo do vetor } \underline{A}$$

Como consequência das definições e conclusões anteriores pode-se reconhecer que a expressão $A_i B_j C_j$ é a componente i do vetor $\underline{A} \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C})$.

Para o caso tridimensional, e escolhendo apropriadamente o sistema cartesiano de referência, facilmente pode-se demonstrar que a outra maneira de representar o produto escalar é: $\underline{A} \cdot \underline{B} = |\underline{A}| |\underline{B}| \cos \theta$ onde θ é o ângulo entre os dois vetores.

Entretanto, e de uma maneira geral, num espaço de n dimensões o cosseno do ângulo θ entre dois vetores é definido pela relação: $\cos \theta = \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{|\underline{A}| |\underline{B}|}$

1.4 - TENSOR ANTISIMÉTRICO DE LEVI-CIVITA (ϵ_{ijk})

Este tensor unitário é de muita utilidade na manipulação de produtos vetoriais. O tensor antisimétrico de Levi-Civita é definido da seguinte maneira:

$$\epsilon_{ijk} \begin{cases} + 1 \text{ quando } i, j \text{ e } k \text{ estão numa ordem cíclica positiva;} \\ 0 \text{ quando dois ou mais deles são repetidos;} \\ - 1 \text{ quando } i, j \text{ e } k \text{ estão numa ordem cíclica negativa;} \end{cases}$$

A sequência natural (ordem cíclica positiva) para quaisquer dos índices é: $i = 1, 2, 3$. (A ordem cíclica positiva para o caso cartesiano é: x, y, z). Portanto, as sequências: $2, 3, 1$ e $3, 1, 2$ correspondem à ordem cíclica positiva.

Assim,

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1 \quad (\text{seqüência cíclica positiva})$$

$$\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1 \quad (\text{seqüência cíclica negativa})$$

$$\epsilon_{223} \quad \epsilon_{313} \quad \epsilon_{311} = \dots = 0 \quad (\text{índices repetidos})$$

É muito interessante notar que: $\epsilon_{312} = -\epsilon_{321} = \epsilon_{231}$ onde se deve observar o avanço do índice 2 desde a última posição (símbolo da esquerda), até a primeira posição (símbolo da direita). Desta maneira pode-se verificar que para cada inversão de índices consecutivos, existe uma mudança de sinal.

EXEMPLO 1.1 - Seja avaliar a quantidade: $\epsilon_{ijk} A_i B_j C_k$. Para o caso tridimensional, tem-se

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k &\equiv \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k = \epsilon_{123} A_1 B_2 C_3 + \\ &+ \epsilon_{231} A_2 B_3 C_1 + \epsilon_{312} A_3 B_2 C_1 + \epsilon_{321} A_3 B_2 C_1 + \epsilon_{213} A_2 B_1 C_3 + \\ &+ \epsilon_{132} A_1 B_3 C_2 \end{aligned}$$

Observe-se que todos os outros símbolos tem índices repetidos. Logo,

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k &\equiv A_1 (B_2 C_3 - B_3 C_2) + A_2 (B_3 C_1 - B_1 C_3) + \\ &+ A_3 (B_1 C_2 - B_2 C_1) \end{aligned} \quad (I.5)$$

Mais adiante ver-se-á que este resultado corresponde ao determinante da matriz

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \quad (I.6)$$

Portanto, jã se pode adiantar que,

$$\epsilon_{ijk} A_i B_j C_k \equiv \det M = (\text{determinante da matriz } M) \quad (I.7)$$

Este ũltimo resultado tem uma aplicação elegante no cãlculo vetorial conforme serã visto no Seção que segue.

1.5 - PRODUTO VETORIAL -

Este ĩ o segundo tipo de multiplicação entre dois vetores \underline{A} e \underline{B} . O resultado ĩ outro vetor \underline{C} , cujo mōdulo ĩ:

$$|\underline{C}| = |\underline{A}| |\underline{B}| \sin \theta \quad (I.8)$$

Sendo θ o ângulo entre os vetores \underline{A} e \underline{B} , a direção de \underline{C} ĩ perpendicular ao plano formado por ambos vetores, e o sentido ĩ determinado pela "regra da mão direita" (ou tambĕm do "parafuso", "sacarolhas", etc.) da maneira indicada na Figura I.2 onde θ ĩ o menor ângulo entre os dois vetores.

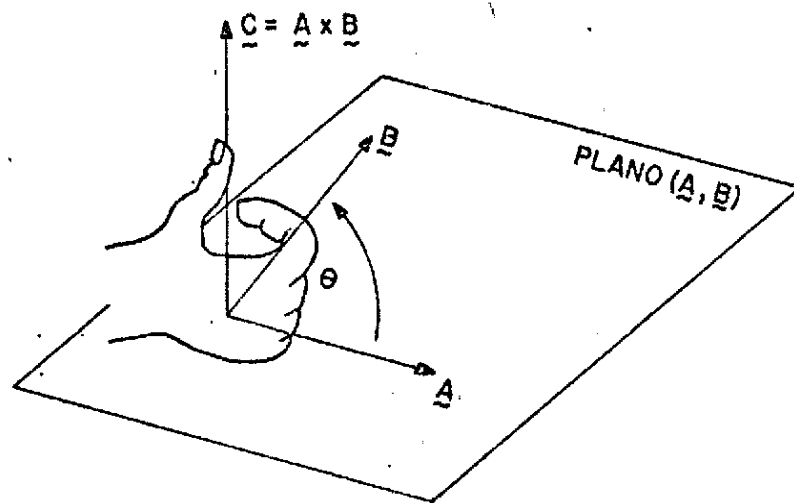


Fig. I.2 - Regra da mão direita para o produto vetorial $\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B}$.

Usando esta regra, observa-se que

$$\underline{A} \times \underline{B} = - \underline{B} \times \underline{A}$$

Veja-se agora a forma das componentes do novo vetor $\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B}$. Para isto é só aplicar a definição:

$$\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B} \equiv (A_i \underline{\hat{e}}_i) \times (B_j \underline{\hat{e}}_j)$$

$$\underline{C} \equiv \sum_i \sum_j A_i B_j \underline{\hat{e}}_i \times \underline{\hat{e}}_j = A_1 B_2 \underline{\hat{e}}_3 - A_2 B_1 \underline{\hat{e}}_3 - A_1 B_3 \underline{\hat{e}}_2 +$$

$$+ A_3 B_1 \underline{\hat{e}}_2 + A_2 B_3 \underline{\hat{e}}_1 - A_3 B_2 \underline{\hat{e}}_1$$

onde os vetores unitários $\underline{\hat{e}}_1$, $\underline{\hat{e}}_2$ e $\underline{\hat{e}}_3$ foram considerados coincidentes com $\underline{\hat{x}}$, $\underline{\hat{y}}$ e $\underline{\hat{z}}$, respectivamente da Figura I.1. Rearranjando a expressão anterior tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{C} = & (A_2 B_3 - A_3 B_2) \underline{\hat{e}}_1 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \underline{\hat{e}}_2 + \\ & + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \underline{\hat{e}}_3 \end{aligned} \quad (I.9)$$

Esta expressão é idêntica à identidade (I.5). Portanto,

$$\underline{C} \equiv \epsilon_{ijk} \underline{\hat{e}}_i A_j B_k \quad (I.10)$$

Esta é uma forma elegante de representar o produto vetorial de dois vetores. Às vezes, tal representação é chamada de notação tensorial do produto vetorial. Assim, as componentes do vetor \underline{C} segundo (I.9) são:

$$C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 ; C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 ; C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

Por outro lado, as componentes C_1 , C_2 e C_3 do mesmo vetor dado pela equação (I.10), são também

$$C_1 = \epsilon_{1jk} A_j B_k = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

$$C_2 = \epsilon_{2jk} A_j B_k = A_3 B_1 - A_1 B_3$$

$$C_3 = \epsilon_{3jk} A_j B_k = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

De uma maneira geral pode-se ver que a componente C_i do vetor $\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B}$, é:

$$C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (I.11)$$

1.6 - RELAÇÃO ENTRE ϵ_{ijk} E δ_{lm} E SUAS APLICAÇÕES

O tensor antisimétrico de Levi-Civita e o delta de Kronecker estão relacionados da seguinte forma,

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (I.15)$$

É importante observar que os primeiros índices dos dois tensores antisimétricos, são iguais! No entanto todos os outros índices são diferentes entre si.

A equação (I.15) é extremamente útil e deve ser memorizada. No primeiro termo do segundo membro da equação (I.15) nota-se o seguinte: Os dois índices do primeiro delta são a combinação dos segundos índices dos tensores, em sequência. Os outros dois índices do segundo delta (ainda do primeiro termo) são a combinação dos terceiros índices dos tensores, também em sequência. Os deltas do segundo termo tem índices que são combinações do segundo índice do primeiro tensor com o terceiro índice do segundo tensor e o terceiro índice do primeiro tensor com o segundo índice do segundo tensor, respectivamente. Tente fazer exercícios com outras letras como índices até familiarizar-se com esta relação.

A demonstração da equação (I.15) consiste em provar que para qualquer combinação numérica dos índices, o resultado que se obter no membro da esquerda, tem que ser o mesmo que o da direita. Considere-se alguns casos.

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} \epsilon_{123} &= \delta_{22} \delta_{33} - \delta_{23} \delta_{32} = \\ 1 \times 1 &= 1 - 0, \text{ condição satisfeita} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{132} \epsilon_{123} &= \delta_{32} \delta_{23} - \delta_{33} \delta_{22} \\ (-1) \times 1 &= 0 - 1, \text{ condição também satisfeita} \end{aligned}$$

Assim por diante pode-se ir fazendo as combinações que forem julgadas necessárias até se ficar convencido de que a equação (I.15) "realmente funciona".

Agora, um exemplo de aplicação da relação (I.15).

EXEMPLO 1.2 - Provar a seguinte identidade vetorial

$$(\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C} = \underline{B} (\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{A} (\underline{B} \cdot \underline{C})$$

Para simplificar um pouco chame-se

$$\underline{D} = \underline{A} \times \underline{B}$$

O produto vetorial do problema proposto dá como resultado outro vetor. Chamando \underline{M} ao vetor resultante $\underline{M} = \underline{D} \times \underline{C}$ e seguindo a notação tensorial introduzida na Equação (I.11), vem,

$$M_i \equiv \epsilon_{ijk} D_j C_k$$

Por outro lado

$$D_j \equiv \epsilon_{jlm} A_l B_m$$

logo

$$M_i \equiv \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} A_l B_m C_k$$

Lembre-se que, para aplicar a relação (I.15), os primeiros índices dos tensores antisimétricos tem que ser iguais. Para que esta condição seja cumprida, faz-se uma inversão de índices no primeiro tensor, isto é:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \quad \text{O que segue é s\~o algebra}$$

$$\begin{aligned} M_i &\equiv -\epsilon_{jik} \epsilon_{jlm} A_l B_m C_k = -(\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) A_l B_m C_k = \\ &= -\delta_{il} \delta_{km} A_l B_m C_k + \delta_{im} \delta_{kl} A_l B_m C_k = \\ &= -A_i B_k C_k + A_k B_i C_k = B_i A_k C_k - A_i B_k C_k \end{aligned}$$

mas

$$A_k C_k \equiv \underline{A} \cdot \underline{C} \quad ,$$

também,

$$B_k C_k \equiv \underline{B} \cdot \underline{C}$$

logo,

$$M_i = B_i (\underline{A} \cdot \underline{C}) - A_i (\underline{B} \cdot \underline{C})$$

Porém, M_i , B_i e A_i são as componentes "i" dos vetores \underline{M} , \underline{B} e \underline{A} respectivamente,

logo:

$$\underline{M} = \underline{B} (\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{A} (\underline{B} \cdot \underline{C})$$

Substituindo os valores de \underline{M} e \underline{D} , tem-se

$$(\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C} = \underline{B} (\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{A} (\underline{B} \cdot \underline{C})$$

1.7 - VETOR NORMAL UNITÁRIO -

Duas retas num plano são perpendiculares entre si, quando o ângulo entre elas é de 90° . Analogamente, um vetor de um plano é chamado de perpendicular, ortogonal, ou, mais comumente de, normal a uma direção dada quando forma um ângulo reto com essa dita direção. Em termos mais amplos, um vetor pode ser normal a uma curva plana num ponto do plano, ou, normal a uma superfície de um sólido. Num espaço multidimensional pode ser também definido um vetor normal a uma hipersuperfície, ou, finalmente normal a um espaço vetorial Euclidiano de n dimensões. Assim, por exemplo, o vetor $\underline{\hat{x}}$ de um sistema cartesiano é normal (ou ortogonal) ao espaço bidimensional formado pelos vetores $\underline{\hat{y}}$ e $\underline{\hat{z}}$. Para simplificar as análises, considere-se um espaço tridimensional.

O vetor unitário \hat{n} normal a uma superfície arbitrária, num ponto determinado, é o vetor normal ao plano tangente à superfície neste ponto. Por sua vez, o plano tangente está definido por 2 vetores arbitrários, \underline{u} e \underline{v} , tangentes à superfície naquele ponto.

Logo,

$$\hat{n} = \frac{\underline{u} \times \underline{v}}{|\underline{u} \times \underline{v}|} \quad (I.16)$$

Seja a superfície $z = f(x,y)$

Para $x = x_p = \text{constante}$, a função $z = f(x_p, y)$ é uma curva resultante da intersecção do plano $x = x_p$ com a superfície $f(x,y)$.

Define-se o vetor \underline{v} , tangente à curva $z = f(x_p, y)$ no ponto $P(x_p, y_p, z_p)$, mostrado na Figura I.3, por

$$\underline{v} = v_y \underline{\hat{y}} + v_z \underline{\hat{z}} .$$

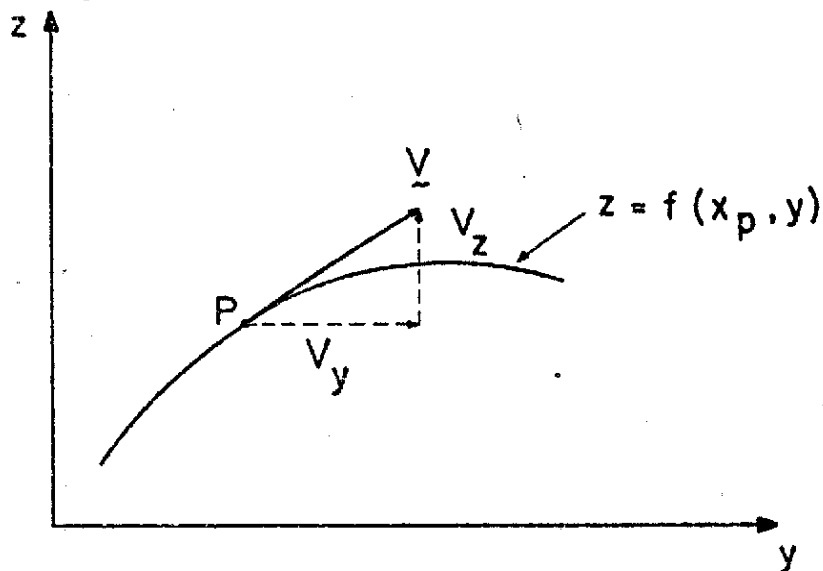


Fig. I.3 - Vetor \underline{v} tangente à curva que resulta da intersecção entre o plano $x=x_p$ e a superfície $z = f(x,y)$.

Por outro, lado da geometria da Figura I.3 pode-se ver que:

$$v_z = \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{y_p} v_y$$

onde deve-se observar que $\frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{y_p}$ é a tangente trigonométrica do ângulo

de inclinação do vetor \underline{v} sobre o eixo \hat{y} . Assim tem-se

$$\underline{v} = v_y \left(\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{y_p} \hat{z} \right)$$

Analogamente, o vetor \underline{u} , tangente à curva $z = f(x, y_p)$, pode facilmente ser achado

$$\underline{u} = u_x \left(\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x_p} \hat{z} \right)$$

Finalmente, usando (I.16), vem:

$$\hat{n} = \frac{\left(\hat{z} - \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}} \quad (I.17)$$

onde todas as derivadas são calculadas no ponto de interesse.

1.8 - O OPERADOR ∇ -

O operador ∇ , comumente chamado de "del" ou "Nabla", é um operador diferencial vetorial. Em coordenadas cartesianas este operador é definido por

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

ou, na notação compacta,

$$\nabla \equiv \hat{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (I.18)$$

Eis porque ∇ é chamado de operador diferencial. É claro que ∇ sozinho não significa nada. Este operador, quando aplicado a uma função de variáveis x_j , gera uma quantidade que pode ser vetorial, escalar ou tensorial dependendo da natureza da função e do tipo de interação.

1.8.1 - Gradiente: -

Seja a função escalar $\Phi (x_1 , x_2 , x_3)$

$$\nabla \Phi (x_1 , x_2 , x_3) \equiv \hat{e}_j \frac{\partial \Phi (x_1 , x_2 , x_3)}{\partial x_j} = \text{gradiente de } \Phi \quad (I.19)$$

Neste caso, a quantidade resultante é uma função vetorial. De acõrdo com a posição do operador ∇ , em relação à função escalar $\Phi (x_1 , x_2 , x_3)$ é importante notar a diferença que existe entre,

$$\nabla \Phi = \text{função vetorial}$$

e

$$\Phi \nabla = \text{operador diferencial vetorial}$$

Observe-se que ∇ se comporta como um vetor e, de fato, êle chega a gerar um vetor, mas sã depois de atuar sobre a função escalar, Φ , pois a nova quantidade não sã tem direção como, também, módulo, ou intensidade.

Agora algumas palavras sobre o significado físico do gradiente. Para isto suponha-se uma placa horizontal, de um material condutor de calor razoável, esquentada por uma vela num ponto qualquer (no seu centro, por exemplo), da maneira indicada na Figura I.4 (a). Evidentemente, o ponto mais quente da placa será o ponto de localização da vela. Em torno deste ponto haverá linhas de temperatura constante (isotermas) formando círculos concêntricos, mostrados na Figura I.4 (b). Considere-se um ponto, P, de placa e uma direção arbitrária, B-B', que passa por este ponto. Pode-se verificar que a variação de temperatura, ΔT , por unidade de comprimento Δl sobre esta direção depende do sentido (a partir do ponto P) em que Δl é considerado. Assim, no sentido $P \rightarrow B'$ a relação $\frac{\Delta T}{\Delta l} = \frac{T_2 - T_1}{\Delta l}$ é positiva, entanto no outro sentido, esta relação é negativa. Existe ainda outro detalhe igualmente importante. Tomando outra direção (a C-C' por exemplo), pode-se observar que o valor absoluto da relação anterior $\left| \frac{\Delta T}{\Delta l} \right|$ é diferente.

Assim,

$$\left| \frac{\Delta T}{\Delta l} \right|_{C-C'} > \left| \frac{\Delta T}{\Delta l} \right|_{B-B'}$$

ou quando $\Delta l \rightarrow 0$,

$$\left. \frac{dT}{dl} \right|_{C-C'} > \left. \frac{dT}{dl} \right|_{B-B'}$$

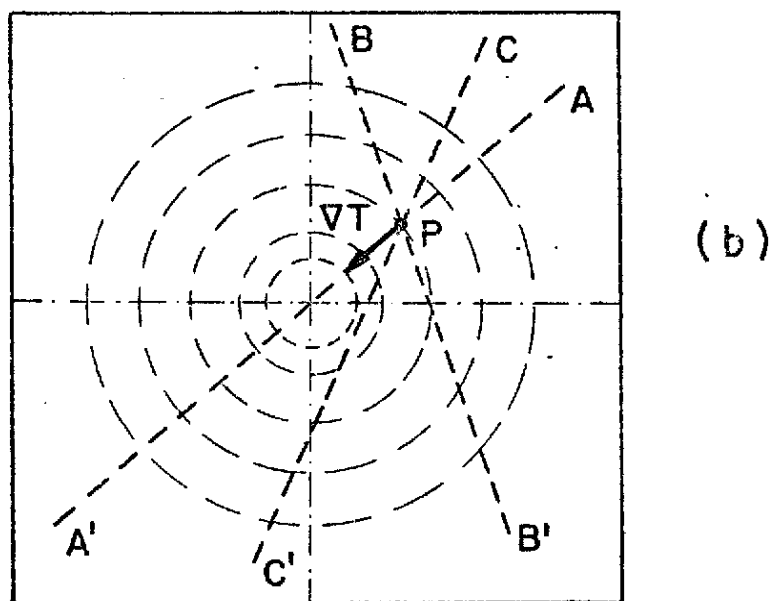
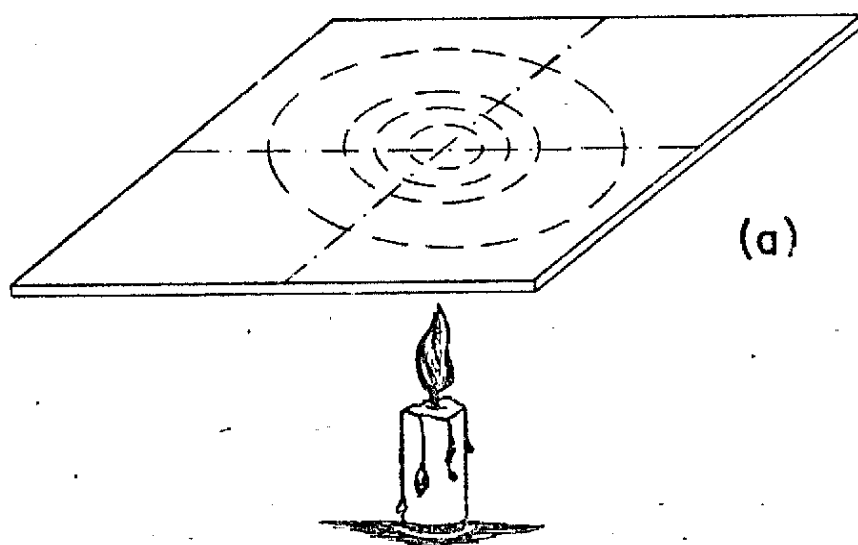


Fig. I.4 - a) Placa (condutora de calor) sendo esquentada no seu ponto central por uma vela. As linhas de traços indicam isothermas. b) A mesma placa vista de cima.

Portanto, é de se esperar que, para cada ponto da placa, exista uma direção e um sentido onde a derivada $\frac{dT}{dl}$ seja um máximo. Para o ponto P da Figura I.4, esta direção é a radial e o sentido, evidentemente, é para o centro. Este vetor é exatamente o gradiente da temperatura ∇T .

Um outro exemplo ilustrativo é o de um morro de superfície suficientemente lisa. Num ponto qualquer do morro haverá diferentes inclinações, para cada direção considerada. Para este caso, o problema do gradiente de superfície do morro, num ponto qualquer, é resolvido por uma bola de futebol. A direção de descida da bola será o sentido negativo do gradiente e sua aceleração estará intimamente relacionada com o valor absoluto do gradiente.

Dos exemplos anteriores pode-se notar que, matematicamente, é mais fácil calcular o gradiente de uma função escalar, num ponto dado, do que calcular a inclinação neste ponto numa direção arbitrária. Assim, no exemplo da Figura I.4 é mais fácil calcular ∇T no ponto P do que $\left. \frac{dT}{dl} \right|_{B-B'}$

Chamando de $\underline{\underline{d}}$ ao vetor unitário sobre a direção B-B', pode-se verificar que, de fato,

$$\left. \frac{dT}{dl} \right|_{B-B'} = (\nabla T) \cdot \underline{\underline{d}} \quad (I.20)$$

A expressão anterior é chamada de derivada direcional da função escalar T .

Quando, para cada ponto do espaço, é associada uma quantidade escalar, (no caso da placa o espaço é bidimensional e a quantidade escalar é a temperatura), pode-se observar que o uso do operador ∇ , em forma de gradiente, é um instrumento muito útil para ter uma descrição da função escalar neste espaço. Assim, por exemplo, a distribuição de temperaturas na atmosfera do nosso planeta é uma função muito complicada. Numa altura fixa sobre nível do mar, a temperatura da atmosfera varia de acordo com a posição geográfica, a época do ano, a hora local, as condições atmosféricas do local, etc. A temperatura é também uma função de altura. Portanto, num instante dado, a temperatura da atmosfera será $T = T(\underline{x})$, (onde \underline{x} é o vetor de posição), ou seja, a temperatura forma um *campo escalar*. É possível inferir que qualquer equação (ou equações) que pretenda descrever a dinâmica de atmosfera terá, necessariamente, que conter termos envolvendo ∇T .

É claro que assim como temos campos escalares, também temos *campos vetoriais*. Isto é, para cada ponto do espaço corresponde um vetor característico. Um exemplo de campo vetorial é a distribuição de ventos no nosso planeta (i.e., num instante dado existe um vetor "vento", com intensidade e direção, associada com cada ponto do espaço). A maneira mais comum de enfrentar problemas com este tipo de campos é outra aplicação do operador ∇ .

Observe-se que o divergente de uma função vetorial \vec{v} é uma quantidade escalar.

Outra maneira do operador ∇ atuar sobre a função vetorial \vec{v} é uma espécie de produto vetorial, chamado de *Rotacional*.

$$\nabla \times \vec{v} = \text{rotacional de } \vec{v} \quad (\text{I.23})$$

Deste ponto de vista, e de acordo com as representações (I.10) e (I.18) do produto vetorial e do operador ∇ respectivamente, o rotacional de um vetor \vec{v} pode ser expresso na forma:

$$\nabla \times \vec{v} \equiv \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} v_k$$

ou, mais simplesmente, a componente i do rotacional \vec{v} :

$$\nabla \times \vec{v} \Big|_i \equiv \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad (\text{I.24})$$

Note-se que a componente j do operador ∇ atua sobre a componente k do vetor \vec{v} . Portanto a sequência de índices no tensor de Levi-Civita tem que ser neste sentido, isto é, ϵ_{ijk} .

EXEMPLO 1.4 - A velocidade linear de um ponto \underline{r} ($\underline{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$), num sistema em rotação com velocidade angular constante, $\underline{\omega}$, é dado por

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

É muito interessante calcular o rotacional de \underline{v} , neste caso, porque seu resultado leva a pensar o rotacional em termos de rotação.

$$\begin{aligned} \nabla \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \Big|_i &\equiv \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon_{klm} \omega_l x_m) = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \omega_l \frac{\partial x_m}{\partial x_j} = \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \omega_l \frac{\partial x_m}{\partial x_j} = \omega_i \frac{\partial x_j}{\partial x_j} - \omega_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Analise-se o fator $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$. É evidente que $\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1$. Porém, $\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0$, pois, as x_i são variáveis independentes entre si. Isto quer dizer que $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$ cumpre com a definição do delta de Kronecker δ_{ij} .

Portanto,

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \tag{I.25}$$

Logo,

$$\nabla \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \Big|_i = \omega_i \frac{\partial x_j}{\partial x_j} - \omega_j \delta_{ij} = \omega_i \frac{\partial x_j}{\partial x_j} - \omega_i$$

Por outro lado

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_j} \equiv \nabla \cdot \underline{r} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 3$$

Assim então,

$$\nabla \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) \Big|_i = 2 \omega_i$$

Finalmente,

$$\nabla \times \underline{v} = \nabla \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = 2 \underline{\omega} \tag{I.26}$$

Ou seja, o rotacional da velocidade de um ponto, de um sistema em rotação, é proporcional à sua velocidade angular. Este resultado é muito significativo porque justifica, pelo menos neste exemplo, a denominação de rotacional à quantidade $\nabla \times v$. Note-se que se $\nabla \times v = 0$, o ponto não gira (ou não tem rotação), e o campo \underline{v} é chamado de "irrotacional".

1.9 - INTEGRAÇÃO DE CAMPOS VETORIAIS -

Nesta seção estudar-se-á a integração de $\Delta\phi$, $\nabla \cdot \underline{V}$ e $\nabla \times \underline{V}$. Estas integrais especiais ajudam na interpretação física das três operações e, também, dão origem aos famosos teoremas de Gauss e de Stokes.

1.9.1 - Integral de linha -

Seja a curva espacial (tridimensional) A-B da Figura I.5. Para cada ponto da curva existe um valor característico da função escalar $\phi(x_1, x_2, x_3)$. Chama-se $\phi(A)$, $\phi(1)$, $\phi(2)$, ..., $\phi(B)$ a função ϕ , avaliada nos pontos A, 1, 2, ..., B, respectivamente. Suponha-se que, para cada ponto da curva, existe o gradiente de ϕ .

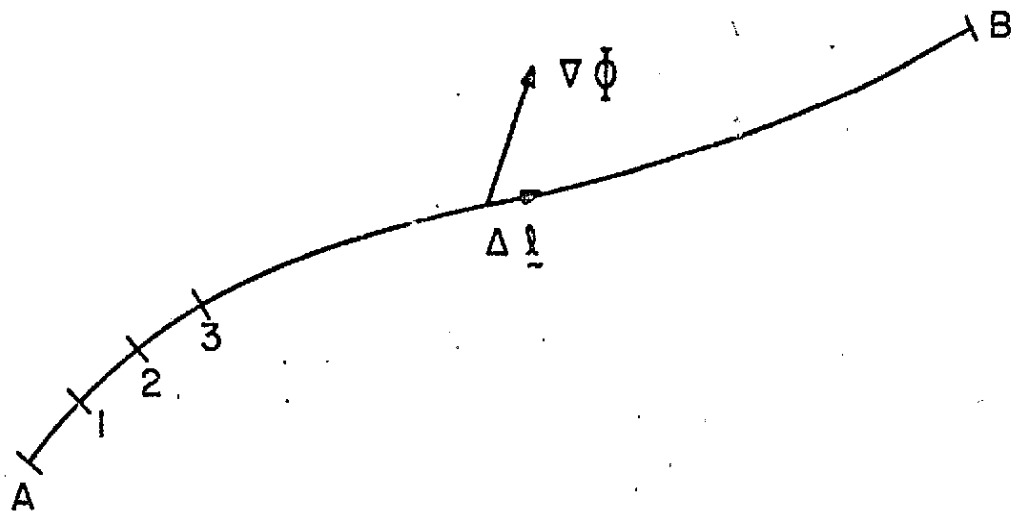


Fig. 1.5 - O Gradiente $\nabla\phi$ é calculado para cada ponto 1,2, ... etc.

Convém lembrar que $\nabla\phi$, em um ponto, é a taxa de variação máxima de ϕ nesse ponto, e que sua direção não é, necessariamente, ao longo da curva. A taxa de variação de ϕ ao longo da curva será obtida projetando $\nabla\phi$ sobre a curva, conforme foi indicado na expressão (I.20). Logo, a variação de ϕ entre 2 pontos separados por Δl será $\nabla\phi \cdot \Delta l$.

A variação total de ϕ entre os extremos da curva será:

$$\begin{aligned} \phi(B) - \phi(A) &= \nabla\phi(A) \cdot \Delta l_A + \nabla\phi(1) \cdot \Delta l_1 + \nabla\phi(2) \cdot \Delta l_2 + \dots = \\ &= \sum \nabla\phi(k) \cdot \Delta l_k \end{aligned}$$

Naturalmente, quando $\Delta l \rightarrow dl$ (comprimento infinitesimal), tem-se

$$\phi(B) - \phi(A) = \int_A^B \nabla\phi \cdot dl \equiv \int_A^B \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx_i \equiv \int_A^B d\phi \quad (I.27)$$

Este resultado indica que a integral de linha de um vetor $\underline{F} = \nabla\phi$, que resulta do gradiente de um escalar, independe do caminho percorrido durante a integração.

Agora considere-se um vetor arbitrário \underline{V} . Em geral o valor da integral, $\int_A^B \underline{V} \cdot d\underline{l}$, depende do contorno seguido na integração.

O caso mais simples de integral é quando o módulo do vetor $|\underline{V}|$ é constante, sendo o ângulo, θ , entre \underline{V} e a curva do contorno de integração, também constante. Neste caso.

$$\begin{aligned} \int_A^B \underline{V} \cdot d\underline{l} &= \int_A^B |\underline{V}| \cos \theta \, dl = |\underline{V}| \cos \theta \int_A^B dl = \\ &= |\underline{V}| L \cos \theta, \end{aligned}$$

onde L é o comprimento total entre A e B.

Quando o extremo B da integração, depois de percorrer um caminho determinado, se aproxima do extremo A, tem-se um contorno fechado de integração. Neste caso a representação usual é a seguinte:

$$\lim_{B \rightarrow A} \int_A^B \underline{V} \cdot d\underline{l} = \oint_C \underline{V} \cdot d\underline{l} \quad (I.28)$$

onde C identifica o contorno de integração. Deve-se ressaltar que o caminho de integração não precisa ficar num plano. Assim, C pode ser, por exemplo, o contorno de uma superfície aberta.

A integral (I.28) é chamada de *circulação do vetor* \underline{V} em torno do contorno C . Embora não exista uma convenção generalizada, é costume tomar, como caminho "positivo" de integração, ao sentido no qual a superfície fica sempre do lado esquerdo. Para este caso é possível também fazer uma extensão da regra da mão direita onde o polegar assinala o lado no qual se encontra a superfície aberta.

EXEMPLO 1.5 - Encontrar o trabalho efetuado ao deslocar uma partícula contra a força $\underline{F} = x_1^2 x_2 \hat{e}_1 - x_2^2 \hat{e}_2$ desde a origem de coordenadas até o ponto $(x_1 = 1, x_2 = 1)$ ao longo do caminho $x_2 = x_1^2$

$$\int_0^{(1,1)} \underline{F} \cdot d\underline{l} = \int_0^{(1,1)} (x_1^2 x_2 \hat{e}_1 - x_2^2 \hat{e}_2) \cdot (dx_1 \hat{e}_1 + dx_2 \hat{e}_2) =$$
$$= \int_0^1 x_1^2 x_2 dx_1 - \int_0^1 x_2^2 dx_2 = \int_0^1 x_1^4 dx_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}$$

EXEMPLO 1.6 - Avaliar:

$$\int_0^{(1,1,1)} \underline{F} \cdot d\underline{l}$$

onde

$$\underline{F} = (2x_1 + x_2^2) \hat{e}_1 - 3x_2x_3 \hat{e}_2 + \hat{e}_3$$

$$\int_0^{(1,1,1)} \underline{F} \cdot d\underline{l} = \int_0^{(1,1,1)} [(2x_1 + x_2^2) dx_1 - 3x_2 x_3 dx_2 + dx_3]$$

No plano normal a \hat{e}_3 , tem-se $x_1 = x_2$, e no plano normal a \hat{e}_1 , $x_2 = x_3$.

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{(1,1,1)} \underline{F} \cdot d\underline{l} &= \int_0^1 (2x_1 + x_1^2) dx_1 - 3 \int_0^1 x_2^2 dx_2 + \int_0^1 dx_3 = \\ &= 1 + \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

É interessante perguntar-se qual é a circulação do vetor definido por $\underline{F} = \nabla\phi$? Das relações (I.27) e (I.28) é evidente que:

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{l} = \oint \nabla\phi \cdot d\underline{l} = \oint d\phi = 0 \quad (I.29)$$

Os campos vetoriais \underline{F} que tem a propriedade anterior, são chamados de "*campos conservativos*". Portanto, campos conservativos são aqueles cuja integração de linha depende sō dos pontos extremos da integral e não do caminho de integração. Campos que não tem a propriedade (I.29) são chamados de campos "não conservativos".

1.9.2 - Teorema de Gauss (ou da Divergência) -

Considere-se o vetor \underline{F} como sendo o fluxo de uma grandeza física que passa através de uma superfície unitária, por unidade

de tempo. Assim, \underline{F} pode ser, por exemplo, um fluxo de radiação eletromagnética, uma corrente d'água, ou qualquer outra quantidade física que possa ser representada por um vetor.

A quantidade total (de radiação, água, etc) que passa através de uma superfície S , por unidade de tempo, será:

$$\Phi = \int_S \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_S \underline{F} \cdot \underline{\hat{n}} ds \quad (\text{I.30})$$

onde $\underline{\hat{n}}$ é o vetor normal unitário do elemento de superfície ds . A integração é feita sobre toda a área da superfície S .

A equação (I.30) é a definição matemática do *fluxo de um campo vetorial \underline{F}* .

Considere-se, agora, o cubo elementar (de dimensões reduzidas), que se encontra dentro de um campo \underline{F} , da Figura I.6. O fluxo do campo \underline{F} associado com a face ① do cubo é:

$$\Delta\Phi_1 = \underline{F} \cdot (-\underline{\hat{y}}) \Delta x \Delta z = -F_y \Delta x \Delta z$$

O sinal negativo aparece, naturalmente, porque a direção do vetor normal unitário do elemento $\Delta s = \Delta x \Delta z$ se encontra em sentido contrário à direção de crescimento do eixo y .

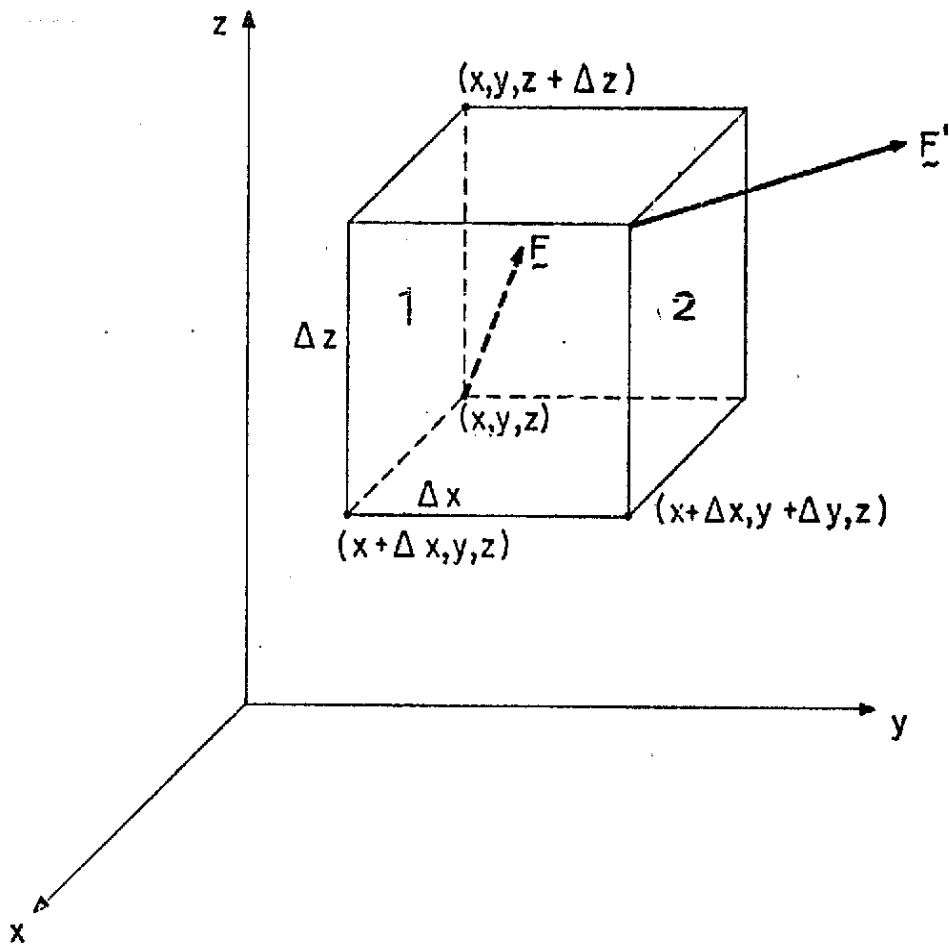


Fig. I.6 - Cubo Elemental num campo Vetorial \underline{F} .

O fluxo associado com a face ② do cubo,

$$\Delta\Phi_2 = \underline{F}' \cdot (\hat{y}) \Delta x \Delta z$$

De uma maneira geral, tem-se, $\underline{F}' = \underline{F} + \Delta\underline{F}$

Isto é, o ambiente dentro do cubo pode modificar as características de entrada do vetor \underline{F} . Por exemplo, pode ser um meio de absorção ou espalhamento da radiação eletromagnética. Pode também ser uma fonte geradora, como é o caso de um material radiativo.

$$\Delta\Phi_2 = F_y + \Delta y \Delta x \Delta z$$

A componente $F_{y + \Delta y}$ de \vec{F} pode ser expandida em série de Taylor em torno de F_y .

$$F_{y + \Delta y} = F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} (\Delta y)^2 + \dots$$

Para incrementos Δy muito pequenos, pode-se desprezar termos de 2.^a e de ordem superior, ficando,

$$F_{y + \Delta y} \approx F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y$$

Logo,

$$\Delta \phi_2 = F_y \Delta x \Delta z + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

O fluxo total associado com as duas faces (ou também com a direção y) será

$$\Delta \phi_{y \text{ total}} = \Delta \phi_1 + \Delta \phi_2 = \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Analogamente

$$\Delta \phi_{x \text{ total}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta \phi_{z \text{ total}} = \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Finalmente, o fluxo total sobre a superfície toda do volume é

$$\Delta\Phi_{\text{total}} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \nabla \cdot \underline{F} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Por outro lado,

$$\Delta\Phi_{\text{total}} = \underline{F} \cdot \underline{\Delta S}$$

onde ΔS é a área total do cubo infinitesimal.

Logo,

$$\underline{F} \cdot \underline{\Delta S} = \nabla \cdot \underline{F} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (\text{I.31})$$

Esta expressão, quando representada na forma

$$\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{\Delta S}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\text{Fluxo total através da superfície do cubo}}{\text{volume do cubo elementar}},$$

ou ainda numa forma mais geral

$$\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\text{Fluxo do vetor } \underline{F} \text{ através da superfície que envolve o volume } dv}{\text{volume } dv} \quad (\text{I.32})$$

permite inferir uma interpretação física do significado do divergente. Suponha-se que $\underline{F} = \rho \underline{V}$ seja o fluxo de massa de um gas de densidade ρ e velocidade \underline{V} . Para este caso, a quantidade $\nabla \cdot (\rho \underline{V})$ representa a taxa de saída do gas em um ponto, por unidade de volume.

Se a taxa de entrada do gas, no ponto, é a mesma que da saída, evidentemente, a massa do gas contida no volume é conservada.

Chamando

f = diferença entre a fonte de criação e o sumidouro de gas por unidade de volume,

a quantidade de gas existente por unidade de volume, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, num dado instante, será:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = f - \nabla \cdot (\rho \underline{V})$$

Na ausência de fontes e sumidouros, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{V}) = 0 \quad (\text{I.33})$$

Esta equação exprime a conservação de massa no volume unitário e é conhecida como "*Equação da Continuidade*" de massa.

Quando o campo vetorial \underline{F} não está relacionado com o movimento de alguma coisa, a interpretação de $\nabla \cdot \underline{F}$ é um pouco diferente. Por exemplo, em eletrostática sabe-se que o campo elétrico, em termos da densidade de carga $\rho(\underline{x})$ no sistema M.K.S., no vácuo, é dado por

$$\nabla \cdot \underline{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{x}) \quad (\epsilon_0 - \text{constante dielétrica}).$$

Neste caso, o divergente do campo elétrico está relacionado diretamente com a fonte (cargas elétricas) que gera o campo. O campo "diverge", ou "converge" (dependendo do sinal de ρ), mais fortemente nas regiões onde a densidade de carga é maior.

Voltando à equação (I.31), e aplicando este resultado a um volume finito, tem-se:

$$\int_S \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_V \nabla \cdot \underline{F} \, dx \, dy \, dz = \int_V \nabla \cdot \underline{F} \, d^3x \quad (I.34)$$

onde d^3x é o elemento de volume. O elemento de superfície $d\underline{s}$ é também representado por $d\underline{s} = \underline{\hat{n}} \, d^2x$. A relação (I.34) é conhecida como o *Teorema da divergência de Gauss*, ou, simplesmente, o Teorema de Gauss. Note-se que a integral da esquerda é efetuada sobre uma superfície fechada S que limita o volume V , que é o mesmo volume de integração no membro da direita, na equação (I.34). A relação anterior é muito usada na dedução ou transformação de fórmulas, assim como, também, facilita a avaliação de uma integração de volume quando sua correspondente integral de superfície tem características complicadas, ou vice-versa.

EXEMPLO 1.7 - Seja avaliar a integral $\int_S \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_S \underline{F} \cdot \underline{\hat{n}} \, d^2x$ onde $\underline{F} = x \, \underline{\hat{x}}$ e S é a superfície de um cubo unitário ($V=1$) com a origem de coordenadas no centro do cubo da maneira indicada na Figura I.7.

Este é um exemplo que, além de mostrar o uso do teorema de Gauss, ilustra também a manipulação da integral de superfície. Fica evidente que,

$$\int_S \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_V \nabla \cdot \underline{F} \, d^3x = \int_V d^3x = V = 1$$

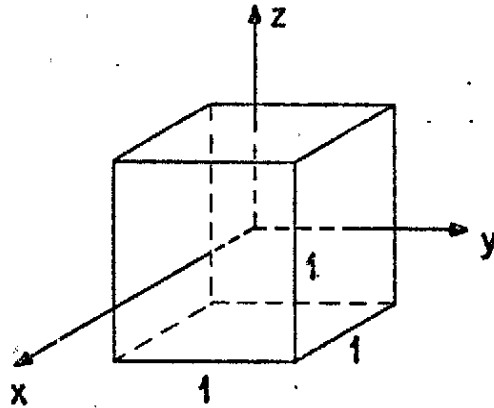


Fig. I.7 - Cubo unitário e sua orientação para o Exemplo 1.7.

Contudo, e a título de exercício, efetua-se a integral proposta.

$$\int_S \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_S (x \underline{\hat{x}}) \cdot [dy dz \underline{\hat{x}} + dy dz (-\underline{\hat{x}}) + dx dy \underline{\hat{z}} + \dots]$$

$$= \int_{\text{face frontal}} (x = \frac{1}{2}) dy dz - \int_{\text{face posterior}} (x = -\frac{1}{2}) dy dz = 1$$

face frontal face posterior

Observe-se que este resultado, embora obtido de uma maneira simples, é mais diretamente obtido mediante a aplicação do teorema de Gauss.

Suponha-se, no exemplo anterior, que $\underline{F} = |x| \underline{\hat{x}}$. Neste caso, a última integral fica:

$$\int_S \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_{\text{frontal}} \left(|x| = \frac{1}{2} \right) dy dz - \int_{\text{posterior}} \left(|x| = \frac{1}{2} \right) dy dz = 0$$

Usando o teorema de Gauss, e com $\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial |x|}{\partial x} = 1$, tem-se

$$\int_V dx dy dz = \int_{\left| \frac{1}{2} \right|}^{\left| \frac{1}{2} \right|} dx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dz = 0$$

EXEMPLO 1.8 - No teorema de Gauss, suponha-se que $\underline{F} = \underline{A} \times \underline{W}$, onde \underline{A} é um vetor constante, portanto

$$\int_S (\underline{A} \times \underline{W}) \cdot \underline{\hat{n}} d^2x = \int_V \nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{W}) d^3x$$

O primeiro membro, usando-se a notação indicial, pode ser transformado da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \int_S (\underline{A} \times \underline{W}) \cdot \underline{\hat{n}} d^2x &\equiv \int_S \varepsilon_{ijk} A_j W_k n_i d^2x = \\ &= A_j \int_S \varepsilon_{jki} W_k n_i d^2x \equiv \underline{A} \cdot \int_S \underline{W} \times \underline{\hat{n}} d^2x \end{aligned}$$

onde os n_i foram usados como as componentes de $\underline{\hat{n}}$.

O segundo membro da relação de Gauss, por sua vez, fica

$$\int_V \nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{W}) d^3x \equiv \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} A_j W_k d^3x =$$

$$= - A_j \int_V \epsilon_{jik} \frac{\partial}{\partial x_i} W_k d^3x \equiv - \underline{A} \cdot \int_V \nabla \times \underline{W} d^3x$$

Igualando as expressões obtidas, para os dois membros do teorema de Gauss, tem-se uma identidade integral igualmente importante

$$\int_S \underline{W} \times \underline{\hat{n}} d^2x = - \int_V \nabla \times \underline{W} d^3x$$

1.9.3 - Teorema de Stokes -

Define-se a *circulação do vetor \underline{F}* como a integral de linha do vetor \underline{F} ao longo de um contorno fechado que encerra uma área finitada como se indica na Figura I.8.

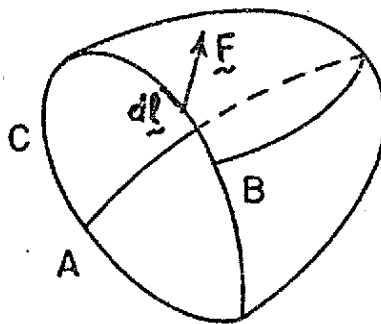


Fig. I.8 - Circulação do vetor \underline{F} sobre a curva C.

$$\text{Circulação de } \underline{F} \text{ sobre } C = \oint_C \underline{F} \cdot d\underline{l}$$

A curva C , que é o contorno que limita a superfície S , não precisa necessariamente ficar num plano. Este conceito já tinha sido introduzido no fim da Subseção 1.9.1.

Suponha-se que a superfície S é dividida em duas partes pela linha $A-B$ da Figura I.9. A soma das circulações seguindo os contornos 1 e 2 é igual à circulação única ao longo de C . Isto é evidente, pois, as integrações no trecho $A-B$ são iguais e de sentido contrário para cada circulação e, portanto, se anulam mutuamente. Assim,

$$\oint_C = \oint_1 + \oint_2$$

Circulação (curva C) = Circulação (1) + Circulação (2).

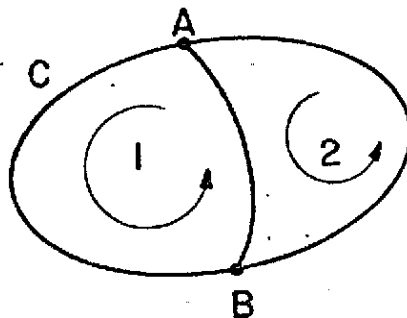


Fig. I.9 - Circulação ao longo dos caminhos 1 e 2 e equivalente à circulação ao longo da curva C .

Se se continuar dividindo a área, aumentando o número dos "circuitos", é fácil de ver que as integrações sobre todos os caminhos internos se anulam. Suponha-se, então, a sub-divisão em circuitos muito pequenos, de tal forma que cada um seja um quadrado elementar (ver Figura I.10). Orientando o sistema de coordenadas de maneira que um desses quadrados fique no plano x-y, pode-se calcular a circulação do vetor \underline{F} ao longo deste quadrado adotando-se o sentido positivo indicado na Figura I.10.

Assim,

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{l} = F_x(x,y) \Delta x + F_y(x + \Delta x, y) \Delta y - \\ - F_x(x + \Delta x, y + \Delta y) \Delta x - F_y(x, y + \Delta y) \Delta y$$

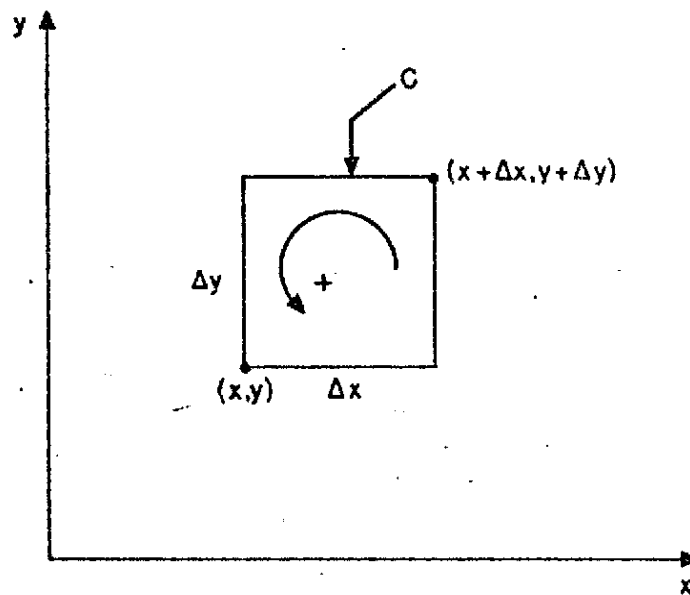


Fig. I.10 - Circulação ao longo de um quadrado muito pequeno.

onde:

$F_x(x, y)$ - Componente x do vetor \underline{F} avaliado no ponto (x, y)

$F_y(x + \Delta x, y)$ - Componente y do vetor \underline{F} avaliado no ponto $(x + \Delta x, y)$, etc.

Desenvolvendo-se a componente $F_y(x + \Delta x, y)$ em série de Taylor desprezando-se os termos de 2a. e ordem superior em Δx , tem-se,

$$F_y(x + \Delta x, y) \approx F_y(x, y) + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x$$

Analogamente:

$$F_y(x, y + \Delta y) \approx F_y(x, y) + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y \approx F_y(x, y) + dF_y \approx F_y(x, y)$$

Desenvolvendo, por último, a função $F_x(x + \Delta x, y + \Delta y)$ em série de Taylor em torno de $F_x(x, y)$, e com as considerações anteriormente apontadas, substituem-se esses resultados na integral de linha. O resultado, depois das simplificações pertinentes, é o seguinte:

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{l} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

Aqui pode-se reconhecer a identidade

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \nabla \times \underline{F} \Big|_z = (\nabla \times \underline{F}) \cdot \underline{\hat{z}}$$

onde $(\nabla \times \underline{F}) \cdot \underline{\hat{z}}$ = componente z de $\nabla \times \underline{F}$.

Assim,

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{l} = (\nabla \times \underline{F}) \cdot \underline{\hat{z}} \Delta x \Delta y = (\nabla \times \underline{F}) \cdot \underline{\hat{z}} \Delta s \quad (I.35)$$

Este resultado é a circulação do vetor \underline{F} ao longo do caminho que limita a superfície elementar Δs . A relação anterior é muito importante na interpretação física do rotacional:

$$(\nabla \times \underline{F}) \cdot \underline{\hat{n}} = \frac{1}{\Delta s} \oint_C \underline{F} \cdot d\underline{l} \quad (I.36)$$

Contudo, antes é preciso alertar que a interpretação física de $\nabla \times \underline{F}$ depende da natureza do campo vetorial. Assim, por exemplo se \underline{F} for um campo de forças, então o rotacional representará o trabalho realizado pela força \underline{F} , ao percorrer o caminho fechado C, por unidade de área encoberta. Por exemplo, se $\underline{F} = \underline{E}$ = campo elétrico, e multiplicando ambos os membros pela carga elétrica q, tem-se:

$$q (\nabla \times \underline{E}) \cdot \underline{\hat{n}} = \frac{1}{\Delta s} \oint_C q \underline{E} \cdot d\underline{l} =$$
$$= \left(\begin{array}{l} \text{trabalho que o campo elétrico } \underline{E} \text{ realiza sobre a carga } q \text{ ao} \\ \text{percorrer o caminho } C \text{ por unidade de área encoberta.} \end{array} \right)$$

Entretanto, neste caso, como $\underline{E} = \nabla\phi$ é o gradiente de potencial elétrico, e lembrando a equação (I.29) (ou também, efetuando a operação $\nabla \times \nabla\phi = 0$) tem-se

$$\oint \underline{E} \cdot d\underline{l} = 0$$

Este resultado indica que o campo eletrostático, é um campo conservativo, ou também, é um campo irrotacional.

Se \underline{V} representa o campo de velocidade de um fluido, então $\nabla \times \underline{V}$ significa o momento angular do fluido naquele ponto. Lembrar que foi esta a conclusão que se chegou no Exemplo I.4.

A relação (I.35) representa o teorema de Stokes para uma superfície elementar. Esta equação, para uma superfície aberta, finita e contínua, toma a forma seguinte

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{l} = \int_S (\nabla \times \underline{F}) \cdot \underline{\hat{n}} \, d^2x \quad (I.37)$$

onde $\underline{\hat{n}}$ é o vetor normal unitário do elemento de superfície d^2x e S é a superfície aberta cujo contorno é a curva fechada C . A relação (I.37) é o conhecido *Teorema de Stokes*.

EXEMPLO 1.9 - Seja avaliar a integral

$$I = \int_S (\nabla \times \underline{F}) \cdot \underline{\hat{n}} \, d^2x$$

Pode-se ver que a nova variável θ tem como limites 0 e 2π .

Portanto,

$$I = \int_0^{2\pi} [(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) (- \operatorname{sen} \theta) d\theta - 2 \cos^2 \theta \cos \theta d\theta]$$

$$I = - \pi$$

EXEMPLO 1.10 - Seja a integral,

$$\oint_C \left[- \frac{x_2}{2} dx + \frac{x_1}{2} dx_2 \right]$$

Provar que esta integral, no plano $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2$, representa a área da superfície S contida dentro da curva fechada C.

A integral proposta pode ser expressa na forma:

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{l} = \oint_C \left(\frac{-x_2}{2} \hat{e}_1 + \frac{x_1}{2} \hat{e}_2 \right) \cdot (\hat{e}_1 dx_1 + \hat{e}_2 dx_2)$$

Assim, pelo teorema de Stokes,

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{l} = \int_S (\nabla \times \underline{F}) \cdot \hat{n} d^2x$$

Observe-se que $\hat{n} = \hat{e}_3$.

Portanto,

$$(\nabla \times \underline{F}) \cdot \hat{e}_3 \equiv \epsilon_{3ij} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

$$\epsilon_{3ij} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \equiv \epsilon_{312} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \epsilon_{321} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{1}{2} - \left(- \frac{1}{2} \right) = 1$$

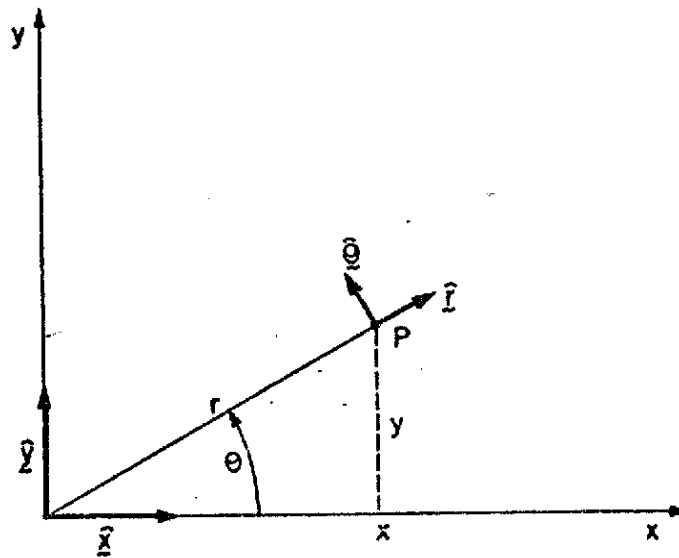


Fig. I.11 - Sistema bidimensional de coordenadas ortogonais, cartesiano e polar, respectivamente.

É por esta razão que o sistema cartesiano de coordenadas é também chamado de ortogonal fixo.

Existem, naturalmente, outros sistemas de coordenadas mais genéricos onde, para pontos diferentes do espaço, não só a orientação é variável, senão também o ângulo entre os vetores base. Este tipo de coordenadas é convenientemente manipulado no cálculo tensorial que será o tema do Capítulo III. Nesta seção limitaremos o estudo aos sistemas de coordenadas ortogonais em geral.

1.10.1 - Elemento de linha e métricas -

Voltando, novamente, a Figura 1.11, pode-se ver que a relação existente entre as coordenadas do ponto P nos dois sistemas

(polar e cartesiano) \bar{e} o seguinte:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & x &= x(r, \theta) \\ y &= r \sin \theta & y &= y(r, \theta) \end{aligned} \quad , \text{ ou de uma maneira mais geral,}$$

Recíprocamente,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} & r &= r(x, y) \\ \theta &= \text{arc tg } \frac{y}{x} & \theta &= \theta(x, y) \end{aligned} \quad , \text{ ou de uma maneira mais geral:}$$

Logo, em princípio, pode-se passar de um sistema de coordenadas ortogonais arbitrárias q_1 , q_2 e q_3 , ao cartesiano fixo x, y, z , desde que se tenham as relações

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \tag{I.38}$$

ou, vice-versa, se se dispõe das relações recíprocas,

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x, y, z) \\ q_2 &= q_2(x, y, z) \\ q_3 &= q_3(x, y, z) \end{aligned} \tag{I.39}$$

Observe-se que, dimensionalmente, nem todas as unidades (de q_1 , q_2 e q_3) são necessariamente de comprimento, apesar das coordenadas cartesianas terem estas unidades. Por exemplo, no caso das coordenadas polares, as dimensões de $q_1 = r$ e $q_2 = \theta$ são de comprimento e ângulo, res

pectivamente.

O sistema de coordenadas q_1, q_2 e q_3 de um ponto qualquer do espaço, onde o sistema de vetores base é ortogonal (em geral de orientação variável), é chamado de *sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais*. Neste sistema de coordenadas, o valor absoluto do elemento de linha (ou comprimento) $|d\mathbf{l}|$ não é, evidentemente, representado por $\sqrt{(dq_1)^2 + (dq_2)^2 + dq_3^2}$ em analogia com o elemento de comprimento $|d\mathbf{l}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ no sistema cartesiano, porquanto nem todos os elementos dq_i tem unidades de comprimento, conforme assinalado anteriormente.

Para determinar o valor absoluto do elemento de linha $|d\mathbf{l}|$ em termos das coordenadas dq_i , diferenciam-se, uma a uma, as equações (I.38). Assim,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \equiv \frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i$$

onde se usa a convenção de índices repetidos. Analogamente,

$$dy \equiv \frac{\partial y}{\partial q_i} dq_i \quad ; \quad dz \equiv \frac{\partial z}{\partial q_i} dq_i$$

Portanto, o elemento de linha, que no sistema ortogonal fixo é dado por

$$d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l} = (d\mathbf{l})^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 ,$$

e considerando que

$$dx^2 = (dx)^2 \equiv \frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial x}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} dq_i dq_j,$$

é dado por

$$(dl)^2 \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) dq_i dq_j \quad (I.40)$$

Esta expressão tem que ser a mesma que se obtém quando o elemento de linha dl é expresso em termos das suas componentes no sistema curvilíneo.

$$dl = h_1 dq_1 \hat{u}_1 + h_2 dq_2 \hat{u}_2 + h_3 dq_3 \hat{u}_3 \quad (I.41)$$

onde os fatores h_i , fazendo produto com dq_i , garantem a dimensionalidade de comprimento de cada componente, e os vetores unitários \hat{u}_i são os vetores base do sistema. (Evidentemente, $\hat{u}_i \cdot \hat{u}_j = \delta_{ij}$, pois eles tomam um sistema ortogonal.

(A equação (I.41) escrita na notação inicial $dl \equiv h_i dq_i \cdot \hat{u}_i$ aparentemente terá três índices repetidos, entrando em conflito com a convenção de soma de índices repetidos adotada no início deste Capítulo. Entretanto este problema não existe pois o mais apropriado seria ignorar os índices associados com os parâmetros h , já que, para cada dq_i , corresponde somente um h_i).

Assim,

$$\begin{aligned} d\underline{l} \cdot d\underline{l} &= (dl)^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 \equiv \\ &\equiv h_i^2 (dq_i)^2 \end{aligned}$$

ou de uma maneira conveniente:

$$(dl)^2 \equiv h_i h_j dq_i dq_j \delta_{ij} \quad (\text{I.42})$$

Comparando este resultado com a equação (I.40), nota-se que a equação (I.40) para um sistema ortogonal (pois não tinha sido considerada esta restrição na derivação desta fórmula) deve ter a forma:

$$(dl)^2 \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) dq_i dq_j \delta_{ij}$$

ou seja

$$(dl)^2 \equiv \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \right] (dq_i)^2 \quad (\text{I.43})$$

Comparando esta última equação com a (I.42), tem-se:

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \quad (\text{I.44})$$

Os coeficientes h_i , assim encontrados, são chamados de *métricas* e tem valores característicos para cada sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas. Pode-se verificar que para o sistema cartesiano, $h_i^2 = 1$.

Até agora, e por definição, tem sido feita referência ao conjunto q_1, q_2 e q_3 como as coordenadas curvilíneas de um ponto no espaço Euclidiano tridimensional. Porém, nada foi esclarecido quanto à natureza destas coordenadas. Em coordenadas cartesianas, a posição de um ponto $P(x, y, z)$ é determinado pela intersecção de três planos ortogonais entre si, o $x = \text{constante}$, o $y = \text{constante}$ e o $z = \text{constante}$. Isto é, no sistema cartesiano, a posição de um ponto no espaço é determinado pela intersecção de três superfícies planas. Analogamente, em coordenadas curvilíneas, a posição de um ponto é determinado pela intersecção de três superfícies curvas. Para o caso bidimensional, um ponto se encontra determinado pela intersecção de duas curvas. Assim, por exemplo, nas coordenadas polares da Figura I.11, o ponto P se encontra determinado pela intersecção do círculo de raio $r = \text{constante}$, e a reta $\theta = \text{constante}$. O sistema (bidimensional) polar é uma simplificação de um sistema de coordenadas mais geral chamado de cilindro-circular, conforme será visto mais tarde.

Da discussão anterior, pode-se ver que os parâmetros q_1, q_2 e q_3 são uma "medida" do ponto comum às três superfícies características do sistema de coordenadas. Estas intersecções poderiam ser medidas em unidades de comprimento, a partir de pontos de referência convencionais (assim, por exemplo, na Figura I.11, o ponto P poderia ter sido especificado por r e pelo comprimento do arco PQ), porém, é geralmente mais conveniente fazer uso de outras propriedades geométricas, igualmente representativas, porém, mais facilmente mensuráveis.

1.10.2 - Vetores base. Elemento de superfície e o Jacobiano -

Na equação (I.41) tem-se mencionado os vetores base $\underline{\hat{u}}_1$, $\underline{\hat{u}}_2$ e $\underline{\hat{u}}_3$ do sistema curvilíneo ortogonal, porém, não foi dito como obtê-los. Visando esta finalidade, considere-se o vetor de posição \underline{x} , expresso em coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned}\underline{x} &= x_1(q_1, q_2, q_3) \underline{\hat{e}}_1 + x_2(q_1, q_2, q_3) \underline{\hat{e}}_2 + x_3(q_1, q_2, q_3) \underline{\hat{e}}_3 \\ &\equiv x_i \underline{\hat{e}}_i\end{aligned}\tag{I.45}$$

Derivando o vetor \underline{x} em relação a uma das coordenadas q_j , do sistema curvilíneo, tem-se:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_j} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \underline{\hat{e}}_i$$

Esta derivada significa a variação do vetor \underline{x} ao longo de q_j (ou também, derivada de \underline{x} na direção q_j). Fica evidente que o resultado será outro vetor na direção $\underline{\hat{u}}_j$.

Portanto,

$$\underline{\hat{u}}_j = \frac{\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_j}}{\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_j} \right|}\tag{I.46}$$

Observe-se que:

$$\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_j} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_j}\right)^2} = h_j$$

relação já determinada anteriormente, sob outro ponto de vista.

Portanto,

$$\underline{\tilde{u}}_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_j} \quad (I.47)$$

onde a repetição do índice j não implica somatória. É interessante verificar que os vetores $\underline{\tilde{u}}_j$ são, de fato, ortogonais entre si.

Conforme mencionado anteriormente, o produto das métricas, pelas respectivas coordenadas, garante a dimensionalidade de comprimento de maneira a satisfazer a Equação (I.41). Desta maneira, um elemento de superfície ds , é dado por:

$$ds = (h_i dq_i) (h_j dq_j) = h_i h_j dq_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (I.48)$$

onde os índices repetidos (outra vez) não indicam somatória. Assim, de uma maneira similar pode-se ver que o elemento de volume é dado por

$$dv = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (I.49)$$

Embora o elemento de área ds seja normalmente escolhido sobre a "superfície mais característica" do sistema de coordenadas. (por exemplo, em coordenadas esféricas, a superfície característica é

a esfera que contém o ponto considerado; em coordenadas cilíndricas, o cilindro que passa pelo ponto, etc.) a combinação numérica dos índices da Equação (I.48), representa três possíveis elementos de área do sistema de coordenadas. A Equação (I.48), escrita em forma vetorial, e supondo que os versores $\underline{\hat{u}}_1$ e $\underline{\hat{u}}_2$ se encontram sobre a superfície característica, tem a forma

$$d\underline{s} = (h_1 dq_1 \underline{\hat{u}}_1) \times (h_2 dq_2 \underline{\hat{u}}_2) = h_1 h_2 dq_1 dq_2 \underline{\hat{u}}_3 \quad (\text{I.50})$$

onde foi suposto que os vetores base formam um sistema (ortogonal) de "mão direita", ou seja:

$$\underline{\hat{u}}_1 \times \underline{\hat{u}}_2 = \underline{\hat{u}}_3 = - \underline{\hat{u}}_2 \times \underline{\hat{u}}_1$$

Suponha-se, agora, que o elemento $d\underline{s}$ é um elemento de área num sistema bidimensional, ou seja, o elemento de área de uma superfície plana. Assim, segundo a Equação (I.47), tem-se,

$$\begin{aligned} d\underline{s} &= h_1 h_2 dq_1 dq_2 \underline{\hat{u}}_1 \times \underline{\hat{u}}_2 = h_1 h_2 dq_1 dq_2 \left[\frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \underline{\hat{e}}_1 + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \underline{\hat{e}}_2 \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2} \underline{\hat{e}}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \underline{\hat{e}}_2 \right) \right] \\ &= dq_1 dq_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_2} - \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \right) \underline{\hat{e}}_3 \end{aligned}$$

Igualando os módulos em ambos os membros, e chamando ao fator entre parênteses

$$J \left(\begin{array}{c} x_1, x_2 \\ q_1, q_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \end{array} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \end{vmatrix}$$

tem-se

$$|ds| = ds = \pm J \left(\begin{array}{c} x_1, x_2 \\ q_1, q_2 \end{array} \right) dq_1 dq_2 \quad (I.51)$$

Os sinais \pm são usados de maneira a fazer com que a expressão anterior seja sempre uma quantidade positiva. Na expressão anterior, $J \left(\begin{array}{c} x_1, x_2 \\ q_1, q_2 \end{array} \right)$ é chamado de "Jacobiano da transformação do sistema de coordenadas x_1 e x_2 em relação ao q_1 e q_2 ". Observe-se que, conhecendo o Jacobiano, assim definido, é possível escrever o elemento de área ds sem precisar da representação geométrica das coordenadas. As representações mais comuns do Jacobiano da transformação entre dois sistemas de coordenadas, são as seguintes

$$J \left(\begin{array}{c} x_1, x_2 \\ q_1, q_2 \end{array} \right) = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(q_1, q_2)} = \left| \frac{\partial(x)}{\partial(q)} \right|$$

Assim como o elemento de área, expresso num sistema de coordenadas, esta relacionado pelo Jacobiano com o seu similar num outro sistema, o elemento de volume dv também é relacionado pelo Jacobiano de ambos os sistemas.

$$dv = J \left(\begin{array}{c} x_1, x_2, x_3 \\ q_1, q_2, q_3 \end{array} \right) dq_1 dq_2 dq_3 \quad (I.52)$$

De uma maneira geral, pode-se dizer que o Jacobiano de um sistema em relação ao outro, \bar{e} o acoplamento entre os elementos de espaço de ambos os sistemas agrupados no elemento de "volume" do espaço (d^3x , se for tridimensional, e d^2x se for bidimensional).

EXEMPLO 1.11 - Considerem-se as coordenadas $q_1 = u$ e $q_2 = \phi$ definidas mediante as relações

$$\begin{aligned}x &= a u \cos \phi \\x &= b u \sin \phi\end{aligned}\quad \text{onde, } u \geq 0 \text{ e } 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Pode-se ver que as curvas $u = \text{constante}$ representam elipses:

$$\left(\frac{x_1}{au}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{bu}\right)^2 = 1$$

Entretanto, as curvas $\phi = \text{constante}$ representa linhas retas do tipo:

$$x_2 = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \phi x_1$$

O elemento de área \bar{e} é dado por:

$$ds = du d\phi \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \phi} & \frac{\partial x_2}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

$$ds = (a b u \cos^2 \phi + a b u \sin^2 \phi) du d\phi$$

$$ds = a b u du d\phi$$

As coordenadas u e ϕ são coordenadas elípticas e o elemento de área encontrado é muito útil na integração de superfícies elípticas. Note-se que, quando $a=b$, e chamando $au=r$, tem-se as conhecidas coordenadas polares. Observe-se, também, que o elemento ds , para as coordenadas polares, é facilmente obtido da sua representação geométrica, o mesmo não acontecendo em coordenadas elípticas.

1.10.3 - Dois importantes sistemas de coordenadas curvilíneas.

Além do sistema cartesiano de coordenadas, os dois mais conhecidos pela sua utilidade, em problemas de geometria simples, são o sistema Esférico-Polar e o Cilíndrico-Circular.

No sistema *Esférico-Polar*, um ponto no espaço se encontra determinado pela especificação da superfície esférica $r = \text{constante}$, do cone $\theta = \text{constante}$ e do semiplano $\phi = \text{constante}$. Em outras palavras, o ponto P da Figura I.12 se encontra definido pela sua distância da origem, r , a colatitude, θ , e azimute, ϕ .

As direções de crescimento das três coordenadas, definem as direções e sentidos dos vetores base ortogonais $\underline{\hat{r}}$, $\underline{\hat{\theta}}$, $\underline{\hat{\phi}}$.

A relação das coordenadas, assim definidas, com as cartesianas é a seguinte:

$$x = r \sin \theta \cos \phi; \quad y = r \sin \theta \sin \phi; \quad z = r \cos \theta \quad (\text{I.53})$$

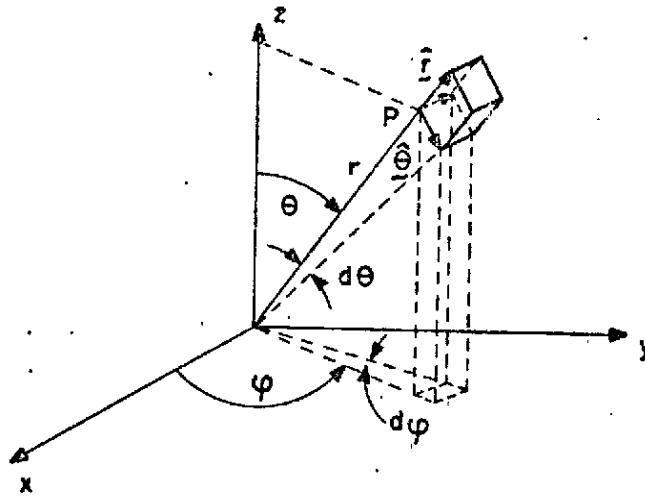


Fig. I.12 - Sistema de coordenadas esférica-polar.
O vetor $\hat{\phi}$ é definido por $\hat{\phi} = \hat{r} \times \hat{\theta}$.

Fazendo-se a correspondência:

$$q_1 = r \quad ; \quad q_2 = \theta \quad \text{e} \quad q_3 = \phi$$

e usando-se a equação (I.44), tem-se os seguintes valores para as métricas:

$$h_1 = 1 \quad ; \quad h_2 = r \quad h_3 = r \text{ sen } \theta$$

Na Figura I.12, o elemento de área $\hat{r} ds$ pode ser obtido fazendo coincidir com as direções de $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ os elementos infinitesimais $d\theta$ e $d\phi$ respectivamente, logo

$$\hat{r} ds = (r d\theta) (r \text{ sen } \theta d\phi) \hat{r} = r^2 \text{ sen } \theta d\theta d\phi \hat{r} \quad (I.54)$$

De uma maneira análoga, usando-se a geometria da Figura I.12, ou usando-se a equação (I.52), pode-se verificar que

$$dv = r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \quad (\text{I.55})$$

No sistema *Cilíndrico-Circular*, um ponto no espaço \tilde{e} é definido pela intersecção do cilindro de base circular, paralelo ao eixo z , $\rho = \text{constante}$, com o semiplano $\phi = \text{constante}$ e com o plano horizontal $z = \text{constante}$. Assim, as coordenadas do ponto são ρ , ϕ e z respectivamente da maneira indicada na Figura I.13.

A orientação e sentido dos vetores base $\tilde{\rho}$, $\tilde{\phi}$ e \tilde{z} , no ponto considerado, são definidas, também, pela direção de crescimento das coordenadas.

A relação destas coordenadas com o cartesiano é a seguinte:

$$x = \rho \cos \phi ; y = \rho \operatorname{sen} \phi ; z = z \quad (\text{I.56})$$

Chamando

$$q_1 = \rho ; q_2 = \phi \text{ e } q_3 = z$$

as métricas correspondentes tem os seguintes valores

$$h_1 = 1 ; h_2 = \rho ; h_3 = 1$$

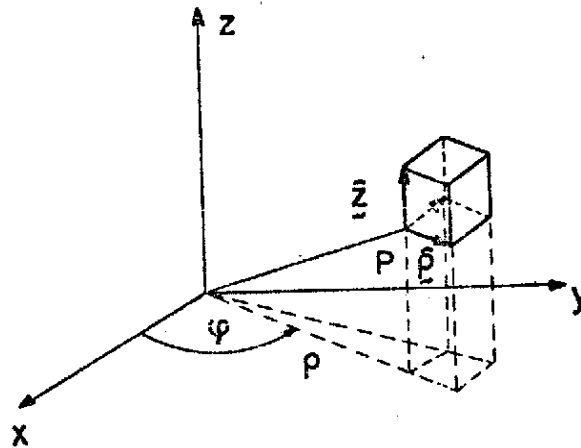


Fig. I.13 - Sistema de coordenadas cilíndrico-circular.
 O vetor $\hat{\phi}$ é definido por $\hat{\phi} \equiv \hat{z} \times \hat{\rho}$

O elemento de área $\hat{\rho} ds$ é obtido de uma maneira simples da Figura I.13 onde, como antes, se faz coincidir $d\rho$, $d\phi$ e dz com a direção dos vetores no ponto P. Assim, pode-se verificar que

$$\hat{\rho} ds = \rho d\phi dz \hat{\rho} \quad (I.57)$$

Analogamente:

$$dv = \rho d\rho d\phi dz \quad (I.58)$$

1.10.4 - O operador ∇ em coordenadas curvilíneas -

Para terminar este Capítulo, serão achados as expressões do gradiente, divergente e rotacional em termos das coordenadas curvilíneas.

Para determinar o *Gradiente* de uma função escalar, considere-se a propriedade geométrica do Gradiente

$$d\phi = (\nabla\phi) \cdot d\underline{x} \quad (I.59)$$

onde $d\phi$ é a maior variação da função escalar ϕ entre dois pontos infinitamente próximos, e $d\underline{x}$ é a direção de maior variação. Por outro lado:

$$d\phi \equiv \frac{\partial\phi}{\partial q_j} dq_j$$

$$d\underline{x} \equiv \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_j} dq_j$$

Lembrando que $\frac{\partial \underline{x}}{\partial q_j} = h_j \hat{u}_j$ (onde os índices repetidos não implicam soma, tem-se

$$d\underline{x} = h_1 dq_1 \hat{u}_1 + h_2 dq_2 \hat{u}_2 + h_3 dq_3 \hat{u}_3$$

Por outro lado, $\nabla\phi$ pode ser escrito como

$$\nabla\phi \equiv \tau_j \hat{u}_j$$

onde as componentes do gradiente τ_j , são quantidades ainda não determinadas. A Equação (I.59) com estas substituições fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\phi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\phi}{\partial q_3} dq_3 &= h_1 \tau_1 dq_1 + h_2 \tau_2 dq_2 + \\ &+ h_3 \tau_3 dq_3 \end{aligned}$$

Fica evidente que

$$h_i \tau_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$$

ou seja:

$$\tau_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$$

Portanto, o gradiente da função escalar Φ , finalmente, fica:

$$\nabla \Phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \underline{\hat{u}}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \underline{\hat{u}}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \underline{\hat{u}}_3 \quad (I.60)$$

Observe-se que a expressão do operador ∇ , em coordenadas curvilíneas (equivalentes \bar{a} (I.18) das coordenadas cartesianas), é:

$$\nabla = \frac{\underline{\hat{u}}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\underline{\hat{u}}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\underline{\hat{u}}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \quad (I.61)$$

Continuando, determinar-se-á uma expressão para o *Divergente* de uma função vetorial. Antes, porém, serão demonstrados certos resultados, que serão usados na dedução do divergente e, posteriormente, do rotacional.

Observe-se que:

$$\nabla q_1 = \frac{\underline{\hat{u}}_1}{h_1} \frac{\partial q_1}{\partial q_1} + \frac{\underline{\hat{u}}_2}{h_2} \frac{\partial q_1}{\partial q_2} + \frac{\underline{\hat{u}}_3}{h_3} \frac{\partial q_1}{\partial q_3} = \frac{\underline{\hat{u}}_1}{h_1}$$

Analogamente:

$$\nabla q_2 = \frac{\hat{u}_2}{h_2} ; \nabla q_3 = \frac{\hat{u}_3}{h_3}$$

Neste ponto faz-se uso da propriedade: $\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0$ cuja validade independe do sistema de referência desde que seja um sistema ortogonal de vetores base. Logo,

$$\nabla \times \nabla q_i = 0$$

consequentemente, tem-se

$$\nabla \times \left(\frac{\hat{u}_i}{h_i} \right) = 0 \quad (\text{I.62})$$

Por outro lado,

$$\frac{\hat{u}_1}{h_2 h_3} = \frac{\hat{u}_2}{h_2} \times \frac{\hat{u}_3}{h_3} = (\nabla q_2) \times (\nabla q_3)$$

Tomando o divergente de ambos os membros, e lembrando de outra fórmula do cálculo vetorial,

$$\nabla \cdot (\nabla q_2) \times (\nabla q_3) = 0 ,$$

tem-se,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{u}_1}{h_2 h_3} \right) = 0 \quad (\text{I.63})$$

Analogamente pode-se demonstrar que

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{u}_2}{h_1 h_3} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{u}_3}{h_1 h_2} \right) = 0$$

Com as identidades acabadas de encontrar, está tudo pronto para se determinar a expressão do divergente de um campo vetorial em coordenadas curvilíneas.

Seja o campo vetorial \underline{F} , representado por suas componentes no sistema curvilíneo de vetores base, \hat{u}_i .

$$\begin{aligned} \underline{F}(q_1, q_2, q_3) &= F_1(q_1, q_2, q_3) \hat{u}_1 + \\ &+ F_2(q_1, q_2, q_3) \hat{u}_2 + F_3(q_1, q_2, q_3) \hat{u}_3 \end{aligned}$$

onde cada componente é dado por

$$F_i = \underline{F} \cdot \hat{u}_i$$

Portanto, o divergente de \underline{F} neste sistema, é:

$$\nabla \cdot \underline{F} = \nabla \cdot (F_1 \hat{u}_1) + \nabla \cdot (F_2 \hat{u}_2) + \nabla \cdot (F_3 \hat{u}_3)$$

O primeiro termo, desta expressão, pode ser transformada da seguinte maneira:

$$\nabla \cdot (F_1 \hat{u}_1) = \nabla \cdot \left[(h_2 h_3 F_1) \left(\frac{\hat{u}_1}{h_2 h_3} \right) \right] =$$

$$= \left(\frac{\hat{u}_1}{h_2 h_3} \right) \cdot \nabla (h_2 h_3 F_1) + (h_2 h_3 F_1) \nabla \cdot \left(\frac{\hat{u}_1}{h_2 h_3} \right)$$

onde se fez uso da propriedade do divergente entre um escalar ($h_2 h_3 F_1$), e um vetor $\left(\frac{\hat{u}_1}{h_2 h_3} \right)$. O último termo é identicamente nulo, de acordo com os resultados (I.63).

Logo,

$$\nabla \cdot (F_1 \hat{u}_1) = \left(\frac{\hat{u}_1}{h_2 h_3} \right) \cdot \nabla (h_2 h_3 F_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 F_1)$$

De uma maneira análoga, tem-se

$$\nabla \cdot (F_2 \hat{u}_2) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 F_2)$$

$$\nabla \cdot (F_3 \hat{u}_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 F_3)$$

Substituindo esses valores na expressão do $\text{div } \underline{F}$, vem,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 F_2) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 F_3) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.64})$$

Em continuação encontrar-se-ã a expressão para o *Rotacional* do mesmo campo vetorial $\underline{F}(q_1, q_2, q_3)$. Para isto, procede-se de maneira análoga ao tratamento dado ao $\text{div } \underline{F}$.

$$\nabla \times \underline{\underline{F}} = \nabla \times (F_1 \underline{\underline{u}}_1) + \nabla \times (F_2 \underline{\underline{u}}_2) + \nabla \times (F_3 \underline{\underline{u}}_3)$$

O primeiro termo pode ser transformado usando as propriedades do cálculo vetorial.

Assim,

$$\begin{aligned} \nabla \times (F_1 \underline{\underline{u}}_1) &= \nabla \times \left[(h_1 F_1) \left(\frac{\underline{\underline{u}}_1}{h_1} \right) \right] = (h_1 F_1) \nabla \times \left(\frac{\underline{\underline{u}}_1}{h_1} \right) - \\ &- \left(\frac{\underline{\underline{u}}_1}{h_1} \right) \nabla \times (h_1 F_1) \end{aligned}$$

Observe-se que, nesta expressão, o primeiro termo, do membro direito, se anula de acordo com a identidade (I.62).

Logo,

$$\begin{aligned} \nabla \times (F_1 \underline{\underline{u}}_1) &= - \left(\frac{\underline{\underline{u}}_1}{h_1} \right) \times \left[\frac{\underline{\underline{u}}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (h_1 F_1) + \frac{\underline{\underline{u}}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 F_1) + \right. \\ &+ \left. \frac{\underline{\underline{u}}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 F_1) \right] = \frac{\underline{\underline{u}}_2}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 F_1) - \frac{\underline{\underline{u}}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 F_1) \end{aligned}$$

O mesmo tratamento é dado aos demais termos de $\nabla \times \underline{\underline{F}}$, obtendo-se resultados semelhantes. Depois de agrupar convenientemente todos os termos, vem:

$$\nabla \times \underline{\underline{F}} = \frac{\underline{\underline{u}}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 F_2) \right] +$$

Pode-se verificar que as relações que dão $\nabla\psi$, $\nabla \cdot \underline{F}$ e $\nabla \times \underline{F}$ no sistema de coordenadas esférico-polar são as seguintes:

$$\nabla\psi (r, \theta, \phi) = \underline{\hat{r}} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\underline{\hat{\theta}}}{r} \frac{\partial\psi}{\partial \theta} + \frac{\underline{\hat{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial\psi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \underline{F} (r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + r \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \right]$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{F} (r, \theta, \phi) = & \frac{\underline{\hat{r}}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right] + \\ & + \frac{\underline{\hat{\theta}}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} \right] + \\ & + \frac{\underline{\hat{\phi}}}{r} \left[\frac{\partial (r F_r)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

onde as funções escalares F_r , F_θ e F_ϕ são as componentes de \underline{F} neste sistema.

No sistema de coordenadas cilíndrico-circular estas relações ficam:

$$\nabla\psi (\rho, \phi, z) = \underline{\hat{\rho}} \frac{\partial\psi}{\partial \rho} + \frac{\underline{\hat{\phi}}}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial \phi} + \underline{\hat{z}} \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{F}}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} +$$
$$+ \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \underline{\underline{F}}(\rho, \phi, z) = \hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) +$$
$$+ \frac{\hat{z}}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right]$$

CAP. I. REFERÊNCIAS

Para a notação indicial de vetores, ver.

HOLT, E.H.; HASKELL, R.E. Plasma Dynamics, Macmillan Co.
N.Y. 1965. Ver o Capítulo II.

BYRON JR., F.W.; FULLER, R.W. Mathematics of Classical and Quantum
Physics, Vol I., Addison - Wesley Publishing Co., Reading, Mass.,
1969. Ver Capítulo I.

PEARSON, CARL E. (Ed.) Handbook of Applied Mathematics, Van Nostrand
Reinhold Co., 1974. Ver o Capítulo III.

Para campos vetoriais e coordenadas curvilíneas, em ge
ral, ver as seguintes referências relevantes.

HILDEBRAND, FRANCIS B. Advanced Calculus for Applications, Prentice
Hall, Mc., New Jersey, 1962. Ver Capítulo VI.

KILLINGBECK, J.; COLE, H.A. Mathematical Techniques and Physical
Applications, Academic Press, N.Y. 1971. Ver Capítulo I.

SHADOWITZ, ALBERT. The Electromagnetic Field, Mc Graw - Hill Book Co,
N.Y., 1975. Ver Capítulo I.

BOAS, MARY L. Mathematical Methods in the Physical Sciences. John
Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1966. Ver Capítulo V.

BUTKOV, EUGENE. Mathematical Physics. Addison- Wesley Publishing
Company, Mass., 1973.

MARGENAU, H.; MURPHY, G.M. The Mathematics of Physics and Chemistry.

D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1967.

Ver Capitulo IV.