

INPE-5239-TAE/003

**ESTUDO DE UM SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE DE SATÉLITES
ARTIFICIAIS UTILIZANDO ESTABILIZAÇÃO PELO CAMPO
MAGNÉTICO DA TERRA**

Seth Emanuel Couto Melo Filho

**INPE
SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
Dezembro de 1990**

CDU 629.7.0062.2

PALAVRAS-CHAVE Controle de atitude; Estabilização;
Bobinas magnéticas

CDU 629.783-062

SETH EMANUEL COUTO MELO FILHO

Turma de 1979

ESTUDO DE UM SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE DE SATÉLITES
ARTIFICIAIS UTILIZANDO ESTABILIZAÇÃO PELO CAMPO MAGNÉTICO
DA TERRA

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Orientação: Eng. Marcelo L.O. Souza
Prof. Takashi Yoneyama

Divisão de Engenharia Eletrônica

São José dos Campos
Centro Técnico Aeroespacial
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

1979

ESTUDO DE UM SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE DE SATÉLITES
ARTIFICIAIS UTILIZANDO ESTABILIZAÇÃO PELO CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA

Esta publicação foi aceita como Relatório Final de Trabalho de Graduação.

São José dos Campos, 29 Nov 79

Seth Emanuel Couto Melo Filho
Seth Emanuel Couto Melo Filho

Marcelo L.O. Souza
Marcelo L.O. Souza
Orientador

Takashi Yoneyama
1/ Takashi Yoneyama
Orientador

Wladimir Borgest
Wladimir Borgest
Chefe da IEE

São José dos Campos, 29 Nov 79

De: Seth Emanuel Couto Melo Filho

À : Comissão de TG

Assunto: Apresentação do Trabalho de Graduação

Prezados Senhores

Pela presente, encaminhamos à apreciação de V.Sas. o relatório do TG "ESTUDO DE UM SISTEMA DE CONTROLE DE ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS UTILIZANDO ESTABILIZAÇÃO PELO CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA", realizado no Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE, sob a orientação do Eng. Marcelo L.O. Souza e pelo Prof. Takashi Yoneyama do ITA.

Esperamos que este trabalho tenha contribuído para a realização de outros projetos semelhantes no futuro.

Atenciosamente,

Seth Emanuel Couto Melo Filho

Dedicatōria

Ao meu pai

(in memoriam)

AGRADECIMENTOS

Ao Eng^o Marcelo L. de O. Souza e ao Prof. Takashi Yoneyama pela orientação dedicada, à Sra. Marlene D.R.Pereira pela datilografia e a todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a execução deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho consiste no estudo de um sistema de controle de atitude de satélite em que se utiliza a interação entre um dipolo magnético a bordo do satélite e o campo magnético da Terra para produzir torques. O dipolo magnético do satélite é gerado a partir de uma lei de controle escolhida, de forma que o torque resultante leve o satélite a atingir a atitude desejada.

São tratadas algumas formas de se implementar este tipo de controle. As diferenças entre as formas apresentadas residem na maneira de se definir os sinais de erro (do satélite em relação à referência) e na escolha de uma restrição que se pode fazer sobre o momento de dipolo magnético do satélite.

Um modelo do sistema foi levantado, incluindo: a dinâmica do satélite, descrita pelas equações de Euler; órbita elíptica de baixa excentricidade e baixa inclinação; o campo magnético da Terra; um dos sistemas de controle de atitude magnéticos estudados teoricamente.

São apresentados, no final deste trabalho, alguns resultados obtidos a partir de uma simulação do modelo em computador digital.

CONTEÚDO

Apresentação do Trabalho de Graduação

Dedicatória

Agradecimento

Resumo

1. INTRODUÇÃO.	1
2. ATITUDE DO SATÉLITE EM FUNÇÃO DE TORQUES EXTERNOS. CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA. TORQUES MAGNÉTICOS	5
2.1 - Dinâmica do satélite. Equações de Euler	5
2.2 - Torques aplicados ao satélite	12
2.3 - Campo magnético da Terra	15
2.4 - Torque magnético sobre o satélite	22
3. CONTROLE DA ATITUDE DO SATÉLITE UTILIZANDO O CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA: CONTROLE PASSIVO - CONTROLE ATIVO - MODELO PARA SIMULAÇÃO	24
3.1 - Controle passivo	24
3.2 - Controle ativo	27
3.2.1 - Cálculo de \vec{M} para a condição $\vec{M} \cdot \vec{B}_T = 0$	31
3.2.2 - Cálculo de \vec{M} para a condição $M_X = 0$	32
3.2.3 - Cálculo do Erro de Atitude	33
3.2.3.1 - Primeiro método	33
3.2.3.2 - Segundo método	35
3.2.3.3 - Terceiro método	38
3.3 - Dimensionamento das bobinas	45
3.4 - Modelo para simulação	47
3.4.1 - Condições iniciais de posição e velocidade	48
3.4.2 - Valor inicial de \vec{M}	50

3.4.3 - Cálculo de \vec{M}	53
3.4.4 - Integração das equações de Euler	55
3.4.5 - Análise do erro em regime permanente	57
3.4.5.1 - Análise do erro em regime permanente para diversas entradas de controle	59
3.4.5.2 - Análise do erro em regime permanente para torques perturbadores	66
3.4.6 - Análise de transitório para entradas de controle de pequenas amplitudes	68
4. SIMULAÇÕES. LISTAGEM E DESCRIÇÃO DE SUBROTINAS	70
4.1 - Órbita elíptica	70
4.2 - Campo magnético da Terra	73
4.3 - Dinâmica do satélite	76
4.4 - Controle de atitude	82
4.5 - Programas auxiliares	87
5. GRÁFICOS. OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES	98
5.1 - Primeira simulação	98
5.2 - Segunda simulação	101
5.3 - Terceira simulação	102
5.4 - Conclusões	103
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	111
Apêndice A	114
Apêndice B	119

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Em geral, a maioria dos satélites artificiais, para cumprirem suas missões, devem ser levados, a partir de certas condições iniciais de posição e velocidade angular, a uma atitude (posição e velocidade angular) desejada; e mantidos, dentro de certos limites, nesta atitude. Para que isto seja conseguido, é necessário que o satélite possua um sistema de controle que satisfaça as especificações da missão.

Existem diversos tipos de sistemas de controle de atitude de satélite. Podemos dividi-los em sistemas passivos e sistemas ativos.

Os sistemas passivos não precisam de fontes de energia para funcionarem e são úteis quando não se tem necessidade de uma precisão muito grande. Eles ainda tem a vantagem de serem bastante confiáveis devido à simplicidade. Entre esses sistemas podemos citar o controle por gradiente de gravidade e o controle magnético passivo.

Os sistemas ativos são úteis quando se necessita manter o satélite em uma determinada atitude com uma precisão elevada. Entretanto, eles têm a desvantagem de necessitarem de uma fonte de energia ou, ainda, em certos casos (jatos de gás), de uma fonte de massa. Isso pode chegar a limitar a vida útil do sistema (é o

caso dos jatos de gás). Além do mais, como são necessários circuitos eletrônicos de controle e, como estes podem apresentar defeitos durante a utilização do satélite, a sua confiabilidade é menor que a dos sistemas passivos.

Entre os sistemas ativos, podemos citar aqueles que aplicam torques sobre o satélite utilizando jatos de gás, ou efeitos giroscópicos (rodas de inércia) ou, ainda, interações com o campo magnético da Terra.

Dos sistemas ativos citados acima, o que utiliza interações com o campo magnético da Terra é o único que não possui partes móveis em relação ao satélite. Ele apresenta, ainda, a vantagem de poder ser alimentado por células solares tendo, portanto, uma vida útil bem maior do que o sistema que usa jatos de gás. Este último tem vida útil pequena devido à quantidade limitada de gás que pode ser levada a bordo do satélite.

A principal desvantagem do sistema de controle magnético ativo é que os torques que ele pode aplicar sobre o satélite estão restritos a um plano perpendicular ao campo magnético da Terra no ponto onde o satélite se encontra. Entretanto, apesar dessa restrição, consegue-se, ainda, ter uma boa precisão no alinhamento de um dos eixos do satélite com uma certa direção de referência. Por isso, uma das aplicações deste tipo de controle é quando se deseja apontar um certo eixo do satélite em uma determinada direção sem restrições muito grandes quanto à posição dos seus dois outros eixos.

O presente trabalho tem como objetivo o estudo teórico sobre algumas formas de se realizar o controle magnético ativo assim como o levantamento de um modelo incluindo: a dinâmica do satélite; o campo magnético da Terra; órbita elíptica de baixa excentricidade e baixa inclinação; um dos sistemas de controle de atitude magnéticos estudados teoricamente. Além disso é feita uma análise de transitório e de regime permanente do sistema simulado, valendo para desvios pequenos da referência e velocidades angulares pequenas (sistema linearizado).

O modelo do sistema levantado por nós teve como meta poder ser utilizado em situações de desvios grandes da referência e velocidades angulares razoáveis a fim de se poder verificar qual o comportamento do sistema fora da faixa linear. Para isso, houve a necessidade de se utilizar as equações de Euler para descrever a dinâmica do satélite e as matrizes de cossenos diretores e suas derivadas para descrever a cinemática do satélite (em torno do seu centro de massa) no espaço de 3 dimensões.

Houve ainda a necessidade de se utilizar as relações entre os ângulos de Euler e as matrizes de cossenos diretores para se medir os desvios do satélite em relação à referência e para se apresentar estes desvios na saída da simulação de uma forma fácil de se visualizar.

Justificamos este trabalho pelo atual interesse em se estabelecerem subsídios e critérios para a pré-seleção da missão de um futuro satélite brasileiro, que é um dos primeiros passos do Programa Espacial Brasileiro, recentemente iniciado (setembro

de 1978). Portanto, o modelamento e a análise desse sistema, assim como o estudo sobre as diversas formas de implementá-lo pod
erão ser úteis na sua escolha e dimensionamento.

CAPÍTULO 2

ATITUDE DO SATÉLITE EM FUNÇÃO DE TORQUES EXTERNOS.

CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA. TORQUES MAGNÉTICOS.

Ao se levantar o modelo de um sistema mecânico, considera-se a energia, o momento linear, o momento angular e as leis que descrevem os torques e forças aplicadas ao sistema. No caso do estudo da atitude de um satélite, interessa apenas a descrição dos movimentos do mesmo em torno do seu centro de massa pois supomos já conhecer o movimento de translação deste (a sua órbita).

2.1 - DINÂMICA DO SATÉLITE. EQUAÇÕES DE EULER

O momento angular \vec{L} de uma partícula de massa m em relação a um ponto O (fig. 2.1), descrito no sistema de coordenadas (O, X_s, Y_s, Z_s) , é por definição:

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} \quad (2-1)$$

onde: \vec{R} = vetor posição da partícula em (O, X_s, Y_s, Z_s)

$\vec{P} = m\vec{v}$ = momento linear da partícula em (O, X_s, Y_s, Z_s)

\vec{v} = velocidade da partícula em (O, X_s, Y_s, Z_s)

m = massa da partícula

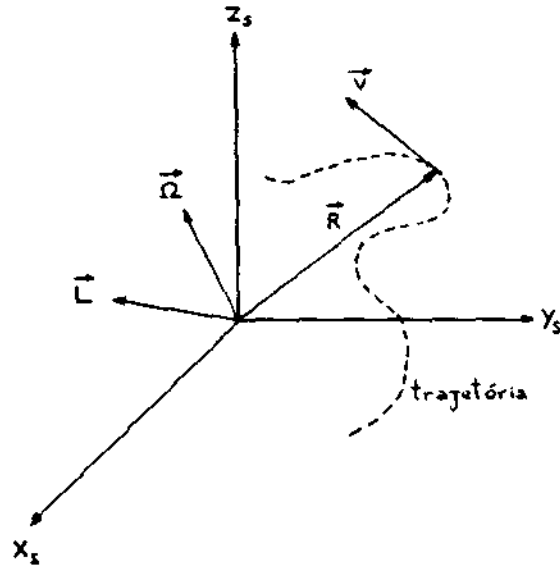


Fig. 2.1

Se, agora, considerarmos um corpo rígido, o momento angular de um elemento de massa dm é dado por:

$$d\vec{L} = (\vec{R} \times \vec{v}) dm \quad (2-2)$$

Portanto, o momento angular de um corpo rígido de massa m é dado pela soma dos momentos angulares de todos os seus elementos de massa dm , isto é:

$$\vec{L} = \int_m (\vec{R} \times \vec{v}) dm \quad (2-3)$$

Como: $\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{R}$ (2-4)

onde: $\vec{\Omega}$ = velocidade angular do elemento de massa dm em relação ao ponto 0, tem-se:

$$\vec{L} = \int_m \vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) dm \quad (2-5)$$

Para fazermos o produto vetorial acima, escrevemos:

$$\vec{R} = x \hat{x}_s + y \hat{y}_s + z \hat{z}_s$$

$$\vec{\Omega} = p \hat{x}_s + q \hat{y}_s + r \hat{z}_s$$

onde \hat{x}_s , \hat{y}_s e \hat{z}_s são os versores do sistema $(0, X_s, Y_s, Z_s)$.

Logo:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \times \vec{R} &= \begin{bmatrix} \hat{x}_s & \hat{y}_s & \hat{z}_s \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} \\ &= \hat{x}_s (zq - yr) + \hat{y}_s (xr - zp) + \hat{z}_s (yp - xq) \end{aligned} \quad (2-6)$$

e:

$$\begin{aligned} \vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) &= \begin{bmatrix} \hat{x}_s & \hat{y}_s & \hat{z}_s \\ x & y & z \\ (zq - yr) & (xr - zp) & (yp - xq) \end{bmatrix} \\ &= \hat{x}_s [(y^2 + z^2) p - xyq - xzr] + \\ &\quad + \hat{y}_s [-xyp + (x^2 + z^2) q - zyr] + \\ &\quad + \hat{z}_s [-xzp - yzq + (x^2 + y^2) r] \end{aligned} \quad (2-7)$$

Substituindo a eq. (2-7) em (2-5) e escrevendo em notação matricial, temos:

$$[\vec{L}]_s = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \int_m (y^2 + z^2) dm - q \int_m xy dm - r \int_m xz dm \\ -p \int_m xy dm + q \int_m (x^2 + z^2) dm - r \int_m zy dm \\ -p \int_m xz dm - q \int_m yz dm + r \int_m (x + y) dm \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

Como sabemos, as integrais acima são os momentos e produtos de inércia do corpo rígido em questão, isto é:

$$\int_m (y^2 + z^2) dm = I_x \quad ; \quad \int_m xy dm = I_{xy} \quad \text{e assim por diante.}$$

Portanto podemos escrever a eq. (2-8) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x p - I_{xy} q - I_{xz} r \\ -I_{xy} p + I_y q - I_{zy} r \\ -I_{xz} p - I_{yz} q + I_z r \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Até aqui, calculamos o momento angular de um corpo rígido que, no caso, é o satélite, em relação a um sistema de coordenadas genérico $(0, X_s, Y_s, Z_s)$. No entanto, como desejamos estudar a atitude do satélite, é interessante que descrevamos a sua dinâmica em um sistema de coordenadas fixo ao mesmo. E, ainda, como sabemos que todo corpo rígido possui três eixos principais de inércia, se escolhermos os eixos coordenados coincidentes com esses eixos, teremos os produtos de inércia nulos. Logo, fazendo

$(0, X_s, Y_s, Z_s)$ coincidir com os eixos principais do satélite (a origem passa a coincidir com o centro de massa do satélite), a eq. (2-9) fica:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

Como estamos interessados em saber a influência dos torques externos sobre a atitude do satélite, devemos relacionar os mesmos com o momento angular do satélite. Sabemos que, para um elemento de massa de um corpo rígido a força aplicada ao mesmo é:

$$d\vec{F} = dm \overset{oo}{\vec{R}} \quad (2-11)$$

Temos ainda, por definição, que o torque sobre esse elemento de massa é dado por:

$$d\vec{T} = \vec{R} \times d\vec{F} \quad (2-12)$$

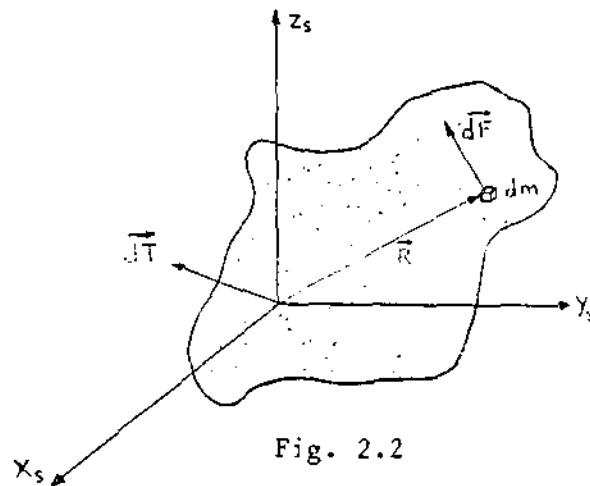


Fig. 2.2

Portanto, o torque sobre o corpo rígido é:

$$\vec{T} = \int_m (\vec{R} \times \overset{0}{\dot{\vec{R}}}) dm \quad (2-13)$$

e como:

$$\frac{d}{dt} (\vec{R} \times \overset{0}{\dot{\vec{R}}}) = \overset{0}{\dot{\vec{R}}} \times \overset{0}{\dot{\vec{R}}} + \vec{R} \times \overset{0}{\ddot{\vec{R}}} = \vec{R} \times \overset{0}{\ddot{\vec{R}}} \quad (2-14)$$

então:

$$\vec{T} = \int_m \frac{d}{dt} (\vec{R} \times \overset{0}{\dot{\vec{R}}}) dm = \frac{d}{dt} \left[\int_m (\vec{R} \times \overset{0}{\dot{\vec{R}}}) dm \right] \quad (2-15)$$

Logo, usando as eqs. (2-3) e (2-4), temos que:

$$\vec{T} = \frac{d}{dt} \left[\int_m (\vec{R} \times \vec{v}) dm \right] = \frac{d}{dt} (\vec{L}) = \overset{0}{\dot{\vec{L}}} \quad (2-16)$$

Como estamos interessados em conhecer a atitude do sa télite descrita em um sistema fixo ao mesmo e como este se move em relação a um sistema inercial, ao tomarmos a derivada do vetor \vec{L} , deveremos considerar as derivadas dos versores, pois estes não tem direção constante no tempo. Então, de (2-4) e (2-6) temos:

$$\overset{0}{\dot{\hat{x}}}_s = \vec{\Omega} \times \hat{x}_s = y_s \cdot r - \hat{z}_s q$$

$$\overset{0}{\dot{\hat{y}}}_s = \vec{\Omega} \times \hat{y}_s = -\hat{x}_s r + \hat{z}_s p \quad (2-17)$$

$$\overset{0}{\dot{\hat{z}}}_s = \vec{\Omega} \times \hat{z}_s = \hat{x}_s q - \hat{y}_s p$$

Calculando a derivada de \vec{L} , temos:

$$\overset{0}{L} = \overset{0}{L}_x \hat{x}_s + \overset{0}{L}_y \hat{y}_s + \overset{0}{L}_z \hat{z}_s + L_x^Q \hat{x}_s + L_y^Q \hat{y}_s + L_z^Q \hat{z}_s \quad (2-18)$$

e, substituindo (2-10) e (2-17) em (2-18), ficamos com:

$$\begin{aligned} \overset{0}{L} &= I_x \overset{0}{p} \hat{x}_s + I_y \overset{0}{q} \hat{y}_s + I_z \overset{0}{r} \hat{z}_s + I_x p (\hat{y}_s r - \hat{z}_s q) + \\ &+ I_y q (-\hat{x}_s r + \hat{z}_s p) + I_z r (\hat{x}_s q - \hat{y}_s p) \\ &= \hat{x}_s [I_x \overset{0}{p} + (I_z - I_y) q r] + \hat{y}_s [I_y \overset{0}{q} + (I_x - I_z) p r] + \\ &+ \hat{z}_s [I_z \overset{0}{r} + (I_y - I_x) p q] \end{aligned} \quad (2-19)$$

Levando (2-19) em (2-16) e escrevendo em notação matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} I_x \overset{0}{p} + (I_z - I_y) q r \\ I_y \overset{0}{q} + (I_x - I_z) p r \\ I_z \overset{0}{r} + (I_y - I_x) p q \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

O conjunto de equações (2-20) é conhecido como "Equações de Euler". Elas nos dão, num instante t qualquer, o vetor velocidade angular do satélite em relação a um referencial inercial com a origem no seu centro de massa, descrito pelas suas componentes p , q e r no sistema de coordenadas coincidente com os seus eixos principais de inércia com origem no seu centro de massa (Fig. 2.3). É importante frisar que estas equações supõem o satélite ser um corpo rígido, não levando em conta quaisquer modos de vibração que ele possa apresentar.

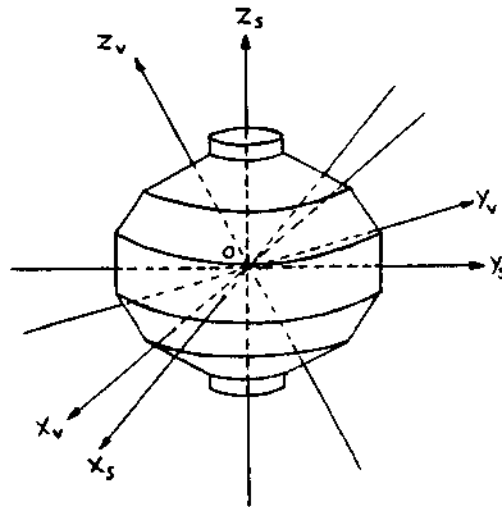


Fig. 2.3 - Sistema inercial $(0, X_v, Y_v, Z_v)$
e sistema fixo ao satélite $(0, X_s, Y_s, Z_s)$

Logo, usando essas equações, podemos verificar como muda a atitude do satélite no tempo devido a quaisquer torques externos aplicados ao mesmo.

2.2 - TORQUES APLICADOS AO SATÉLITE

Um satélite em órbita da Terra está sujeito a vários tipos de torques em torno do seu centro de massa, entre eles citamos:

- aerodinâmico
- devido à pressão de radiação
- gravitacional
- magnético

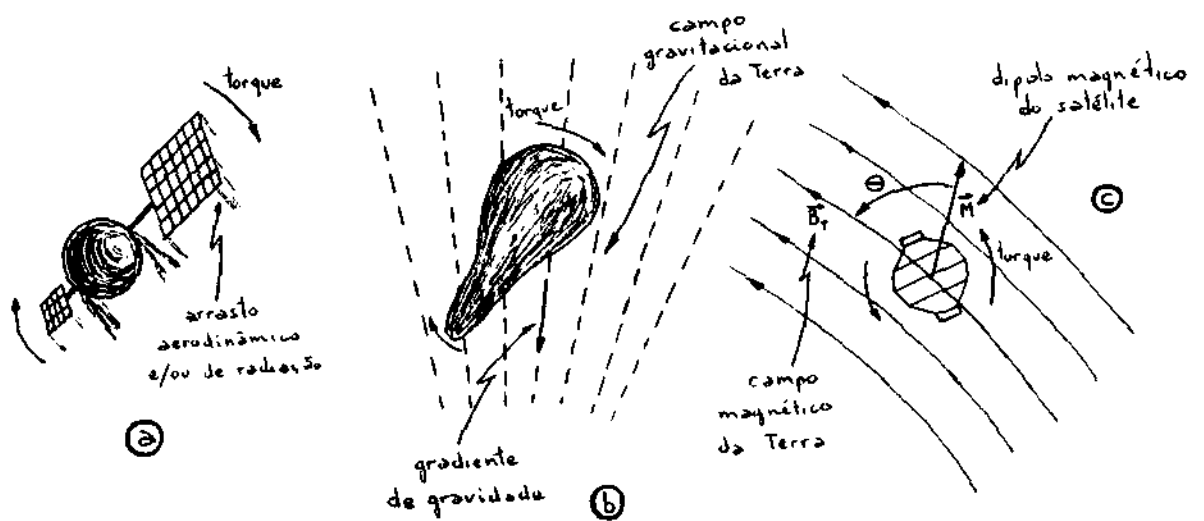


Fig. 2.4 - a. torque aerodinâmico e/ou devido à pressão de radiação;
 b. torque gravitacional;
 c. torque magnético.

O aerodinâmico ocorre quando o centro de pressão do satélite não coincide com o centro de massa do mesmo, que é o caso de satélites com forma assimétrica e áreas expostas relativamente grandes.

O torque devido à pressão de radiação ocorre da mesma forma que o aerodinâmico. Apenas a origem do mesmo é que é diferente e é devida à pressão exercida pela luz solar sobre as superfícies do satélite.

O gravitacional ocorre quando o centro de gravidade do satélite não coincide com o seu centro de massa, o que acontece devido ao gradiente de gravidade, isto é, devido ao campo gravitacional não ser uniforme.

O torque magnético existe quando o satélite produz de alguma forma um campo magnético que vai interagir com o campo magnético da Terra. Muitas vezes, o campo magnético do satélite e xiste devido às correntes elétricas nos equipamentos eletrônicos carregados pelo mesmo ou, ainda, devido às correntes de Foucault induzidas nas partes metálicas do satélite causadas pelo seu deslocamento dentro do campo geomagnético (ZONOV, 1960).

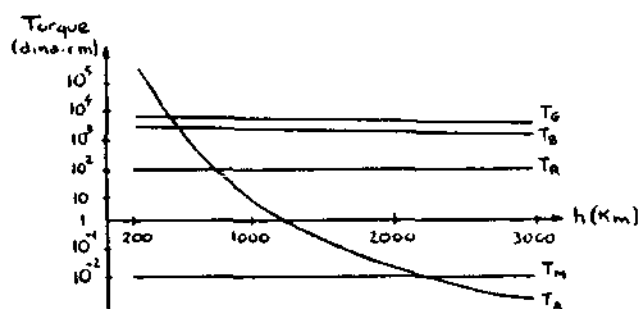


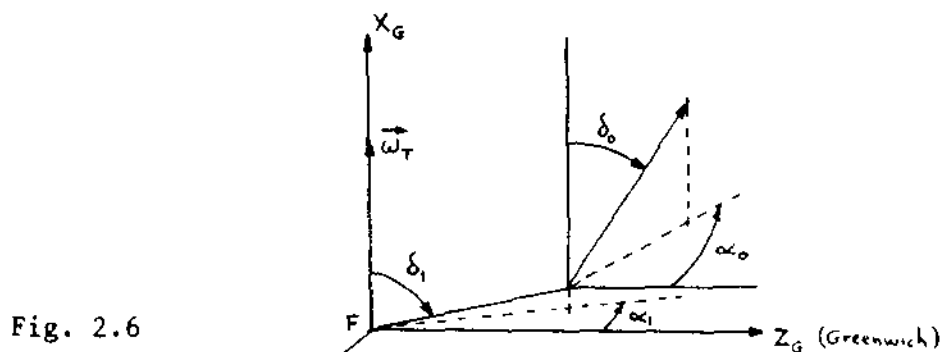
Fig. 2.5 - Torques em um satélite da Terra em função da altura h da órbita; T_G torque gravitacional; T_A torque aerodinâmico; T_B torque magnético; T_R torque de radiação solar; T_M torque de impacto de micrometeoritos. (Fonte: Beletskii, V.V. - "Motion of an artificial satellite about its center of mass": pág. 26, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem)

Os torques poderão agir como perturbações ou poderão ser utilizados intencionalmente e convenientemente para o controle da atitude do satélite. A fig. 2.5 mostra a ordem de grandeza desses torques como função da altura da órbita do satélite.

No nosso caso, iremos supor inicialmente que apenas o torque magnético vai agir sobre o satélite e de uma maneira conhecida, imposta por um sistema de controle de atitude, que vai tentar apontar um dos seus eixos em uma direção determinada. Para tanto, falaremos do campo magnético da Terra.

2.3 - CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA

Em primeira aproximação, o campo magnético da Terra pode ser representado por um dipolo magnético \vec{M}_T , inclinado de $11^{\circ},7$ em relação ao seu eixo de rotação e passando a 436 km do seu centro, conforme a Fig. 2.6 abaixo (ABADIE; WHITE et al, 1961; HODGE, 1964). O sistema de coordenadas G é fixo em relação à Terra com o eixo X_G coincidente com o eixo de rotação da mesma e o eixo Z_G passando pelo meridiano de Greenwich.



$$M_T = 8,06 \times 10^{22} \text{ A.m}^2$$

$$\delta_0 = + 11^{\circ},7$$

$$\alpha_0 = - 69^{\circ}, 0$$

$$r_c = 0,436 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\delta_1 = + 74^{\circ},4$$

$$\alpha_1 = + 150^{\circ},9$$

Utilizaremos aqui a mesma notação de Abadie, assim como os dados fornecidos pelo mesmo.

Neste sistema (G), temos:

$$[\vec{M}_T]_G = M_T \begin{bmatrix} -\cos\delta_0 \\ \text{sen}\delta_0 \text{ sen}\alpha_0 \\ -\text{sen}\delta_0 \text{ cos}\alpha_0 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

e ainda:

$$[\vec{r}_c]_G = r_c \begin{bmatrix} \cos\delta_1 \\ -\text{sen}\delta_1 \text{ sen}\alpha_1 \\ \text{sen}\delta_1 \text{ cos}\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

O vetor potencial magnético em um ponto M (vide Fig. 2.7) é dado por:

$$\vec{A}_T = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M}_T \times \nabla \left(\frac{1}{r_M^*} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M}_T \times \left(\frac{\vec{r}_M^*}{r_M^{*3}} \right) \quad (2-23)$$

onde: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ henrys/metro

$$\vec{r}_M^* = \vec{r}_M - \vec{r}_c \quad (2-24)$$

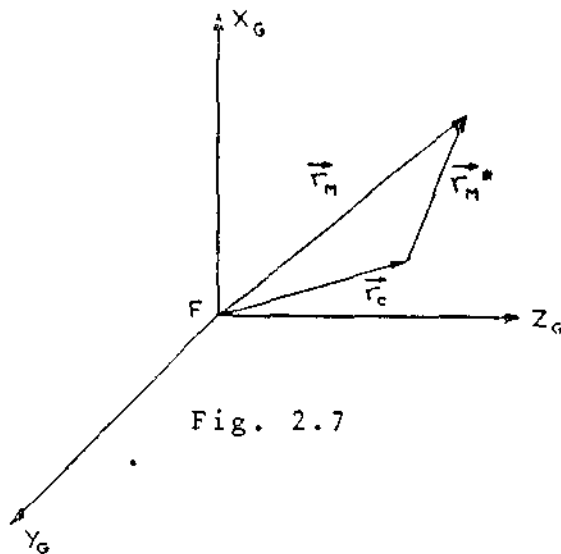


Fig. 2.7

Consideraremos agora, um sistema V com o eixo X_V coincidente com o X_G mas com os eixos Y_V e Z_V fixos no espaço. Não consideraremos aqui o movimento de translação da Terra em torno do Sol e trataremos o sistema V como se fosse inercial já que essa translação não tem muita influência sobre a atitude do satélite.

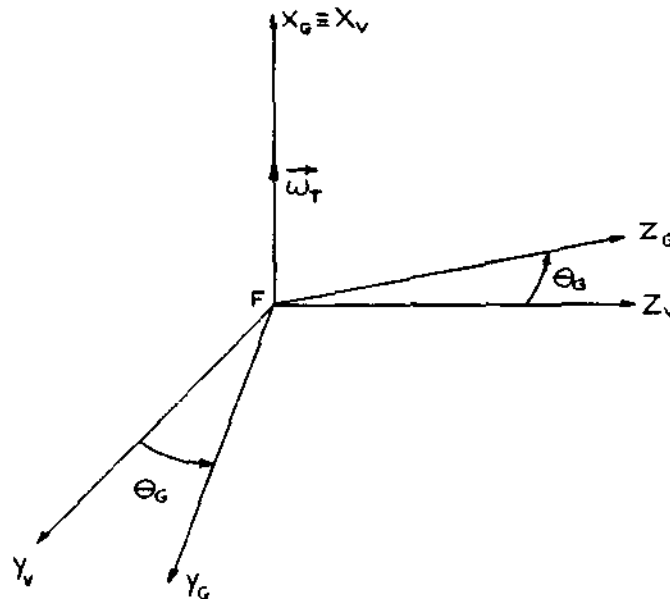


Fig. 2.8

Portanto, de acordo com a Fig. 2.8:

$$\begin{bmatrix} X_V \\ Y_V \\ Z_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_G & -\sin\theta_G \\ 0 & \sin\theta_G & \cos\theta_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

$$\text{onde: } \theta_G = \omega_T(t - t_0) + \theta_{G_0} \quad (2-26)$$

t_0 = instante da primeira passagem do satélite pelo perigeo

θ_{G_0} = θ_G em $t = t_0$

ω_T = velocidade angular da Terra em torno do seu eixo de rotação.

Escrevendo, ainda, que:

$$[\vec{r}_M^*]_V = \begin{bmatrix} X_M^* \\ Y_M^* \\ Z_M^* \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

e que:

$$[\vec{M}_T]_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_G & -\text{sen } \theta_G \\ 0 & \text{sen } \theta_G & \cos \theta_G \end{bmatrix} \cdot [\vec{M}_T]_G = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

podemos fazer o produto vetorial de (2-23), obtendo:

$$[\vec{A}_T]_V = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r_M^{*3}} \begin{bmatrix} M_y Z_M^* - M_z Y_M^* \\ M_z X_M^* - M_x Z_M^* \\ M_x Y_M^* - M_y X_M^* \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

O vetor indução magnética \vec{B}_T que representa o campo magnético da Terra e sobre o qual estamos interessados, é dado por:

$$[\vec{B}_T]_V = \nabla_V \times [\vec{A}_T]_V \quad , \quad \text{onde} \quad \nabla_V = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_V} \\ \frac{\partial}{\partial Y_V} \\ \frac{\partial}{\partial Z_V} \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

Substituindo (2-29) em (2-30) e fazendo o produto vetorial, temos:

$$[\vec{B}_T]_v = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial Y_v} \left(\frac{M_x Y_M^* - M_y X_M^*}{r_M^{*3}} \right) - \frac{\partial}{\partial Z_v} \left(\frac{M_z X_M^* - M_x Z_M^*}{r_M^{*3}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial Z_v} \left(\frac{M_y Z_M^* - M_z Y_M^*}{r_M^{*3}} \right) - \frac{\partial}{\partial X_v} \left(\frac{M_x Y_M^* - M_y X_M^*}{r_M^{*3}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial X_v} \left(\frac{M_z X_M^* - M_x Z_M^*}{r_M^{*3}} \right) - \frac{\partial}{\partial Y_v} \left(\frac{M_y Z_M^* - M_z Y_M^*}{r_M^{*3}} \right) \end{array} \right] \quad (2-31)$$

Para calcularmos as derivadas parciais acima, devemos calcular as derivadas parciais de r_M^{*-3} , isto é:

$$\frac{\partial}{\partial X_v} \left(\frac{1}{r_M^{*3}} \right) = -3 \frac{1}{r_M^{*4}} \cdot \frac{\partial}{\partial X_v} \left[(X_M^{*2} + Y_M^{*2} + Z_M^{*2})^{1/2} \right] = -\frac{3X_M^*}{r_M^{*5}} \quad (2-32)$$

$$\text{e, da mesma forma:} \quad \frac{\partial}{\partial Y_v} \left(\frac{1}{r_M^{*3}} \right) = -\frac{3Y_M^*}{r_M^{*5}} \quad (2-33)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z_v} \left(\frac{1}{r_M^{*3}} \right) = -\frac{3Z_M^*}{r_M^{*5}} \quad (2-34)$$

Utilizando os resultados acima e resolvendo as derivadas de (2-31), obtemos:

$$[\vec{B}_T]_v = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\begin{array}{l} \left\{ -\frac{3Y_M^*}{r_M^{*5}} (M_x Y_M^* - M_y X_M^*) + \frac{M_x}{r_M^{*3}} \right\} - \left\{ -\frac{3Z_M^*}{r_M^{*5}} (M_z X_M^* - M_x Z_M^*) - \frac{M_x}{r_M^{*3}} \right\} \\ \left\{ -\frac{3Z_M^*}{r_M^{*5}} (M_y Z_M^* - M_z Y_M^*) + \frac{M_y}{r_M^{*3}} \right\} - \left\{ -\frac{3X_M^*}{r_M^{*5}} (M_x Y_M^* - M_y X_M^*) - \frac{M_y}{r_M^{*3}} \right\} \\ \left\{ -\frac{3X_M^*}{r_M^{*5}} (M_z X_M^* - M_x Z_M^*) + \frac{M_z}{r_M^{*3}} \right\} - \left\{ -\frac{3Y_M^*}{r_M^{*5}} (M_y Z_M^* - M_z Y_M^*) - \frac{M_z}{r_M^{*3}} \right\} \end{array} \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4 r_M^{*3}} \begin{bmatrix} 2M_x + \frac{3}{r_M^{*2}} \{Y_M^* (M_y X_M^* - M_x Y_M^*) + Z_M^* (M_z X_M^* - M_x Z_M^*)\} \\ 2M_y + \frac{3}{r_M^{*2}} \{Z_M^* (M_z Y_M^* - M_y Z_M^*) + X_M^* (M_x Y_M^* - M_y X_M^*)\} \\ 2M_z + \frac{3}{r_M^{*2}} \{X_M^* (M_x Z_M^* - M_z X_M^*) + Y_M^* (M_y Z_M^* - M_z Y_M^*)\} \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

Tomando apenas a primeira linha da matriz da eq. (2-35), podemos escrever:

$$\begin{aligned} & M_x \left\{ 2 - \frac{3}{r_M^{*2}} (Y_M^{*2} + Z_M^{*2}) \right\} + \frac{3}{r_M^*} X_M^* (M_y Y_M^* + M_z Z_M^*) = \\ & = M_x \left\{ 2 + \frac{3X_M^{*2}}{r_M^{*2}} - \frac{3}{r_M^{*2}} (X_M^{*2} + Y_M^{*2} + Z_M^{*2}) \right\} + \frac{3X_M^*}{r_M^{*2}} (M_y Y_M^* + M_z Z_M^*) = \\ & = M_x \left(\frac{3X_M^{*2}}{r_M^{*2}} - 1 \right) + \frac{3X_M^*}{r_M^{*2}} (M_y Y_M^* + M_z Z_M^*) = \\ & = \frac{3X_M^*}{r_M^{*2}} (M_x X_M^* + M_y Y_M^* + M_z Z_M^*) - M_x \end{aligned}$$

Se fizermos o mesmo com as duas outras linhas, obtemos finalmente o campo magnético da Terra no referencial inercial V, da forma simples abaixo:

$$[\vec{B}_T]_V = \frac{\mu_0}{4\pi r_M^{*3}} \begin{bmatrix} \frac{3X_M^*}{r_M^{*2}} (M_x X_M^* + M_y Y_M^* + M_z Z_M^*) - M_x \\ \frac{3Y_M^*}{r_M^{*2}} (M_x X_M^* + M_y Y_M^* + M_z Z_M^*) - M_y \\ \frac{3Z_M^*}{r_M^{*2}} (M_x X_M^* + M_y Y_M^* + M_z Z_M^*) - M_z \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

onde, substituindo (2-21) em (2-28), temos \vec{M}_T dado no referencial V por:

$$[\vec{M}_T]_V = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = M_T \begin{bmatrix} -\cos\delta_0 \\ \text{sen}\delta_0 \quad \text{sen}(\alpha_0 + \theta_G) \\ -\text{sen}\delta_0 \quad \cos(\alpha_0 + \theta_G) \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

Este modelo de dipolo magnético é bastante satisfatório para os objetivos deste trabalho. No capítulo 4 explicamos como ele foi simulado no computador digital.

Existe, além disso, um modelo mais sofisticado no qual o campo \vec{B}_T é dado por uma série de harmônicos esféricos cujos coeficientes são determinados através de medidas experimentais (vide Refs. 7 e 8):

$$[\vec{B}_T]_G = -\mu_0 \nabla V_T \quad (2-38)$$

onde:

$$V_T = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m \cos\beta \cdot \left(\frac{a}{r_M}\right)^{n+1} \cdot \{g_n^m \cos(m\lambda) + h_n^m \text{sen}(m\lambda)\} \quad (2-39)$$

e

$P_n^m \cdot \cos\beta$ são múltiplos de funções associadas de Legendre
 g_n^m e h_n^m são coeficientes gaussianos determinados experimentalmente.

2.4 - TORQUE MAGNÉTICO SOBRE O SATÉLITE

Como se sabe, o torque resultante da interação entre um campo magnético \vec{B}_T e um dipolo magnético \vec{M} é dado por:

$$\vec{T} = \vec{M} \times \vec{B}_T \quad (2-40)$$

Já que vamos estudar o controle da atitude do satélite através da geração de torques magnéticos de uma forma desejada, gostaríamos de ter o torque descrito no sistema de coordenadas do satélite e, para isso, basta termos \vec{M} e \vec{B}_T descritos neste sistema. Em geral, já se tem \vec{M} no sistema do satélite, mas temos que fazer a transformação de \vec{B}_T do sistema V (inercial) para o sistema S (do satélite). Portanto:

$$[\vec{B}_T]_S = \underline{\underline{L}}_{SV} [\vec{B}_T]_V = \begin{bmatrix} BX \\ BY \\ BZ \end{bmatrix} \quad (2-41)$$

e:

$$[\vec{M}]_S = \begin{bmatrix} MX \\ MY \\ MZ \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

onde:

$$\underline{\underline{L}}_{SV} = \begin{bmatrix} \ell_{SV}^{11} & \ell_{SV}^{12} & \ell_{SV}^{13} \\ \ell_{SV}^{21} & \ell_{SV}^{22} & \ell_{SV}^{23} \\ \ell_{SV}^{31} & \ell_{SV}^{32} & \ell_{SV}^{33} \end{bmatrix}$$

é a matriz de transformação de v para s.

O torque magnético no sistema S é, portanto:

$$[\vec{T}]_S = [\vec{M}]_S \times [\vec{B}_T]_S = \begin{bmatrix} MY.BZ - MZ.BY \\ MZ.BX - MX.BZ \\ MX.BY - MY.BX \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

CAPÍTULO 3

CONTROLE DA ATITUDE DO SATÉLITE UTILIZANDO O CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA: CONTROLE PASSIVO - CONTROLE ATIVO - MODELO PARA SIMULAÇÃO

No Capítulo anterior foi mostrado como a interação entre um dipolo magnético no satélite e o campo magnético da Terra gera um torque em torno do centro de massa do satélite e de que forma podemos descrever a dinâmica desse sistema.

Como nós queremos controlar a atitude do satélite devemos fazer com que ele gere um dipolo magnético adequado de forma que o torque resultante leve o mesmo para uma atitude desejada.

Existem diversas políticas utilizadas para gerar o dipolo magnético. Podemos dividi-las em controle passivo e controle ativo.

3.1 - CONTROLE PASSIVO

Neste caso o satélite leva consigo um ímã permanente que faz aparecer um dipolo magnético de magnitude constante e fixo em relação ao satélite, isto é, com suas componentes descritas no sistema fixo ao satélite, M_X , M_Y e M_Z , constantes.

Em uma primeira aproximação no plano, o sistema acima se comporta como um de 2ª ordem sem amortecimento já que, a partir da eq. (2-43), temos:

$$T = -\mu_0 H_T M \sin\delta \quad (3-1)$$

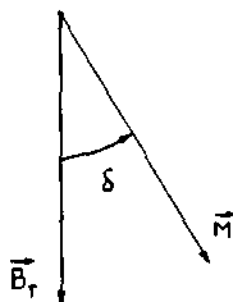


Fig. 3.1

M = momento de dipolo magnético do satélite

$B_T = \mu_0 H_T$ = campo magnético da Terra

δ = ângulo formado pelos vetores \vec{M} e \vec{B}_T

Portanto, para pequenos ângulos:

$$T \cong -\mu_0 H_T M \delta = I \ddot{\delta}$$

$$\therefore I \ddot{\delta} + \mu_0 H_T M \delta = 0$$

I = momento de inércia do satélite em torno do eixo de revolução

Para que o sistema não fique oscilando indefinidamente e convirja para uma situação em que $\vec{B}_T \parallel \vec{M}$, que é o desejado, introduz-se um amortecimento no sistema que pode ser feito de diversas formas. Podemos citar o amortecimento por correntes de Foucault e o amortecimento por histerese.

No caso particular do sistema passivo com amortecimento por histerese (ABADIE), o amortecimento, num modelo simplificado, é dado por;

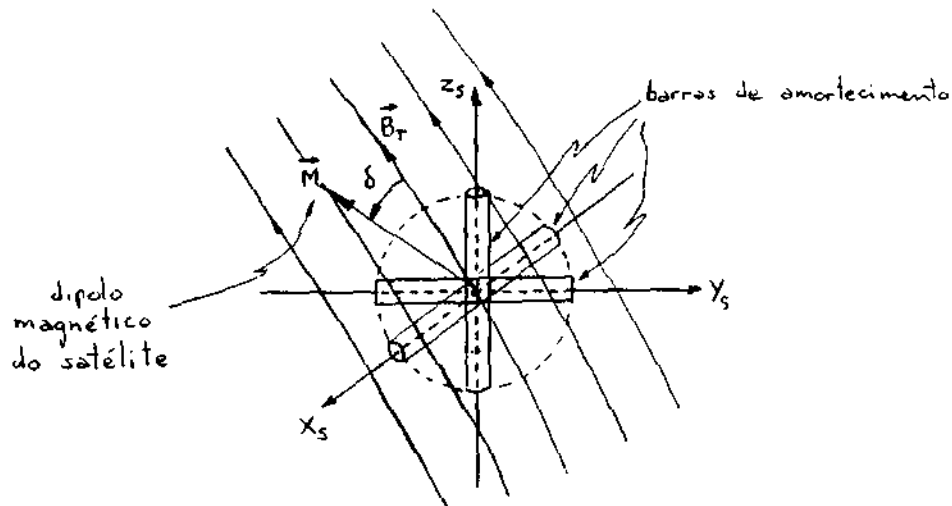


Fig. 3.2

$$\frac{d\delta_0}{dt} = - \frac{VW (H_T \text{ sen } \delta_0)}{2\pi \text{ sen } \delta_0 \sqrt{\mu_0 H_T M I}} \quad (3-2)$$

V = volume das barras de material ferromagnético onde ocorrem as perdas por histerese.

$W (H_m)$ = perda por histerese por unidade de volume e por ciclo simétrico em relação à origem, com campo máximo aplicado H_m

δ_0 = amplitude do movimento.

Levantar um modelo matemático completo deste tipo de amortecimento é bastante difícil, já que o movimento do satélite no espaço é de tal forma complexo que os "ciclos" de histerese são assimétricos em relação à origem e não são curvas fechadas (vide Figura 3.3)

Além do mais, também é difícil se saber o quanto das perdas deve ser relacionado com a diminuição da energia cinética em torno de cada um dos eixos do satélite.

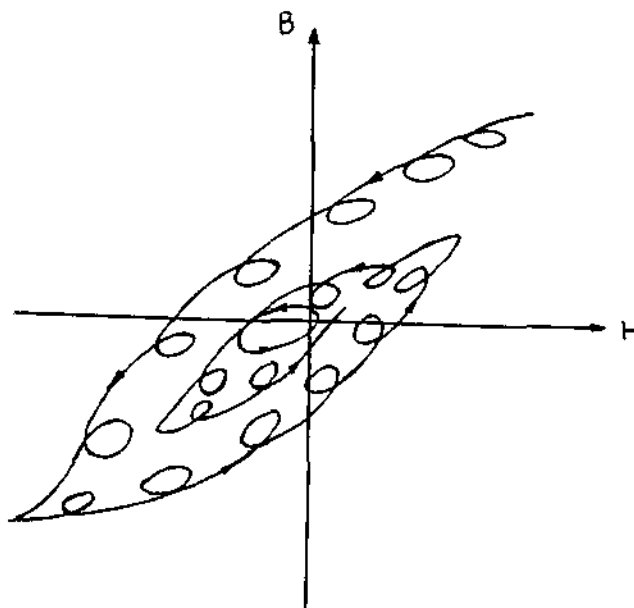


Fig. 3.3

Sobre o controle magnético passivo, indicamos a leitura dos trabalhos de ABADIE e FISHELL. Indicamos, ainda, os livros de CULLITY (1972), BOZORTH (1956) e HECK (1974) sobre ferromagnetismo e materiais ferromagnéticos.

As vantagens de um sistema de controle passivo são a sua simplicidade, preço e confiabilidade.

Em oposição, temos uma baixa precisão de apontamento; a atitude fica determinada a priori (antes do lançamento do satélite) ao se fazer a montagem do ímã permanente que é levado no mesmo, não havendo mais a possibilidade de se alterar a sua atitude quando em órbita; o satélite perde energia cinética de translação devido às perdas por histerese, mesmo que as oscilações já sejam pequenas, o que é uma causa a mais para fazê-lo perder altura.

3.2 - CONTROLE ATIVO

Existem diversas maneiras de se fazer o controle magné-

tico ativo. Tudo depende, basicamente, da forma como são escolhidos ou definidos, os sinais de erro (fig. 3.4). Citamos aqui três maneiras. A primeira, a que simulamos neste trabalho, foi desenvolvida por White et al (1961). A segunda, foi usada no sistema de controle de atitude de um foguete sonda (Aerobee) proposto por Hansen et al e a terceira, nós propomos aqui como um possível método a ser usado.

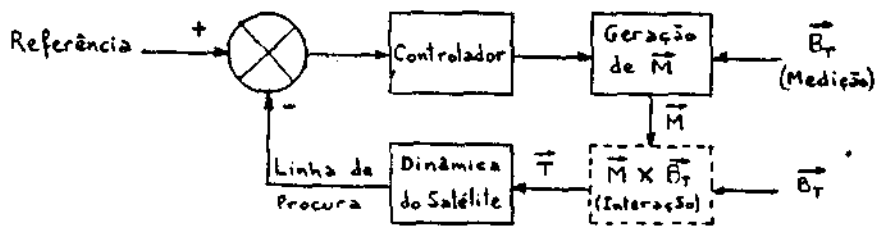


Fig. 3.4

Como o torque magnético é dado pelo produto vetorial de \vec{M} por \vec{B}_T , é claro que ele será sempre perpendicular a estes dois vetores. Isto nos traz uma restrição sobre a forma de gerar o torque de controle já que, a princípio, estamos restritos a um plano perpendicular a \vec{B}_T (fig. 3.5).

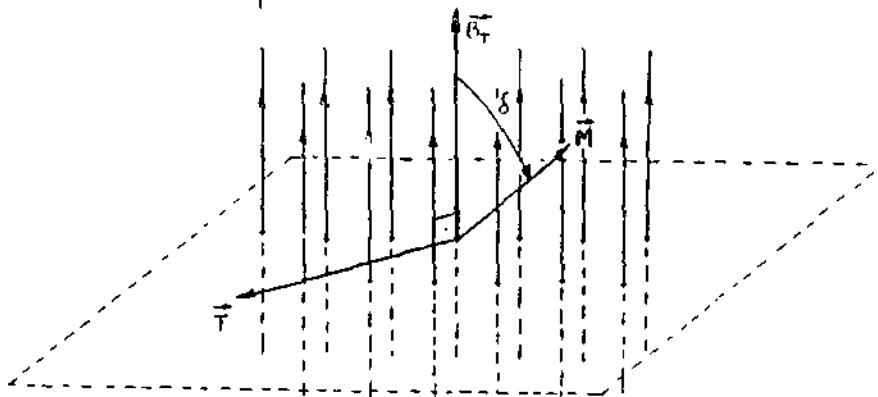


Fig. 3.5

Esta restrição é equivalente a satisfazer a seguinte equação:

$$[\vec{T}]_s \cdot [\vec{B}_T]_s = 0 \quad (3-3)$$

isto é: $T_X B_X + T_Y B_Y + T_Z B_Z = 0$

onde:

$$[\vec{T}]_s = \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{bmatrix} \quad e \quad [\vec{B}_T]_s = \begin{bmatrix} B_X \\ B_Y \\ B_Z \end{bmatrix}$$

Com esta condição, imposta pela própria natureza da interação magnética, ficamos impedidos de submeter um dos três eixos a uma desejável lei de controle. A componente de torque nesse eixo será uma combinação linear das duas outras. Isto significa que podemos efetuar o controle do apontamento desse eixo para alguma direção sem, no entanto, poder controlar a atitude em torno dele. Supondo, sem perda de generalidade, que aquele seja o eixo X_s , tem-se da eq. (3-3):

$$T_X = - \left(\frac{T_Y \cdot B_Y + T_Z \cdot B_Z}{B_X} \right) \quad (3-4)$$

É claro que, se pudéssemos fazer um controle completo nos três eixos, desejaríamos que o torque fosse dado por:

$$[\vec{T}]_s = \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(s) \cdot AX \\ G_2(s) \cdot AY \\ G_3(s) \cdot AZ \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

onde AX , AY e AZ são os sinais de erro que veremos adiante e $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$ são controladores (PI, PD, PID, etc.). Mas devido a (3.4), só podemos fixar duas equações, isto é:

$$T_Y = G_2(s) \cdot AY$$

$$T_Z = G_3(s) \cdot AZ$$

Por simplicidade, vamos fazer $G_2(s) = G_3(s) = G(s)$.

Ficamos então, com:

$$\begin{aligned} TY &= G(s) \cdot AY \\ TZ &= G(s) \cdot AZ \end{aligned} \quad (3-6)$$

Lembrando, da eq. (2-43), que:

$$\begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MY \cdot BZ - MZ \cdot BY \\ MZ \cdot BX - MX \cdot BZ \\ MX \cdot BY - MY \cdot BX \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

e, ainda, que escolhemos o eixo X_s para obedecer a eq. (3-4), ficamos com apenas duas equações para as três componentes de \vec{M} . Portanto, temos a liberdade de impor mais uma condição sobre \vec{M} .

White et al. citam duas condições, com seus respectivos atrativos, que nos dão duas formas diferentes de gerar o dipolo magnético \vec{M} :

$$a) \quad \vec{M} \cdot \vec{B}_T = 0 \quad (3-8a)$$

portanto minimizando $|\vec{M}|$, o que pode resultar em um menor consumo de energia pelo sistema de controle;

$$b) \quad MX = 0 \quad (3-8b)$$

o que é uma economia de espaço e peso, pois temos apenas duas bobinas (MY e MZ).

3.2.1 - CÁLCULO DE \vec{M} PARA A CONDIÇÃO $\vec{M} \cdot \vec{B}_T = 0$

Para a restrição (3-8a), temos:

$$MX \cdot BX + MY \cdot BY + MZ \cdot BZ = 0 \quad (3-9)$$

e, devido às equações (3-6) e (3-7), podemos escrever:

$$\begin{aligned} MZ \cdot BX - MX \cdot BZ &= G(s) \cdot AY \\ MX \cdot BY - MY \cdot BZ &= G(s) \cdot AZ \end{aligned} \quad (3-10)$$

De (3-9) e (3-10) tiramos:

$$\begin{aligned} MX &= - \frac{(MY \cdot BY + MZ \cdot BZ)}{BX} \\ MY &= \frac{MX \cdot BY - G(s) \cdot AZ}{BX} \\ MZ &= \frac{G(s) \cdot AY + MX \cdot BZ}{BX} \end{aligned} \quad (3-11)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} MX &= - \left[\frac{(MX \cdot BY - G(s) \cdot AZ) \cdot BY}{BX^2} + \frac{(G(s) \cdot AY + MY \cdot BZ) \cdot BZ}{BX^2} \right] \\ \therefore MX \left(1 + \frac{BY^2}{BX^2} + \frac{BZ^2}{BX^2} \right) &= G(s) \left[\frac{AZ \cdot BY}{BX^2} - \frac{AY \cdot BZ}{BX^2} \right] \\ \therefore MX &= G(s) \left[\frac{AZ \cdot BY - AY \cdot BZ}{B^2} \right] \end{aligned} \quad (3-12)$$

$$\text{onde: } B^2 = BX^2 + BY^2 + BZ^2$$

Temos, também, de (3-10) e (3-11):

$$MY = \frac{G(s)}{BX} \left[\frac{AZ \cdot BY - AY \cdot BZ}{B^2} \cdot BY - AZ \right]$$

$$\therefore MY = - \frac{G(s)}{BX \cdot B^2} \left[AY \cdot BY \cdot BZ + AZ(BX^2 + BZ^2) \right], \quad BX \neq 0 \quad (3.13)$$

Da mesma forma:

$$MZ = \frac{G(s)}{BX} \left[AY + BZ \frac{AZ \cdot BY - AY \cdot BZ}{B^2} \right]$$

$$\therefore MZ = \frac{G(s)}{BX B^2} \left[AY(BX^2 + BY^2) + AZ \cdot BY \cdot BZ \right], \quad BX \neq 0 \quad (3-14)$$

Neste tipo de controle, quando $BX \rightarrow 0$ temos que $|MY|$ e $|MZ| \rightarrow \infty$. Na prática, teremos uma saturação em MY e MZ mas o sistema fica, ainda que parcialmente, sob controle de MX .

3.2.2 - CÁLCULO DE \vec{M} PARA A CONDIÇÃO $MX = 0$

No caso da restrição (3.8b), temos da eq.(3.7)

$$TY = MZ \cdot BX = G(s)AY$$

$$TZ = -MY \cdot BX = G(s)AZ$$

(3-15)

Logo:

$$MY = - G(s) \frac{AZ}{BX} \quad (3-16)$$

$$MZ = G(s) \frac{AY}{BX} \quad BX \neq 0$$

Este tipo de controle é mais simples que o anterior havendo a necessidade de se conhecer apenas BX. Nota-se, também que MY depende apenas de AZ e, MZ apenas de AY, sendo portanto desacoplados entre si. Observa-se, entretanto, que MY e MZ saturam quando $BX \rightarrow 0$ e perde-se, nesta situação, o controle sobre o satélite.

3.2.3 - CÁLCULO DO ERRO DE ATITUDE

Na equação (3-6) escrevemos os torques como funções dos sinais de erro AY e AZ. Falta-nos, agora, definir quem são estes sinais e, como já havíamos dito, citaremos aqui três formas de fazê-lo.

3.2.3.1 - PRIMEIRO MÉTODO

O primeiro método, tratado por White et al (1961) consiste em se usar como sinais de erro os deslocamentos angulares em torno dos eixos do satélite (Fig. 3.6) tais que o levem à posição (ou atitude) desejada. Supomos, "a priori", que estes deslocamentos angulares sejam pequenos.

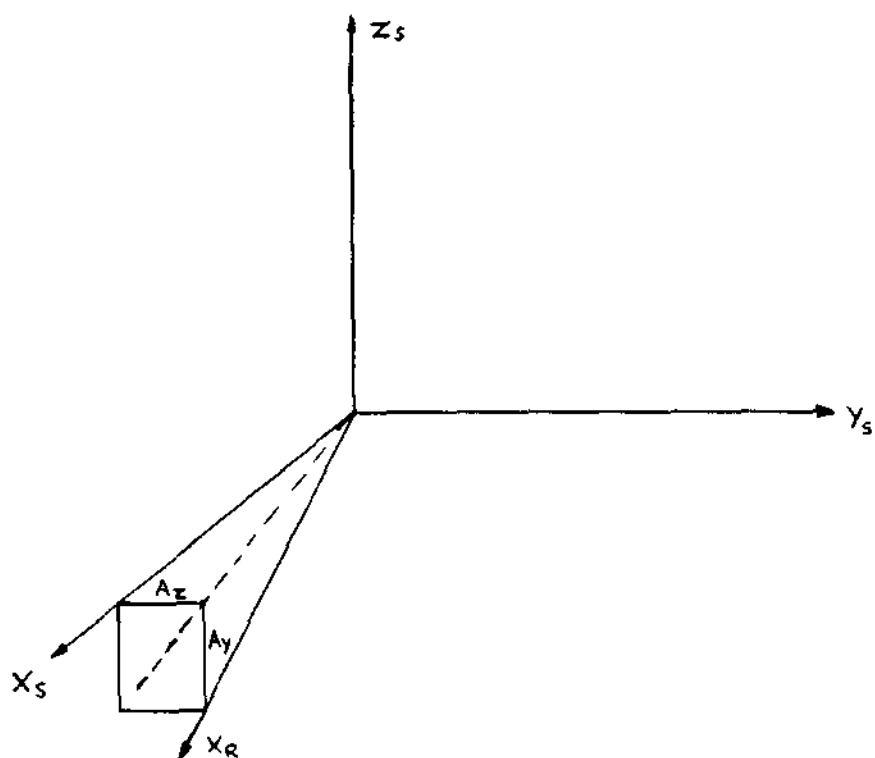


Fig. 3.6

É interessante notar que nessa definição (pequenos deslocamentos), os ângulos A_Y e A_Z são medidos em qualquer sequência, isto é, A_Y e depois A_Z ou vice-versa ou, simultaneamente os dois. Sabe-se, entretanto, que dois deslocamentos angulares em torno de um ponto não são comutativos. Mas no caso de ângulos pequenos, a definição acima pode ser usada já que, neste caso, eles independem da ordem em que são medidos.

No caso de ângulos grandes, a definição acima fica incompleta mas continua sendo um método válido de controle onde de vemos definir em que sequência são feitos os deslocamentos angulares A_Y e A_Z . Se fizermos, em primeiro lugar, o deslocamento A_Z e em seguida, o deslocamento A_Y , estes coincidem com dois dos ângulos de Euler (vide Apêndice A e Ref. 11) que relacionam o sistema de coordenadas fixo ao satélite com o sistema de coordenadas de referência (Fig. 3.7), isto é:

$$AY = \theta_{RS}$$

(3-17)

$$AZ = \psi_{RS}$$

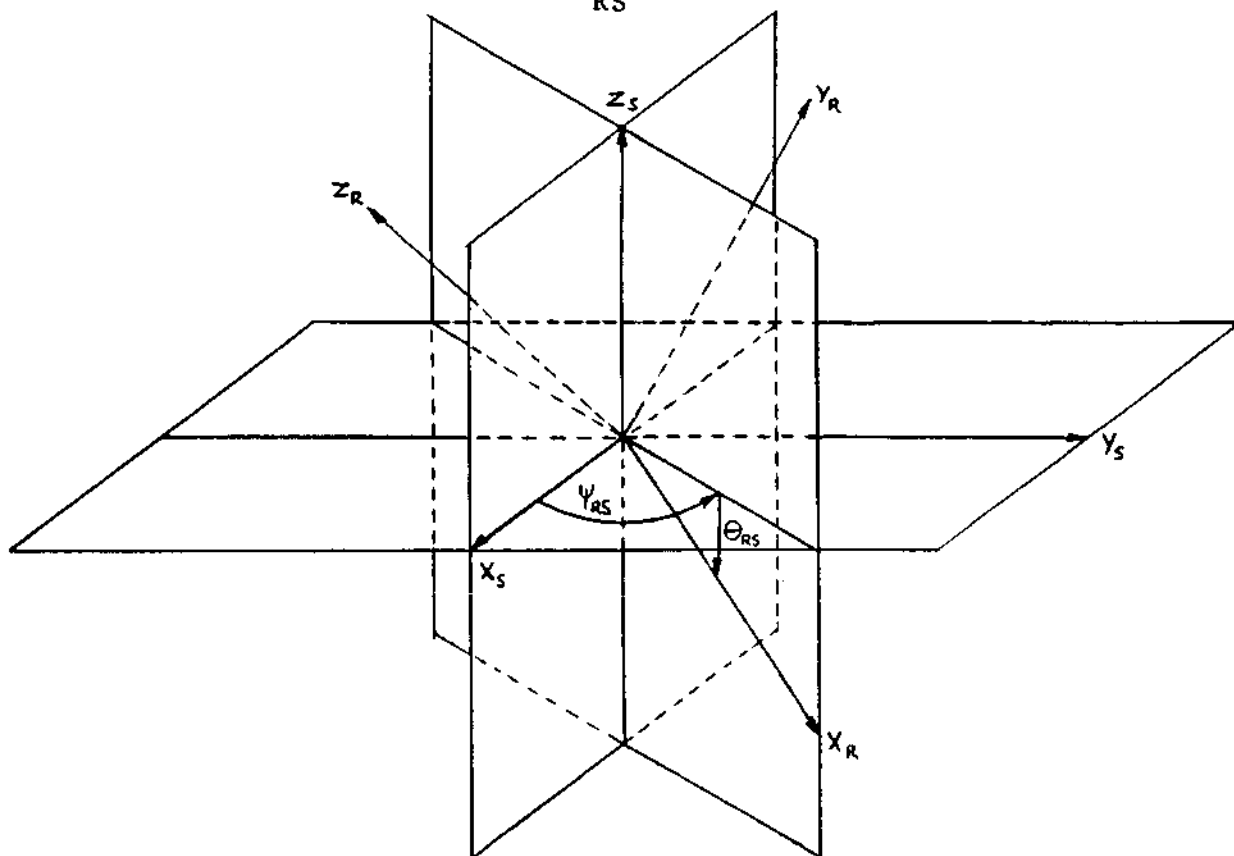


Fig. 3.7

Nota-se que, para situações em que AY e AZ assim definidos são pequenos, eles coincidem com AY e AZ definidos na Fig.3.6.

3.2.3.2 - SEGUNDO MÉTODO

O segundo método, tratado por Hansen et al, consiste em se medir o erro de posição entre o satélite e a referência pelos produtos vetoriais entre dois pares de versores correspondentes (Fig.3.8) por exemplo:

$$\vec{E}_1 = \hat{y}_s \times \hat{y}_R = \text{sen } \theta_1 \hat{E}_1$$

(3-18)

$$\vec{E}_2 = \hat{z}_s \times \hat{z}_R = \text{sen } \theta_2 \hat{E}_2$$

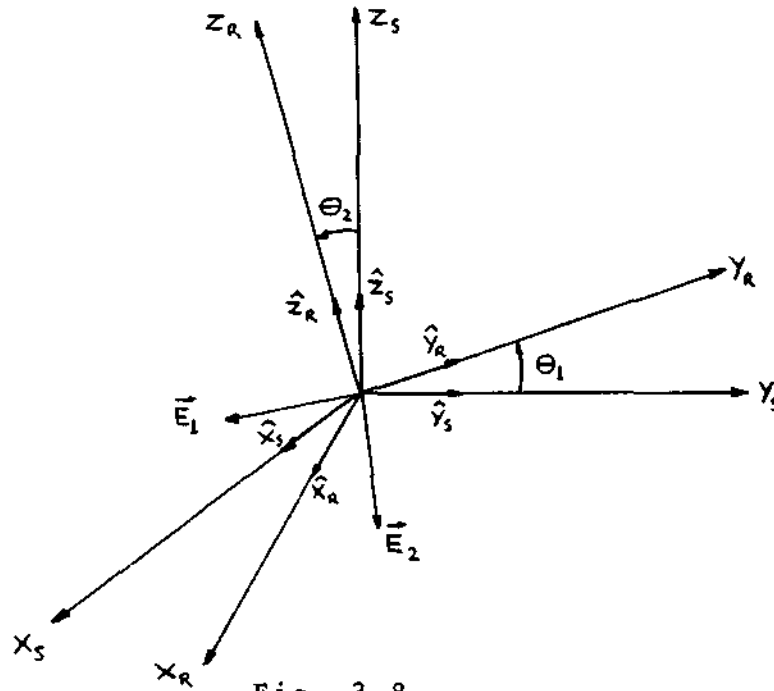


Fig. 3.8

Para minimizar o erro de atitude deve-se aplicar um tor que no satélite que é função de \vec{E}_1 e \vec{E}_2 . Poderíamos escrever, por exemplo:

$$\vec{T} = G_A(s) \vec{E}_1 + G_B(s) \vec{E}_2 \quad (3-19)$$

onde os controladores $G_A(s)$ e $G_B(s)$ são escolhidos de forma a oti mizar a resposta do sistema.

Escrevendo a equação de transformação do sistema do satélite para o de referência, temos:

$$\begin{bmatrix} X_R \\ Y_R \\ Z_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{RS}^{11} & \ell_{RS}^{12} & \ell_{RS}^{13} \\ \ell_{RS}^{21} & \ell_{RS}^{22} & \ell_{RS}^{23} \\ \ell_{RS}^{31} & \ell_{RS}^{32} & \ell_{RS}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

onde ℓ_{RS}^{ij} são os elementos da matriz $\underline{\ell}_{RS}$.

Portanto:

$$\vec{E}_1 = \vec{y}_S \times \vec{y}_R = \begin{vmatrix} \hat{x}_S & \hat{y}_S & \hat{z}_S \\ 0 & 1 & 0 \\ \ell_{RS}^{21} & \ell_{RS}^{22} & \ell_{RS}^{23} \end{vmatrix} = \ell_{RS}^{23} \hat{x}_S - \ell_{RS}^{21} \hat{z}_S \quad (3-21)$$

$$E_2 = \vec{z}_S \times \vec{z}_R = \begin{vmatrix} \hat{x}_S & \hat{y}_S & \hat{z}_S \\ 0 & 0 & 1 \\ \ell_{RS}^{31} & \ell_{RS}^{32} & \ell_{RS}^{33} \end{vmatrix} = \ell_{RS}^{31} \hat{y}_S - \ell_{RS}^{32} \hat{x}_S \quad (3-22)$$

e teríamos de (3-19), (3-21) e (3-22):

$$\begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} G_A(s) \ell_{RS}^{23} - G_B(s) \ell_{RS}^{32} \\ G_B(s) \ell_{RS}^{31} \\ -G_A(s) \ell_{RS}^{21} \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

No entanto, devido a equação (3-6), devemos escolher apenas as leis de controle de TY e TZ. Devido ainda a (3-6), devemos fazer $G_A(s) = G_B(s) = G(s)$.

Logo:

$$TY = C(s) \begin{matrix} 1 & 3 \\ & RS \end{matrix}$$

$$TZ = -C(s) \begin{matrix} 1 & 2 \\ & RS \end{matrix} \quad (3-24)$$

onde:

$$AY = \begin{matrix} 1 & 3 \\ & RS \end{matrix}$$

$$AZ = -\begin{matrix} 1 & 2 \\ & RS \end{matrix} \quad (3-25)$$

3.3.3.3 - TERCEIRO MÉTODO

O método que propomos aqui como uma possível forma de se fazer o controle de atitude, se baseia no teorema de Euler que diz: o movimento de um corpo rígido com um ponto fixo O de uma posição, definida pelo sistema S , para outra, definida pelo sistema R , é uma rotação de um ângulo μ ao redor de um certo eixo Z_E (ROBINSON).

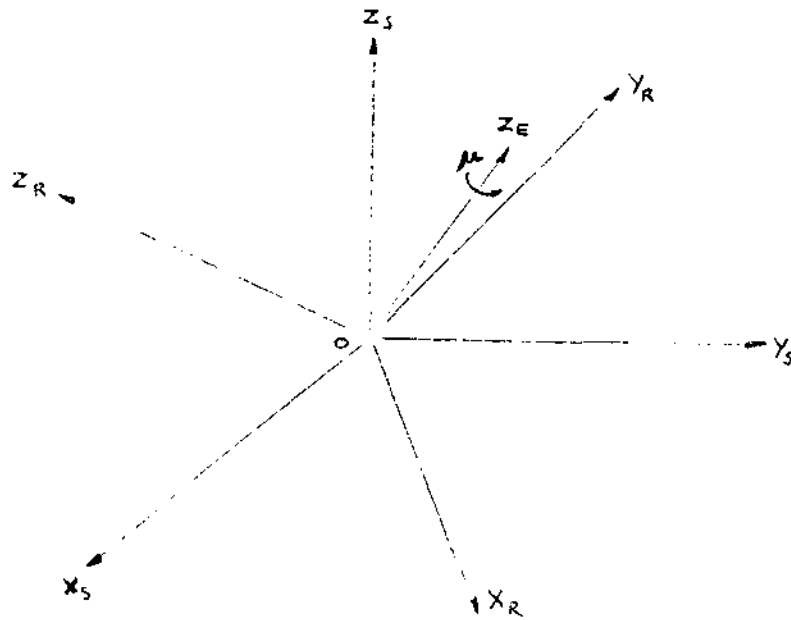


Fig. 3.9

Ao se fazer a rotação em torno de Z_E , nota-se que um certo vetor $[X, Y, Z]_R^t$ (no sistema R) passa a coincidir com um vetor $[X, Y, Z]_S^t$ (no sistema S) e as componentes em R do primeiro vetor são iguais às do segundo em S.

Podemos, então, transformar ambos os vetores dos seus sistemas respectivos (R e S) para o sistema E e, neste sistema, fazer a rotação de um deles, de um ângulo μ . Fazendo a transformação de R para E, temos:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \square_{ER} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

Fazendo o mesmo de S para E:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \square_{ES} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

Podemos, agora, girar um dos vetores (por exemplo o do sistema R) em torno de Z_E , para fazê-lo coincidir com o vetor do sistema S. Escrevemos, então:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu & 0 \\ -\sin \mu & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

Substituindo (3-26) e (3-27) em (3-28):

$$\underline{\underline{M}}_{ES} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mu & \text{sen } \mu & 0 \\ -\text{sen } \mu & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{ER} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underline{\underline{M}}_{ES}^{-1} \begin{bmatrix} \cos \mu & \text{sen } \mu & 0 \\ -\text{sen } \mu & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{ER} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

Como a matriz que relaciona os sistemas R e S é conhecida, é interessante usarmos a seguinte relação:

$$\underline{\underline{M}}_{ER}^{-1} \underline{\underline{M}}_{ES} = \underline{\underline{M}}_{RS} \quad (3-30)$$

Se multiplicarmos a equação (3-29) pela (3-30), obtemos:

$$\underline{\underline{M}}_{ES}^{-1} \begin{bmatrix} \cos \mu & \text{sen } \mu & 0 \\ -\text{sen } \mu & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{ER} \underline{\underline{M}}_{ER}^{-1} \underline{\underline{M}}_{ES} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{RS}$$

$$\therefore \underline{\underline{M}}_{ES}^{-1} \begin{bmatrix} \cos \mu & \text{sen } \mu & 0 \\ -\text{sen } \mu & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{ES} = \underline{\underline{M}}_{RS} \quad (3-31)$$

Considerando que:

$$\underline{L}_{ES} = \begin{bmatrix} \ell_{ES}^{11} & \ell_{ES}^{12} & \ell_{ES}^{13} \\ \ell_{ES}^{21} & \ell_{ES}^{22} & \ell_{ES}^{23} \\ \ell_{ES}^{31} & \ell_{ES}^{32} & \ell_{ES}^{33} \end{bmatrix} \quad \underline{L}_{RS} = \begin{bmatrix} \ell_{RS}^{11} & \ell_{RS}^{12} & \ell_{RS}^{13} \\ \ell_{RS}^{21} & \ell_{RS}^{22} & \ell_{RS}^{23} \\ \ell_{RS}^{31} & \ell_{RS}^{32} & \ell_{RS}^{33} \end{bmatrix}$$

e fazendo a multiplicação das matrizes na eq.(3-31), chegamos às seguintes equações:

$$[(\ell_{ES}^{11})^2 + (\ell_{ES}^{21})^2] \cos\mu + (\ell_{ES}^{31})^2 = \ell_{RS}^{11} \quad (3-32a)$$

$$(\ell_{ES}^{11} \cdot \ell_{ES}^{12} + \ell_{ES}^{22} \cdot \ell_{ES}^{21}) \cos\mu + (\ell_{ES}^{12} \cdot \ell_{ES}^{21} - \ell_{ES}^{22} \cdot \ell_{ES}^{11}) \operatorname{sen}\mu + \ell_{ES}^{31} \cdot \ell_{ES}^{32} = \ell_{RS}^{21} \quad (3-32b)$$

$$(\ell_{ES}^{11} \cdot \ell_{ES}^{13} + \ell_{ES}^{21} \cdot \ell_{ES}^{23}) \cos\mu + (\ell_{ES}^{13} \cdot \ell_{ES}^{21} - \ell_{ES}^{11} \cdot \ell_{ES}^{23}) \operatorname{sen}\mu + \ell_{ES}^{31} \cdot \ell_{ES}^{33} = \ell_{RS}^{31} \quad (3-32c)$$

$$(\ell_{ES}^{11} \cdot \ell_{ES}^{12} + \ell_{ES}^{21} \cdot \ell_{ES}^{22}) \cos\mu + (\ell_{ES}^{11} \cdot \ell_{ES}^{22} - \ell_{ES}^{12} \cdot \ell_{ES}^{21}) \operatorname{sen}\mu + \ell_{ES}^{31} \cdot \ell_{ES}^{32} = \ell_{RS}^{12} \quad (3-32d)$$

$$[(\ell_{ES}^{12})^2 + (\ell_{ES}^{22})^2] \cos\mu + (\ell_{ES}^{32})^2 = \ell_{RS}^{22} \quad (3-32e)$$

$$(\ell_{ES}^{12} \cdot \ell_{ES}^{13} + \ell_{ES}^{22} \cdot \ell_{ES}^{23}) \cos\mu + (\ell_{ES}^{13} \cdot \ell_{ES}^{22} - \ell_{ES}^{12} \cdot \ell_{ES}^{23}) \operatorname{sen}\mu + \ell_{ES}^{32} \cdot \ell_{ES}^{33} = \ell_{RS}^{32} \quad (3-32f)$$

$$(\ell_{ES}^{11} \cdot \ell_{ES}^{13} + \ell_{ES}^{21} \cdot \ell_{ES}^{23}) \cos\mu + (\ell_{ES}^{11} \cdot \ell_{ES}^{23} - \ell_{ES}^{13} \cdot \ell_{ES}^{21}) \operatorname{sen}\mu + \ell_{ES}^{31} \cdot \ell_{ES}^{33} = \ell_{RS}^{13} \quad (3-32g)$$

$$(\ell_{ES}^{12} \cdot \ell_{ES}^{13} + \ell_{ES}^{22} \cdot \ell_{ES}^{23}) \cos\mu + (\ell_{ES}^{12} \cdot \ell_{ES}^{23} - \ell_{ES}^{13} \cdot \ell_{ES}^{22}) \operatorname{sen}\mu + \ell_{ES}^{32} \cdot \ell_{ES}^{33} = \ell_{RS}^{23} \quad (3-32h)$$

$$[(\ell_{ES}^{12})^2 + (\ell_{ES}^{23})^2] \cos\mu + (\ell_{ES}^{33})^2 = \ell_{RS}^{33} \quad (3-32i)$$

Como sabemos que:

$$(\ell_{ES}^{11})^2 + (\ell_{ES}^{21})^2 + (\ell_{ES}^{31})^2 = 1 \quad (3-32a)$$

$$(\ell_{ES}^{12})^2 + (\ell_{ES}^{22})^2 + (\ell_{ES}^{32})^2 = 1 \quad (3-32b)$$

$$(\ell_{ES}^{13})^2 + (\ell_{ES}^{23})^2 + (\ell_{ES}^{33})^2 = 1 \quad (3-32c)$$

então, de (3-32a) e (3-33a), (3-32e) e (3-33b) e, ainda, (3-32i) e (3-33c), temos que:

$$(\ell_{ES}^{31})^2 = \frac{\ell_{RS}^{11} - \cos\mu}{1 - \cos\mu} \quad (3-34a)$$

$$(\ell_{ES}^{32})^2 = \frac{\ell_{RS}^{22} - \cos\mu}{1 - \cos\mu} \quad (3-34b)$$

$$(\ell_{ES}^{33})^2 = \frac{\ell_{RS}^{33} - \cos\mu}{1 - \cos\mu} \quad (3-34c)$$

$$\text{Sabemos, também, que: } (\ell_{ES}^{31})^2 + (\ell_{ES}^{32})^2 + (\ell_{ES}^{33})^2 = 1 \quad (3-35)$$

então, de (3-34) e (3-35):

$$\frac{\ell_{RS}^{11} - \cos\mu}{1 - \cos\mu} + \frac{\ell_{RS}^{22} - \cos\mu}{1 - \cos\mu} + \frac{\ell_{RS}^{33} - \cos\mu}{1 - \cos\mu} = 1$$

$$\therefore \cos\mu = \frac{\ell_{RS}^{11} + \ell_{RS}^{22} + \ell_{RS}^{33} - 1}{2} \quad (3-36)$$

De (3-34) e (3-36), tiramos que:

$$(\ell_{ES}^{31})^2 = \frac{1 + \ell_{RS}^{11} - \ell_{RS}^{22} - \ell_{RS}^{33}}{3 - \ell_{RS}^{11} - \ell_{RS}^{22} - \ell_{RS}^{33}} \quad (3-37a)$$

$$(\ell_{ES}^{32})^2 = \frac{1 - \ell_{RS}^{11} + \ell_{RS}^{22} - \ell_{RS}^{33}}{3 - \ell_{RS}^{11} - \ell_{RS}^{22} - \ell_{RS}^{33}} \quad (3-37b)$$

$$(\ell_{ES}^{33})^2 = \frac{1 - \ell_{RS}^{11} - \ell_{RS}^{22} + \ell_{RS}^{33}}{3 - \ell_{RS}^{11} - \ell_{RS}^{22} - \ell_{RS}^{33}} \quad (3-37c)$$

Extraindo mais algumas relações das equações (3-32), podemos conhecer os cossenos diretores ℓ_{ES}^{31} , ℓ_{ES}^{32} e ℓ_{ES}^{33} , que dão a posição do eixo de rotação Z_E , e o ângulo μ . No entanto, teremos ainda quatro maneiras de fazer a rotação (vide Fig. 3-10), ou seja:

eixo de rotação	ângulo
+ Z_E	μ
- Z_E	$360^\circ - \mu$
+ Z_E	$\mu - 360^\circ$
- Z_E	$-\mu$

Fig. 3.10

Deve-se, portanto, fazer duas restrições para se ter uma única forma de se fazer a rotação. Por exemplo, podemos nos fixar em rotação apenas em torno de $+Z_E$ e, ainda, fazer o ângulo de rotação ser aquele que tenha o menor módulo entre as duas possibilidades, isto é:

$$\kappa = \hat{\text{ângulo de rotação}} = \min (|\mu|, |\mu - 360^\circ|). \text{(o sinal correspondente)}$$

Enfim, podemos definir o "vetor de erro" por:

$$\vec{E} = \kappa \cdot (\ell_{ES}^{31} \hat{x}_s + \ell_{ES}^{32} \hat{y}_s + \ell_{ES}^{33} \hat{z}_s) \quad (3-38)$$

Para um caso geral, poderíamos escrever o torque a ser gerado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{T} \\ \tilde{T} \\ \tilde{T} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} \text{TX} \\ \text{TY} \\ \text{TZ} \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} G_1(s) \cdot \ell_{ES}^{31} \\ G_2(s) \cdot \ell_{ES}^{32} \\ G_3(s) \cdot \ell_{ES}^{33} \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

mas, para torques magnéticos, nós já vimos que existe a restrição dada pela equação (3-3) e, portanto, da forma como escrevemos na eq. (3-6), temos:

$$\begin{aligned} \text{TY} &= G(s) \cdot \kappa \cdot \ell_{ES}^{32} \\ \text{TZ} &= G(s) \cdot \kappa \cdot \ell_{ES}^{33} \end{aligned} \quad (3-40)$$

e o TX é dado pela eq. (3-4).

Logo:

$$AY = \kappa \cdot \ell \frac{32}{ES} \quad ; \quad AZ = \kappa \cdot \ell \frac{33}{ES} \quad (3-41)$$

3.3 - DIMENSIONAMENTO DAS BOBINAS

Para se gerar um momento de dipolo magnético no satélite, costuma-se usar bobina sem material ferromagnético, isto é, com núcleo de ar ou vácuo. Se a bobina tem N espiras, área A e por ela passa uma corrente I (Fig. 3.11), então:

$$\vec{M} = N A I \hat{n} \quad (3-42)$$

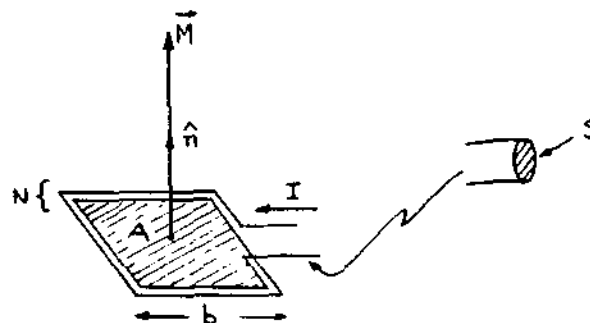


Fig. 3.11

No caso de uma bobina com seção quadrada e lado b , temos:

$$M = N b^2 I \quad (3-43)$$

onde:

$$M = |\vec{M}|$$

Se a área da seção transversal do condutor é S e a sua resistividade é ρ , então a resistência da bobina é dada por:

$$R = \frac{4 b N \rho}{S} \quad (3-44)$$

Logo, a potência dissipada na bobina é:

$$P = RI^2 = \frac{4 b N \rho}{S} \cdot \frac{M^2}{N^2 b^2}$$

$$\therefore P = \frac{4 \rho M^2}{S \cdot b^3 \cdot N} \quad (3-45)$$

Num satélite, há o interesse de se saber a relação entre a potência dissipada e a massa de condutor por bobina. Por isso, vamos escrever (3-45) em função da massa m da bobina.

Sabemos que:

$$m = \delta v \quad (3-46)$$

onde: δ = massa específica do material condutor

$v = 4NbS$ = volume de material condutor na bobina.

De (3-46), tiramos que:

$$S = \frac{m}{4Nb\delta} \quad (3-47)$$

e substituindo (3-47) em (3-45), temos:

$$P = \frac{4\rho M^2}{\frac{m}{4Nb\delta} b^3 \cdot N}$$

$$\therefore P = \frac{16 \rho \delta M^2}{mb^2} \quad (3-48)$$

Na prática, os valores de M são da ordem de 10 Am². Se for usado um condutor de alumínio, $\rho\delta = 7,6 \times 10^{-5} \Omega\text{Kg}/\text{m}^2$ em uma bobina com $b = 1\text{m}$ e massa de condutor $m = 0,5 \text{ Kg}$ (deve-se verificar, também, a massa de isolante), então:

$$P = 0,24 \text{ W}$$

Se considerarmos que temos uma massa de isolante da mesma ordem de grandeza que a massa de condutor, teremos uma potência dissipada em torno de 250 mW.Kg por bobina.

3.4 - MODELO PARA SIMULAÇÃO

O sistema de controle de atitude ativo apresentado no ítem 3.2 pode ser resumido no seguinte diagrama de blocos:

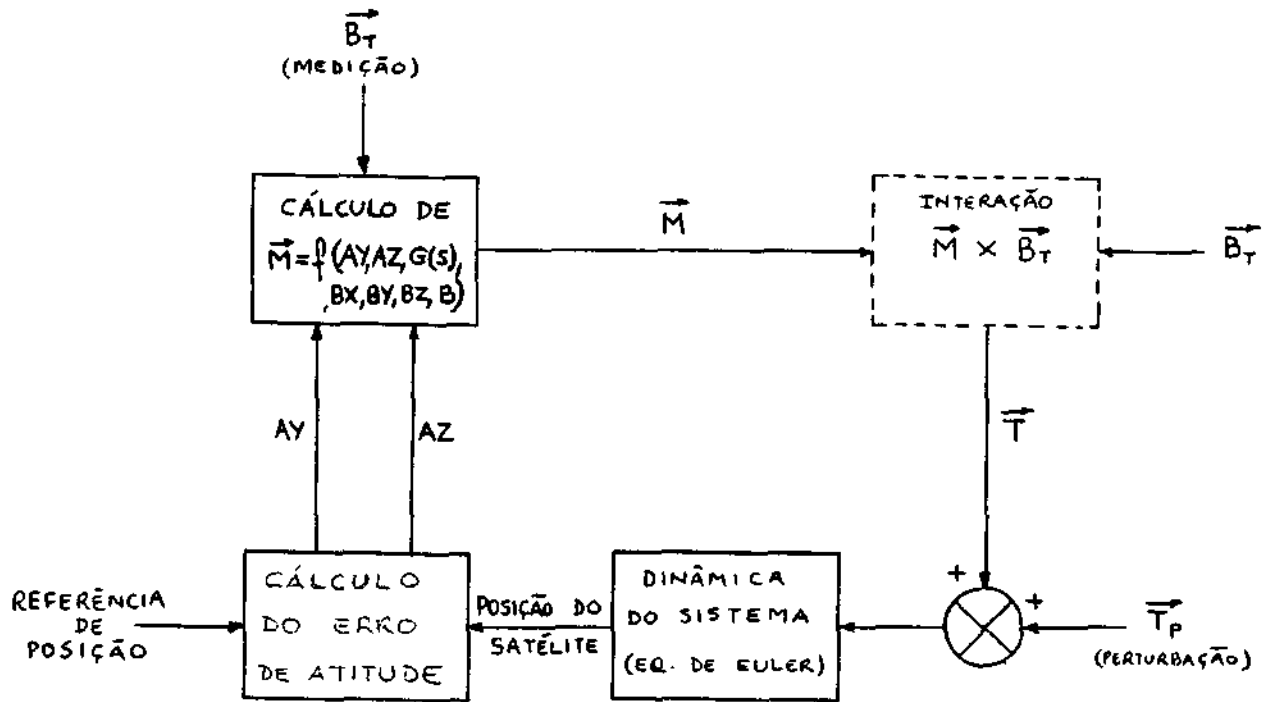


Fig. 3.12

Neste trabalho, resolvemos simular o sistema de controle ativo utilizando o sinal de erro definido no item 3.2.3.1 e a restrição 3.2.1 ($\vec{M} \cdot \vec{B}_T = 0$)

3.4.1 - CONDIÇÕES INICIAIS DE POSIÇÃO E VELOCIDADE

Para a integração das equações diferenciais de Euler, eq. (2-20), devemos conhecer os valores iniciais (em $t = t_0$) das velocidades angulares do satélite em relação ao sistema inercial, descritas no sistema de satélite, isto é, p , q e r e, ainda, a sua posição angular inicial em relação ao sistema inercial, i.é., a matriz \underline{Q}_{SV} .

É fácil visualizar as velocidades angulares p, q e r e, por isso, os seus valores iniciais poderão ser dados desta forma sem dificuldades. Entretanto, a matriz $\underline{\square}_{SV}$ é algo que não nos dá idéia imediata da posição do satélite. Como estamos interessados na simulação da atitude do satélite em relação a uma referência, preferiríamos, ainda, dar a posição inicial do satélite pela matriz $\underline{\square}_{RS}$. No entanto, a visualização continua difícil. Por isso, achamos interessante dar a posição inicial do satélite pelos ângulos de Euler $\psi_{RS}, \theta_{RS}, \phi_{RS}$ e, como sabemos, a matriz $\underline{\square}_{SV}$, que é necessária para a integração da eq. (2-20), pode ser obtida por:

$$\underline{\square}_{SV} = \underline{\square}_{RS}^{-1} \underline{\square}_{RV} \quad (3-49)$$

onde $\underline{\square}_{RS}$ é obtida a partir dos ângulos de Euler ψ_{RS}, θ_{RS} e ϕ_{RS} (vide Apêndice A e ref. 11) pela equação:

$$\underline{\square}_{RS} = \begin{bmatrix} (\cos\psi_{RS} \cos\theta_{RS}) & (\sin\psi_{RS} \cos\theta_{RS}) & (-\sin\theta_{RS}) \\ (\cos\psi_{RS} \sin\theta_{RS} \sin\phi_{RS} - \sin\psi_{RS} \cos\phi_{RS}) & (\sin\psi_{RS} \sin\theta_{RS} \sin\phi_{RS} + \cos\psi_{RS} \cos\phi_{RS}) & (\cos\theta_{RS} \sin\phi_{RS}) \\ (\cos\psi_{RS} \sin\theta_{RS} \cos\phi_{RS} - \sin\psi_{RS} \sin\theta_{RS}) & (\sin\psi_{RS} \sin\theta_{RS} \cos\phi_{RS} - \cos\psi_{RS} \sin\phi_{RS}) & (\cos\theta_{RS} \cos\phi_{RS}) \end{bmatrix} \quad (3-50)$$

e $\underline{\square}_{RV}$ é obtido da mesma forma a partir dos ângulos de Euler ψ_{RV}, θ_{RV} e ϕ_{RV} que dão a posição da referência em relação ao sistema de coordenadas inerciais.

3.4.2 - VALOR INICIAL DE \vec{M}

Nas eqs. (3-12), (3-13) e (3-14) observamos que o momento de dipolo magnético é uma função de A_Y , A_Z , B_X , B_Y , B_Z e B , assim como das derivadas dos mesmos, $\overset{\circ}{A}_Y$, $\overset{\circ}{A}_Z$, $\overset{\circ}{B}_X$, $\overset{\circ}{B}_Y$, $\overset{\circ}{B}_Z$ e $\overset{\circ}{B}$. As derivadas são necessárias devido ao termo derivativo de $G(s)$ (veremos adiante que $G(s)$ deve ter um termo derivativo para introduzir um amortecimento no sistema). Como a simulação é feita em computador digital, podemos calcular a derivada das funções acima por método numérico fazendo simplesmente:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (3-51)$$

No entanto, no instante inicial não é possível aplicar este método e, por isso, devemos calcular as derivadas analiticamente. Como estamos usando a definição de erro do item 3.2.3.1, temos, reescrevendo a eq. (3-17), que:

$$\begin{aligned} A_Y &= \overset{\theta}{RS} \\ A_Z &= \overset{\psi}{RS} \end{aligned} \quad (3-52)$$

onde $\overset{\theta}{RS}$ e $\overset{\psi}{RS}$ são ângulos de Euler.

De acordo com o apêndice A e Ref. 11, as derivadas dos ângulos de Euler são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_{RS} \\ \dot{\theta}_{RS} \\ \dot{\phi}_{RS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\sec\theta_{RS} \operatorname{sen}\phi_{RS}) & (\sec\theta_{RS} \cos\phi_{RS}) \\ 0 & (\cos\phi_{RS}) & (-\operatorname{sen}\phi_{RS}) \\ 1 & (\operatorname{tg}\theta_{RS} \operatorname{sen}\phi_{RS}) & (\operatorname{tg}\theta_{RS} \cos\phi_{RS}) \end{bmatrix} [\vec{\omega}^{R/S}]_R \quad (3-53)$$

onde: $[\vec{\omega}^{R/S}]_R = \begin{bmatrix} p_r \\ q_r \\ r_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ (3-54)

e p_r , q_r e r_r são as velocidades angulares da referência em relação ao sistema de coordenadas inercial, descritas no sistema de coordenadas definido pela referência. O caso mais simples é aquele em que a referência é fixa em relação ao sistema inercial (isto é, $p_r = q_r = r_r = 0$). Outro caso é quando o satélite está em órbita circular em torno da Terra e deseja apontar o seu eixo X_S para o centro da Terra. Isto equivale a termos o eixo X_R da referência apontando para o centro da Terra. Portanto, temos (vide Fig. 3.13):

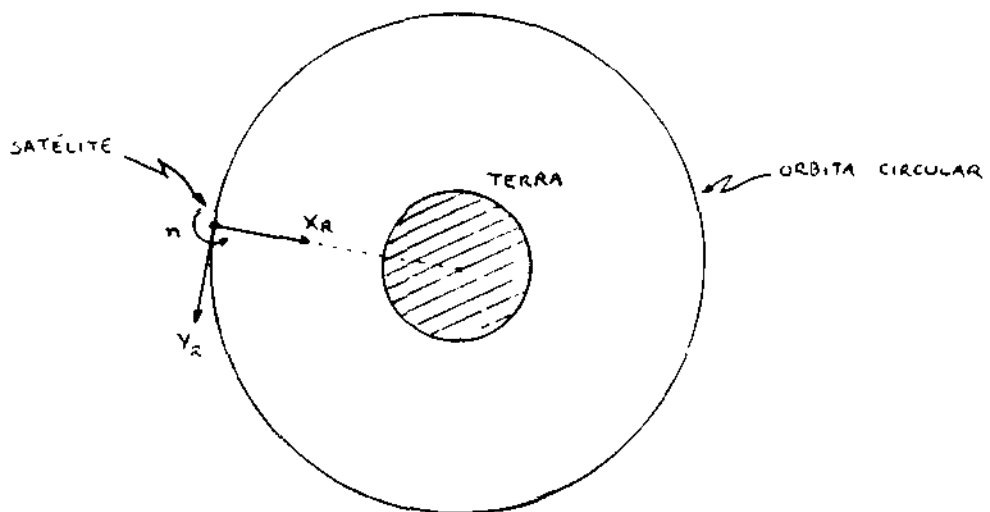


Fig. 3.13

$$\begin{bmatrix} p_r \\ q_r \\ r_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix} \quad (3-55)$$

onde n = movimento médio do satélite (vide Apêndice B).

Falta-nos, ainda, calcular as derivadas de BX, BY, BZ e B. Reescrevendo a eq. (2-41), temos:

$$[\dot{\vec{B}}_T]_s = \underline{\underline{L}}_{sv} [\dot{\vec{B}}_T]_v \quad (3-56)$$

Portanto:

$$[\overset{\circ}{\vec{B}}_T] = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{BX} \\ \overset{\circ}{BY} \\ \overset{\circ}{BZ} \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}_{sv} [\dot{\vec{B}}_T]_v + \underline{\underline{L}}_{sv} [\overset{\circ}{\vec{B}}_T]_v \quad (3-57)$$

Simplificação: a partir deste ponto, passaremos a considerar apenas o caso de um satélite em órbita de pequena excentricidade (quase circular) e de baixa inclinação (valores de i pequenos) que é um caso de interesse prático e que, além disso, torna simples a simulação.

Adotando a simplificação acima, podemos dizer que:

$$[\overset{\circ}{\vec{B}}_T]_v \approx 0 \quad (3-58)$$

pois n (movimento médio) é pequeno comparado com p , q e r , tendo pequena contribuição para $\overset{\circ}{B}X$, $\overset{\circ}{B}Y$ e $\overset{\circ}{B}Z$ e, ainda, como a órbita é de baixa inclinação, isto é, próxima aos equadores geográfico e geomagnético, e como o seu raio é praticamente constante, temos que $\overset{\circ}{B}=0$. Logo, em primeira aproximação, podemos escrever:

$$\left[\overset{\circ}{\vec{B}}_T \right]_s = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}X \\ \overset{\circ}{B}Y \\ \overset{\circ}{B}Z \end{bmatrix} \approx \underline{\underline{L}}_{sv} \left[\overset{\circ}{\vec{B}}_T \right]_v \quad (3-59)$$

Conhecendo, agora, AY , AZ , BX , BY , BZ , B e suas derivadas $\overset{\circ}{A}Y$, $\overset{\circ}{A}Z$, $\overset{\circ}{B}X$, $\overset{\circ}{B}Y$, $\overset{\circ}{B}Z$ e $\overset{\circ}{B}$ (calculadas analiticamente), podemos achar o valor inicial de \vec{M} usando as equações (3-61), (3-62) e (3-63) do ítem a seguir.

3.4.3 - CÁLCULO DE \vec{M}

As expressões (3-12), (3-13) e (3-14) nos dão \vec{M} no domínio da frequência mas, como faremos a integração das equações de Euler no domínio do tempo, temos que transformar essas expressões para o domínio do tempo.

Como justificaremos adiante numa análise de operação em regime permanente e em transitório do sistema, a função de transferência $G(s)$ adotada é do tipo Proporcional + Derivativo (PD),

isto é:

$$G(s) = K_p + K_d s = K_s (K_1 + K_2 s) \quad (3-60)$$

onde: K_s = ganho do sensor de posição

K_1 = ganho da parte proporcional do controlador

K_2 = ganho da parte derivativa do controlador

Portanto, substituindo a eq. (3-60) nas eqs.(3-12), (3-13) e (3-14) e, ainda, transformando estas expressões para o domínio do tempo, temos:

$$MX = K_p \left[\frac{AZ \cdot BY - AY \cdot BZ}{B^2} \right] + K_d \left[\frac{\overset{\circ}{AZ} \cdot BY + AZ \cdot \overset{\circ}{BY} - \overset{\circ}{AY} \cdot BZ - AY \cdot \overset{\circ}{BZ}}{B^2} - \frac{2(AY \cdot BZ - AZ \cdot BY) \overset{\circ}{B}}{B^3} \right] \quad (3-61)$$

$$MY = -K_p \left[\frac{AY \cdot BY \cdot BZ + AZ(BX^2 + BZ^2)}{BX \cdot B^2} \right] - K_d \left[\frac{\overset{\circ}{AZ} \cdot BY^2 + 2AZ \cdot BY \cdot \overset{\circ}{BY} - \overset{\circ}{AY} \cdot BZ \cdot BY - AY \cdot \overset{\circ}{BZ} \cdot BY - AY \cdot BZ \cdot \overset{\circ}{BY}}{BX \cdot B^2} + \right. \\ \left. + BY(AY \cdot BZ - AZ \cdot BY) \left(\frac{\overset{\circ}{BX}}{BX^2 \cdot B^2} + \frac{2\overset{\circ}{B}}{BX \cdot B^3} \right) - \frac{\overset{\circ}{AZ} \cdot BX - AZ \cdot \overset{\circ}{BX}}{BX^2} \right], \quad BX \neq 0 \quad (3-62)$$

$$MZ = K_p \left[\frac{AZ \cdot BY \cdot BZ + AY(BX^2 + BY^2)}{BX \cdot B^2} \right] + K_d \left[\frac{\overset{\circ}{AZ} \cdot BZ \cdot BY + AZ \cdot \overset{\circ}{BZ} \cdot BY + AZ \cdot BZ \cdot \overset{\circ}{BY} - \overset{\circ}{AY} \cdot BZ^2 - 2AY \cdot BZ \cdot \overset{\circ}{BZ}}{BX \cdot B^2} + \right. \\ \left. + BZ(AY \cdot BZ - AZ \cdot BY) \left(\frac{\overset{\circ}{BX}}{BX^2 \cdot B^2} + \frac{2\overset{\circ}{B}}{BX \cdot B^3} \right) + \frac{\overset{\circ}{AY} \cdot BX - AY \cdot \overset{\circ}{BX}}{BX^2} \right], \quad BX \neq 0 \quad (3-63)$$

Com as equações (3-58), (3-59), (3-61), (3-62) e (3-63) podemos calcular o valor inicial (em $t=t_0$) de \vec{M} e, usando a equação (3-51) para calcular as derivadas em $t>t_0$ e as eqs. (3-61), (3-62) e (3-63), podemos calcular \vec{M} em qualquer instante $t>t_0$.

3.4.4 - INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EULER

Para integrar as equações de Euler utilizamos o método numérico de Runge-Kutta de 4ª ordem (PACITTI e ATKINSON, 1976).

Dada a equação diferencial:

$$\dot{Y} = F(t, Y) \quad (3-64)$$

onde:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{bmatrix} \quad e \quad F(t, Y) = \begin{bmatrix} f_1(t, Y) \\ f_2(t, Y) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N(t, Y) \end{bmatrix}$$

a integral de cada linha de eq. (3-64) é dada, em $t=h.(i+1)+t_0$ por:

$$y_{i+1}^j = y_i^j + \frac{h}{6} [(K_1)_i^j + 2(K_2)_i^j + 2(K_3)_i^j + (K_4)_i^j] \quad (3-65)$$

$$i = 0, 1, 2, 3 \dots ; j = 1, 2, \dots N$$

onde: h = passo de integração

$$(K_1)_i^j = f_j(t_i, Y_i)$$

$$(K_2)_i^j = f_j\left[t_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2} (K_1)_i^j\right]$$

$$(K_3)_i^j = f_j\left[t_i + \frac{h}{2}, Y_i + h (K_2)_i^j\right]$$

$$(K_4)_i^j = f_j\left[t_i + h, Y_i + h (K_3)_i^j\right]$$

Para aplicar o método acima descrito, devemos escrever a equação (2-20) na forma em que está a eq.(3-64).

Como as variáveis que desejamos integrar em (2-20) são $\overset{\circ}{p}$, $\overset{\circ}{q}$ e $\overset{\circ}{r}$, escrevemos, então:

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{p} \\ \overset{\circ}{q} \\ \overset{\circ}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{TX + (I_y - I_z) qr}{I_x} \\ \frac{TY + (I_z - I_x) pr}{I_y} \\ \frac{TZ + (I_x - I_y) pq}{I_z} \end{bmatrix} \quad (3-66)$$

A integral de (3-66) nos dá p , q e r mas precisamos, ainda, calcular a posição do satélite, isto é, a matriz $\underline{\underline{P}}_{SV}$.

Conforme o Apêndice A e SIELAWA (1976), temos a seguinte equação descrevendo a cinemática do satélite:

$$\mathbf{l}_{SV} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{l}_{SV}^{11} & \overset{\circ}{l}_{SV}^{12} & \overset{\circ}{l}_{SV}^{13} \\ \overset{\circ}{l}_{SV}^{21} & \overset{\circ}{l}_{SV}^{22} & \overset{\circ}{l}_{SV}^{23} \\ \overset{\circ}{l}_{SV}^{31} & \overset{\circ}{l}_{SV}^{32} & \overset{\circ}{l}_{SV}^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r\overset{\circ}{l}_{SV}^{21} - q\overset{\circ}{l}_{SV}^{31})(r\overset{\circ}{l}_{SV}^{22} - q\overset{\circ}{l}_{SV}^{32})(r\overset{\circ}{l}_{SV}^{23} - q\overset{\circ}{l}_{SV}^{33}) \\ (p\overset{\circ}{l}_{SV}^{31} - r\overset{\circ}{l}_{SV}^{11})(p\overset{\circ}{l}_{SV}^{32} - r\overset{\circ}{l}_{SV}^{12})(p\overset{\circ}{l}_{SV}^{33} - r\overset{\circ}{l}_{SV}^{13}) \\ (q\overset{\circ}{l}_{SV}^{11} - p\overset{\circ}{l}_{SV}^{21})(q\overset{\circ}{l}_{SV}^{12} - p\overset{\circ}{l}_{SV}^{22})(q\overset{\circ}{l}_{SV}^{13} - p\overset{\circ}{l}_{SV}^{23}) \end{bmatrix} \quad (3-67)$$

Integrando (3-67) através de (3-65), obtemos a posição do satélite e completamos o nosso modelo pois já temos como simular todos os blocos do nosso sistema (vide Fig. 3.12).

3.4.5 - ANÁLISE DO ERRO DE REGIME PERMANENTE

Supondo que, para valores grandes de A_Y e A_Z , os torques aplicados ao satélite pelo sistema de controle façam-no convergir para uma atitude próxima à da referência (a simulação deve comprovar esta hipótese), podemos tratar o sistema, a partir daí, por um modelo linear. Como A_Y , A_Z , p , q e r são pequenos e considerando que os momentos de inércia em torno dos três eixos do satélite não sejam muito diferentes, podemos fazer a seguinte aproximação na eq. (2-20):

$$\begin{bmatrix} TX \\ TY \\ TZ \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} I_x & \overset{\circ}{p} \\ I_y & \overset{\circ}{q} \\ I_z & \overset{\circ}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & \overset{\circ}{\circ} & \overset{\circ}{\circ} \\ I_y & \overset{\circ}{\circ} & \overset{\circ}{\circ} \\ I_z & \overset{\circ}{\circ} & \overset{\circ}{\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (3-68)$$

Logo, podemos separar o modelo em partes relativas ao movimento em torno de cada eixo do satélite. Desta forma, para o movimento em torno do eixo Y_s , temos o diagrama de blocos da fig.(3.14). O diagrama de blocos para o eixo Z_s é semelhante.

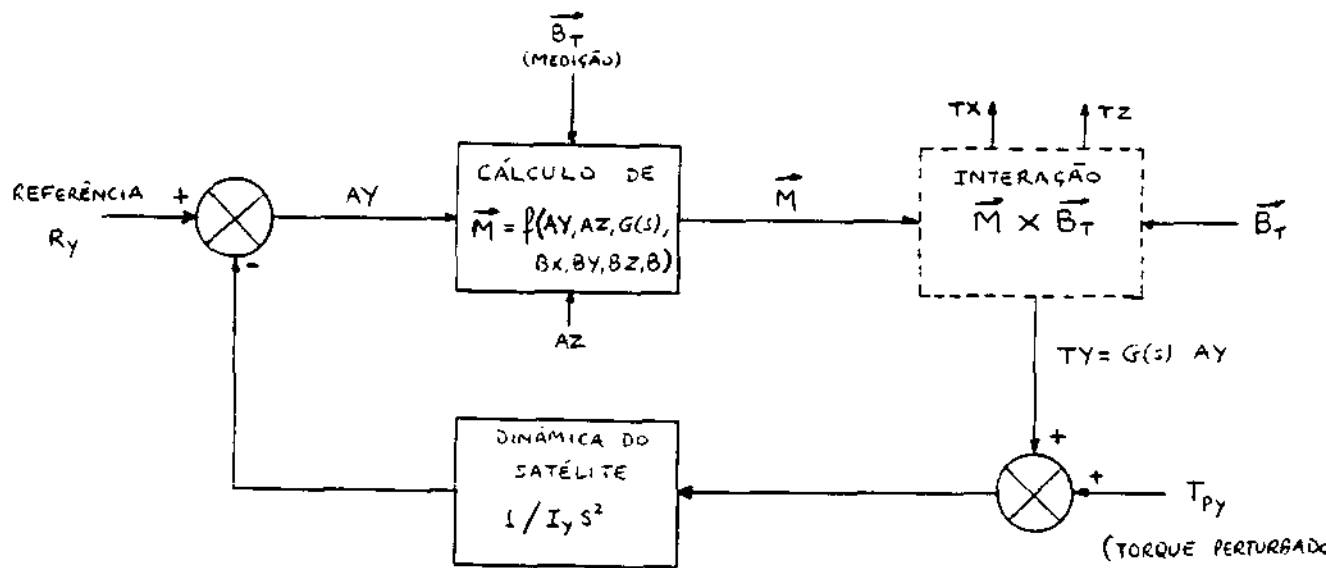


Fig. 3.14

Da fig. (3.14), tiramos que a resposta de malha aberta é dada por:

$$P_y(s) = \frac{AY(s) G(s) + T_{py}(s)}{I_y s^2} \quad (3-69)$$

e a resposta de malha fechada fica, então:

$$P_y(s) = \frac{\frac{R_y(s) \cdot G(s)}{I_y} + \frac{T_{py}(s)}{I_y}}{s^2 + \frac{G(s)}{I_y}} \quad (3-70)$$

Se desejarmos que o sistema acima se comporte como um de 2ª ordem com amortecimento, devemos escolher $G(s)$ do tipo Proporcional + Derivativo, isto é;

$$G(s) = K_p + K_d \cdot s \quad (3-71)$$

Para fazermos a análise do erro de regime do sistema, devemos calcular $AY(s)$, primeiramente para $T_{py}(s) = 0$ e, em seguida para $R_y(s) = 0$.

3.4.5.1 - ANÁLISE DO ERRO EM REGIME PERMANENTE PARA DIVERSAS ENTRADAS DE CONTROLE

$$[AY(s)]_{T_{py}=0} = [R_y(s) - P_y(s)]_{T_{py}=0} = R_y(s) \left[1 - \frac{K_d}{I_y} \frac{\frac{K_p}{K_d} + s}{(s^2 + \frac{K_d}{I_y} s + \frac{K_p}{I_y})} \right]$$

$$\therefore [AY(s)]_{T_{py}=0} = \frac{s^2 \cdot R_y(s)}{(s^2 + \frac{K_d}{I_y} s + \frac{K_p}{I_y})} \quad (3-72)$$

Portanto, o erro de regime para a entrada $R_y(s)$ é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} AY(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot AY(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s^3 R_y(s)}{s^2 + \frac{K_d}{I_y} s + \frac{K_p}{I_y}} \right] \quad (3-73)$$

Vê-se claramente que os erros de regime para as entradas impulso, degrau e rampa são nulos. O erro para uma parábola é constante e, para entradas de maior ordem, a saída do sistema não acompanha a entrada.

Referência $[R_y(t)]_{T_{dy}=0}$	$\lim_{t \rightarrow \infty} AY(t)$
C_i (Impulso)	0
$\frac{C_d}{s}$ (Degrau)	0
$\frac{C_r}{s^2}$ (Rampa)	0
$\frac{C_p}{s^3}$ (Parábola)	$\frac{C_p I_y}{K_p}$
Entradas de ordem superior	∞

Lembrando as simplificações da órbita do satélite adotadas no ítem 3.4.2, se desejarmos que o satélite siga uma referência do tipo definido na eq. (3-55), a entrada $R_y(s)$ será uma rampa, isto é:

$$R_y(t) = n(t-\tau) = \text{anomalia média} \quad (3-74)$$

e, portanto, o erro de regime é nulo.

Observamos, entretanto, que se a excentricidade da órbita não for nula, a entrada $R_y(t)$ não será mais a anomalia média mas, sim, a anomalia excêntrica, isto é:

$$R_y(t) = E(t) = \text{anomalia excêntrica} \quad (3-75)$$

Como sabemos, $E(t)$ é dado pela equação de Kepler (eq. B-2):

$$E - e \sin E = n(t-\tau) \quad (3-76)$$

Derivando (3-76), temos:

$$\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E} \quad (3-77)$$

Vemos que, à medida que a excentricidade aumenta, \dot{E} deixa de ser constante ($e=0 \rightarrow \dot{E}=n$) e passa a ser periódico, sendo ora maior que n , ora menor que n . Isto leva o satélite a apresentar um erro periódico (em regime), como mostraremos a seguir.

De acordo com a eq.(B-3), a solução da equação de Kepler é dada por:

$$E(t) = n(t-\zeta) + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{K} J_K(Ke) \text{sen} [K.n(t-\tau)] \right\} \quad (3-78)$$

onde: $J_K(x)$ = função de Bessel de primeira classe de ordem K

Como estamos tratando com uma aproximação linear do nosso sistema onde vale o princípio da superposição e, como o erro de regime para a entrada rampa $n(t-\tau)$ é nulo, é necessário que verifiquemos, apenas, como o sinal de erro se comporta para entradas senoidais.

Se supusermos uma entrada:

$$R_y(t) = A \text{ sen } \omega t \quad (3-79)$$

temos em regime, que:

$$P_y(t) = B \text{ sen}(\omega t + \theta) \quad (3-80)$$

onde θ é dado por:

$$\theta = \phi - \alpha \quad (3-81)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{K_d \cdot \omega}{\sqrt{(K_p - I_y \omega^2)^2 + (K_d \omega)^2}} \quad (3-82a)$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{(K_p - I_y \omega^2)}{\sqrt{(K_p - I_y \omega^2)^2 + (K_d \omega)^2}}$$

$$\text{sen } \phi = \frac{K_d \omega}{\sqrt{K_p^2 + (K_d \omega)^2}} \quad (3-83a)$$

$$\text{cos } \phi = \frac{K_p}{\sqrt{K_p^2 + (K_d \omega)^2}} \quad (3-83b)$$

A relação entre as amplitudes A e B é dada por:

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{K_p^2 + (K_d \omega)^2}}{\sqrt{(K_p - I_y \omega)^2 + (K_d \omega)^2}} \quad (3-84)$$

Portanto, o erro de regime é dado por:

$$AY(t) = A \text{ sen } \omega t - B \text{ sen } (\omega t + \theta) = \sqrt{A^2 - 2AB \cos \theta + B^2} \cdot \text{sen}(\omega t + \delta) \quad (3-85)$$

onde δ é dado por:

$$\text{sen } \delta = \frac{-B \text{ sen } \theta}{\sqrt{A^2 - 2AB \cos \theta + B^2}} \quad (3-86a)$$

$$\text{cos } \delta = \frac{A - B \cos \theta}{\sqrt{A^2 - 2AB \cos \theta + B^2}} \quad (3-86b)$$

Vemos, de (3-85), que $AY(t)$ terá amplitude tanto menor quanto menor for a defasagem θ e quanto mais próximo de 1 for a relação B/A . Vemos das eqs. (3-81), (3-82), (3-83) e (3-84) que isso é conseguido de fizemos $K_p \gg I_y \omega^2$, isto é, deve-se usar um valor grande para K_p observando-se, é claro, as limitações práticas que se tem.

Se, agora, o sinal de entrada $R_y(t)$ é a anomalia excêntrica (eq.3-75), temos:

$$R_y(t) = n(t-\tau) + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{K} J_K(Ke) \text{ sen } [Kn(t-\tau)] \right\} \quad (3-87)$$

e, em regime:

$$P_y(t) = n(t-\tau) + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \left\{ B_K \text{ sen } [K \cdot n(t-\tau) + \theta_K] \right\} \quad (3-88)$$

onde:

$$B_K = \frac{1}{K} J_K(Ke) \cdot \frac{\sqrt{K_p^2 + (K_d \cdot K \cdot n)^2}}{\sqrt{[K_p - I_y (K \cdot n)^2]^2 + (K_d \cdot K \cdot n)^2}} \quad (3-89)$$

$$e: \quad \theta_K = \phi_K - \alpha_K \quad (3-90)$$

$$\text{sen } \alpha_K = \frac{K_d \cdot K \cdot n}{\sqrt{[K_p - I_y (K \cdot n)^2]^2 + (K_d \cdot K \cdot n)^2}} \quad (3-91a)$$

$$\text{cos } \phi_K = \frac{K_p - I_y (K \cdot n)^2}{\sqrt{[K_p - I_y (K \cdot n)^2]^2 + (K_d \cdot K \cdot n)^2}} \quad (3-91b)$$

$$\text{sen } \phi_K = \frac{K_d \cdot K \cdot n}{\sqrt{K_p^2 + (K_d \cdot K \cdot n)^2}} \quad (3-92a)$$

$$\text{cos } \phi_K = \frac{K_p}{\sqrt{K_p^2 + (K_d \cdot K \cdot n)^2}} \quad (3-92b)$$

Portanto:

$$AY(t) = 2 \cdot \sum_{K=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{\left[\frac{1}{K} J_K(Ke) \right]^2 - \frac{2}{K} J_K(Ke) \cdot B_K \cdot \text{cos } \theta_K + B_K^2} \cdot \text{sen}[K \cdot n(t - \tau) + \delta_K] \right\} \quad (3-93)$$

$$\text{onde: } \sin \delta_K = \frac{-B_K \sin \theta_K}{\sqrt{\left[\frac{1}{K} J_K(K\theta)\right]^2 - \frac{2}{K} J_K(K\theta) \cdot B_K \cdot \cos \theta_K + B_K^2}} \quad (3-94a)$$

$$\cos \delta_K = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{K} J_K(K\theta)\right]^2 - \frac{2}{K} J_K(K\theta) \cdot B_K \cdot \cos \theta_K + B_K^2}} \quad (3-94b)$$

Fica, então, provado que o erro de regime em uma órbita elíptica para o sistema em questão é periódico. Podemos, da mesma forma com que fizemos para entrada senoidal, tentar minimizar a amplitude desse erro. Neste caso devemos fazer $K_p \gg I_y (K \cdot n)^2$, onde escolhe-se um certo K tal que as amplitudes das harmônicas do erro com frequências superiores a $K \cdot n$ já sejam desprezíveis (elas variam com $J_K(K\theta)/K$).

3.4.5.2 - ANÁLISE DO ERRO EM REGIME PERMANENTE PARA TORQUES PERTURBADORES

Da eq.(3-70), tiramos a resposta de malha fechada do sistema linearizado (fig.3.14) para torques perturbadores fazendo $R_y(s) = 0$:

$$\frac{P_y(s)}{T_{py}(s)} = \frac{1}{I_y} \frac{1}{s^2 + \frac{G(s)}{I_y}} \quad (3-95)$$

Considerando o controlador PD (eq.3-71), temos:

$$\frac{P_y(s)}{P_{py}(s)} = \frac{1}{I_y} \frac{1}{s^2 + \frac{K_d}{I_y} s + \frac{K_p}{I_y}} \quad (3-96)$$

O sinal de erro é dado por:

$$AY(s) = -P_y(s) = -\frac{1}{I_y} \frac{T_{py}(s)}{s^2 + \frac{K_d}{I_y} s + \frac{K_p}{I_y}} \quad (3-97)$$

e o erro de regime é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} AY(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{-T_{py}(s) \cdot s}{I_x \left(s^2 + \frac{K_d}{I_y} s + \frac{K_p}{I_y} \right)} \right] \quad (3-98)$$

Nota-se que o erro de regime para a entrada impulso é nulo, para o degrau é uma constante e para entradas de ordem superior, o erro cresce indefinidamente.

Torque Externo [$T_{py}(t)$] _{R_y=0}	$\lim_{t \rightarrow \infty} AY(t)$
T_i (Impulso)	0
$\frac{T_d}{s}$ (Degrau)	$-\frac{T_d}{K_p}$
Entradas de ordem superior	∞

Vemos aqui que podemos minimizar o erro de regime para entrada degrau se fizermos K_p grande, o que também é uma condição desejada para a entrada $R_y(t)$ quando $e \neq 0$ (como vimos no ítem anterior).

3-4-6 - ANÁLISE DE TRANSITÓRIO PARA ENTRADAS DE CONTROLE DE PEQUENA AMPLITUDE

Quando as entradas são de pequena amplitude (R_y ou T_{py}) podemos considerar a aproximação linear da Fig. 3.14. Nesta situação, de acordo com as eqs. (3-70) e (3-71), as funções de transferência de malha fechada para as entradas R_y e T_{py} são, respectivamente:

$$\frac{P_y}{R_y} = \frac{K_d}{I_y} \frac{\left(\frac{K_p}{K_d} + s\right)}{\left(s^2 + \frac{K_d}{I_y} s + \frac{K_p}{I_y}\right)} \quad (3-99)$$

$$\frac{P_y}{T_{py}} = \frac{1}{I_y} \frac{1}{\left(s^2 + \frac{K_d}{I_y} s + \frac{K_p}{I_y}\right)} \quad (3-100)$$

Portanto, utilizando os resultados conhecidos para sistemas de 2ª ordem (OGATA, 1970):

$$s^2 + \frac{K_d}{I_y} s + \frac{K_p}{I_y} = s^2 + 2\zeta_y \omega_{ny} + \omega_{ny}^2$$

$$\therefore \omega_{ny} = \sqrt{\left(\frac{K_p}{I_y}\right)} = \text{frequência natural não amortecida (para eixo } \underline{y} \text{)} \\ \text{ou } \underline{x})$$

$$\zeta_y = \frac{K_d}{2\sqrt{I_y K_p}} = \text{razão de amortecimento (para eixo } \underline{y} \text{)}$$

É importante notar que o sistema apresenta um zero para a entrada R_y e o transitório, neste caso, pode ser bastante diferente daquele para um sistema sem o zero (que é o caso da função de transferência para a entrada T_{py}). A resposta ao degrau unitário para um sistema de 2ª ordem com um zero está representada na fig. 3.15 (OGATA, 1970), para $\zeta=0,5$ e para diversas relações $z/\zeta\omega_n$ (onde z é o zero).

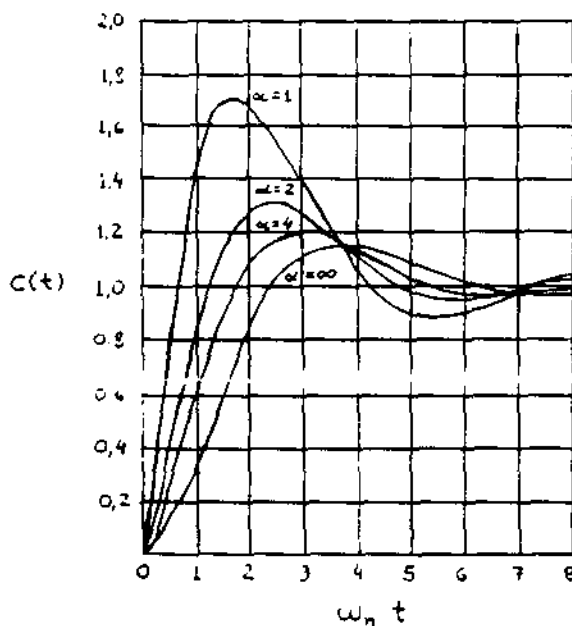


Fig. 3.15 - Resposta ao degrau unitário do sistema de 2ª ordem

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \left(\frac{\omega_n^2}{z}\right) \left(\frac{s+z}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\right)$$

$$\zeta = 0,5$$

(Fonte: Ogata, 1970).

CAPÍTULO 4

SIMULAÇÕES. LISTAGENSE DESCRIÇÃO DE SUBROTINAS

Neste Capítulo, vamos mostrar como simulamos as diversas partes de nosso modelo que compreende, em suma, o seguinte:

- órbita elíptica
- campo magnético da Terra
- dinâmica do satélite
- controle de atitude: geração dos dipolos magnéticos MX, MY e MZ

4.1 - ÓRBITA ELÍPTICA

- SUBROTINA ORBIT: calcula a posição do satélite em sua órbita elíptica no sistema de coordenadas inerciais

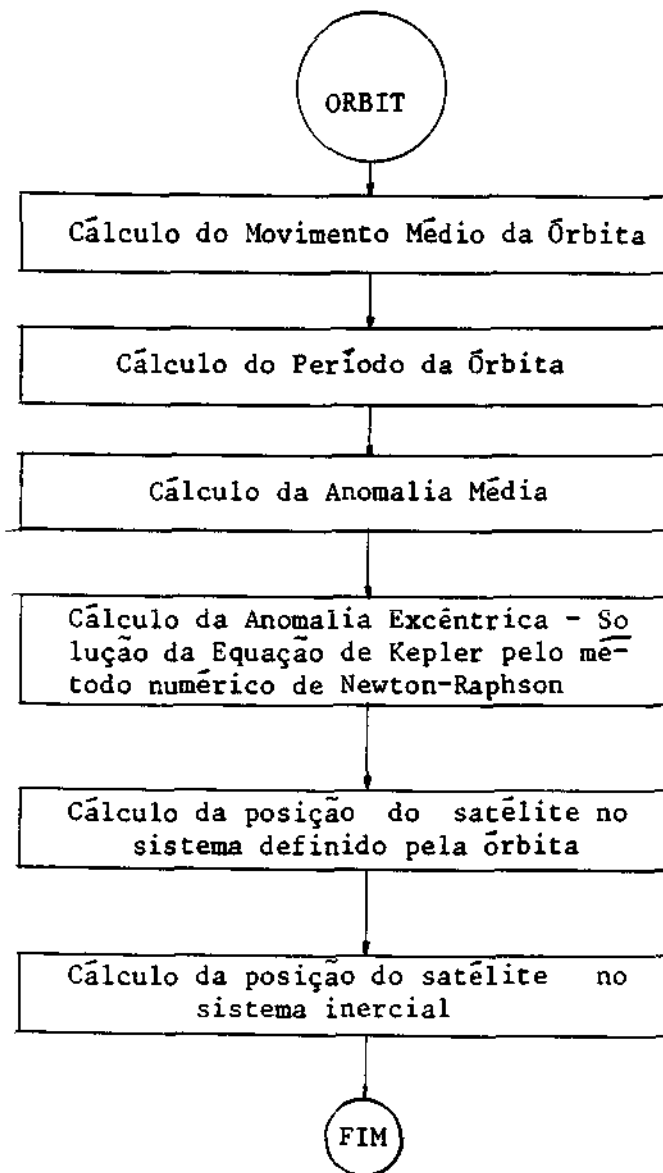
Entradas: $t = T$ $\omega_0 = WO$ $e = EXCTR$

$\Omega_0 = OMEGO$ $\frac{\Delta\omega}{\Delta T} = DWO$ $i = I$

$\frac{\Delta\Omega}{\Delta T} = DOMEG$ $a = A$ $\tau = TAU$

Saídas: XV YV ZV

Diagrama de blocos:



Listagem:

```

SUBROUTINE PRG1(XV,YV,ZV)
REAL X,Y,Z,XT,AST
COMMON/TATG,S,DEGR,OMEGA,W,OMEGA,A,EXCTR,I,TAU,T,NORBT
COMMON/SY,SZ
C *****
C
C CALCULO DA POSICAO DO SATELITE EM SUA ORBITA ELIPTICA, DADA NO SISTEMA
C DE REFERENCIA DAS INERCIAIS
C *****
      DOSPI=2*PI*953076
      A=Z*FTAU
C CONSTANTE GRAVITACIONAL TERRESTRE
      MU=3.986*1014
C CALCULO DO SEMIEIXO MAIOR DA ORBITA
      N=(SQRT(MU)/DOSPI(A))/A
C CALCULO DO PERIODO DA ORBITA
      TP=DOSPI/A
      P=(T-TAU)/TP
C NORBT=NUMERO DE ORBITAS JA COMPLETADAS
      NORBT=INT(P)
C CALCULO DA ANOMALIA VERBA
      ME=DOSPI*(P-INT(P))
C CALCULO DA ANOMALIA EXCENTRICA DA ORBITA - SOLUCAO DA EQUACAO
      DE LAPLACE
      E=M
      FI=E*(1+EXCTR*SI(E)-E)/(1-EXCTR*COSE)
      ERRO=0.0001+E
      AERRO=A*(SI(FI-E))
      E=FI
      IF(AERRO-ERRO)10,10.5
10 CONTINUE
C CALCULO DA POSICAO DO SATELITE NO SISTEMA DEFINIDO PELA ORBITA
      KSI=A*(COS(FI)-EXCTR)
      ETA=A*SQRT(1-EXCTR**2)*SIN(E)
      XW=NO+OMEGA*P
      OMEGA=OMEGA0+OMEGA*X
C CALCULO DA POSICAO DO SATELITE NO SISTEMA INERCIAL
      YV=STN(I)*SIN(T)*AST+COS(W)*SI(I)*ETA
      YW=STN(OMEGA)*COS(W)+COS(OMEGA)*SIN(W)+COS(I)*KSI+
      +SIN(OMEGA)*SIN(W)-COS(OMEGA)*COS(W)*COS(I)*ETA
      ZV=(COS(OMEGA)*COS(I)+SIN(OMEGA)*SIN(W)*COS(I))*KSI-
      -(COS(OMEGA)*SIN(W)+SIN(OMEGA)*COS(W)*COS(I))*ETA
      OTIME=
      END

```

Variáveis:	n = N	T = TP	M = M
	E = E	ξ = KSI	η = ETA
	ω = W	Ω = OMEGA	nº de órbitas=NORBT
Constantes:	μ = MU	2π = DOSPI	

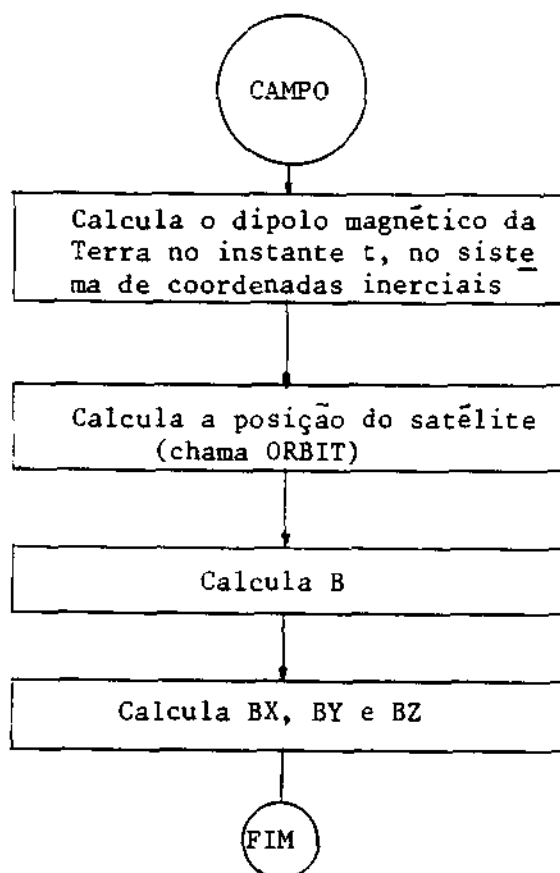
4.2 - CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA

- SUBROTINA CAMPO: Calcula o vetor \vec{B}_T em um ponto qualquer dado no sistema inercial.

Entradas: $t = T$ $\theta_{G_0} = \text{TETOG}$ $\tau = \text{TAU}$

Saídas: BX BY BZ B

Diagrama de blocos:



Listagem:

```

SUBR0100 (C, X, Y, Z, V, W, T, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z)
REAL X, Y, Z, V, W, T, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z
COMMON /BT/ X, Y, Z, V, W, T, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z
COMMON /BY/ X, Y, Z, V, W, T, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z
C *****
C CAMPO MAGNETICO DO PLANETA
C *****
      PI=3.141592653589793
      MUC=RT*(1.257E-06)
C MODULO DO VETOR POSICAO NA TERRA
      XM=RT*(X**2+Y**2+Z**2)**0.5
C PARAMETROS DE TRANSFORMACAO DO VETOR MAGNETICO NO SISTEMA
C FIXO DA TERRA: XZ=PLANO DO EQUADOR DA TERRA; FIXO X=EIXO DE
C ROTACAO DA TERRA; O EIXO Y E PARALELO A LIGEA PELO MERIDIANO DE GREENWICH
      DELT=2.000000000000000E+01
      DELT1=1.000000000000000E+01
      ALFA=0.000000000000000E+00
      ALFA1=2.000000000000000E+00
      RC=0.000000000000000E+00
      XTAN=7.000000000000000E+00
C CALCULO DO VETOR POSICAO NO SISTEMA DE COORDENADAS
C FIXO DA TERRA
      TETAG=ATN(Z/RT*(X**2+Y**2)**0.5)
      XMV=RT*(X**2+Y**2)**0.5
      YMV=COS(DELTA)*COS(DELT1)*SIN(ALFA)*SIN(TETAG)+SIN(DELTA)*SIN(DELT1)*
      +COS(ALFA)*COS(TETAG)
      ZMV=RT*(X**2+Y**2)**0.5*SIN(DELTA)*SIN(ALFA)*SIN(TETAG)+COS(DELTA)*SIN(DELT1)*
      +COS(ALFA)*COS(TETAG)
      CALL TRANS(XM, YMV, ZMV)
      YMG=YMV+RC*(X**2+Y**2)**0.5
      ZMG=ZMV+RC*(X**2+Y**2)**0.5
      RMG=(SIN(DELTA)*COS(DELT1)*SIN(ALFA)*SIN(TETAG)+COS(DELTA)*SIN(DELT1)*
      +COS(ALFA)*COS(TETAG))
      XMG=XMV/RMG
      YMG=YMV/RMG
      ZMG=ZMV/RMG
C MODULO DO VETOR POSICAO NA TERRA
      R=RT*(X**2+Y**2+Z**2)**0.5
C COMPONENTES DO VETOR MAGNETICO NO SISTEMA INERCIAL CENTRADO NA TERRA
C COM FIXO X=EIXO DE ROTACAO DA TERRA; O EIXO Y E PARALELO A LIGEA PELO
      C=(XMG+XMV+YMG+YMV+ZMG+ZMV)*3.
      RX=R*(X**2+Y**2+Z**2)**0.5
      RY=R*(X**2+Y**2+Z**2)**0.5
      RZ=R*(X**2+Y**2+Z**2)**0.5
      QFTI=0
      FND
  
```

Variáveis: $\theta_G = TETAG$ $r_M^* = RMG$

$X_M^* = XMG$ $Y_M^* = YMG$ $Z_M^* = ZMG$

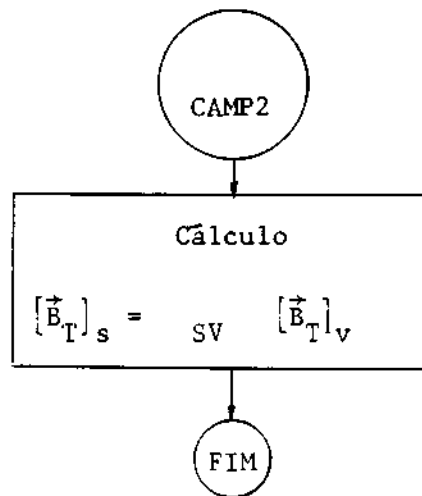
$\frac{M_X}{M_T} = XMV$ $\frac{M_Y}{M_T} = YMV$ $\frac{M_Z}{M_T} = ZMV$

Constantes: π = PI μ_0 = MUO M_T = MM
 δ_0 = DELTO δ_1 = DELT1 α_0 = ALFAO
 α_1 = ALFA1 r_c = RC ω_T = WTAU

- SUBROTINA CAMP2: Transforma o vetor \vec{B}_T , descrito no sistema inercial, para o sistema do satélite

Entradas: $\square_{SV} = (STADO (I), I=1,9)$ $[\vec{B}_T]_V = (BX, BY, BZ)$
 Saídas: BX = BBX BY = BBY BZ = BBZ

Diagrama de blocos:



Listagem:

```

SUBROUTINE CAMP2 (STADO, I, X, Y, Z, BBX, BBY, BBZ)
  DIMENSION STADO(9)
  COMMON /DATA/ PI, MUO, MM, DELT0, DELT1, ALFA0, ALFA1, RC, WTAU
  COMMON /CONST/ PI, MUO, MM, DELT0, DELT1, ALFA0, ALFA1, RC, WTAU
  *****
TRANSFORMA O VETOR MAGNETICO DA TERRA, DESCRITO NO SISTEMA INERCIAL,
PARA O SISTEMA REFERENCIAL DO SATELITE.
*****
CALL SA(X, Y, Z, BBX, BBY, BBZ)
BBX=STADO(1)*X+STADO(2)*Y+STADO(3)*Z
BBY=STADO(4)*X+STADO(5)*Y+STADO(6)*Z
BBZ=STADO(7)*X+STADO(8)*Y+STADO(9)*Z
RETURN
END
  
```

4.3 - DINÂMICA DO SATÉLITE

- SUBROTINA INTEG: Integra as equações diferenciais de Euler (dinâmica do satélite) e as equações diferenciais da cinemática do satélite pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Entradas: $\underline{p}_{SV} = \text{STADO } (I), (I=1,9)$ $\underline{p}_{RV} = \text{REF } (I), (I=1,9)$ $t = \tau$

$p = \text{STADO } (10)$ $q = \text{STADO } (11)$ $r = \text{STADO } (12)$

$p_r = \text{REF } (10)$ $q_r = \text{REF } (11)$ $r_r = \text{REF } (12)$

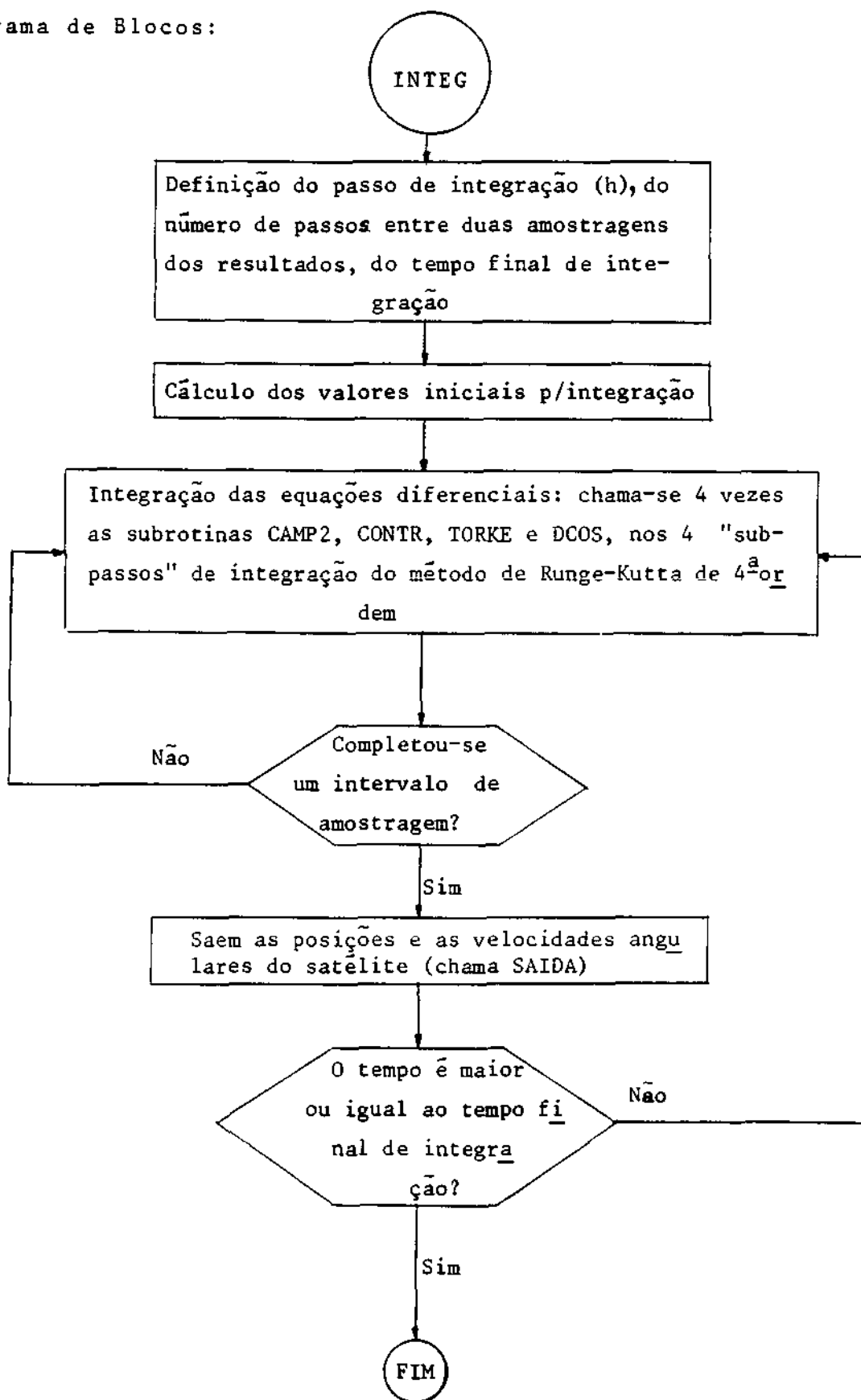
Saídas: $\underline{p}_{SV} = \text{STADO } (I), (I=1,9)$ $\underline{p}_{RV} = \text{REF } (I), (I=1,9)$ $t = \tau$

$p = \text{STADO } (10)$ $q = \text{STADO } (11)$ $r = \text{STADO } (12)$

$p_r = \text{REF } (10)$ $q_r = \text{REF } (11)$ $r_r = \text{REF } (12)$

OBS: As variáveis de saída são as mesmas de entrada mas, integradas no intervalo de tempo h. O tempo t na saída é igual ao tempo t na entrada mais o "passo" de integração h.

Diagrama de Blocos:



Variáveis: TX TY TZ
 $(K_1)_i^j = C1(I)$ $(K_2)_i^j = C2(I)$ $(K_3)_i^j = C3(I)$
 $(K_4)_i^j = C4(I)$

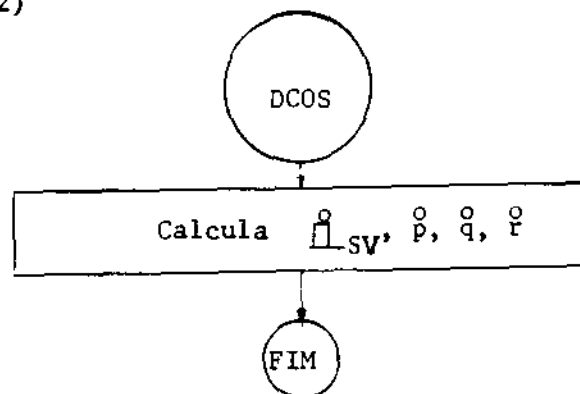
Constantes: h = DH n° de passos entre amostragens = NP
tempo final de integração = TMAX
n° de amostragens feitas = ISAI

- SUBROTINA DCOS: Calcula as funções a serem integradas, isto é, $\overset{\circ}{l}_{SV}$, $\overset{\circ}{p}$, $\overset{\circ}{q}$ e $\overset{\circ}{r}$. Se a referência estiver em movimento, pode-se, também, calcular $\overset{\circ}{p}_r$, $\overset{\circ}{q}_r$, $\overset{\circ}{r}_r$ neste programa.

Entradas: $\overset{\circ}{l}_{SV} = (STADO(I), I=1,9)$ TX TY
TZ $I_x = IX$ $I_y = IY$
 $I_z = IZ$ $p = STADO(10)$ $q = STADO(11)$
 $r = STADO(12)$

Saídas: $\overset{\circ}{l}_{SV} = (C(I), I=1,9)$ $\overset{\circ}{p} = C(10)$ $\overset{\circ}{q} = C(11)$
 $\overset{\circ}{r} = C(12)$

Diagrama de Blocos:



Listagem:

```

SUBROUTINE TORKE (STADO, T, TX, TY, TZ, A, B)
REAL T, TX, TY, TZ
DIMENSION STADO (10), C (12)
COMMON /TETA/ T, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z
COMMON /TORKE/ TX, TY, TZ
*****
C
C FUNCOES A SEREM INTERPOLADAS
C
C *****
C(1)=STADO(10)+STADO(9)-S[AD0](10)*STADO(7)
C(2)=STADO(9)+STADO(8)-S[AD0](9)*STADO(6)
C(3)=STADO(8)+STADO(7)-S[AD0](8)*STADO(5)
C(4)=STADO(7)+STADO(6)-S[AD0](7)*STADO(4)
C(5)=STADO(6)+STADO(5)-S[AD0](6)*STADO(3)
C(6)=STADO(5)+STADO(4)-S[AD0](5)*STADO(2)
C(7)=STADO(4)+STADO(3)-S[AD0](4)*STADO(1)
C(8)=STADO(3)+STADO(2)-S[AD0](3)*STADO(0)
C(9)=STADO(2)+STADO(1)-S[AD0](2)*STADO(0)
C(10)=(TY+TY-17)+STADO(11)+STADO(12))/IX
C(11)=(TY+TY-17)+STADO(10)+STADO(12))/IY
C(12)=(TY+TY-17)+STADO(10)+STADO(11))/IZ
RETURN
END

```

- SUBROTINA TORKE: Calcula o torque magnético aplicado ao saté lite. Pode-se aplicar torques perturbadores no sistema através deste programa, bastando somar o torque perturbador ao torque magnético.

Entradas: $\square_{SV} = (STADO (I), I=1,9)$ $(AY.BZ-AZ.BY) = A1$
 $[AY.BY.BZ+AZ(BX^2+BZ^2)] = A2$ $[AZ.BY.BZ+AY(BX^2+BY^2)] = A3$
 $\frac{d}{dt}[AY.BZ-AZ.BY] = PA1$ $\frac{d}{dt}[AY.BY.BZ+AZ(BX^2+BZ^2)] = PA2$
 $\frac{d}{dt}[AZ.BY.BZ+AY(BX^2+BY^2)] = PA3$ BX = BBX BY = BBY
BZ = BBZ B

Saídas: TX TY TZ

4.4 - CONTROLE DE ATITUDE

- SUBROTINA DIPMO: Calcula os valores iniciais de AY, AZ, BX, BY, BZ e B e suas derivadas, necessários à obtenção do dipolo magnético no instante inicial.

Entradas: $\square_{SV} = (\text{STADO } (I), I=1,9)$ $\square_{RV} = (\text{REF } (I), I=1,9)$

Saídas: $(AY \cdot BZ - AZ \cdot BY) = A1$ $[AY \cdot BY \cdot BZ + AZ \cdot (BX^2 + BZ^2)] = A2$

$[AZ \cdot BY \cdot BZ + AY \cdot (BX^2 + BY^2)] = A3$ $\frac{d}{dt}(AY \cdot BZ - AZ \cdot BY) = PA1$

$\frac{d}{dt}[AY \cdot BY \cdot BZ + AZ \cdot (BX^2 + BZ^2)] = PA2$ $\frac{d}{dt}[AZ \cdot BY \cdot BZ + AY \cdot (BX^2 + BY^2)] = PA3$

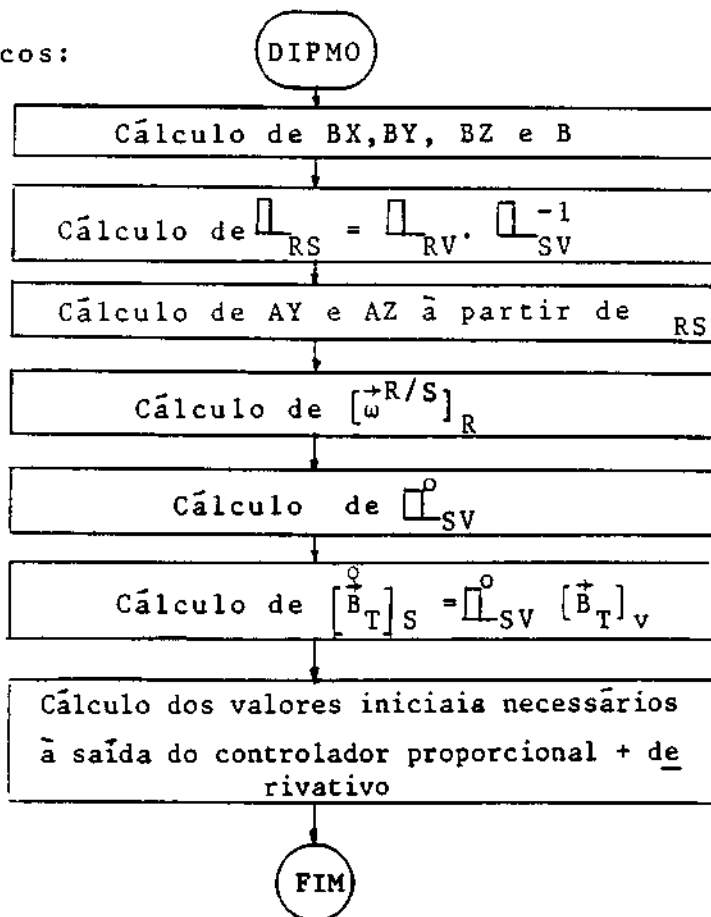
BX = BBX

BY = BBY

BZ = BBZ

B

Diagrama de blocos:

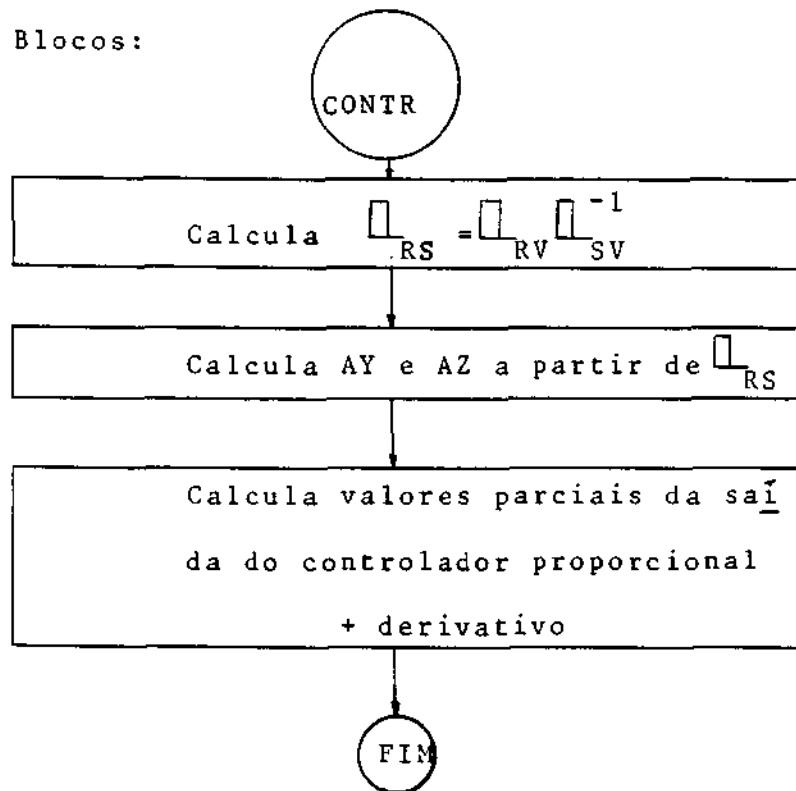


- SUBROTINA CONTR: Realiza parte dos cálculos do controlador proporcional mais derivativo.

Entradas: A1 A2 A3
 $\square_{SV} = (STADO(I), I=1,9)$ $\square_{RV} = (REF(I), I=1,9)$
 BX = BBX BY = BBY BZ = BBZ
 h = DH

Saídas: A1 A2 A3
 PA1 PA2 PA3

Diagrama de Blocos:



Listagem:

```

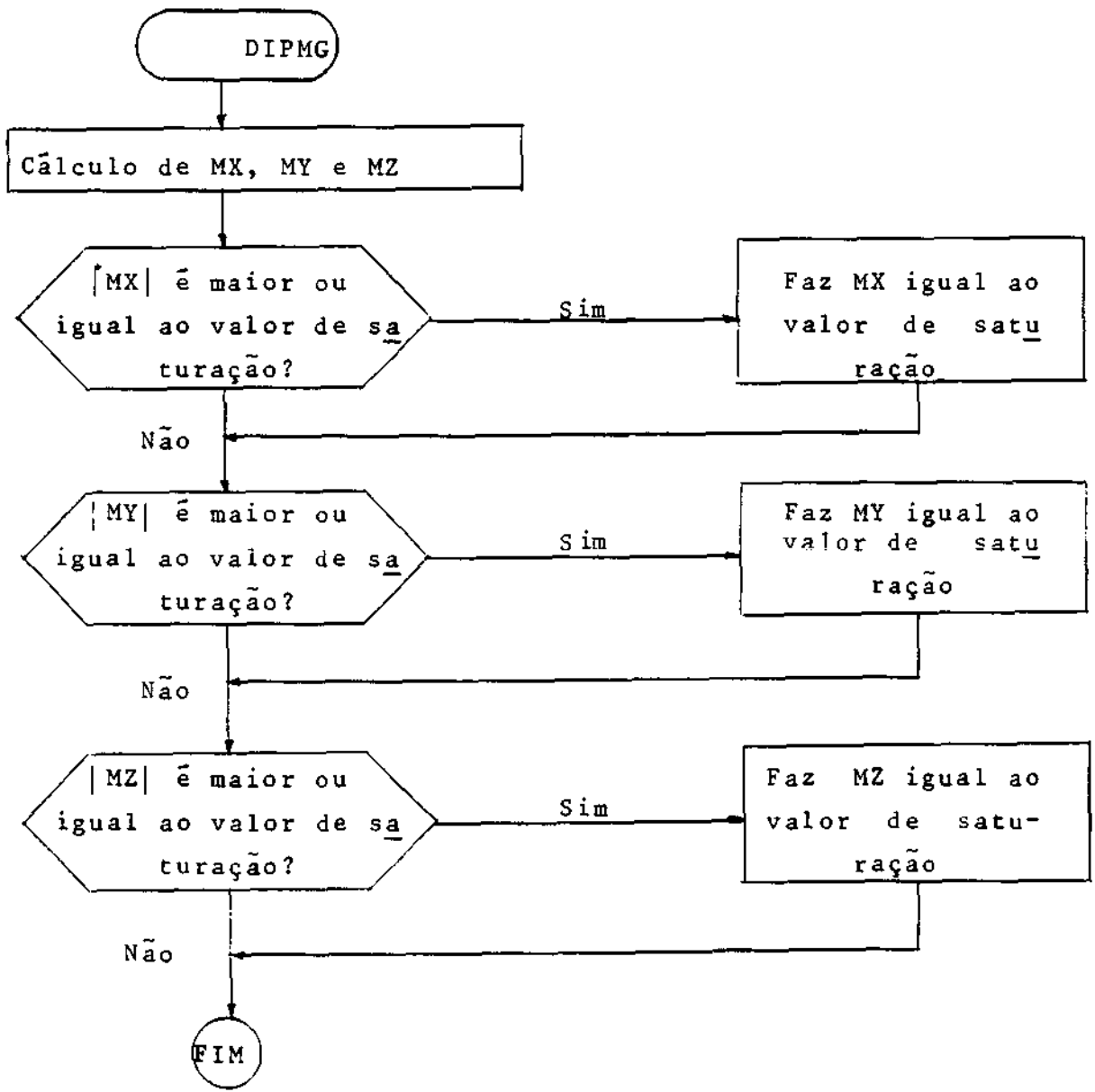
SUBROUTINE DIPMG (A1, A2, A3, PA1, PA2, PA3, B, MX, MY, MZ, REF,
, BBX, BBY, BBZ, C, C1)
COMMON /DIPMG/ BBX, BBY, BBZ, C, C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10, C11, C12
COMMON /DIPMG/ PA1, PA2, PA3, PA4, PA5, PA6, PA7, PA8, PA9, PA10, PA11, PA12
C *****
C IMPLIMENTAÇÃO DE PARTES DO CONTROLO ADOP. PROPORCIONAL+DERIVATIVO
C *****
CALL (REF, BBX, BBY, BBZ, C, C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10, C11, C12)
CALL (REF, BBX, BBY, BBZ, C, C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10, C11, C12)
A1=AY*(17-12)*BY
A2=(A1-41)/C1
A1=YA1
A2=AY*-BY+BBZ+17*(BBX+BBY+BBZ)
A2=(A2-10)/C2
A2=AA2
A3=AY*(BY+BBZ)+17*(BBX+BBY+BBZ)
A3=(A3-10)/C3
A1=YA1
A2=AA2
A3=AA3
END

```

- SUBROTINA DIPMG: Calcula o dipolo magnético gerado pelo controle de atitude do satélite.

Entradas:	A1	A2	A3
	PA1	PA2	PA3
	BX = BBX	B	
Saídas:	MX	MY	MZ

Diagrama de Blocos:



Entradas: $\theta_{G_0} = \text{TETOG}$ $\Omega_0 = \text{OMEGO}$ $\frac{\Delta\Omega}{\Delta T} = \text{DOMEG}$

$\omega_0 = \text{WO}$ $\frac{\Delta\omega}{\Delta T} = \text{DWO}$ $a = \text{A}$

$e = \text{EXCTR}$ $i = \text{I}$ $\tau = \text{TAU}$

$I_x = \text{IX}$ $I_y = \text{IY}$ $I_z = \text{IZ}$

$\psi_{SR} = \text{PSIS}$ $\theta_{SR} = \text{TETAS}$ $\phi_{SR} = \text{FIS}$

$\psi_{RV} = \text{PSIR}$ $\theta_{RV} = \text{TETAR}$ $\phi_{RV} = \text{FIR}$

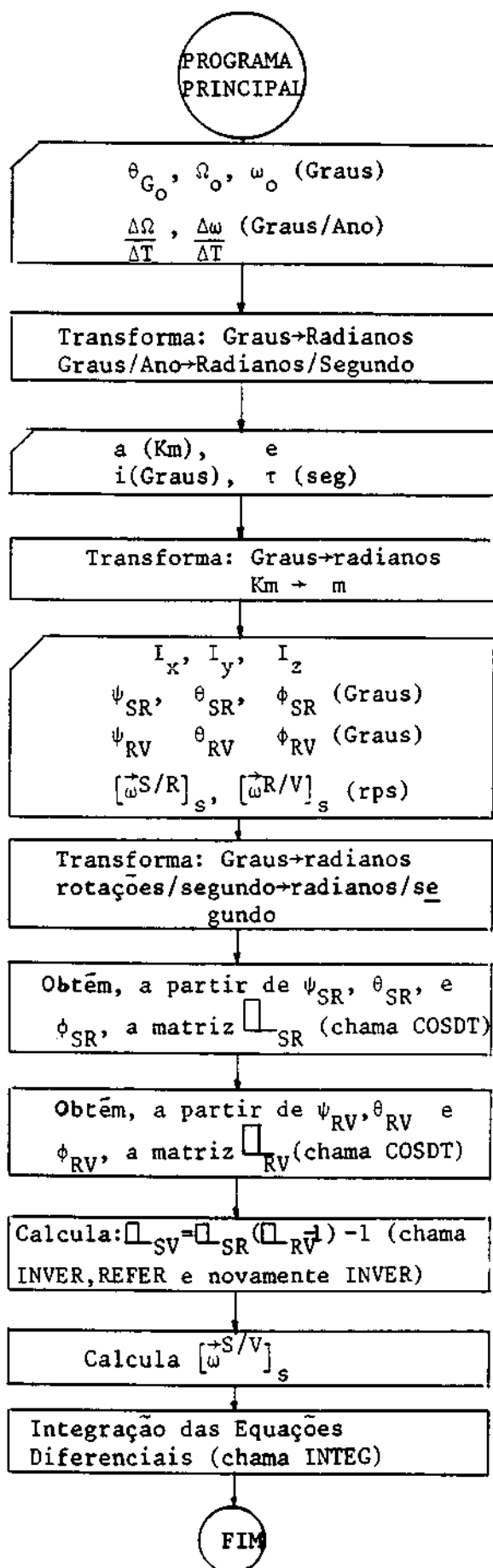
$[\vec{\omega}^{S/R}]_S = (\text{XTADO}(J), J=10,12)$

$[\vec{\omega}^{S/R}]_S = (\text{REF}(J), J=10,12)$

Saídas:

$\psi_{SR}(t=0) = \text{PSIS}$ $\theta_{SR}(t=0) = \text{TETAS}$ $\phi_{SR}(t=0) = \text{FIS}$

Diagrama de Blocos:



Variáveis: $\underline{\square}_{SV} = (\text{STADO}(I), I=1,9)$ $\begin{bmatrix} \rightarrow S/V \\ \end{bmatrix}_s = (\text{STADO}(I), I=10,12)$

t = T

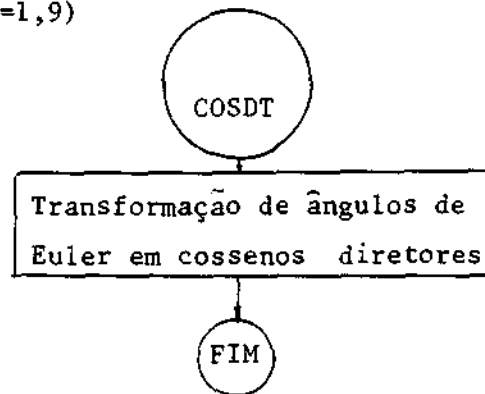
Constantes: $\frac{\text{Ano}}{\text{Segundo}} = \text{SEG}$ $\frac{\text{Radiano}}{\text{Grau}} = \text{RAD}$ $2\pi = \text{DOSPI}$

- SUBROTINA COSDT: Calcula a matriz de cossenos diretores a partir dos ângulos de Euler.

Entradas: $\psi_{BA} = \text{PSI}$ $\theta_{BA} = \text{TETA}$ $\phi_{BA} = \text{FI}$

Saídas: $\underline{\square}_{BA} = (\text{COSS}(I), I=1,9)$

Diagrama de Blocos:



Listagem:

```

SUBROU TILA COSDT(PSI, TETA, FI, I, COSS)
DIMENSION COSS(9)
COMMON TETA, PSI, FI, I, COSS, SEG, RAD, DOSPI, FIM, F, NGRA, T
*****
TRANSFORMAÇÃO DE ÂNGULOS DE EULER EM COSSELOS DIRETRES
*****
COSST(1)=COS(PSI)*COS(TETA)
COSST(2)=COS(PSI)*SIN(TETA)
COSST(3)=SIN(PSI)
COSST(4)=SIN(COSI)*SIN(FI)
COSST(5)=SIN(COSI)*COS(FI)
COSST(6)=COS(TETA)*SIN(FI)
COSST(7)=COS(COSI)*SIN(FI)
COSST(8)=COS(COSI)*COS(FI)
COSST(9)=COS(TETA)*COS(FI)
RETURN
END
  
```

- SUBROTINA AEULER: Calcula os ângulos de Euler a partir da matriz de cossenos diretores.

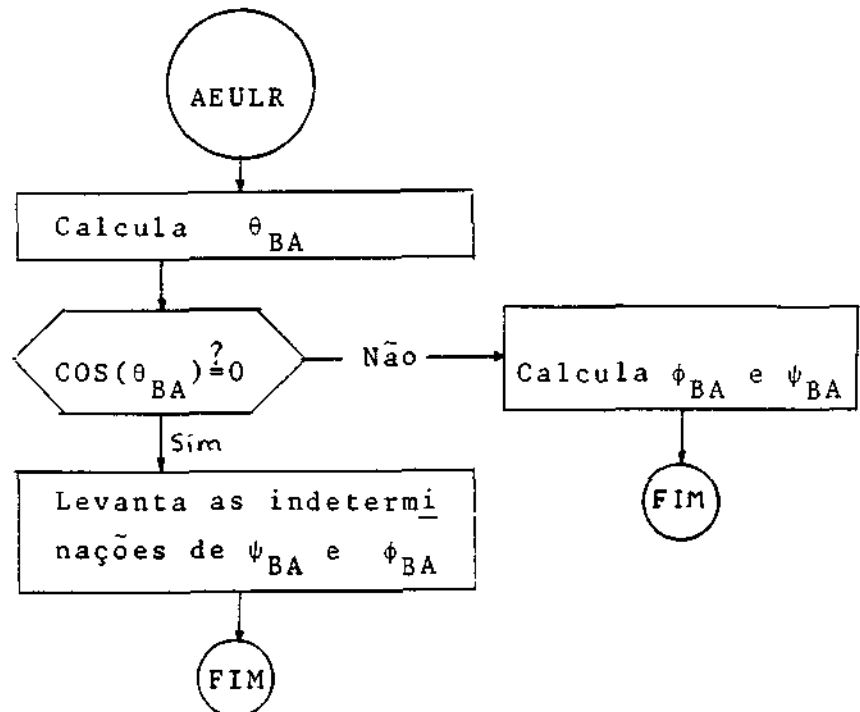
Entradas: $\square_{BA} = (\text{COSS}(I), I=1,9)$

Saídas: $\psi_{BA} = \text{PSI}$

$\theta_{BA} = \text{TETA}$

$\phi_{BA} = \text{FI}$

Diagrama de Blocos:



Listagem:

```

SUBROUTINE EULER(SR,PST,(ETA,PI))
DIMENSION STADO(10)
COMMON /SY,SY,SZ
*****
TRAZER PARA O TELA OS TIPOS DE RETIRAS E ANGULOS DE EULER
INTERVALO DE RETIRAS E ANGULOS DE EULER
PST = (PI,PI) TETA = (-PI/2,PI/2) F = F = (-PI,PI)
*****
C CALCULO DE PSI
COSPI = SIN(PI) + COS(PI) + 1
SINPI = SIN(PI)
TETA = ATN(2*SIN(PI),COSPI)
IF(ABS(COSPI) = 1,PI = 0,30,30,20)
C CALCULO DE FI
20 FI = ATN(2*COS(PI),COS(PI))
C CALCULO DE PSI
PST = ATN(COS(PI),SIN(PI))
RTETA =
C SE COS(TETA) = 1, PI = 0, TETA = 0, TETA = 0
30 FI =
SINPI = SIN(PI)
PST = ATN(COS(PI),SIN(PI))
RTETA =
END

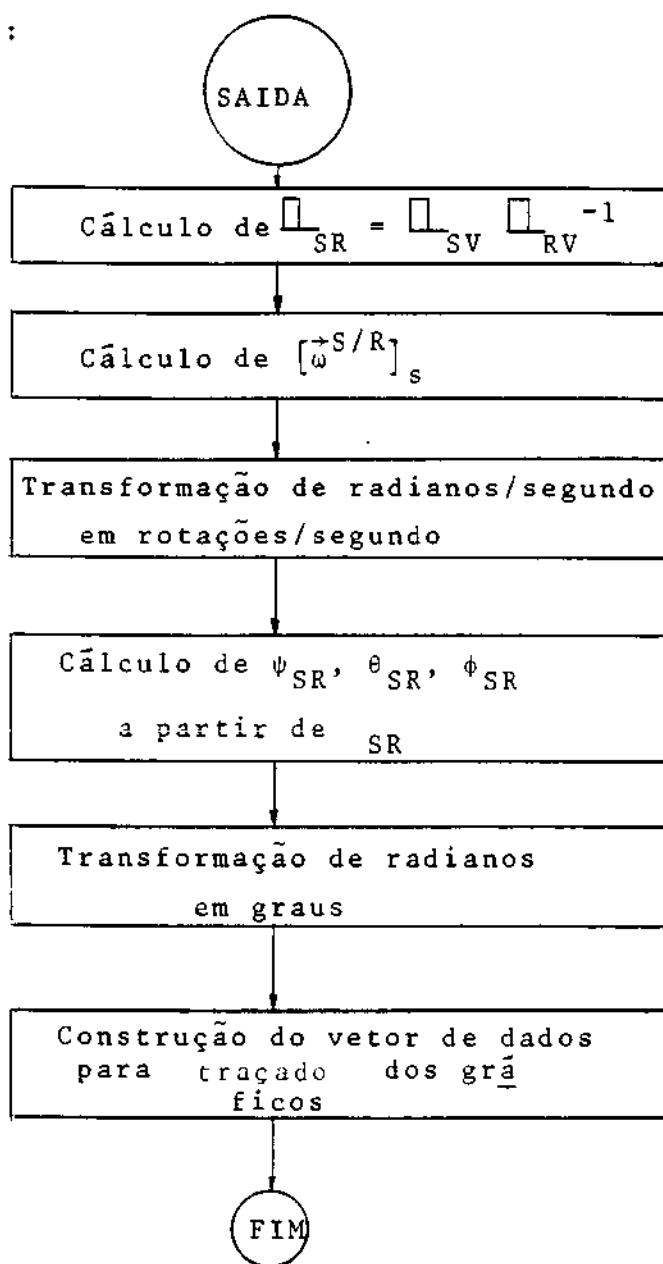
```

- SUBROTINA SAÍDA: Apresenta em um gráfico os ângulos de Euler ψ_{SR} , θ_{SR} e ϕ_{SR} , e a velocidade angular $[\vec{\omega}^{S/R}]_S$.

Entradas: $\square_{SV} = (STADO(I), I=1,9)$ $\square_{RV} = (REF(I), I=1,9)$
 Índice das amostragens para os gráficos = ISAI

Saídas: $\psi_{SR} = PSI = Y(ISAI,1)$ $\theta_{SR} = TETA = Y(ISAI,2)$
 $\phi_{SR} = FI = Y(ISAI,3)$ $[\vec{p}^{S/R}]_S = XTADO(10) = YY(ISAI,1)$
 $[\vec{q}^{S/R}]_S = XTADO(11) = YY(ISAI,2)$ $[\vec{r}^{S/R}]_S = XTADO(12) = YY(ISAI,3)$

Diagrama de Blocos:



Listagem:

```

SUPPORT(1)=1.0, SUPPORT(2)=1.0, SH12
TANGR(1)=1.0, TANGR(2)=1.0, YC(1)=1.0
YIMP(1)=1.0, YIMP(2)=1.0, YIMP(3)=1.0
COMMON /TANGR/ TANGR(1), TANGR(2), YC(1), YC(2), YC(3)
DATA /TANGR/ 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0
C *****
C SAIDA DE RESULTADOS DE TANGR(1), TANGR(2), YC(1), YC(2), YC(3)
C *****
C GRAUS=57.2957795
C DOSPI=3.14159265359
C CALCULO DO ANGULO DE TANGR(1) EM GRAUS EM RELACAO A REFERENCIA
C CALL SIN(ANGR(1), AT(1), AT(2))
C CALCULO DO ANGULO DE TANGR(2) EM GRAUS EM RELACAO A REFERENCIA
XTANG(1)=TANGR(1)*REF(1)+TANGR(2)*ANGR(1)+YIANG(3)*REF(12)
XTANG(2)=TANGR(1)*REF(2)+TANGR(2)*ANGR(2)+YIANG(3)*REF(12)
XTANG(3)=TANGR(1)*REF(3)+TANGR(2)*ANGR(3)+YIANG(3)*REF(12)
XTANG(4)=TANGR(1)*REF(4)+TANGR(2)*ANGR(4)+YIANG(3)*REF(12)
XTANG(5)=TANGR(1)*REF(5)+TANGR(2)*ANGR(5)+YIANG(3)*REF(12)
XTANG(6)=TANGR(1)*REF(6)+TANGR(2)*ANGR(6)+YIANG(3)*REF(12)
XTANG(7)=TANGR(1)*REF(7)+TANGR(2)*ANGR(7)+YIANG(3)*REF(12)
XTANG(8)=TANGR(1)*REF(8)+TANGR(2)*ANGR(8)+YIANG(3)*REF(12)
XTANG(9)=TANGR(1)*REF(9)+TANGR(2)*ANGR(9)+YIANG(3)*REF(12)
CALL ATAN(XTANG(1), XTANG(2), AT(1), AT(2))
PSI=ANGR(1)*SI
TETA=ANGR(2)*SI
FI=ANGR(3)*SI
Y(I=1)=TANGR(1)
Y(I=2)=TANGR(2)
Y(I=3)=TANGR(3)
Y(I=4)=TANGR(4)
Y(I=5)=TANGR(5)
Y(I=6)=TANGR(6)
Y(I=7)=TANGR(7)
Y(I=8)=TANGR(8)
Y(I=9)=TANGR(9)
10 RETURN
20 CALL ATAN(XTANG(1), XTANG(2), AT(1), AT(2))
RETURN
END

```

Variáveis: $\square_{SR} = (STADO(I), I=1,9)$ $[\omega^{S/R}]_S = (STADO(I), I=10,12)$

$\psi_{SR} = PSI$ $\theta_{SR} = TETA$ $\phi_{SR} = FI$

Constantes: $\frac{\text{Graus}}{\text{Radianos}} = \text{GRAUS}$ $2\pi = \text{DOSPI}$

OBS: É utilizada a subrotina YJ6215 para traçar graficos na impressora. Esta subrotina faz parte das ROTINAS/FORTRANINPE2 do sistema Burroughs 6700 do Instituto de Pesquisas Espaciais.

CAPÍTULO 5

GRÁFICOS.OBSERVAÇÕES E CONCLUSÕES

A simulação digital do nosso sistema foi utilizada para a análise do comportamento do controle de atitude magnético para dois valores da constante derivativa (K_2) do controlador, das as mesmas condições iniciais. Observamos como se comportam a posição do satélite (ângulos de Euler ψ_{SR} , θ_{SR} , ϕ_{SR}) em relação à referência, a velocidade angular do mesmo e o momento de dipolo magnético gerado pelo sistema de controle. Pode-se ver claramente, nos gráficos apresentados, a resposta transitória e a de regime permanente.

Fizemos, também, a simulação para um erro inicial (de grau) de valor razoavelmente grande apenas para ilustrar a possibilidade de se usar o nosso modelo para a análise do comportamento do sistema nesta situação (região não-linear).

5.1 - PRIMEIRA SIMULAÇÃO

Os parâmetros utilizados para a primeira simulação, foram:

a) Órbita

$$\theta_{G_o} = 0 \quad \Omega_o = 0 \quad \frac{\Delta\Omega}{\Delta T} = 0 \quad \omega_o = 0 \quad \frac{\Delta\omega}{\Delta T} = 0$$

$$a = 700 \text{ Km} \quad e = 0 \quad i = 0 \quad \tau = 0$$

b) Satélite

$$I_x = 10 \text{ Kg.m}^2 \quad I_y = 10 \text{ Kg.m}^2 \quad I_z = 10 \text{ Kg.m}^2$$

c) Controlador (PD)

$$K_s = 1,0 \text{ V/rad} \quad K_p = 5,0 \quad K_d = 8,5 \text{ s}^{-1}$$

d) Dipolo magnético do satélite

$$\text{valor de saturação} = 10 \text{ A.m}^2$$

e) Posição e velocidade angular da referência em relação ao sistema inercial

$$\psi_{RV} = 30^\circ \quad \theta_{RV} = 30^\circ \quad \phi_{RV} = 30^\circ$$

$$[\vec{\omega}^{R/V}]_R = (0, 0, 0)$$

f) Posição e velocidade iniciais do satélite em relação à referência

$$\psi_{SR}(t=0) = 0,01 \quad \theta_{SR}(t=0) = 0 \quad \phi_{SR}(t=0) = 0$$

$$[\vec{\omega}^{S/R}]_S = (0, 0, 0)$$

Podemos verificar que os amortecimentos e as frequências naturais para os movimentos em torno dos eixos y e z são iguais entre si e têm os seguintes valores:

$$\omega_{n_y} = \omega_{n_z} = \sqrt{\frac{5,0}{10}} = 0,71 \text{ rad/s}$$

$$\zeta_y = \zeta_z = \frac{8,5}{\sqrt{10 \cdot 5,0}} = 1,2$$

Entretanto, é bom lembrar que o sistema possui um zero para a entrada de referência, situado em:

$$z = \frac{5,0}{8,5} = 0,59 \text{ rad/s}$$

e, por isso, o tempo de estabilização é razoavelmente maior do que o tempo de estabilização para o sistema sem o zero (vide ítem 3.4.6). Temos neste caso $z/\zeta\omega = 0,69$.

Vemos no gráfico da figura 5.1 que o tempo de estabilização (critério de 5%) para o erro AZ (ψ_{SR}) é de aproximadamente 36 segundos. Observamos também que o erro AY (θ_{SR}) permanece nulo devido à ausência de acoplamento entre os movimentos em torno dos três eixos do satélite, já que os momentos de inércia (I_x , I_y e I_z), neste caso, são iguais entre si. É interessante notar, ainda, que o ângulo ϕ_{SR} tem um valor de regime não nulo, o que advém do fato de que o torque em torno do eixo X_s não obedece a uma lei de controle desejada por nós (vide cap.3).

No gráfico da figura 5.2, vemos como se comportam as componentes da velocidade angular $[\vec{\omega}^{S/R}]_s = (p^{S/R}, q^{S/R}, r^{S/R})$. Vemos que todas elas convergem para zero, o que significa que o satélite atingiu a posição de regime.

Um detalhe interessante de se observar é como está se comportando o momento de dipolo magnético gerado pelo sistema de controle. Como podemos ver no gráfico da Figura 5.3, o MY começa saturado em $10 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ mas, após dois períodos de oscilação, não entra mais na região de saturação. Vemos, também, que MX, MY e MZ, todos tendem a zero no regime permanente.

5.2 - SEGUNDA SIMULAÇÃO

Os parâmetros utilizados nesta simulação diferem daqueles da primeira simulação apenas no ítem c, que passa a ser:

$$c) K_s = 1,0 \text{ V/rad} \quad K_p = 5,0 \quad K_d = 8,5 \text{ s}^{-1}$$

Verificamos, neste caso, que os amortecimentos e as frequências naturais são dadas por:

$$\omega_{n_y} = \omega_{n_z} = 0,71 \text{ rad/s}$$

$$y = z = \frac{4,0}{\sqrt{10 \cdot 5,0}} = 0,57$$

e o zero fica situado agora em:

$$z = \frac{5,0}{4,0} = 1,25 \text{ rad/s}$$

Portanto, temos a relação $z/\zeta\omega_n = 3,1$

As considerações feitas sobre a resposta do sistema neste caso são as mesmas feitas na primeira simulação, exceto quanto ao tempo de estabilização (critério de 5%) que passou a ser de aproximadamente 75 segundos e, como era de se esperar, dobrou em relação ao caso anterior. Vê-se, ainda, que o dipolo magnético MY passa pela saturação durante quatro períodos de oscilação (o dobro do tempo do caso anterior).

5.3 - TERCEIRA SIMULAÇÃO

Nesta simulação, usamos os mesmos parâmetros que usamos na primeira, a menos do ítem f que passou a ser:

$$f) \quad \psi_{SR}(t=0) = 5^\circ \quad \theta_{SR}(t=0) = 0 \quad \phi_{SR}(t=0) = 0$$

$$\left[\vec{\omega}^{S/R} \right]_S = (0, 0, 0)$$

Este caso foi simulado apenas como um exemplo de como funciona o sistema dentro da região não linear. Vemos que o período de oscilação é razoavelmente grande e o amortecimento é pequeno. Notamos, também, que o erro ΔY (Θ_{SR}) que deveria permanecer nulo, passa a oscilar devido ao fato de que os torques já não obedecem mais as leis de controle que desejamos (temos saturação em M_X , M_Y e M_Z).

5.4 - CONCLUSÕES

O modelo simulado se aproxima, de uma forma bastante razoável, do comportamento da atitude de um satélite artificial sob a influência de torques externos.

Concluimos, também, que o sistema de controle de atitude magnético simulado tem um comportamento aceitável e que, portanto, pode ser usado nos casos em que satisfizer as especificações da missão do satélite.

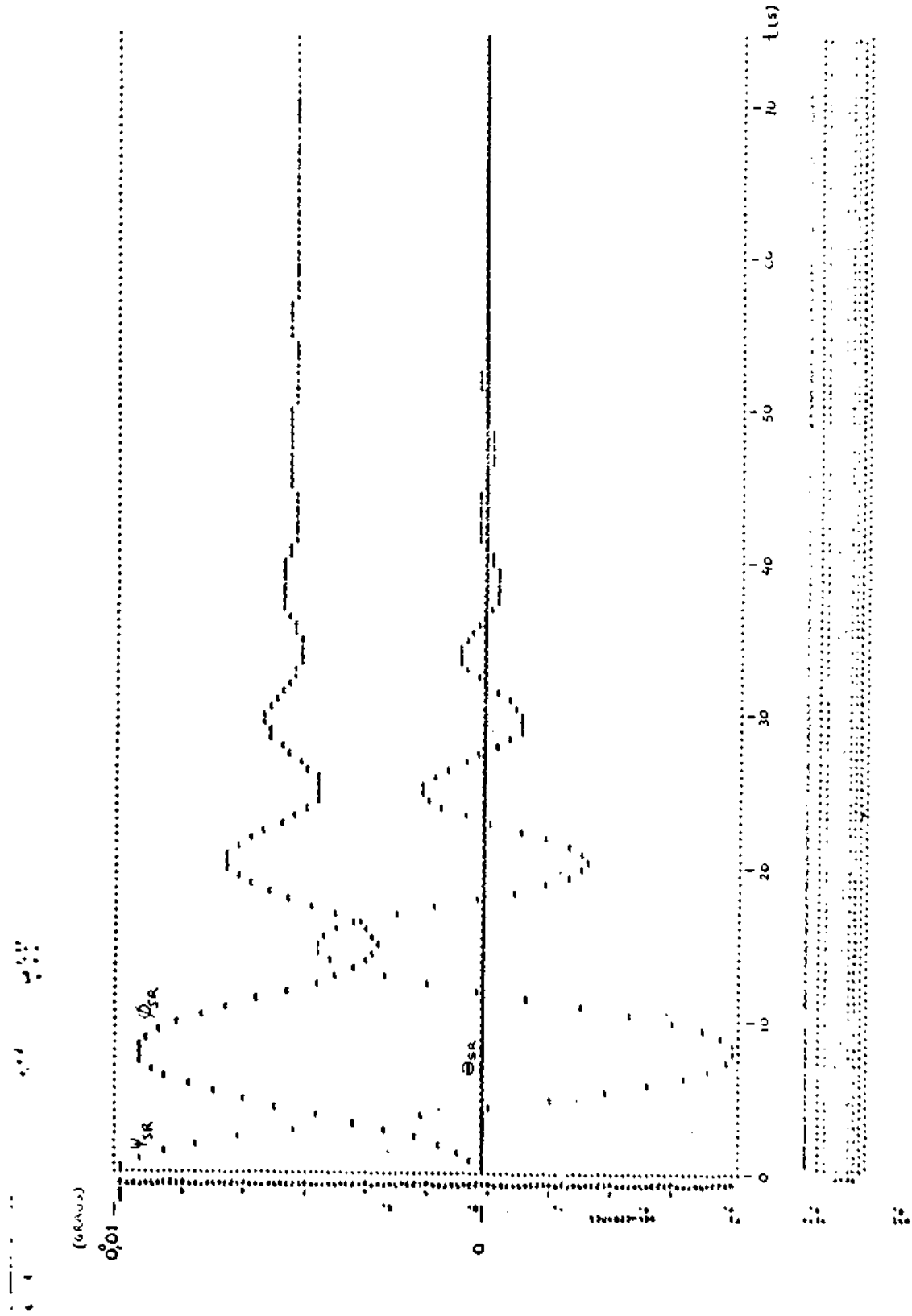


Fig. 5.1

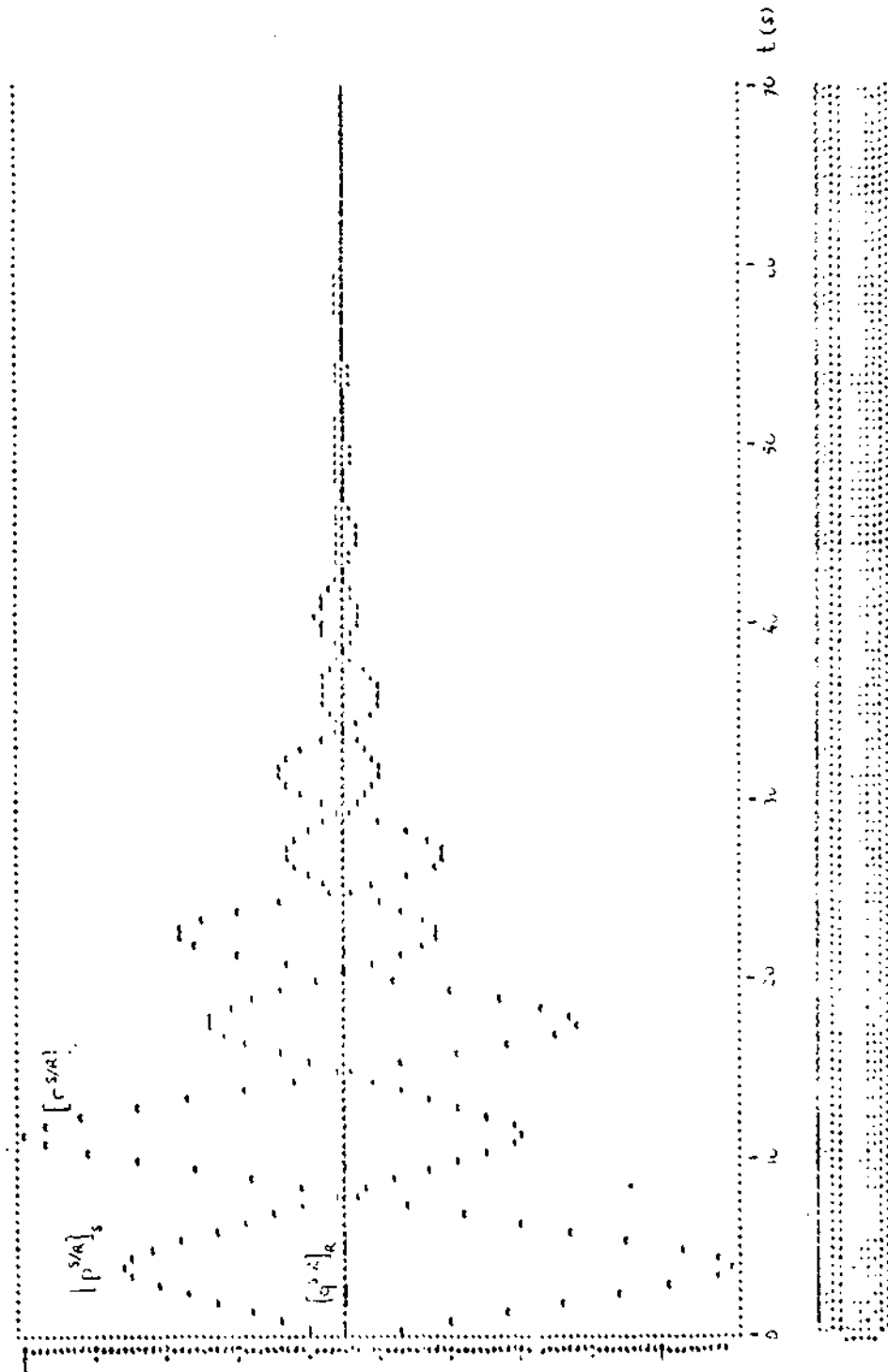


Fig. 5.2

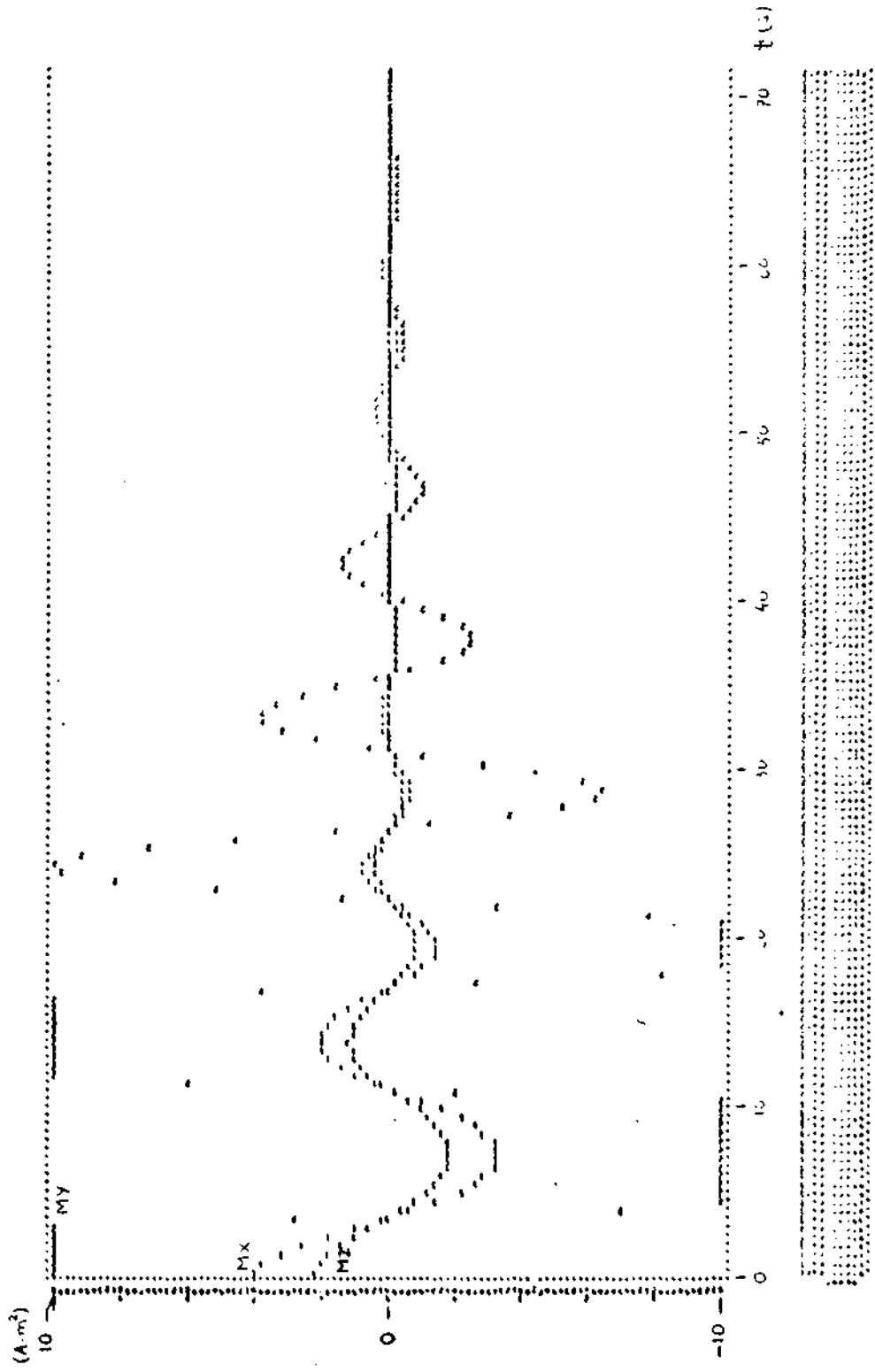


Fig. 5.3

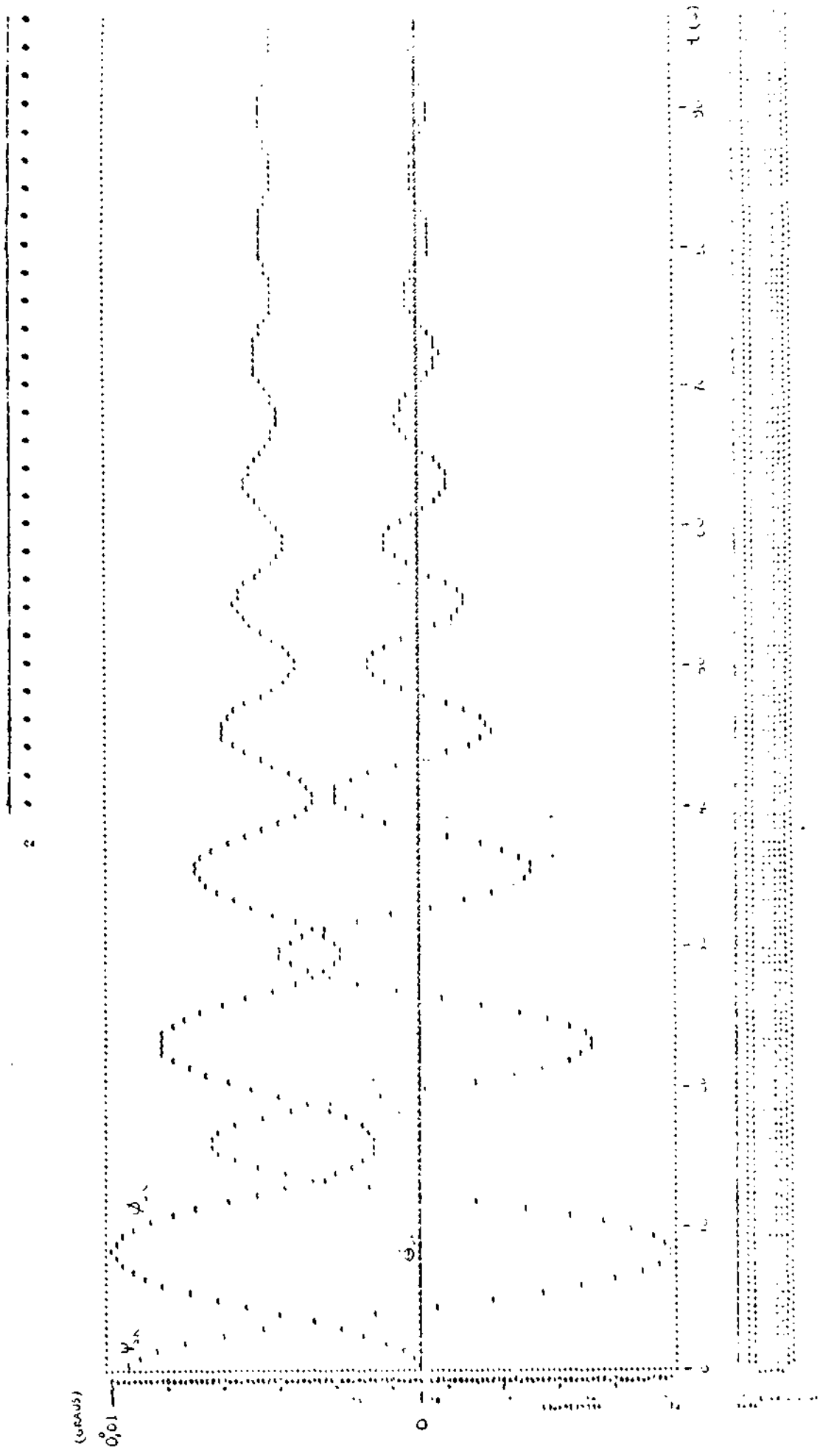


Fig. 5.4

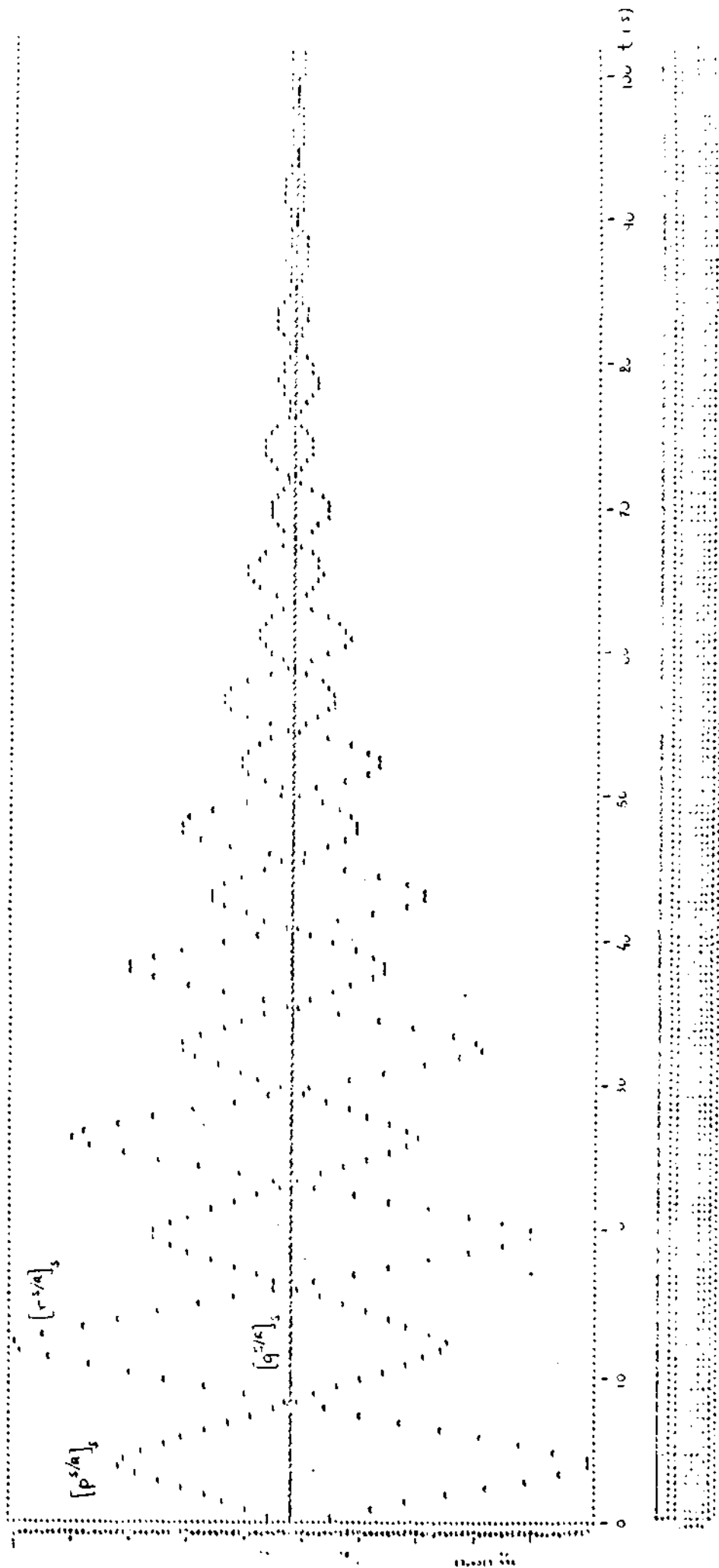


Fig. 5.5

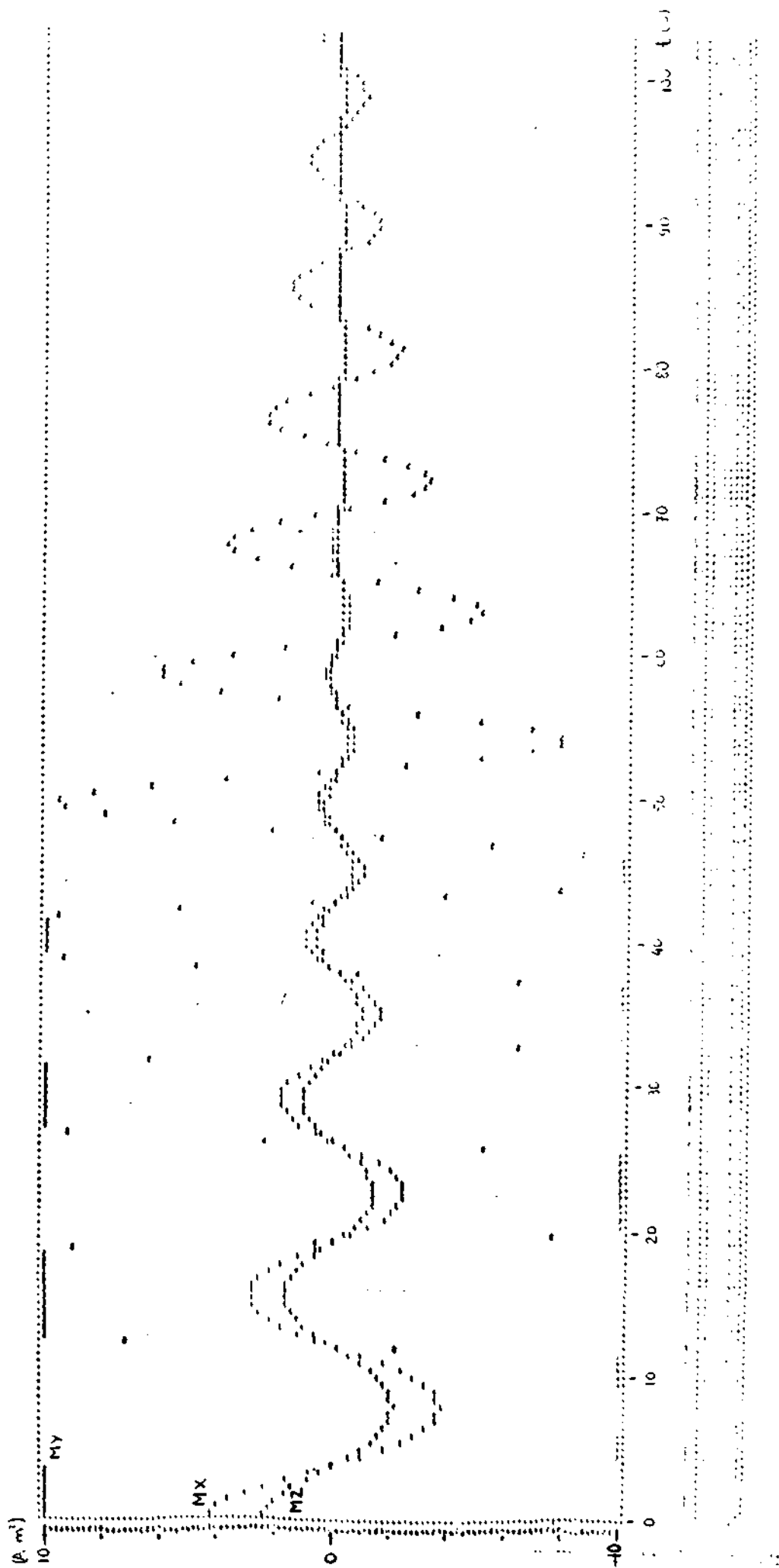


Fig. 5.6

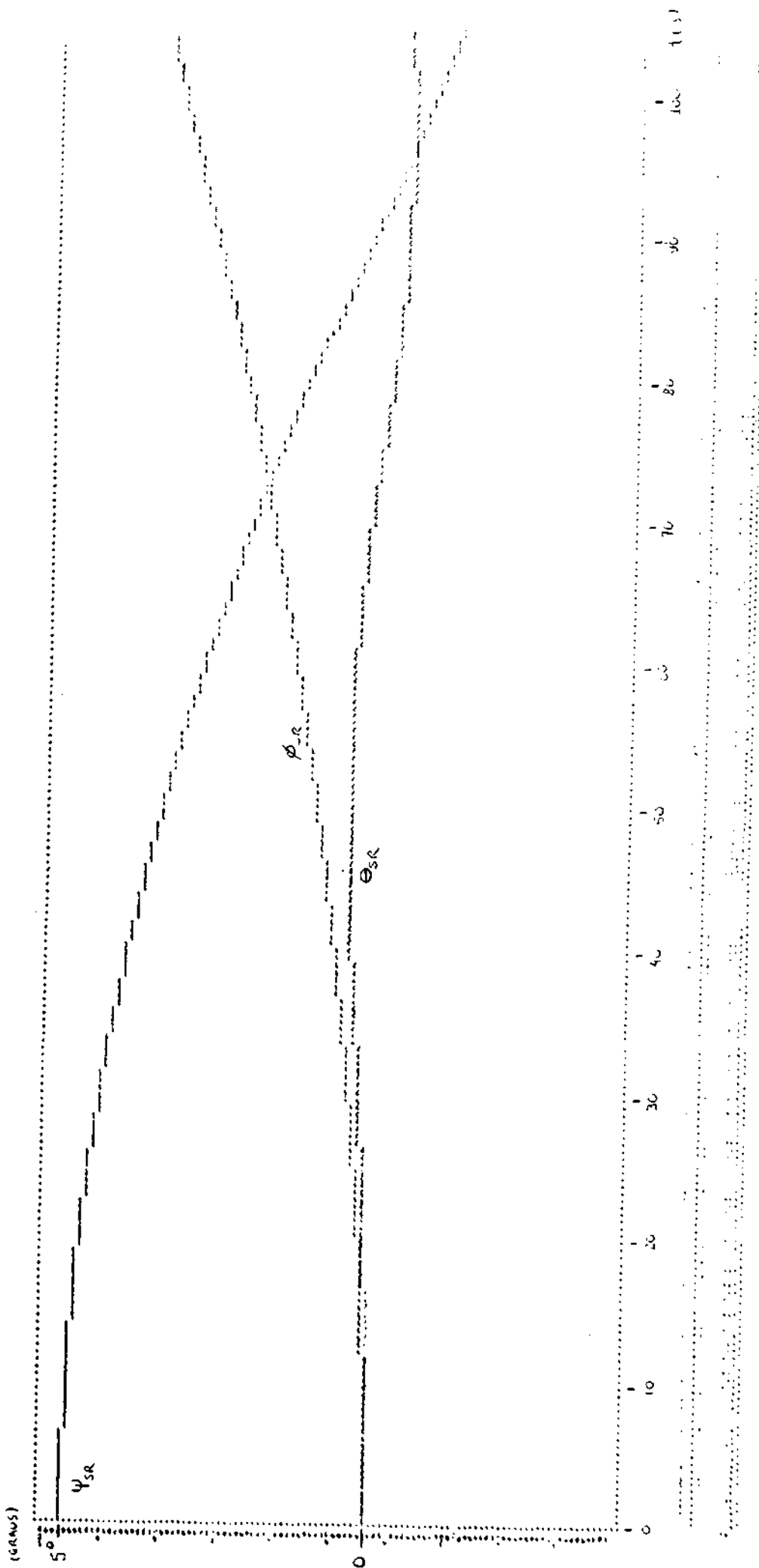


Fig. 5.7

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Zonov, Y.V.: - On the problem of the interaction between a satellite and the Earth's magnetic field. NASA TT F-37. Washington D.C. May 1960.
2. Abadie, L.: - Controle et stabilization des véhicules spatiaux - Systèmes passifs de controle d'attitude. ESRO SP - 17. Vol. 2. Sud-Aviation. Paris.
3. White, J.S; Shigemoto, F.H.; Bourquim, K.: - Satellite attitude control utilizing the Earth's magnetic field. NASA TN D - 1068. Washington DC. 1961.
4. Bandeen, W.R; Manger, W.P.: - Angular Motion of the spin axis of the TIROS I meteorological satellite due to magnetic and gravitacional torques. NASA TN D - 571. Washington DC. April. 1961.
5. Ughes, W.G.: - "Introduction to spacecraft attitude control", in: Control and stabilization of spacecraft - ESRO SP-16, Vol. 1. Introduction and Seminars. Proceedings of the fourth ESRO summer school (Aug-Sept. 1966). Helsingor, Denmark. June 1967.
6. Fischell, R.E. :- Passive magnetic attitude control for Earth satellites. Johns Hopkins University, Applied Physics Laboratory. Silver Springs, Maryland, USA.
7. Heppner, J.P. :- The world magnetic survey. NASA TN D - 2109. Washington DC. May 1960.

8. Hodge, W.F. ; Blackshear, W.T.: - An analytical study of the magnetic field encountered by artificial Earth satellites in circular orbits. NASA TN 2041. Washington. DC Feb. 1964.
9. Shighey, J.E.: - Theory of machines. McGraw Hill Book Company Inc.Kogakusha Company, Ltd. Tokyo. 1961.
10. Ball, K.J.; Osborne, G.F.: - Space vehicle dynamics. Oxford University Press, London, 1967.
11. Sielawa, J.T. :- Equations of motion in diferent frames of references. C.T.A. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. São José dos Campos, Brasil. October, 1976.
12. Greenwood, D.T. :- Principles of dynamics. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, USA. 1965.
13. Meriam, J.L.: - Dynamics. John Wiley and Sons, Inc. New York, USA 1966.
14. Beletskii, V.V.: - Motion of an artificial satellite about its center of mass. Israel Program for Scientific Translation. Jerusalem, 1966.
15. Alonso, M.; Finn, E.J.: - Fundamental University Physics - Mechanics. Vol. I . Addison-Wesley Publishing Co. Reading, Massachusetts, USA, 1967.
16. Moraes, R.V.: - Trajetórias de veículos espaciais. Publicação Interna. Departamento de Astronomia. ITA. São José dos Campos, SP, 1978.
17. Robinson, A.C.: - On the use of quaternions in simulation of rigid-body motion. Aeronautical Research Laboratory. WADC Technical Report 58.17. United States Air Force,

- Wright-Patterson Air Force Base. Ohio, Dec. 1958.
18. Hansen, Q.M. et alii: - A giroless solar pointing attitude control system for the Aerobee Sounding Rocket. Ames Research Center, NASA, Moffett Field, California, USA.
19. Cullity, B.D. :- Introduction to magnetic materials. University of Notre Dame. Addison - Wesley Publising Company, Inc. Philippines, 1972.
20. Bozorth, R.M. :- Ferromagnetism. D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey, USA. 1956.
21. Heck, C.: - Magnetic materials and their application. Butterworth Co. (Publishers) Ltd. London, England, 1974.
22. Pacitti, T.; Atkinson, C.P.: - Programação e métodos computacionais. Vol. 2. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro, RJ., 1976.
23. Agnew, R.P.: - Differential Equations. McGraw Hill Book Company Inc. Tokyo, Japan. 1960.
24. Ogata, K.: - Modern Control Engineering. Englewood Cliffs, N.J., USA. Prentice-Hall, Inc., 1970.
25. Corliss, W.R.: - Scientific Satellites. NASA SP-133. Wahington D.C., 1967.

APÊNDICE A

RELAÇÕES ENTRE ÂNGULOS DE EULER E COSSENOS DIRETORES
DERIVADAS EM FUNÇÃO DAS VELOCIDADES ANGULARES.

A.1 - ÂNGULOS DE EULER E SUAS RELAÇÕES COM OS COSSENOS DIRETORES

Como se sabe, podemos especificar a posição de um sistema de coordenadas em relação a um outro (com a mesma origem) utilizando três ângulos, os chamados ângulos de Euler. Eles são definidos conforme a Fig. A.1 para a transformação A→B, que corresponde a uma rotação em torno de Z_A de um ângulo ψ_{BA} , em seguida, uma rotação em torno de Y_A' de um ângulo θ_{BA} e, mais uma rotação em torno de X_B de um ângulo ϕ_{BA} . A sequência $\psi_{BA} \rightarrow \theta_{BA} \rightarrow \phi_{BA}$ deve ser obedecida. Para a transformação inversa (B→A) define-se de forma semelhante os ângulos ψ_{AB} , θ_{AB} , ϕ_{AB} que são diferentes dos ângulos para a transformação A→B.

A obtenção da matriz de transformação do sistema A para o sistema B, \underline{Q}_{BA} , se faz a partir da seguinte equação (BALL e OSBORNE, 1967; SIELAWA, 1976):

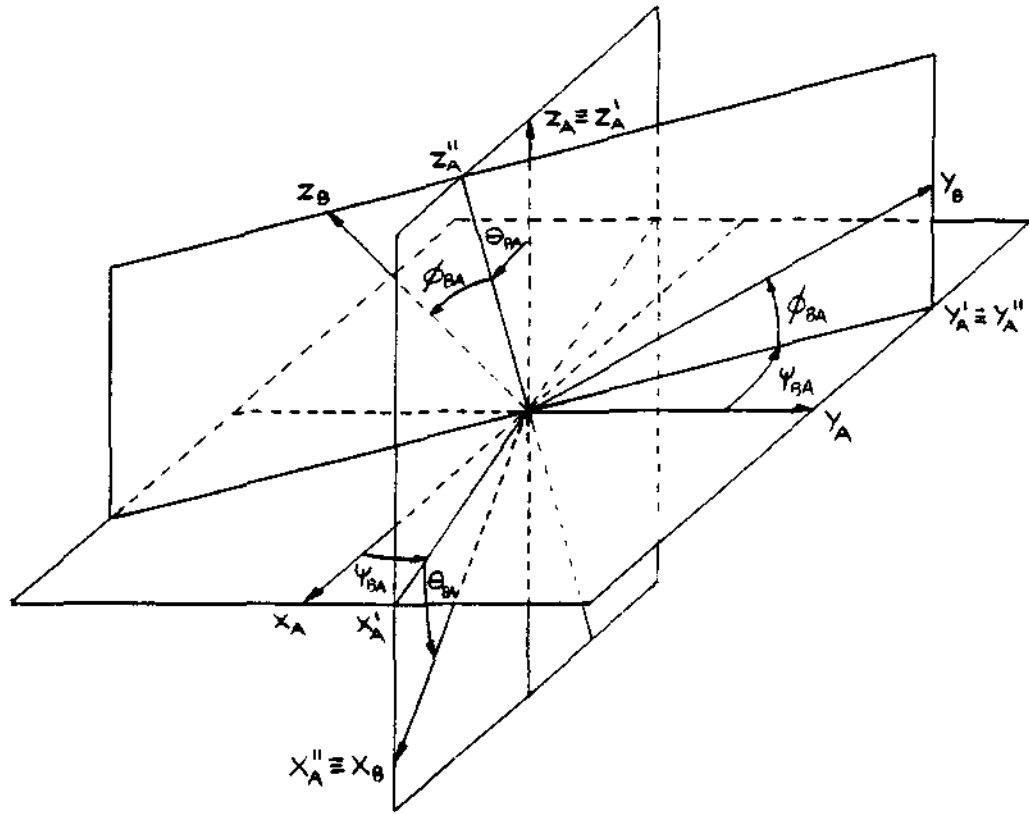


Fig. A.1

$$\mathbb{L}_{BA} = \begin{bmatrix} (\cos\psi_{BA} \cos\theta_{BA}) & (\sin\psi_{BA} \cos\theta_{BA}) & (-\sin\theta_{BA}) \\ (\cos\psi_{BA} \sin\theta_{BA} \sin\phi_{BA} + \sin\psi_{BA} \cos\phi_{BA}) & (\sin\psi_{BA} \sin\theta_{BA} \sin\phi_{BA} + \cos\psi_{BA} \cos\phi_{BA}) & (\cos\theta_{BA} \sin\phi_{BA}) \\ (\cos\psi_{BA} \sin\theta_{BA} \cos\phi_{BA} + \sin\psi_{BA} \sin\phi_{BA}) & (\sin\psi_{BA} \sin\theta_{BA} \cos\phi_{BA} + \cos\psi_{BA} \sin\phi_{BA}) & (\cos\theta_{BA} \cos\phi_{BA}) \end{bmatrix} \quad (A-1)$$

onde:

$$\mathbb{L}_{BA} = \begin{bmatrix} \ell_{BA}^{11} & \ell_{BA}^{12} & \ell_{BA}^{13} \\ \ell_{BA}^{21} & \ell_{BA}^{22} & \ell_{BA}^{23} \\ \ell_{BA}^{31} & \ell_{BA}^{32} & \ell_{BA}^{33} \end{bmatrix}$$

O problema inverso, isto é, a obtenção dos ângulos de Euler a partir da matriz $\underline{\underline{Q}}_{BA}$, é um pouco mais delicado pois existem sempre duas soluções ambíguas, das quais deve-se escolher uma. Existem, ainda, certas situações em que temos indeterminações do tipo 0/0 na solução (quando $\theta_{BA} = \pm 90^\circ$) que devem ser levantadas. Utilizando diretamente as considerações feitas por SIELAWA (1976), podemos obter os ângulos de Euler a partir da matriz $\underline{\underline{Q}}_{BA}$, da seguinte forma:

a) Restrições para evitar as ambiguidades:

$$-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \quad (\text{A-2})$$

$$-180^\circ < \psi \leq 180^\circ \quad (\text{A-3})$$

$$-180^\circ < \phi \leq 180^\circ$$

b) Obtenção de θ_{BA} : temos da eq. (A-1):

$$\text{sen } \theta_{BA} = -\ell_{BA}^{13} \quad (\text{A-5})$$

e, usando a restrição (A-2):

$$\text{cos } \theta_{BA} = + \sqrt{1 - (\ell_{BA}^{13})^2} \quad (\text{A-6})$$

c) Obtenção de ϕ_{BA} : da eq. (A-1), tiramos:

$$\text{sen } \phi_{BA} = \ell_{BA}^{23} / \text{cos } \theta_{BA} \quad (\text{A-7})$$

$$\text{cos } \phi_{BA} = \ell_{BA}^{33} / \text{cos } \theta_{BA} \quad (\text{A-8})$$

Para $\cos\theta_{BA}=0$, temos uma indeterminação de ϕ_{BA} (e ψ_{BA}).

Levantando a indeterminação, tem-se:

$$\phi_{BA} = 0, \text{ para } \cos\theta_{BA}=0 \quad (\text{A-9})$$

d) Obtenção de ψ_{BA} : da eq. (A-1), temos:

$$\text{sen}\psi_{BA} = \ell_{BA}^{12} / \cos\theta_{BA} \quad (\text{A-10})$$

$$\text{cos}\psi_{BA} = \ell_{BA}^{11} / \cos\theta_{BA} \quad (\text{A-11})$$

Levantando-se a indeterminação que ocorre quando $\cos\theta_{BA}=0$, tem-se:

$$\text{sen}\psi_{BA} = -\ell_{BA}^{21}, \text{ para } \cos\theta_{BA}=0 \quad (\text{A-12})$$

$$\text{cos}\psi_{BA} = -\ell_{BA}^{22}, \text{ para } \cos\theta_{BA}=0 \quad (\text{A-13})$$

A-2 - DERIVADAS DOS ÂNGULOS DE EULER E DOS COSSENO DIRETORES EM FUNÇÃO DAS VELOCIDADES ANGULARES P, Q E R

De acordo com SIELAWA (1976), a derivada da matriz \square_{BA} em função das velocidades angulares é dada por:

$$\dot{\underline{L}}_{BA} = \begin{bmatrix} (R\ell_{BA}^{21} - Q\ell_{BA}^{31}) & (R\ell_{BA}^{22} - Q\ell_{BA}^{32}) & (R\ell_{BA}^{23} - Q\ell_{BA}^{33}) \\ (P\ell_{BA}^{31} - R\ell_{BA}^{11}) & (P\ell_{BA}^{32} - R\ell_{BA}^{12}) & (P\ell_{BA}^{33} - R\ell_{BA}^{13}) \\ (Q\ell_{BA}^{11} - P\ell_{BA}^{21}) & (Q\ell_{BA}^{12} - P\ell_{BA}^{22}) & (Q\ell_{BA}^{13} - P\ell_{BA}^{23}) \end{bmatrix} \quad (A-14)$$

onde: $\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = [\vec{\omega}^{B/A}]_B = \text{velocidade angular de B em relação a A descrita no sistema B.}$

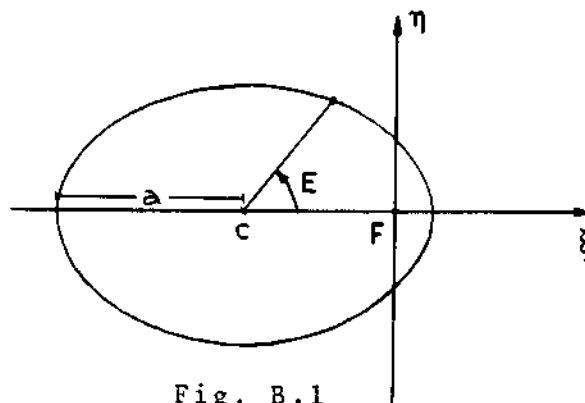
De acordo, ainda, com SIELAWA (1976) e BALL e OSBORNE (1967), as derivadas dos ângulos de Euler, também em função das velocidades angulares, são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_{BA} \\ \dot{\theta}_{BA} \\ \dot{\phi}_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Q \cdot \sec \theta_{BA} \sin \phi_{BA} + R \sec \theta_{BA} \cos \phi_{BA}) \\ (Q \cdot \cos \phi_{BA} - R \cdot \sin \phi_{BA}) \\ (P + Q \cdot \operatorname{tg} \theta_{BA} \sin \phi_{BA} + R \cdot \operatorname{tg} \theta_{BA} \cos \phi_{BA}) \end{bmatrix} \quad (A-15)$$

APÊNDICE B

DESCRIÇÃO DA ÓRBITA ELÍPTICA NO SISTEMA DE COORDENADAS
(GEOCÊNTRICAS) INERCIAIS

A trajetória de um satélite em torno da Terra é, em princípio, uma elipse com a Terra em um dos seus focos. Definimos, então, o sistema orbital (F, ξ, η, ζ) onde F é o centro da Terra e ξ é onde fixamos um dos focos da elipse. Se colocarmos a órbita no plano $\xi\eta$ (MORAES, 1978), o satélite terá sua posição dada neste sistema por (Fig. B.1):



$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} (\cos E - e) \\ \sqrt{1 - e^2} \cdot \text{sen } E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B-1})$$

onde: a = semi-eixo maior da elipse
 e = excentricidade da elipse
 E = anomalia excêntrica

Conhecendo-se os parâmetros a e e da elipse, a posição do satélite em um certo instante é determinada pela anomalia ex cêntrica E . Como se sabe (MORAES, 1978), ela é dada pela equação de Kepler:

$$E - e \cdot \text{sen } E = M \quad (\text{B-2})$$

onde:

$$M = n \cdot (t - \tau) = \text{anomalia média}$$

$$n = \frac{2\pi}{T} = \text{movimento médio}$$

$$\tau = \text{época de passagem pelo perigeo}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = \text{período da órbita}$$

$$\mu = 3,99 \times 10^{14} \text{ N.m}^2/\text{Kg} = \text{constante de gravitação terrestre}$$

A solução dessa equação é dada por:

$$E = M + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \left[\frac{1}{K} J_K(Ke) \cdot \text{sen}(KM) \right] \quad (\text{B-3})$$

onde:

$$J_K(x) = \text{função de Bessel de primeira classe de ordem } K.$$

Na simulação da órbita elíptica, preferimos obter a anomalia excêntrica resolvendo a equação de Kepler por método numérico, pois é mais fácil de implementar no computador (vide Cap.4).

Como queremos saber a posição do satélite no sistema de coordenadas inerciais (F, X_v, Y_v, Z_v), devemos determinar a matriz de transformação de um sistema para outro.

A posição da órbita em relação ao sistema inercial é definida por três ângulos Ω , i e ω , de acordo com a fig. B.2. Esses ângulos são os ângulos de Euler que levam o sistema (F, X_v, Y_v, Z_v) ao sistema (F, ξ, η, ζ) e, portanto, deve-se obedecer sempre à sequência $\Omega \rightarrow i \rightarrow \omega$.

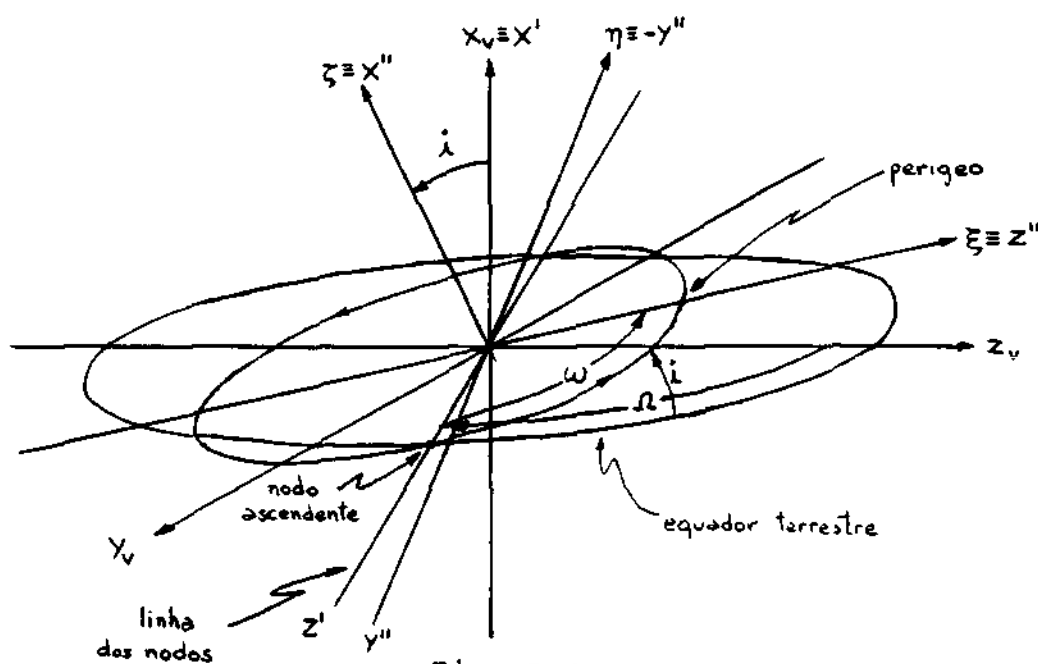


Fig. B-2

A matriz de transformação é obtida fazendo-se: uma rotação, em torno de X_v , de um ângulo Ω ; em seguida, uma rotação em torno de Z' , de um ângulo i ; depois, uma rotação de um ângulo ω em torno de $X'' (= \zeta)$, isto é:

$$\begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos i & \sin i & 0 \\ -\sin i & \cos i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega & \sin \Omega \\ 0 & -\sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{bmatrix} \quad (B-4)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos i) & (\sin i \cos \Omega) & (\sin i \sin \Omega) \\ (-\cos \omega \sin i) & (\cos \omega \cos i \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega) & (\cos \omega \cos i \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega) \\ (\sin \omega \sin i) & (-\sin \omega \cos i \cos \Omega - \sin \Omega \cos \omega) & (-\sin \omega \cos i \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{bmatrix} \quad (\text{B-5})$$

Temos ainda (vide fig. B.2) que:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix} \quad (\text{B-6})$$

$$\therefore \begin{bmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sin \omega \sin i) & (\sin i \cos \omega) & (\cos i) \\ (-\sin \omega \cos i \cos \Omega - \sin \Omega \cos \omega) & (\sin \omega \sin \Omega - \cos i \cos \omega \cos \Omega) & (\sin i \cos \Omega) \\ (-\sin \omega \cos i \sin \Omega + \cos \Omega \cos \omega) & (-\cos i \cos \omega \sin \Omega - \sin \omega \cos \Omega) & (\sin i \sin \Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (\text{B-7})$$

Para termos um modelo mais realista da órbita, é interessante considerar as variações no tempo dos ângulos ω e Ω . Podemos então, escrever (ABADIE):

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{\Delta \Omega}{\Delta T} \frac{(t-t_0)}{T} \quad (\text{B-8})$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{\Delta \omega}{\Delta T} \frac{(t-t_0)}{T} \quad (\text{B-9})$$

onde: $\frac{\Delta \Omega}{\Delta T}$ = precisão da linha dos nodos

$\frac{\Delta \omega}{\Delta T}$ = avanço do perigeo

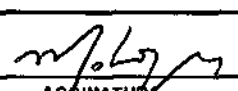



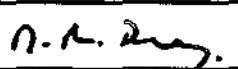
$\Omega_0 = \Omega(t=t_0)$

$\omega_0 = \omega(t=t_0)$

t_0 = primeira passagem pelo perigeo

Portanto, dados os elementos orbitais (ou keplerianos) Ω_0 , $\frac{\Delta\Omega}{\Delta T}$, i , ω_0 , $\frac{\Delta\omega}{\Delta T}$, e , a , ζ e o instante t_0 da primeira passagem pelo perigeo, podemos determinar em qualquer instante t a posição do satélite no sistema de coordenadas (geocêntricas) inerciais utilizando as equações (B-1), (B-2), (B-7), (B-8) e (B-9).

AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO

TÍTULO					
Estudo de um sistema de controle de atitude de satélites artificiais utilizando estabilização pelo campo magnético da Terra.					
AUTOR					
Seth Emanuel Couto Melo Filho					
TRADUTOR					
EDITOR					
ORIGEM	PROJETO	SÉRIE	Nº DE PÁGINAS	Nº DE FOTOS	Nº DE MAPAS
DEM			134		
TIPO					
<input type="checkbox"/> RPQ	<input type="checkbox"/> PRE	<input type="checkbox"/> NTC	<input type="checkbox"/> PRP	<input type="checkbox"/> MAN	<input type="checkbox"/> PUD
				<input checked="" type="checkbox"/> TAE	<input type="checkbox"/> _____
DIVULGAÇÃO					
<input type="checkbox"/> EXTERNA	<input checked="" type="checkbox"/> INTERNA	<input type="checkbox"/> RESERVADA	<input type="checkbox"/> LISTA DE DISTRIBUIÇÃO ANEXA		
PERIÓDICO/EVENTO					
CONVÊNIO					
AUTORIZAÇÃO PRELIMINAR					
04, 02, 91			 ASSINATURA		
REVISÃO TÉCNICA					
<input checked="" type="checkbox"/> SOLICITADA	<input type="checkbox"/> DISPENSADA				
			 ASSINATURA		
RECEBIDA	04 / 02 / 91	DEVOLVIDA	04 / 02 / 91		
				 ASSINATURA DO REVISOR	
REVISÃO DE LINGUAGEM					
<input type="checkbox"/> SOLICITADA	<input checked="" type="checkbox"/> DISPENSADA				
			 ASSINATURA		
Nº					
RECEBIDA	___ / ___ / ___	DEVOLVIDA	___ / ___ / ___		
				ASSINATURA DO REVISOR	
PROCESSAMENTO/DATILOGRAFIA					
RECEBIDA	___ / ___ / ___	DEVOLVIDA	___ / ___ / ___		
				ASSINATURA	
REVISÃO TIPOGRÁFICA					
RECEBIDA	___ / ___ / ___	DEVOLVIDA	___ / ___ / ___		
				ASSINATURA	
AUTORIZAÇÃO FINAL					
05, 02, 91			 ASSINATURA		
PALAVRAS-CHAVE					
Controle de Atitude/Estabilização/Bobinas Magnéticas					