



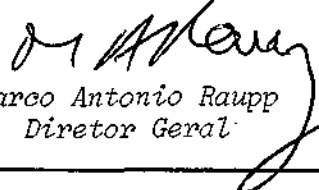
Imprimir

Fechar

## Referência Completa

**Tipo da Referência** Conference Proceedings  
**Repositório** sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.26.21.19.26  
**Metadados** sid.inpe.br/iris@1905/2005/07.26.21.19.28  
**Site** mtc-m05.sid.inpe.br  
**Rótulo** 2589  
**Chave Secundária** INPE-3596-PRE/  
**Chave de Citação** DutraPereGonzGonz:1985:AbNu  
**Autor** 1 Dutra, Severino Luiz Guimaraes  
 2 Pereira, A. E. C.  
 3 Gonzalez-Alarcon, Walter Demetrio  
 4 Gonzalez, Alicia Luisa Clua  
**Grupo** 1 DGE-INPE-BR  
**Título** Campos eletricos atmosfericos: uma abordagem numerica   
**Nome do Evento** Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional da SEMAC, 2.  
**Ano** 1985  
**Data** 16-17 maio1985  
**Localização do Evento** Sao Jose dos Campos  
**Palavras-Chave** GEOFISICA ESPACIAL, MAGNETOSFERA, CAMPO ELETRICO.  
**Idioma** Pt  
**Tipo Secundário** PRE CN  
**Area** CEA  
**Projeto** GEOMA  
**Última Atualização dos Metadados** 2015:03.18.14.35.49 sid.inpe.br/bibdigital@80/2006/04.07.15.50 administrator  
**Estágio do Documento** concluído  
**e-Mail (login)** marciana  
**Grupo de Usuários** administrator  
**Visibilidade** shown  
**Transferível** 1  
**Tipo do Conteúdo** External Contribution  
**Unidade Imediatamente Superior** 8JMKD3MGPCW/3EU29DP  
**Conteúdo da Pasta source** não têm arquivos  
**Conteúdo da Pasta agreement** não têm arquivos  
**Histórico** 2015-03-18 14:35:49 :: administrator -> marciana :: 1985  
**Campos Vazios** abstract accessionnumber affiliation archivingpolicy archivist booktitle  
 callnumber copyholder copyright creatorhistory descriptionlevel  
 dissemination documentstage doi e-mailaddress edition editor  
 electronicmailaddress format isbn issn lineage mark mirrorrepository  
 nextedition notes numberoffiles numberofvolumes organization pages  
 parameterlist parentrepositories previousedition progress publisher  
 publisheraddress readergroup readergroup readpermission resumeid  
 rightsholder secondarydate secondarymark serieseditor session shorttitle  
 size sponsor subject targetfile tertiarymark tertiarytype type url  
 versiontype volume  
**Data de Acesso** 24 jul. 2015  
 atualizar

Fechar

1. Publicação nº <i>INPE-3596-PRE/789</i>	2. Versão	3. Data <i>Julho, 1985</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DGA/DIG</i>	Programa <i>MAGNET</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>CAMPO ELÉTRICO ATMOSFÉRICO</i> <i>ELETRICIDADE ATMOSFÉRICA</i> <i>SIMULAÇÃO NUMÉRICA</i>			
7. C.D.U.: <i>523.4-852</i>			
8. Título  <i>CAMPOS ELÉTRICOS ATMOSFÉRICOS: UMA ABORDAGEM NUMÉRICA</i>		10. Páginas: <i>21</i>	
		11. Última página: <i>20</i>	
9. Autoria <i>S.L.G. Dutra</i> <i>A.E.C. Pereira</i> <i>W.D. Gonzalez</i> <i>A.L.C. Gonzalez</i>		12. Revisada por  <i>L.A. Vieira Dias</i>	
Assinatura responsável 		13. Autorizada por.   <i>Marco Antonio Raupp</i> <i>Diretor Geral</i>	
14. Resumo/Notas  <i>Apresenta-se neste trabalho a discussão e resolução numé- rica da equação do potencial elétrico no meio atmosférico. Mostram-se vários casos de aplicação, relacionados às diversas origens do campo elétrico atmosférico.</i>			
15. Observações <i>Trabalho apresentado no 2º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional da SBMAC, 16-17/maio/1985.</i>			

CAMPOS ELÉTRICOS ATMOSFÉRICOS: UMA ABORDAGEM NUMÉRICA

S.L.G. Dutra

A.E.C. Pereira<sup>1</sup>

W.D. Gonzalez

A.L.C. Gonzalez

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico  
e Tecnológico - CNPq  
C.P. 515 - 12200 - São José dos Campos - SP - Brasil

RESUMO

Apresenta-se neste trabalho a discussão e resolução numérica da equação do potencial elétrico no meio atmosférico. Mostram-se vários casos de aplicação, relacionados às diversas origens do campo elétrico atmosférico.

ABSTRACT

In this work some numeric techniques for the resolution of the electric potential equation in the atmosphere are presented and discussed. Some applications related to different sources of the atmospheric electric field are also given.

<sup>1</sup> Atualmente na Universidade Federal de Uberlândia, M.G.

## 1 - INTRODUÇÃO

A atmosfera é um meio contínuo, cujas características variam monotonicamente com a altura. Entretanto, segundo o ponto de vista adotado (térmico, elétrico, etc.), usa-se classificá-la em regiões. Se se considera a densidade eletrônica em um dada altura, a atmosfera é caracterizada pelas *regiões ionosféricas*. A mais baixa é a região ionosférica D (em torno de 75km de altura) e a mais alta é a região F<sub>2</sub> (em torno de 230km e acima). Entre a D e F<sub>2</sub> existem as regiões E (~120km) e F<sub>1</sub> (~180km).

O estado elétrico da atmosfera associado a um certo fenômeno pode ser caracterizado por um sistema de distribuição de *correntes elétricas*,  $\underline{J}$ . Associado a este sistema encontra-se a configuração de um campo de forças elétricas (um *campo elétrico*),  $\underline{E}$ , ou ainda de um campo de *potencial elétrico*,  $\phi$ . Se na simulação de um modelo para um certo fenômeno elétrico atmosférico se conhecem as *condições de contorno* da região onde este fenômeno ocorre, a simulação estará completa com a resolução da equação:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{J}(\underline{x}) = G(\underline{x}) , \quad (1a)$$

com

$$\underline{J}(\underline{x}) := \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{E}(\underline{x}) , \quad (1b)$$

$$\underline{E}(\underline{x}) := -\underline{\nabla}\phi(\underline{x}) , \quad (1c)$$

sujeita às condições de contorno especificadas. O vetor  $\underline{x}$  representa a posição de um ponto da região em um sistema de coordenadas genéricas. O tensor  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  representa a *condutividade elétrica* do meio. Na forma acima considerou-se o sistema em estado estacionário.

Tal procedimento é normalmente seguido na simulação de fenômenos (entre outros) como: a eletricidade atmosférica global (Dolezalek, 1972; Hays and Roble, 1979); a eletricidade atmosférica local (Park and Dejnakarindra, 1973; Burke, 1975); o dínamo ionosférico (Heelis et alii, 1974; Forbes, 1981); e a propagação de campos elétricos magnetosféricos para regiões ionosféricas ou da ionosfera para alturas menores da atmosfera (Mozer, 1971; Park, 1976).

Em geral, a atmosfera é um meio anisotrópico. A presença do campo magnético terrestre introduz direções preferenciais no seu estado elétrico. A *condutividade direta* (ou *paralela*),  $\sigma_0$ , representa a resposta do meio atmosférico a um campo elétrico existente ao longo do campo geomagnético. Em uma direção perpendicular ao campo geomagnético, tem-se a *condutividade Pedersen* (na direção do campo elétrico),  $\sigma_1$ , e a *condutividade Hall* (perpendicular aos campos magnético e elétrico),  $\sigma_2$ . A Figura 1 mostra um perfil de condutividade apropriado para o meio-dia e para regiões equatoriais e de baixas latitudes. Efeitos elétricos de baixa altitude (de origem troposférica ou estratosférica) podem se fazer sentir em altitudes mais altas e vice-versa. A atmosfera é eletricamente acoplada em toda a sua extensão.

## 2 - CAMPOS ELÉTRICOS ATMOSFÉRICOS

O campo elétrico existente na atmosfera pode apresentar diversas influências. Basicamente, essas influências relacionam-se com as camadas mais baixas da atmosfera e com a região ionizada das camadas mais altas, o que define os campos elétricos de origem troposférica e de origem ionosférica, respectivamente.

Uma média de 2000 *tempestades atmosféricas* ativas em cada instante e espalhadas pelo globo terrestre originam os campos elétricos troposféricos. As tempestades originam-se, primariamente, do acúmulo de regiões de partículas de água carregadas eletricamente, as *nuvens de tempestade* ("thunderclouds"). O acúmulo de cargas positivas na parte superior da nuvem (tipicamente de algumas dezenas de coulombs) e de cargas negativas (de magnitude similar) na sua parte inferior origina um campo elétrico que se aproxima do modelo de um dipolo. *Campos elétricos de tempestade* da ordem de  $10^5$  V/m podem ser originados. Nuvens de tempestade usualmente atingem 10 a 12km de altura, podendo chegar durante grandes tempestades a 20km ou mais.

As tempestades atmosféricas determinam o *circuito elétrico atmosférico de tempo bom*. Elas atuam como um gerador de corrente no circuito atmosférico global (fornecendo uma corrente líquida positiva dirigida do topo da nuvem de tempestade para a ionosfera e do chão para a base da nuvem) e mantêm globalmente o sistema associado de correntes elétricas, provocando uma diferença média de potencial ionosfera-chão da ordem de 300kV. Em regiões li

vres de tempestades atmosféricas o sistema de correntes elétricas é dirigido para baixo (fechando o circuito através da ionosfera e do chão), o que caracteriza o *campo elétrico vertical de tempo bom*, com um valor próximo ao chão da ordem de 100V/m. Nas vizinhanças de uma tempestade, as linhas de força verticais são fortemente distorcidas, e o campo elétrico fica bastante alterado, até se invertendo em direção.

Na ionosfera, o mapeamento do campo elétrico magnetosférico ao longo das linhas de força do campo geomagnético e o efeito dínamo pela ação de ventos neutros ao arrastar partículas carregadas através das linhas do campo geomagnético caracterizam os *campos elétricos ionosféricos*. Estes campos são tipicamente da ordem de 1mV/m, em baixas latitudes; em altas latitudes, devido a uma maior interação ionosfera-magnetosfera, estes campos podem chegar a 100mV/m; e em médias latitudes, entre 1 e 10mV/m. Campos elétricos ionosféricos podem se mapear para baixas alturas até aproximadamente 10km, com pouca atenuação em seu valor. O contrário também acontece. Isto é, campos elétricos horizontais de origem troposférica podem chegar às regiões da ionosfera, situadas sobre grandes tempestades atmosféricas, com valores até 1mV/m.

Além dessas duas origens básicas, outras influências podem se tornar importantes no estudo do campo elétrico atmosférico. O *campo elétrico orográfico* e o *campo elétrico devido à precipitação de partículas* na atmosfera representam duas delas. Em últimas análise, estas influências traduzem-se como perturbações no sistema de correntes elétricas de tempo bom, isto é, no campo elétrico vertical de tempo bom.

O campo elétrico orográfico é aquela parcela do campo elétrico atmosférico originada pela orografia terrestre. A Terra (o solo) possui um tempo de relaxação elétrica da ordem de  $10^{-5}$ s, na atmosfera próximo ao chão, de aproximadamente 20min. Assim a Terra comporta-se como um bom condutor, ficando as linhas de força do campo elétrico vertical de tempo bom perpendiculares à sua superfície, que em regiões planas são caracteristicamente verticais e apontam para baixo. Em regiões montanhosas, no entanto, as linhas de força verticais são distorcidas (apresentando uma componente horizontal do campo elétrico) e esta distorção pode chegar significativamente (dependendo do relevo terrestre) até alturas da ordem de 50km.

O campo elétrico relacionado à precipitação de partículas aparece devido à penetração na atmosfera de partículas energéticas vindas da magnetosfera terrestre durante períodos magneticamente perturbados. A perda de energia destas partículas em precipitação por ionização-excitação do ar neutro origina uma região mais condutora que a sua vizinhança, provocando uma irregularidade na condutividade. A região mais condutora tende a expulsar as linhas equipotenciais do campo de tempo bom. Isto é, normalmente horizontais, estas linhas equipotenciais afastam-se para cima e para baixo na região da irregularidade, forçando uma quase-perpendicularidade entre as linhas de força do campo elétrico e o contorno (difuso) da irregularidade, e distorcendo as linhas de força do campo elétrico vertical de tempo bom, que apresenta agora um componente horizontal (devido à precipitação) não-nula. Essa região condutora pode ser esperada em alturas onde outras fontes de ionização seriam menos eficientes. Os efeitos esperados na distorção do campo elétrico atmosférico foram medidos na região de precipitação de partículas energéticas da Anomalia Magnética do Atlântico Sul (Gonzalez et alii, 1982).

### 3 - MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO

As Equações 1 representam uma ferramenta largamente utilizada nos estudos dos fenômenos da Eletricidade Atmosférica anteriormente discutidos. Muitas vezes ela se apresenta na forma:

$$Lu(\underline{x}) = G(\underline{x}) \quad (2a)$$

sendo:

$$L := A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F, \quad (2b)$$

onde A, C, D, E, F e G podem ser funções das variáveis independentes x e y e da variável dependente u(x,y) dentro da região de interesse. Sua solução é obtida tanto com as condições de contorno de Dirichlet (1ª categoria) quanto com as de Neumann (2ª categoria), ou com as de Cauchy-Robbins (3ª categoria). Em problemas de Eletricidade Atmosférica soluções analíticas da Equação 1 (ou Equação 2) são raramente encontradas. Assim, para ter uma solução sua, na quase totalidade dos casos ela é simplificada (seja na sua forma, ou seja nas

hipóteses ad hoc empregadas). Com o advento de computadores mais poderosos e rápidos e de técnicas numéricas mais elaboradas, tal análise pode ser tratada numericamente e envolve a construção de uma grade representativa da discretização da região de interesse.

Para sua abordagem numérica três métodos são discutidos a seguir: o de *Diferença Finita*, o de *Integração Direta* e o de *Elementos Finitos*. Aplicações aos diversos fenômenos já discutidos serão mostrados na próxima seção, para condições de contorno de Dirichlet.

### 3.1 - DIFERENÇA FINITA

O método de Diferença Finita consiste em substituir a região de interesse por um conjunto finito de pontos (Figura 3). Nestes pontos,  $P$ , encontra-se uma relação linear que envolve o valor de  $u$  em  $P$  e em outros pontos seus vizinhos, repetindo-se este raciocínio para outros pontos da grade (e.g. Mitchell and Griffiths, 1980).

Com isto, uma solução aproximada  $u_{ij}$  para a solução  $u(x,y)$  no ponto  $P(x_i, y_j)$  pode ser obtida com:

$$a_{ij} u_{i+1,j} + c_{ij} u_{i,j+1} + d_{ij} u_{i-1,j} + e_{ij} u_{i,j-1} - f_{ij} u_{ij} = G_{ij} \quad (3)$$

para  $i=1,2,3,\dots,m$  e  $j=1,2,3,\dots,n$ . Os pontos  $x=x_0$ ,  $x=x_{m+1}$ ,  $y=y_0$  e  $y=y_{n+1}$  representam o contorno.

Ou ainda:

$$\underline{P}_i \underline{u}_{i-1} + \underline{Q}_i \underline{u}_i + \underline{T}_i \underline{u}_{i+1} = \underline{r}_i \quad (4)$$

para  $i=1,2,3,\dots,m$ , onde  $\underline{P}_i$  e  $\underline{T}_i$  são matrizes diagonais (de ordem  $n \times n$ );  $\underline{Q}_i$  é uma matriz tridiagonal (de ordem  $n \times n$ ); e  $\underline{u}_i$  e  $\underline{r}_i$  são vetores com elementos cada (por exemplo,  $\underline{u}_i := [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}]^T$ , com  $u_{ij} := u(x_i, y_j)$ ). Os vetores  $\underline{u}_0$  e  $\underline{u}_{m+1}$  contêm os  $n$  valores da função  $u$  nos pontos de contorno  $x = x_0$  e  $x = x_{m+1}$ , respectivamente.



A primeira forma (Equação 3) aplica-se a grades numeradas consistentemente para esquemas iterativos de pontos e a segunda (Equação 4), a uma numeração consistente para esquemas iterativos da linha. Dutra (1982) traz a descrição dos elementos matriciais, vetores e matrizes que aparecem nas Equações 3 e 4.

### 3.2 - INTEGRAÇÃO DIRETA (VARREDURA)

A Equação 2 discretizada nos níveis  $y=y_j$ ,  $j=1,2,3,\dots,n$  (Figura 2) fornece:

$$\begin{aligned} \underline{u}'' + \underline{p} \underline{u}' + \underline{q} \underline{u} &= \underline{r} , \\ \underline{u}(\alpha) &= \underline{\gamma}_1 , \\ \underline{u}(\beta) &= \underline{\gamma}_2 , \end{aligned} \tag{5}$$

onde os vetores  $\underline{u}$  e  $\underline{r}$  contêm  $n$  elementos, e as matrizes  $\underline{p}$  e  $\underline{q}$  são diagonal e tridiagonal (de ordem  $n \times n$ ), respectivamente  $(\underline{u}(x) := [u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)]^T$ , com  $u_j(x) := \tilde{u}(x, y_j)$ ). Os vetores  $\underline{u}'$  e  $\underline{u}''$  são a primeira e a segunda derivadas de  $\underline{u}$ , e  $\underline{\gamma}_1$  e  $\underline{\gamma}_2$  são as condições de contorno em  $x=\alpha$  e  $x=\beta$ , respectivamente.

A solução da Equação 5 representa um problema de contorno para um sistema de equações diferenciais ordinárias. A literatura existente é bastante escassa sob o ponto de vista de integração direta. É comum encontrar-se material relativamente farto para problemas de condição inicial.

Com a mudança de variável  $\underline{u}' = \underline{v}$  e esquecendo por um momento a segunda condição de contorno, tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{u}' &= \underline{v} , \\ \underline{v}' &= - \underline{q} \underline{u} - \underline{p} \underline{v} + \underline{r} . \\ \underline{u}(\alpha) &= \underline{\gamma}_1 , \\ \underline{v}(\alpha) &= \underline{\lambda} , \end{aligned} \tag{6}$$

onde  $\underline{\lambda}$  é um vetor (n elementos) ainda desconhecido. Dado o valor de  $\underline{\lambda}$ , este sistema pode ser resolvido por métodos numéricos usuais, visto que é um problema de condição inicial comum.

O objetivo volta-se assim para a procura de um vetor  $\underline{\lambda}$ , tal que com a solução  $\underline{u}(x;\underline{\lambda})$  do Sistema 6, parametrizada em  $\underline{\lambda}$ , se tenha  $\underline{u}(\beta;\underline{\lambda}) := \underline{\gamma}_2$ . Isto é, que se anule o vetor-resíduo  $\underline{f}(x;\underline{\lambda}) := \underline{u}(x;\underline{\lambda}) - \underline{\gamma}_2$  no ponto  $x = \beta$ .

Pode-se mostrar que  $\underline{f}(x;\underline{\lambda}) = \underline{E}(x,\alpha)\underline{\lambda} + \underline{L}(x,\alpha)$ , onde tanto a matriz  $\underline{E}$  (de ordem  $n \times n$ ) como o vetor  $\underline{L}$  (com n elementos) independem de  $\underline{\lambda}$ . Daí, o vetor  $\underline{\lambda}_s$  que, através do Sistema 6, soluciona a Equação 5 é dado por:

$$\underline{\lambda}_s = \underline{E}^{-1}(\beta,\alpha) \underline{L}(\beta,\alpha). \quad (7)$$

O vetor  $\underline{L}$  e a matriz  $\underline{E}$  podem ser encontrados por um algoritmo similar aquele usado para encontrar a matriz de transição em sistemas lineares (Dutra, 1982).

### 3.3 - ELEMENTOS FINITOS

O método de Elementos Finitos consiste em subdividir a região de interesse em sub-regiões,  $e$ , denominadas elementos finitos (Figura 4, no caso bidimensional, com elementos triangulares). Os vértices de cada elemento são denominados *nós*, que são numerados globalmente em toda a região (nesta figura tem-se 14 nós). Os nós são também numerados localmente (em cada elemento).

Uma aproximação para a solução da Equação 1 pode ser obtida considerando, inicialmente, que dentro de cada elemento genérico  $e$  a função  $u(\underline{x})$  varie como:

$$u(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{\ell} u_{k(j)}^e N_j^e(\underline{x}), \quad (8)$$

onde  $\ell$  é o número de nós do elemento,  $u_{k(j)}^e$  é o valor aproximado de  $u$  no nó  $j$  do elemento  $e$  (correspondente à numeração global  $k$ ) e  $N_j^e(\underline{x})$  é a função interpoladora do nó  $j$  (que tem valor 1 nesse nó e se anula nos outros nós de elemento ou fora dele). Em geral, a Equação 8 não satisfará a Equação 1 exatamente, originando um resíduo local  $r(\underline{x}) := Lu(\underline{x}) + G(\underline{x})$ , onde  $L := \underline{\nabla} \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla})$  e  $u$  é potencial elétrico.

O problema reduz-se, em seguida, a encontrar os valores  $u_k$  que anulem o resíduo total, isto é, a soma dos resíduos locais ponderados por pesos  $w_i(\underline{x})$ , em toda a região de interesse:

$$\sum_e \left[ \int_e N_i^e \nabla \cdot (\underline{\sigma} \cdot \nabla u) dV + \int_e N_i^e G dV \right] = 0 \quad (9)$$

Deve-se notar que se considerou na Equação 9  $w_i(\underline{x}) := N_i^e(\underline{x})$  (escolha de Galerkin). Pode-se mostrar que:

$$\sum_e \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} u_k^e(j) = \sum_e \int_e N_i^e G dV, \quad (10a)$$

onde

$$a_{ij} := \int_e \nabla N_i^e \cdot (\underline{\sigma} \cdot \nabla N_j^e) dV \quad (10b)$$

pode ser calculado usando a teoria de elementos isoparamétricos (Zienkiewicz, 1977).

Combinando a dupla somatória da Equação 10 e com as condições de contorno, têm-se finalmente:

$$\sum_k A_{ik} u_k = B_i, \quad (11)$$

onde  $\underline{A}$  é uma matriz do tipo banda, com largura dependente da numeração dos nós, e de ordem dada pelo número total de nós.

#### 4 - APLICAÇÕES

Considerando um sistema de coordenadas cartesiano  $(x,y,z)$  - x na direção sul, y na direção leste e z para cima - e para sistemas de correntes solenoidais e campos elétricos quase-estáticos e irrotacionais, pode-se escrever a Equação 1 como:

$$(\sigma_0 c^2 + \sigma_1 s^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sigma_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + (\sigma_0 s^2 + \sigma_1 c^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2(\sigma_0 - \sigma_1) sc \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} c^2 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} s^2 - \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} s + \left( \frac{\partial \sigma_0}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} \right) sc \right] \frac{\partial \phi}{\partial x} + \\
 & + \left( \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} s + \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} c \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \\
 & + \left[ \left( \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \right) sc + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial z} s^2 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} c^2 \right] \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0,
 \end{aligned} \tag{12a}$$

com o tensor condutividade  $\underline{\underline{\sigma}}$  dado por:

$$\underline{\underline{\sigma}} := \begin{bmatrix} \sigma_1 s^2 + \sigma_0 c^2 & \sigma_2 s & (\sigma_0 - \sigma_1) sc \\ -\sigma_2 s & \sigma_1 & \sigma_2 c \\ (\sigma_0 - \sigma_1) sc & -\sigma_2 c & \sigma_1 c^2 + \sigma_0 s^2 \end{bmatrix}, \tag{12b}$$

onde  $s = \text{sen} I$ ,  $c = \text{cos} I$  e  $I$  é o ângulo de inclinação do campo geomagnético.

Para a região equatorial têm-se:

$$\sigma_1 \frac{\sigma^2 \phi}{\partial y^2} + \sigma_1 \frac{\sigma^2 \phi}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \left( \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \tag{13}$$

#### 4.1 - CAMPO ELÉTRICO VERTICAL DE TEMPO BOM

Em regiões onde não existam gradientes horizontais, pode-se mostrar que a Equação 12 fornece:

$$\phi(z) = \phi(z_m) \left( \int_0^z \frac{dz}{\sigma_0 s^2 + \sigma_1 c^2} \right) \left( \int_0^{z_m} \frac{dz}{\sigma_0 s^2 + \sigma_1 c^2} \right)^{-1}, \tag{14}$$

onde  $z_m$  é uma altura de referência (usualmente no nível da ionosfera). Deve-se notar que  $\phi(0)=0$  e, no caso de altas latitudes ( $I \neq 90^\circ$ ), o comportamento de  $\phi(z)$ ,  $0 \leq z \leq z_m$ , é dado pela condutividade direta e no caso de baixas latitudes ( $I=0$ ), pela condutividade Pedersen.

A variação de  $\phi(z)$  com a altura é associada ao campo elétrico vertical de tempo bom. A Figura 5 ilustra o padrão deste campo de tempo bom, típico para baixas latitudes, por volta do meio-dia. Considerou-se  $\phi(z_m) := \phi(110\text{km}) = 300\text{kV}$  (na região inosférica E).

#### 4.2 - MAPEAMENTO DO CAMPO ELÉTRICO IONOSFÉRICO

A solução da Equação 13 pode ser obtida considerando as condições de contorno apropriadas para a região de interesse, no caso, um plano vertical na direção leste-oeste. A presença do campo elétrico ionosférico horizontal no contorno superior da região pode ser sentida em pontos mais baixos da atmosfera. Para sua modelagem, deve-se considerar que no contorno inferior, no chão,  $\phi=0$ ; no superior, deve-se especificar a variação  $\phi_m(y) := \phi(y, z_m)$ , onde  $z_m$  é a altura desse contorno na ionosfera; e nos contornos laterais, em pontos muito afastados da origem  $y=0$ , a solução dessa equação deve reproduzir o sistema de correntes de tempo bom (Equação 14).

A Figura 6 mostra a forma do potencial ionosférico  $\phi_m(y)$  adotada na modelagem. Os parâmetros  $L$  (que representa uma escala de variação) e  $\Delta\phi$  caracterizam o campo elétrico ionosférico. A Figura 7 é um exemplo da configuração das isolinhas do campo elétrico horizontal existente entre 0 e 110km de altura, que resultou da modelagem com  $\phi_0=300kV$ ,  $\Delta\phi=50V$  e  $L=50km$  (campo elétrico ionosférico de  $1mV/m$ ). Pode-se ver que mais de 50% do campo elétrico ionosférico chega em alturas por volta de 30km. Tomando escalas maiores (acima de aproximadamente 200km) quase 100% dele está presente nessas alturas.

#### 4.3 - CAMPOS ELÉTRICOS OROGRÁFICOS

Similarmente ao caso anterior, são as condições de contorno que determinam a modelagem dos campos elétricos orográficos. O contorno inferior foi, entretanto, levemente alterado.

A grade empregada na discretização da região de interesse está mostrada na Figura 8. Os parâmetros  $h$  e  $b$  definem a altura e a base, respectivamente, da montanha responsável pelo campo orográfico; os parâmetros  $c$  e  $t$  definem a região de transição dos elementos de grade de forma retangular para retangular distorcido.

Tomando os elementos restantes da modelagem como na seção anterior (com a diferença de que se tem agora  $\Delta\phi=0$ , para analisar isoladamente os efeitos das montanhas), a Figura 9 mostra as isolinhas do campo elétrico hori

zontal, traçadas automaticamente por um "plotter" (traçador), para dois casos:  $h=5\text{km}$ ,  $b=52\text{km}$  e  $h=1\text{km}$  e  $b=10\text{km}$ . Claramente percebe-se que montanhas maiores levam maior influência em alturas mais altas.

#### 4.4 - CAMPOS ELÉTRICOS DEVIDO À IRREGULARIDADE NA CONDUTIVIDADE

A modelagem dos campos elétricos devido à irregularidade ilustra uma aplicação onde os parâmetros intrínsecos do modelo são modificados; no caso, o tensor condutividade  $\underline{\sigma}$ .

A irregularidade na condutividade, supostamente centrada em  $y=0$  e  $z=z_1$  é caracterizada por um fator de aumento, que pode ser representado por:

$$f(y,z) := \begin{cases} 1 + q(z;A,z_0,z_1), & \text{se } |y| \leq Y_0; \text{ e} \\ 1 + \exp \left[ - \left( \frac{y-sY_0}{y_0} \right)^2 \right] q(z;A,z_0,z_1), & \text{se } |y| > Y_0, \end{cases} \quad (15a)$$

onde:

$$q(z;A,z_0,z_1) := (A-1) \exp \left[ - \left( \frac{z-z_1}{z_0} \right)^2 \right], \quad (15b)$$

sendo  $s$  o sinal de  $y$ ;  $A$  a amplitude do fator de aumento; e  $y_0$  e  $z_0$  indicam as distâncias de atenuação horizontal e vertical, respectivamente, para a variação de  $f(y,z)$ .

Esta forma do fator de aumento procura indicar que existe uma região (com extensão  $2Y_0$ ) centrada em  $y=0$ , onde a sua variação horizontal é pequena e o seu valor aproxima-se da amplitude máxima. Na Equação 15 em particular, a sua variação é nula e o seu valor máximo, isto é,  $f(y,z_1) = A$ , se  $|y| \leq Y_0$ . Deve-se notar que  $f(y \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty) = 1$ , ou seja, longe da irregularidade a condutividade não é alterada. O conjunto de parâmetros  $(A, y_0, Y_0, z_0, z_1)$  definem a influência da irregularidade).

Com as condições de contorno similares às da Seção 4.2 (e ainda com  $\Delta\phi=0$ ) e para o conjunto dos parâmetros com os valores (10, 100km, 0, 20km, 60km), a Figura 10 mostra as isolinhas do campo elétrico horizontal, traçadas automaticamente, devido à irregularidade na condutividade. A linha tracejada de forma elipsoidal indica os pontos da irregularidade distantes um comprimento de atenuação do seu centro. As linhas equipotenciais também são mostradas. Deve-se notar a expulsão das equipotenciais de dentro da irregularidade.

## 5 - RESUMO

Os tópicos discutidos neste trabalho mostram, apenas, uma breve introdução aos métodos numéricos mais comumente empregados na resolução de equações diferenciais parciais de segunda ordem, aplicados a alguns fenômenos da Eletricidade Atmosférica.

A escolha de um ou outro método nem sempre é óbvia e às vezes demanda alguma experimentação. Por exemplo, a resolução da Equação 3 com o clássico método iterativo de sobre-relaxação sucessiva (SOR) requer o conhecimento (mesmo aproximado) do parâmetro de relaxação se se deseja alcançar com sucesso a solução final. Essa resolução feita de modo direto (desde que a grade não seja muito grande) pelo método de eliminação de Gauss, por exemplo, pode ser imediata.

Para os modelos apresentados na Seção 4, os métodos utilizados com sucesso foram o de Diferença Finita (na forma da Equação 4; com exceção do campo elétrico orográfico) e o de Elementos Finitos, este mostrando relativa vantagem em relação ao primeiro, principalmente devido à sua versatilidade. O método de Varredura não convergiu para a solução desejada, o que indica em princípio a necessidade de um integrador mais robusto ou específico para o presente caso.

Por outro lado, a abordagem numérica discutida conduz normalmente a grandes e esparsos sistemas de equações algébricas. A resolução automática destes sistemas envolve, muitas vezes, um cuidado especial em seu armazenamento na memória de um computador e posterior manuseio. E, a conveniência entre um método de resolução ou outro, iterativo ou direto, nem sempre é bem

definida e depende principalmente das características (forma, sinal e magnitude dos elementos, etc.) da matriz-coeficiente do sistema de equações.

#### 6- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BURKE, H.K. *Large scale atmospheric electric fields: comparisons with balloon data*. Ph. D. Thesis. Huston, Rice University, Nov. 1975.
- COLE, R.K.; PIERCE, E.T. Electrification in the Earth's atmosphere for altitudes between 0 and 100km. *Journal of Geophysical Research*, 70(12): 2735-2749, June 1965.
- DOLEZALEK, H. Discussion of the fundamental problem of atmospheric electricity. *Pure and Applied Geophysics*, 100(1):8-43, Jan. 1972.
- DUTRA, S.L.G. Campos elétricos em alturas de balão estratosférico. *Tese de Doutorado*, São José dos Campos, INPE, 1982.
- FORBES, J.M. The equatorial electrojet. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 19(3):469-504, Aug. 1981.
- GONZALEZ, W.D.; PEREIRA, A.E.C.; GONZALEZ, A.L.C.; MARTIN, I.M.; DUTRA, S.L.G.; PINTO, O., Jr.; WYGANT, J.; MOZER, F. Large Horizontal electric fields measured at balloon heights of the Brazilian Magnetic Anomaly and association to local energetic particle precipitation, *Geophysical Research Letters*, 9(5):567-570, May 1982.
- HAYS, P.B.; ROBLE, R.G. A quasi-static model of global atmospheric electricity. 1. The lower atmosphere. *Journal of Geophysical Research*, 84(A7):3291-3305, July 1979.
- HEELIS, R.A.; KENDALL, P.C.; MOFFET, R.J.; WINDLE, D.W.; RISHBETH, H. Electrical coupling of the E- and F-region and its effects on F-region drifts and winds, *Planetary and Space Science*, 22(5):743-756, May 1974.
- MITCHELL, A.R.; GRIFFITHS, D.F. *The difference method in partial differential equations*. New York, John Wiley, 1980.
- MOZER, F.S.; SERLIN, R. Magnetospheric electric field measurements with balloons. *Journal of Geophysical Research*, 74(19):4739-3754, Sep. 1969.
- MOZER, F.S. Balloon measurements of vertical and horizontal atmospheric electric fields, *Pure and Applied Geophysics*, 84(1):32-45, Jan. 1971.



PALTRIDGE, G.W. Experimental measurements of the small-ion density and electrical conductivity of the stratosphere. *Journal of Geophysical Research*, 70(12):2751-1761, June 1965.

PARK, C.G. Downward mapping of high-latitude ionospheric electric fields to the ground. *Journal of Geophysical Research*, 81(1):168-174, Jan. 1976.

PARK, C.G.; DEJNAKARINTRA, M. Penetration of thundercloud electric fields into the ionosphere and magnetosphere. 1. Middle and subauroral latitudes. *Journal of Geophysical Research*, 78(28):6623-6633, Oct. 1973.

ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*. London, McGraw-Hill, 1977.

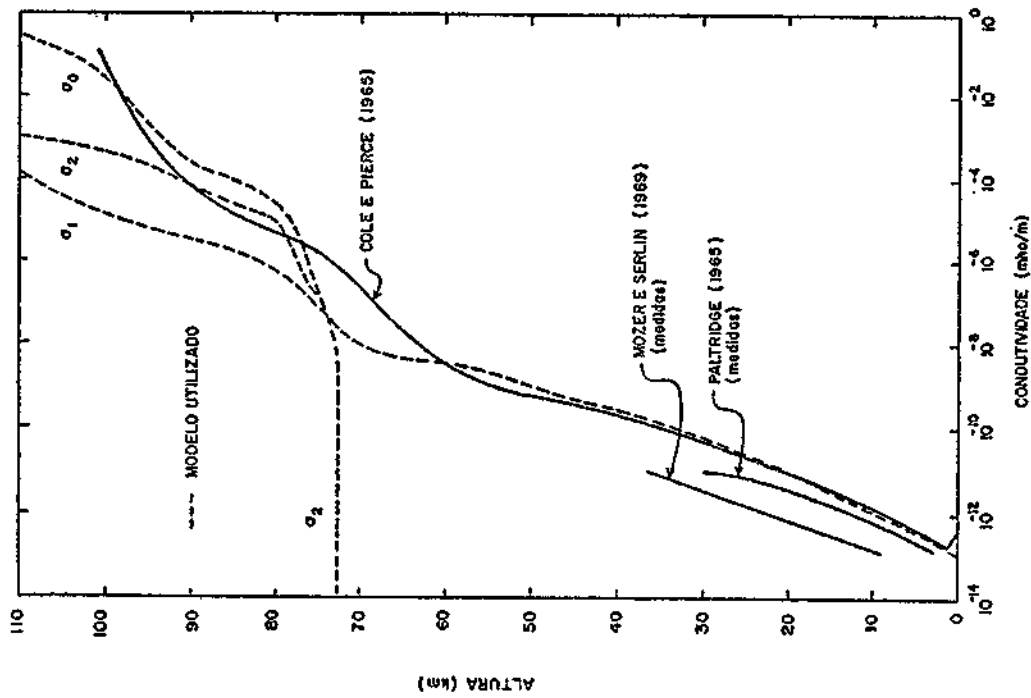


Fig. 1 - Perfil de condutividade.

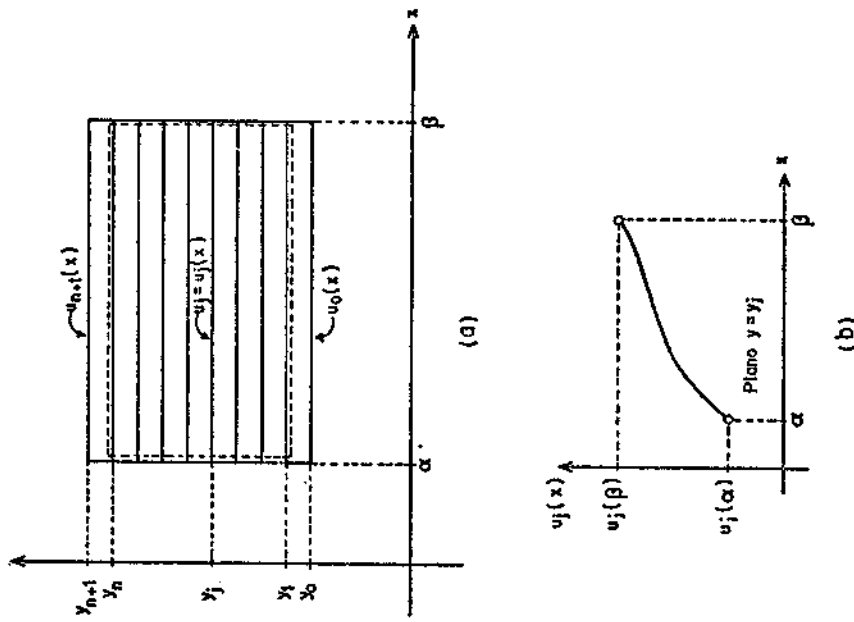


Fig. 2 - Grade ilustrativa do método de Varredura.

- (a) Os níveis  $y=y_0$  e  $y=y_{n+1}$  representam os contornos inferior e superior, respectivamente.
- (b) Variação da função  $u$  em um plano genérico  $y=y_j$ .

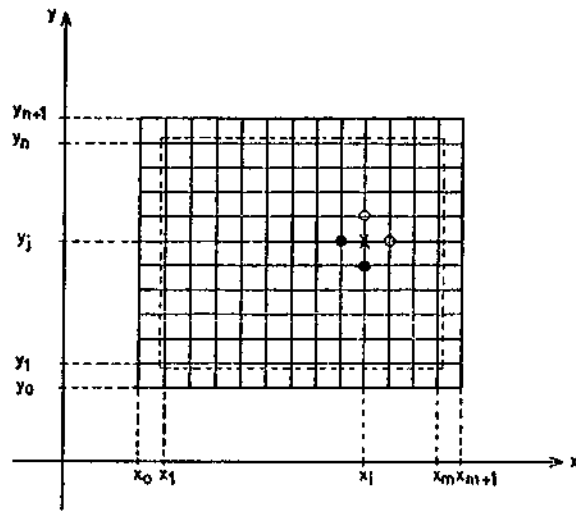


Fig. 3 - Grade ilustrativa do método de Diferença Finita.

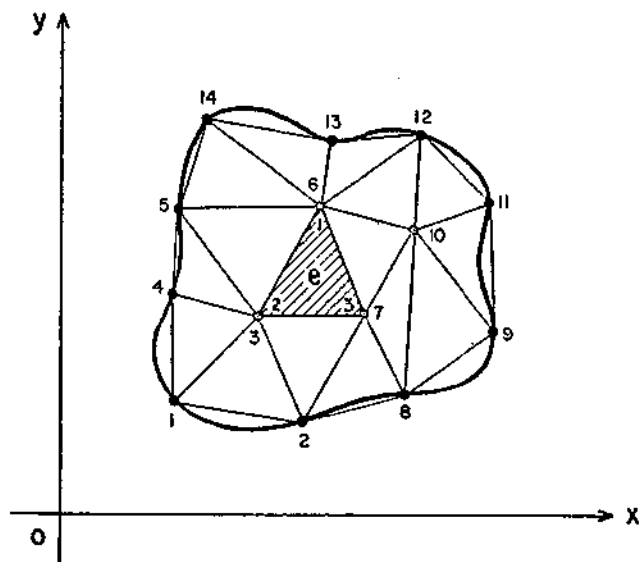


Fig. 4 - Grade ilustrativa do método de Elementos Finitos.

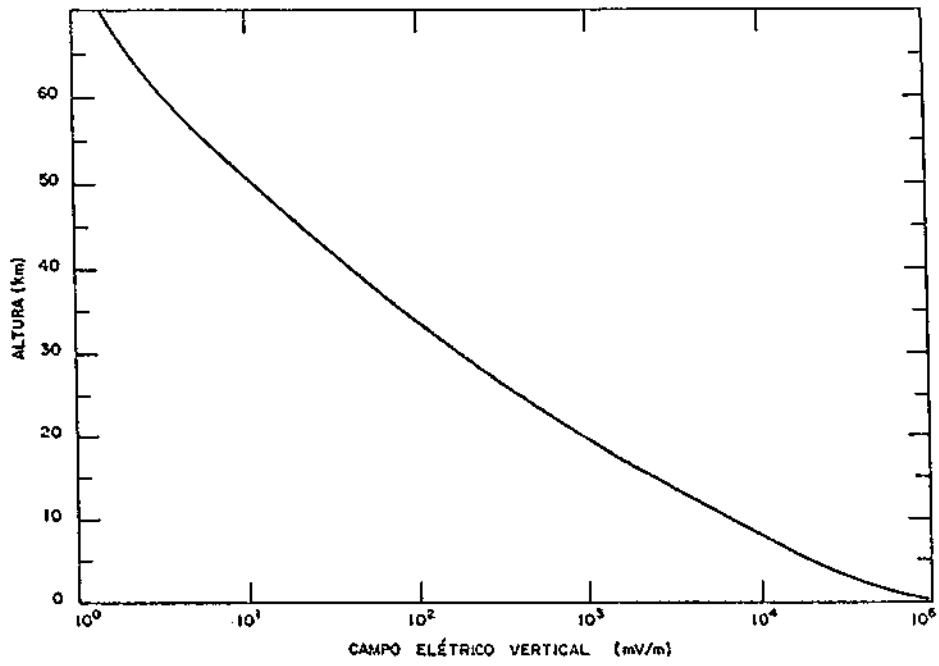


Fig. 5 - Campo elétrico vertical de tempo bom.

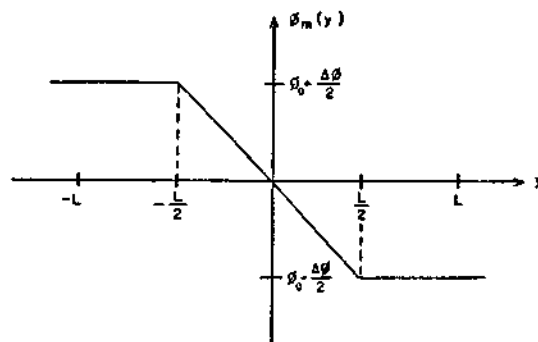


Fig. 6 - Distribuição horizontal do potencial ionosférico em  $z = z_m$ .

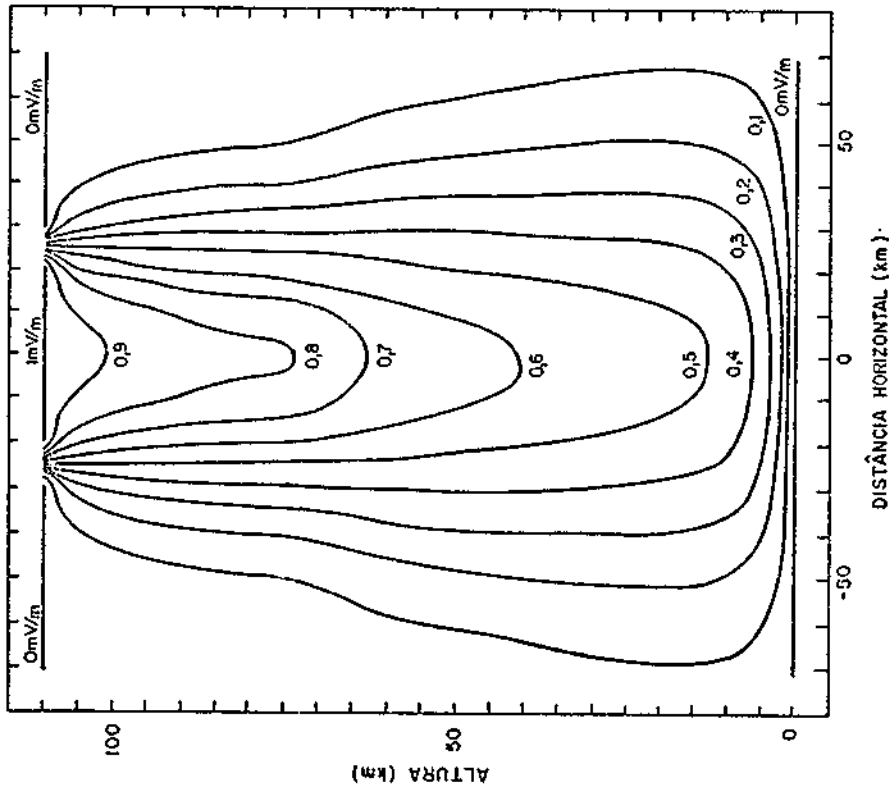


Fig. 7 - Mapeamento do campo elétrico ionosférico (1mV/m, L=50km) entre 0 e 110km de altura.

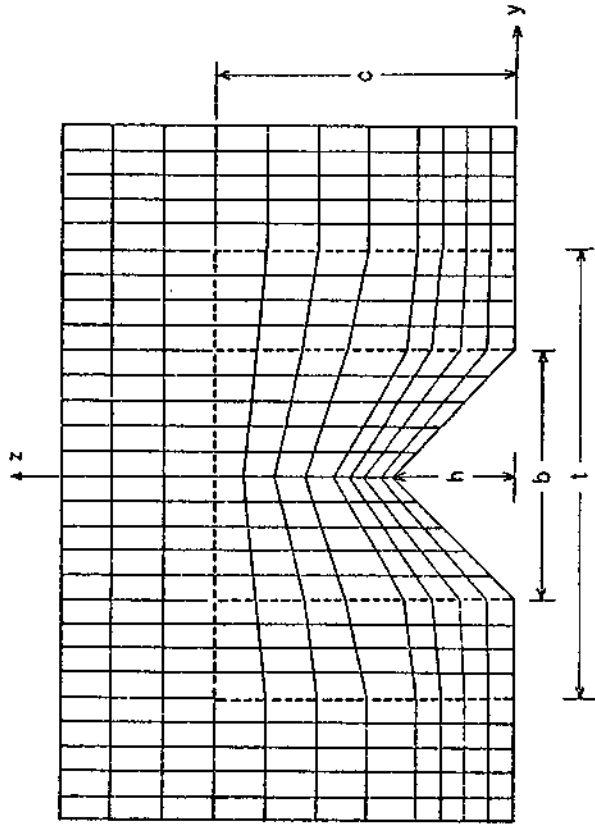


Fig. 8 - Grade usada na simulação dos campos orográficos.

