1. Publicação nº *INPE-3112-RPI/098*	2. Versão	3. Data *Maio, 1984*	5. Distribuição ☒ Interna ☐ Externa ☐ Restrita
4. Origem *DMC/DDO*	Programa *ORBAT*		

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)
MÉTODO SEMI-ANALÍTICO *ANÁLISE DE MISSÕES*
TEORIA DE PERTURBAÇÕES
PROPAGAÇÃO DE ORBITAS

7. C.D.U.: *521.3:629.7.076.6*

8. Título *INPE-3112-RPI/098*

UM MÉTODO SEMI-ANALÍTICO PARA PROPAGAÇÃO DE ÓRBITAS DE SATÉLITES ARTIFICIAIS

10. Páginas: *24*

11. Última página: *19*

12. Revisada por

Wilson C Silva

Wilson C.Canesin da Silva

9. Autoria *Roberto Vieira Martins*
Válder Matos de Medeiros

13. Autorizada por

Parada

Nelson de Jesus Parada
Diretor Geral

Assinatura responsável RVMartins

14. Resumo/Notas

Este trabalho apresenta uma versão do método semi-analítico para cálculo de órbitas de satélites artificiais. A formulação geral do método é feita para determinar soluções médias de equações diferenciais ordinárias perturbadas, soluções estas válidas por um longo intervalo de tempo. Estas equações têm a característica de apresentar funções perturbadoras com uma primeira parte bem conhecida e uma segunda da qual se conhece apenas a contribuição média. Para a aplicação ao cálculo de órbitas de satélites artificiais usam-se as soluções seculares e de longo período de Brouwer. Utilizam-se as transformações de Tisserand para obter equações variacionais e o método de aproximações sucessivas para obter funções explícitas do tempo dos elementos orbitais. Com estas expressões as órbitas de satélites artificiais podem ser propagadas, se são conhecidos os valores numéricos das contribuições médias da segunda parte da função perturbadora numa órbita elíptica. Depois da primeira propagação a contribuição média da perturbação pode ser recalculada com os novos elementos elípticos e assim se faz uma nova propagação e assim por diante.

15. Observações

ABSTRACT

This work presents a version of semi-analytical method to satellite orbits. In its general formulation the method is constructed to study mean solutions with long time validity for perturbed ordinary differential equations. These equations have a perturbation function whose first part is well-known and the remaining part with only the average contribution known. In the application to satellite orbits the Brouwer's secular and long period solutions are used. The variational equations are obtained using Tisserand transformations and the solutions of these equations are calculated by successive approximations. Then it is written explicit functions of time for orbital elements. With these expressions the orbits of satellites can be propagated if it is known the numerical values of the mean contributions of the remaining part of perturbations for one elliptic orbit. After the first time interval of propagation it can be recalculated the mean contribution of perturbations with the new elliptic elements and a new propagation is made and so on.

SUMÁRIO

Pág.

1. INTRODUÇÃO

Os métodos semi-analíticos, que aliam a velocidade de processamento dos métodos analíticos às facilidades das integrações numéricas, são atualmente fundamentais nas previsões para longos intervalos de tempo de órbita de satélites artificiais. Estes métodos são de processamento rápido (10 a 100 vezes mais rápidos do que os métodos numéricos usuais) e de baixa precisão. A proposta de um método semi-analítico deve pois procurar manter um compromisso entre a obtenção de uma boa precisão sem aumentar substancialmente o tempo de processamento no cálculo de órbitas.

Na sua formulação geral, o método apresentado neste trabalho é construído para estudar soluções médias, válidas por longos intervalos de tempo, de equações diferenciais ordinárias perturbadas. Estas equações têm uma função perturbadora dividida em duas partes. Uma primeira bem conhecida e uma segunda da qual se conhece apenas a contribuição média. O esquema do método é dado pelos seguintes passos:

- aplica-se um método de média à primeira parte(bem conhecida) das equações perturbadas, construindo-se sua solução geral;
- aplica-se o método de variação dos parâmetros às equações médias às quais é adicionada a contribuição da parte média do restante da perturbação;
- calcula-se a solução das equações variacionais por um método de aproximações sucessivas.

O método é bastante geral podendo ser aplicado a vários tipos de problemas, entre os quais podem-se destacar as propagações da órbita e atitude de satélites artificiais. A sua versatilidade caracteriza-se pelo fato de utilizar toda a informação disponível pelo usuário, ou seja, as informações sobre as soluções analíticas para a realização do primeiro item e os modelamentos numéricos para o segundo item, anteriormente citados. Outra característica importante do método é a de não impor qualquer restrição sobre as variáveis utilizadas (como por exemplo variáveis canônicas, etc.).

Como exemplo de aplicação do método apresenta-se o caso de propagação de órbitas de satélites artificiais. Nesta aplicação utilizam-se as soluções seculares e de longo período de Brouwer (Brouwer, 1959) como soluções das equações médias. Utilizando em seguida as transformações de Tisserand (Ferraz-Mello, 1981) obtêm-se, por aproximações sucessivas, as soluções das equações variacionais sem termos espúrios de Poisson. Escreve-se então explicitamente os elementos elípticos da órbita em função do tempo.

Com as expressões obtidas pode-se propagar órbitas de satélites de baixa altitude (perigeu abaixo de 7.500 km) conhecendo-se as contribuições médias, numa órbita, das outras perturbações (todas as perturbações que devem ser consideradas, excluída a parte do geopotencial levado em conta nos desenvolvimento de Brouwer). Depois da propagação num primeiro intervalo de tempo, pode-se recalcular, com o auxílio dos novos elementos elípticos obtidos, a contribuição da perturbação fazendo-se então uma nova propagação, e assim por diante. A precisão obtida pelo método dependerá do tamanho dos intervalos de tempo considerados e obviamante da variação de parâmetros indeterminados da função perturbadora (atividade solar e geomagnética, no arrasto atmosférico, etc.).

A principal diferença entre o método proposto e os métodos semi-analíticos usuais que utilizam equações médias (ver por exemplo Uphoff, 1973; Liu and Alford, 1980) é que este explicita as expressões analíticas dos elementos orbitais.

O método proposto está relacionado, em muitos aspectos, com a teoria proposta por Vilhena de Moraes (1981) para estudar os elementos osculadores dos satélites artificiais sujeitos às perturbações do geopotencial, da pressão da radiação e do arrasto atmosférico.

Uma primeira versão deste trabalho é apresentada em Medeiros (1983). As idéias básicas do presente método são ali expostas.

O método apresentado, em sua forma mais simplificada (Medeiros, 1983), tem sido utilizado sistematicamente e com sucesso em predições de longo intervalo (45 dias) das posições (para rastreamento) do satélite Tiros-N. Testes futuros comparando os resultados obtidos pelo método com integrações numéricas e dados observacionais deverão ser feitos.

2. O MÉTODO

Em Mecânica Celeste trabalha-se com sistemas de equações diferenciais ordinárias da forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \varepsilon_1 X_i(x,\theta) + \varepsilon_2 Y_i(x,\theta) \, , \\ \dot{\theta}_k &= n_k(x) + \varepsilon_1 H_k(x,\theta) + \varepsilon_2 K_k(x,\theta) \, , \end{aligned} \tag{1}$$

$$(i = 1,\ldots,n \;\; ; \;\; k = 1,\ldots,m) \, ,$$

onde ε_1 e ε_2 são pequenas parâmetros de mesma ordem de grandeza e $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_m)$. Será suposto que $X_i(x,\theta)$, $n_k(x)$ e $H_k(x,\theta)$ são funções bem conhecidas com X_i e H_k periódicas em θ_k de período τ_k e que $Y_i(x,\theta)$ e $K_k(x,\theta)$ são funções periódicas em θ tais que se conhecem apenas os seus valores médios:

$$\begin{aligned} \overline{Y}_i(x) &= \frac{1}{\tau_1 \ldots \tau_m} \int_0^{\tau_1} \ldots \int_0^{\tau_m} Y_i(x,\theta) \, d\theta_1 \ldots d\theta_m \, , \\ \overline{K}_k(x) &= \frac{1}{\tau_1 \ldots \tau_m} \int_0^{\tau_1} \ldots \int_0^{\tau_m} H_k(x,\theta) \, d\theta_1 \ldots d\theta_m \, . \end{aligned} \tag{2}$$

O primeiro passo do método consiste em aplicar um método de média no sistema de equações diferenciais:

$$\dot{x}_i = \varepsilon_1 X_i(x,\theta) ,$$
$$\dot{\theta}_k = n_k(x) + \varepsilon_1 H_k(x,\theta) . \tag{3}$$

Para isso, define-se por exemplo a transformação de variáveis $(x,\theta) \rightarrow (\overline{x},\overline{\theta})$ dada por:

$$x_i = \overline{x}_i + \varepsilon_1 F_i(\overline{x},\overline{\theta}) ,$$
$$\theta_k = \overline{\theta}_k + \varepsilon_1 \phi_k(\overline{x},\overline{\theta}) . \tag{4}$$

As equações transformadas(ou médias) são

$$\dot{\overline{x}}_i = \varepsilon_1 A_i(\overline{x}) + O(\varepsilon_1^2) ,$$
$$\dot{\overline{\theta}}_k = h_k(\overline{x}) + \varepsilon_1 B_k(\overline{x}) + O(\varepsilon_1^2) , \tag{5}$$

onde pode-se tomar

$$A_i(\overline{x}) = \frac{1}{\tau_1 \ldots \tau_m} \int_0^{\tau_1} \ldots \int_0^{\tau_m} X_i(\overline{x},\theta)\, d\theta_1 \ldots d\theta_m ,$$
$$B_k(\overline{x}) = \frac{1}{\tau_1 \ldots \tau_m} \int_0^{\tau_1} \ldots \int_0^{\tau_m} H_k(\overline{x},\theta)\, d\theta_1 \ldots d\theta_m \tag{6}$$

e $F_i(\overline{x},\overline{\theta})$, $\phi_k(\overline{x},\overline{\theta})$ são funções periódicas em $\overline{\theta}$ e soluções das equações deferenciais parciais seguintes:

$$\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial \theta_\ell} (\overline{x},\overline{\theta})\, n_\ell(\overline{x}) = X_i(\overline{x},\overline{\theta}) - A_i(\overline{x}) \,,$$

$$\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial \theta_\ell} (\overline{x},\overline{\theta})\, n_\ell(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial n_k}{\partial x_j} (\overline{x}) F_j\, (\overline{x},\overline{\theta}) + H_k(\overline{x},\overline{\theta}) - B_k(\overline{x}) \,. \tag{7}$$

Se $X_i(\overline{x},\overline{\theta})$ e $H_k(\overline{x},\overline{\theta})$ são expressas em séries trigonométricas a integração do Sistema 7 é trivial. Observa-se que a segunda equação de 5 reduz-se a uma quadratura. Será suposto que $X_i(x,\theta)$ e $H_k(x,\theta)$ não apresentam termos ressonantes, isto é, se os argumentos dos senos e co-senos nas séries trigonométricas são de forma:

$$\sum_{\ell=1}^{m} \alpha_\ell \theta_\ell \quad , \qquad (\alpha_\ell \text{ inteiro}) \,,$$

então

$$\sum_{\ell=1}^{m} \alpha_\ell n_\ell(x_0) \geq 0(\varepsilon_1^0) = 0(1)$$

para $x_0 = x(t_0)$ (condição inical).

Pode-se utilizar neste caso um outro método de média como por exemplo o método de Von Zeipel (Brouwer, 1959).

O segundo passo do método consiste em aplicar o método da variação dos parâmetros nas equações.

$$\dot{\overline{x}}_i = \varepsilon_1\, A_i(\overline{x}) + \varepsilon_2\, \overline{Y}_i(\overline{x}) + 0(\varepsilon_1^2), \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{8}$$

Para aplicar o método da variação dos parâmetros, suponha-se que a solução geral do sistema:

$$\dot{x}_i = \varepsilon_1 A_i(\overline{x}) \tag{9}$$

é conhecida e igual a:

$$\overline{x}_i(t,x^*) = x_i^* + \varepsilon_1 \delta x_i(t,x^*) , \tag{10}$$

onde $x^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)$ é o conjunto de constantes da integração do Sistema 9.

Suponha-se agora que x^* é uma função de t e:

$$\overline{x}_i (t,x^*(t)) = x^*_i(t) + \varepsilon_1 \delta x_i(t,x^*(t)) \tag{11}$$

são soluções das Equações 8. Então substituindo as Relações 11 no Sistema 8 tem-se o sistema de equações diferenciais que determina $x^*(t)$:

$$\sum_{j=1}^{n} [\delta_i^j + \varepsilon_1 \frac{\partial \delta x_i}{\partial x^*_j} (t,x^*)] \frac{dx_j}{dt} = \varepsilon_2 \overline{Y}_i(\overline{x}(t,x^*)) + 0(\varepsilon_1^2), \tag{12}$$

onde

$(i = 1,\ldots,n)$,

$\delta_i^j = 0 \; (i \neq j)$ ou $\delta_i^j = 1 \; (i = j)$.

Se os termos periódicos em θ de $Y_i(x,\theta)$ e $K_k(x,\theta)$ são pequenos em relação aos termos periódicos de $X_i(x,\theta)$ e $H_k(x,\theta)$, podem-se utilizar as Relações 11 nas Transformações 8 para obter as soluções das Equações 1. Neste caso, as constantes de integração do Sistema 12 são:

$$x_i^*(0) = \overline{x}_i(0) - \varepsilon_1 \; \delta x_i(0, \overline{x}(0)) + 0(\varepsilon_1^2) \qquad (13)$$

e

$$\begin{aligned} \overline{x}_i(0) &= x_i(0) - \varepsilon_1 F_i(x(0), \theta(0)) + 0(\varepsilon_1^2) \; , \\ \overline{\theta}_k(0) &= \theta_k(0) - \varepsilon_1 \phi_k(x(0), \theta(0)) + 0(\varepsilon_1^2). \end{aligned} \qquad (14)$$

Se os valores iniciais para $\overline{x}_i(0)$ são conhecidos, o que ocorre em muitos casos práticos, pode-se resolver o Sistema 12 com as condições iniciais dadas pela Expressão 13 e então calcular a Relação 11. Neste caso, não é necessário fazer qualquer hipótese sobre a magnitude dos termos periódicos de $Y_i(x,\theta)$.

Alguns comentários adicionais podem ser feitos sobre o método exposto acima:

a) Suponha-se que as soluções de primeira ordem, no pequeno parâmetro da Equação 9, tenham para alguns valores de i a forma:

$$\delta x_i(t,x^*) = n_i(x^*) \; t + f_i(t,x^*) \; ,$$

onde f é uma função periódica de t. Neste caso deve-se utilizar a transformação de Tisserand (Ferraz-Mello, 1981). Esta transformação é necessária para que se evite o aparecimento de termos espúrios com potenciais de t nas soluções das Equações 12. Se:

$$\overline{X} = (\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_p,\ \overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_q)\ , \qquad (p+q = n)$$

$$\varepsilon_2\overline{Y} = (P_1,\ldots,P_q,\ Q_1,\ldots,Q_q)$$

$$\overline{y}_i = y_i^* + \varepsilon_1\ \delta y_i(t,y^*,\sigma)\ , \qquad (i = 1,\ldots,p)$$

$$\overline{\psi}_\ell = \sigma_\ell + \varepsilon_1\ \delta\psi_\ell(t,y^*,\sigma)\ , \qquad (\ell = 1,\ldots,q)$$

$$\sigma_\ell = \varepsilon_1\ \delta n_j(y^*)t + \psi_\ell^*$$

as Equações Diferenciais 12 serão dadas pela transformação de Tisserand na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \dfrac{\partial\delta y_i}{\partial y^*_j} + \delta_i^j & \varepsilon_1 \dfrac{\partial\delta y_i}{\partial\sigma_\ell} \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial\delta\psi_k}{\partial y^*_j} & \varepsilon_1 \dfrac{\partial\delta\psi_k}{\partial\sigma_\ell} + \delta_k^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}^* \\ \dot{\sigma} - \varepsilon_1\delta n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(y^*,\sigma,t) \\ Q(y^*,\sigma,t) \end{bmatrix} . \qquad (15)$$

b) Suponha-se que nas Equações 1, $m = 1$ e $n_1(x_0) = O(\varepsilon_1^0)$. Considerem-se as soluções das Equações 8 calculadas para o intervalo de tempo da ordem de $(\varepsilon_1)^{-1}$. Sabe-se (Arnold, 1981) que estas soluções das Equações 8 diferem das soluções correspondestes das Equações 1 de um fator aditivo da ordem de ε_1. Esta é a propriedade geral dos métodos de média, a qual permite o uso dele em previsões para grandes intervalos de tempo, quando grandes precisões não são requeridas.

3. APLICAÇÃO AO MOVIMENTO DE SATÉLITES ARTIFICIAIS

Sejam a, e, I, Ω, ω e M respectivamente os elementos osculadores do semi-eixo maior, excentricidade, inclinação, longitude do nodo ascendentes, argumentos do perigeu e anomalia média da órbita de um satélite artificial.

Aplicando o método de Von Zeipel (Brouwer, 1959) às equações do movimento e considerando apenas os harmônicos zonais $J_2, \ldots, J_5$, têm-se as soluções médias (com os termos de longo período) das equações médias dadas por:

$$
\begin{aligned}
\bar{a} &= \bar{a}_0 \ , \\
\bar{e} &= \bar{e}_0 + \delta e(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{I}_0, \bar{\omega}_0 + \omega_1(\bar{a}_0, \bar{e}_0, I_0)t) \ , \\
\bar{\omega} &= \bar{\omega}_0 + \omega_1(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{I}_0)t + \delta\omega(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{I}_0, \bar{\omega}_0 + \omega_1(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{I}_0)t) \ , \\
\bar{\Omega} &= \bar{\Omega}_0 + \Omega_1(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{I}_0)t + \delta\Omega(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{I}_0, \bar{\omega}_0 + \omega_1(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{I}_0)t) \ ,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

onde ω_1, Ω_1, δe, δI, $\delta\omega$ e $\delta\Omega$ são dados por Brouwer (1959, Section 9). Tem-se que δe, δI, $\delta\omega$ e $\delta\Omega$ são funções periódicas em $\omega_0 + \omega_1 t$ e o índice 0 é usado para designar constantes de integração relacionadas aos termos seculares. As Relações 16 correspondem às Relações 10.

Se a_2, e_2, I_2, ω_2 e Ω_2 são perturbações médias (perturbações seculares e de longo período) do problema cujas soluções são dadas pelas Relações 11, então podem-se obter as soluções do problema perturbado usando o método de variação dos parâmetros com a transformação de Tisserand. Neste caso a solução do problema perturbado é dada pelas Relações 16, mas com as constantes de integração $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$, $\bar{I}_0$, $\bar{\omega}_0$ e $\bar{\Omega}_0$ substituídas pelas funções do tempo a^*, e^*, I^*, $x_4^* = \omega^* + \omega_1(a^*, e^*, I^*)t$ e $x_5^* = \Omega^* + \Omega_1(a^*, e^*, I^*)t$ que são soluções das Equações 17 abaixo.

Fazendo:

$$x_1 = a \;,\quad x_2 = e \;,\quad x_3 = I \;,$$

$$x_4 = \omega_0 + \omega_1 t \;,\quad x_4^* = \omega^* + \omega_1 t \;,$$

mas

$$\delta x_4 = \delta\omega \;,\quad x_{4_k} = \omega_k \;,\quad x_{40}^* = \omega_0^* \;,$$

$$\overline{x}_4 = \overline{\omega} \;,\quad \overline{x}_{40} = \overline{\omega}_0 \;,$$

$$x_5 = \Omega_0 + \Omega_1 t, \quad x_5^* = \Omega^* + \Omega_1 t \;,$$

mas

$$\delta x_5 = \delta\Omega \;,\quad x_{5_k} = \Omega_k \;,\quad x_{50}^* = \Omega_0^* \;,$$

$$\overline{x}_5 = \overline{\Omega} \;,\quad \overline{x}_{50} = \overline{\Omega}_0 \;,$$

e observando que $x_{11} = x_{21} = x_{31} \equiv 0$, $\delta x_1 \equiv 0$, então as Equações Variacionais 15 tomam a forma:

$$\dot{x}_i^* = x_{i_1} + x_{i_2} + \sum_{j=2}^{5} \frac{\partial x_{i_2}}{\partial x_j}\,\delta x_j - \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j}\,x_{j_2} + O(\varepsilon^2) \;, \tag{17}$$

onde $(i = 1,2,3,4,5)$.

Todas as funções nas Equações 17 dependem de a^*, e^*, I^* e algumas delas são periódicas em $\omega^* + \omega_1 t$, $\Omega^* + \Omega_1 t$ e eventualmente de t. O símbolo $O(\varepsilon^2)$ é a ordem dos termos quadráticos das funções de índice 2 ou dos termos cúbicos das funções de índices 2 e 1.

As soluções das Equações 17 são:

$$x_i^* = x_{i0}^* + x_{i1}t + x_{i2s}t + \tilde{x}_{i2p} + \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_{i1}}{\partial x_j} x_{j2s}\right] t^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_{i1}}{\partial x_j} \tilde{\tilde{x}}_{i2p} + \left[\sum_{j=2}^{5} \frac{\partial x_{i2}}{\partial x_j} \delta x_j - \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j} x_{j2}\right]_s t +$$

$$+ \left[\sum_{j=2}^{5} \frac{\partial x_{i2}}{\partial x_j} \delta x_j - \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j} x_{j2}\right]_{\tilde{p}} + O(\varepsilon^2) \ , \qquad (18)$$

onde (i = 1,2,3,4,5).

Tem-se que:

- f_s e $(\ldots)_s$ são as partes seculares das funções correspondentes, sendo então funções apenas de a_0^*, e_0^* e I_0^*;
- $\tilde{f}_p$ e $(\ldots)_{\tilde{p}}$ (respectivamente $\tilde{\tilde{f}}_p$) são integrais de t_0 a t (respectivamente integrais duplas) da parte puramente periódica de f_p ou $(\ldots)_p$;
- x_{i1} são funções de a_0^*, e_0^* e I_0^*;
- δx_i são funções de a_0^*, e_0^* e I_0^*, e funções periódicas de $\omega_0^* + \omega_1(a_0^*,e_0^*,I_0^*)t$;
- x_{i2} são funções de a_0, e_0^* e I_0^*, e funções periódicas de $\omega_0^* + \omega_1(a_0^*,e_0^*,I_0^*)t$ e $\Omega_0^* + \Omega_0(a_0^*,e_0^*,I_0^*)t$.

Substituindo as Relações 18 nas Relações 16 têm-se os termos médios (seculares e de longo período) dos elementos elípticos perturbados:

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{i0} + x_{i1}t + x_{i2s}t + \tilde{x}_{i2p} + \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_{i1}}{\partial x_j} x_{j2}\right] t^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_{i1}}{\partial x_j} \tilde{\tilde{x}}_{j2p} + \left[\sum_{j=2}^{5} \frac{\partial x_{i2}}{\partial x_j} \delta x_j - \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j} x_{j2}\right]_s t +$$

$$+ \left[\sum_{j=2}^{5} \frac{\partial x_{i2}}{\partial x_j} \delta x_j - \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial \delta x_i}{\partial x_j} x_{j2}\right]_{\tilde{p}} + \delta x_i(\bar{x}^{(1)}) + O(\varepsilon^2), \qquad (19)$$

onde

- $\bar{x}^{(1)}$ são as variáveis das funções de longo período, dadas por $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}_0 + x_{2s}t + \tilde{x}_{2p}$;
- $\bar{x}_{i0}$ são os elementos médios de Brouwer;
- todas as funções acima depedem de $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$, $\bar{I}_0$ e eventualmente são periódicas em $\bar{\omega}_0 + \omega_1(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{I}_0)t$ e $\Omega_0 + \Omega_1(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{I}_0)t$, tendo os termos periódicos média nula.

As Equações 5 conduzem a

$$\dot{\bar{M}} = \bar{n}_0(\bar{a}) + \frac{d}{dt}\delta\ M(\bar{a}, \bar{e}, \bar{I}, \bar{\omega}) + M_2(\bar{a}, \bar{e}, \bar{I}, \bar{\omega}, \bar{\Omega})$$

e então

$$\overline{M} = \overline{M}_0 + \overline{n}_0 t + M_1 t + M_{2s} t + \tilde{M}_{2p} + \frac{1}{2}\frac{d\overline{n}_0}{da} a_{2s} t^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{d\overline{n}_0}{da} \left(\sum_{j=2}^{5} \frac{\partial a_2}{\partial x_j} \delta x_j \right)_s + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial M_1}{\partial x_j} x_{j2s} \right] t^2 +$$

$$+ \frac{d\overline{n}_0}{d\overline{a}} \left[\tilde{\tilde{a}}_{2p} + \left(\sum_{j=2}^{5} \frac{\partial a_2}{\partial x_j} \delta x_j \right)_{\tilde{p}} \right] + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial M_1}{\partial x_j} \tilde{\tilde{x}}_{j2p} +$$

$$+ \left(\sum_{j=2}^{5} \frac{\partial M_2}{\partial x_j} \delta x_j - \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial \delta M}{\partial x_j} x_{j2} \right)_s t +$$

$$+ \left(\sum_{j=2}^{5} \frac{\partial M_2}{\partial x_j} \delta x_j - \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial \delta M}{\partial x_j} x_{j2} \right)_{\tilde{p}} + \delta M(\overline{x}^{(1)}) + O(\varepsilon^2) \ , \qquad (20)$$

onde

$$\overline{n}_0 = \mu^{1/2} (\overline{a})^{-3/2}$$

e as outras funções são definidas com na Expressão 19. δM é dado por Brouwer (1959, Section 9).

Para $0 \leq t \leq O(\omega_1^{-1})$ podem-se utilizar as relações simplificadas

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + a_{2s}t + \tilde{a}_{2p} ,$$

$$\bar{e} = \bar{e}_0 + e_{2s}t + \delta e + \tilde{e}_{2p} ,$$

$$\bar{I} = \bar{I}_0 + I_{2s}t + \delta I + \tilde{I}_{2p} ,$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + (\omega_1 + \omega_2 s)t + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial\omega_1}{\partial a} a_{2s} + \frac{\partial\omega_1}{\partial e} e_{2s} + \frac{\partial\omega_1}{\partial I} I_{2s} \right\} t^2 +$$

$$+ \delta\omega + \tilde{\omega}_{2p} + \left\{ \frac{\partial\omega_1}{\partial a} \tilde{\tilde{a}}_{2p} + \frac{\partial\omega_1}{\partial e} \tilde{\tilde{e}}_{2p} + \frac{\partial\omega_1}{\partial I} \tilde{\tilde{I}}_{2p} \right\} ,$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 + (\Omega_1 + \Omega_2 s)t + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial\Omega_1}{\partial a} a_{2s} + \frac{\partial\Omega_1}{\partial e} e_{2s} + \frac{\partial\Omega_1}{\partial I} I_{2s} \right\} t^2 +$$

$$+ \delta\Omega + \tilde{\Omega}_{2p} + \left\{ \frac{\partial\Omega_1}{\partial a} \tilde{\tilde{a}}_{2p} + \frac{\partial\omega_1}{\partial e} \tilde{\tilde{e}}_{2p} + \frac{\partial\Omega_1}{\partial I} I_{2p} \right\} , \qquad (21)$$

$$\bar{M} = \bar{M}_0 + (\bar{n}_0 + M_1 + M_{2s}t) + \frac{1}{2}\left\{ \frac{d\bar{n}_0}{da} a_{2s} + \frac{\partial M_1}{\partial a} a_{2s} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial M_1}{\partial e} e_{2s} + \frac{\partial M_1}{\partial I} I_{2s} \right\} t^2 + \delta M + \frac{d\bar{n}_0}{da} \tilde{\tilde{a}}_{2p} + \tilde{M}_{2p} +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial M_1}{\partial a} \tilde{\tilde{a}}_{2p} + \frac{\partial M_1}{\partial e} \tilde{\tilde{e}}_{2p} + \frac{\partial M_1}{\partial I} \tilde{\tilde{I}}_{2p} \right\} .$$

Se x_{i2p} ($i = 1,\ldots,6$) tem suas amplitudes muito menores que x_{is}, e se considerarem apenas os termos em J_2 do potencial gravitacional, então tem-se as expressões (Medeiros, 1983)

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + a_{2S} t \ ,$$

$$\bar{e} = \bar{e}_0 + e_{2S} t \ ,$$

$$\bar{I} = \bar{I}_0 + I_{2S} t \ ,$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + (\omega_1 + \omega_{2S}) t + \omega_3 t^2 + \delta\omega \ ,$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 + (\Omega_1 + \Omega_{2S}) t + \Omega_3 t^2 + \delta\Omega \ ,$$

$$\bar{M} = \bar{M}_0 + (n_0 + M_1 + M_2 \ ) t + M_3 t^2 + \delta M \ , \tag{22}$$

onde

$$\omega_3 = \omega_1 \left[-\frac{7}{4} \frac{a_{2S}}{\bar{a}_0} + \frac{2e_0 e_{2S}}{(1-\bar{e}_0^2)} \right] - \frac{5}{2} \Omega_1 I_{2S} \operatorname{sen} \bar{I}_0 \ ,$$

$$\Omega_3 = \Omega_1 \left[-\frac{7}{4} \frac{a_{2S}}{\bar{a}_0} + \frac{2e_0 e_{2S}}{(1-\bar{e}_0^2)} - \frac{1}{2} I_{2S} \operatorname{tang} \bar{I}_0 \right] ,$$

$$M_3 = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \left\{ -\frac{3}{4} \frac{a_{2S}}{\bar{a}_0} + \left[-\frac{7}{2} \frac{a_{2S}}{\bar{a}_0} + \frac{3e_0 e_{2S}}{2(1-\bar{e}_0^2)} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_e}{\bar{a}_0} \right)^2 \frac{3\cos^2 \bar{I}_0 - 1}{\sqrt{(1-\bar{e}_0^2)^3}} \right] \right\} - \frac{3}{2} \sqrt{1-\bar{e}_0^2} \ \Omega_1 I_{2S} \operatorname{sen} \bar{I}_0 \ , \tag{23}$$

onde

- R_e é o raio equatorial da Terra;
- J_2 é o segundo harmônico zonal do geopotencial;
- ω_1, Ω_1, M_1, δe, δI, $\delta\omega$, $\delta\Omega$ e δM são dados por Brouwer (1959, Section 9);
- a_{2S}, e_{2S}, I_{2S}, ω_{2S}, Ω_{2S} e M_{2S} são as contribuições médias (numa órbita) das outras perturbações, excluído o geopotencial;
- $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$, $\bar{I}_0$, $\bar{\omega}_0$, $\bar{\Omega}_0$ e $\bar{M}_0$ são os chamados elementos médios de Brouwer.

Todas as funções nas Relações 22 e 23 são calculadas nos elementos médios de Brouwer.

Se x_{ip} é da mesma ordem dos x_{is}, podem-se ainda utilizar as Expressões 22. Neste caso deve-se reduzir o tempo de propagação e com os valores de $\bar{x}_i$ no fim de cada intervalo faz-se uma nova propagação.

4. COMENTÁRIOS

O método apresentado tem características bem gerais adaptando-se a uma gama variada de problemas.

No caso de órbita de satélites artificiais, cada caso tratado deve ser estudado e testado para se ter uma determinação do período de propagação conveniente, assim como o conjunto de relações a ser utilizadas. Pode-se manter a rapidez de cálculo e obter maior precisão utilizando-se de modelos analíticos mais elaborados das perturbações. Isto corresponde a reescrever as Soluções 16 na forma fornecida por estes modelos. Neste caso algumas modificações devem ser feitas nos formulários da Seção 3.

Nas soluções 16 pode aparecer uma função δa, e as funções δe, δI, $\delta \omega$ e $\delta \Omega$, que não serão mais da forma fornecida por Brouwer, podem também depender de $\overline{\Omega}_0 + \Omega_1 t$. Estas modificações implicam que nas Relações 19 e 20, as somas que começam em 2 passem a começar em 1 e as que terminam em 4 passem a terminar em 5.

Nos casos mais gerais de teoria de perturbações o método proposto na Seção 2 pode ser utilizado. Em particular, sua aplicação na formulação do método da propagação de atitude de satélites artificiais deve ser interessante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARNOLD, V.I. *Chapitres supplémentaires de la théorie des equations differentielles ordinaires.* Moscou, URSS, MIR, 1981.

BROUWER, D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *The Astronomical Journal,* 64(9):378-379, Nov. 1959.

FERRAZ-MELLO, S. Elimination of secular terms generated by the coupling of perturbations. *Celestial Mechanics,* 25:293-296, 1981.

LIU, J.J.F; ALFORD, R.L. Semianalytic theory for a close-earth artificial satellite. *Journal of Guidance and Control,* 3(4):304-311, July/Aug. 1980.

MEDEIROS, V.M. *Análise de missões: definição da geometria orbital de satélites artificiais.* São José dos Campos, INPE, 1983. (INPE-2843-TDL/141).

UPHOFF, C. Numerical averaging in orbit prediction. *AIAA Journal,* 11(11):1512-1516, Nov. 1973.

VILHENA DE MORAES, R. Combined solar radiation pressure and drag effects on the orbits of artificial satellites. *Celestial Mechanics,* 25:281-292, 1981.