

1. Publicação nº <i>INPE-3163-RPE/458</i>	2. Versão	3. Data <i>Julho, 1984</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DMC/DDO</i>	Programa <i>ANACO</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>FORÇAS PERTURBADORAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO RESSONÂNCIA E LIBRAÇÃO</i>			
7. C.D.U.: <i>521.3:629.7.076.6</i>			
8. Título  <i>SATÉLITE ARTIFICIAL - MOVIMENTO ORBITAL</i>		10. Páginas: <i>130</i>	
		11. Última página: <i>D.5</i>	
9. Autoria <i>Wilson Custódio Canesin da Silva Luiz Danilo Damasceno Ferreira</i>		12. Revisada por  <i>Hans-Ulrich Pilchowski</i>	
 Assinatura responsável		13. Autorizada por  <i>Nelson de Jesus Parada</i> Diretor Geral	
14. Resumo/Notas  <i>Este trabalho, inicialmente discute e modela de forma apropriada para a integração numérica as principais forças que atuam sobre um satélite artificial de baixa altitude. Em seguida são tratados os métodos analíticos clássicos de análise e propagação de órbita, tais como a integração analítica das equações de Lagrange do movimento planetário e o método de Brouwer. Casos sobre ressonância e libração de satélites geostacionários também são apresentados no trabalho.</i>			
15. Observações			

#### ABSTRACT

*This report presents the modelling and analysis of the principal forces on the satellite for numerical integration. The classical analytical methods of analysis and orbit propagation, such as analytical integration of the Lagrange equations and Brouwer's method are presented. Cases of resonance and libration of the geosynchronous satellites are also presented in this work.*

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS .....	v
LISTA DE TABELAS .....	vii
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u> .....	1
<u>CAPÍTULO 2 - CAMPO GRAVITACIONAL TERRESTRE</u> .....	3
2.1 - Potencial de um corpo com distribuição assimétrica .....	3
<u>CAPÍTULO 3 - FORÇAS PERTURBADORAS</u> .....	11
3.1 - Força gravitacional devida ao potencial do corpo .....	11
3.2 - Atração gravitacional do Sol e da Lua .....	16
3.3 - Força de arrasto .....	17
3.4 - Forças de marés devidas à Lua e ao Sol .....	18
3.5 - Força de pressão de radiação .....	22
3.5.1 - Albedo .....	24
3.6 - Equação geral das forças que atuam no satélite .....	26
<u>CAPÍTULO 4 - ESTUDO ANALÍTICO DO MOVIMENTO PERTURBADO</u> .....	29
4.1 - Potencial perturbador em função dos elementos da órbita ...	29
4.2 - Função da excentricidade .....	33
4.3 - Integração das equações de Lagrange .....	34
4.4 - Perturbações de ordem superior .....	42
4.5 - Periodicidade das perturbações .....	43
4.6 - Arrasto atmosférico .....	44
4.7 - Pressão de radiação .....	48
4.8 - Pressão de luz refletida (albedo) .....	55
4.9 - Composição das diversas perturbações .....	58
<u>CAPÍTULO 5 - PERTURBAÇÕES NÃO-LINEARES</u> .....	61
5.1 - Método de Brouwer .....	61
<u>CAPÍTULO 6 - RESSONÂNCIA E LIBRAÇÃO DE SATÉLITES GEOESTACIONÁRIOS</u>	79
6.1 - Ressonância .....	79
6.2 - Libração de satélites geoestacionários .....	81

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	91
APÊNDICE A - EXPRESSÃO ANALÍTICA DA FUNÇÃO DA INCLINAÇÃO.	
APÊNDICE B - FUNÇÃO DA EXCENTRICIDADE.	
APÊNDICE C - COMPONENTES DAS FORÇAS DE PRESSÃO DE RADIAÇÃO.	
APÊNDICE D - EQUAÇÕES DE LAGRANGE COM FORÇAS DISSIPATIVAS.	

## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Sólido assimétrico: $r$ = raio vetor, $\psi$ = latitude, $\lambda$ = longitude de .....	3
2.2 - Representação dos harmônicos esféricos .....	9
3.1 - Sistemas de coordenadas no corpo .....	11
3.2 - Sistemas inercial e girante .....	13
3.3 - Força de maré .....	19
3.4 - Função de sombra .....	23
3.5 - Regiões de reflexões (I) e neutras (II, III) .....	25
3.6 - Diagrama de regiões de reflexão e neutras .....	25
4.1 - Variação de $\omega$ e $\Omega$ .....	37
4.2 - Direções de projeção da força perturbadora .....	45
4.3 - Entrada e saída do satélite na sombra .....	52
5.1 - Representação das perturbações seculares de longo e curto períodos: (a - f) variáveis canônicas de Delaunay .....	74
6.1 - Representação das longitudes .....	84
6.2 - Equador elíptico .....	85
6.3 - Pontos de estabilidade de um satélite geoestacionário .....	86
6.4 - Longitude geográfica .....	87
A.1 - Órbita do satélite .....	A.1
C.1 - Obliquidade da eclíptica .....	C.3

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Comparação das forças perturbadoras com o campo central ...	27
6.1 - Harmônicos ressonantes .....	81
6.2 - Período de libração .....	89
A.1 - Função $J_{nmp}$ e fator de normalização .....	A.11
B.2 - Funções $G_{npq}(e)$ e $K_{npq}(\gamma)$ .....	B.6

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Na época do lançamento do primeiro satélite, 1957, o modelo do campo gravitacional terrestre era precariamente conhecido. Só se conheciam os coeficientes dos harmônicos esféricos zonais pares até grau 6. O coeficiente de grau 2, isto é, o que caracteriza o achatamento dos pólos da Terra, era o único razoavelmente bem conhecido. Os coeficientes de grau 4 e 6 eram calculados através de considerações de distribuição de massa simétrica e uniforme em relação ao eixo de rotação da Terra. Com a força deduzida desse modelo gravitacional juntava-se uma força de arrasto onde se considerava a densidade atmosférica puramente dependente da altitude e com decaimento exponencial. O uso de um modelo tão deficiente conduzia a erros da ordem de 5 a 10 km na determinação da posição do satélite, e o cone de observação do satélite, isto é, o cone sobre o qual a estação vê o satélite, tinha um erro angular da ordem de  $0,5^{\circ}$ . Mesmo assim foi possível o acompanhamento do satélite porque as estações utilizavam um processo de busca dentro do cone de incerteza, até encontrá-lo.

No decorrer de uma sucessão de lançamentos de satélites observações possibilitaram o cálculo de novos coeficientes do campo gravitacional, assim como amostras e medidas coletadas na alta atmosfera permitiram uma sensível melhora nos modelos das forças aerodinâmicas. Foram introduzidas forças de perturbação devidas à atração do Sol e da Lua; com o lançamento de satélites com grande razão área/massa, tais como os satélites PAGEOS e ECHO, verificou-se que para alturas acima de 800 km a força devida à pressão de radiação exercia efeito ponderável no cômputo geral das perturbações. Assim, esta última força foi introduzida nos modelos, e os erros na determinação da posição passaram para a ordem dos 100 a 500 m. Atualmente, com a inclusão de coeficientes ressonantes e coeficientes de grau superior em geral, e também das forças de marés do Sol e da Lua, associados a métodos sofisticados de integração numérica, como também de amplos recursos computacionais,

a precisão na determinação da posição do satélite atinge a ordem de alguns centímetros. É óbvio, no entanto, que apesar de todos estes aperfeiçoamentos nos procedimentos de propagação numérica da órbita um bom resultado final depende de um bom valor inicial, isto é, depende essencialmente de um bom método de determinação de órbita que, no caso, se trata dos métodos estatísticos que usam as modernas técnicas de estimação de parâmetros.

Neste trabalho, inicialmente discute-se e modela de forma apropriada para integração numérica as principais forças que atuam num satélite artificial de baixa altitude. Em seguida são tratados os métodos analíticos clássicos de análise e propagação de órbita, tais como o de integração analítica das equações de Lagrange do movimento planetário e o método de Brouwer. Finalizando, discutem-se casos sobre ressonância e libração de satélites geoestacionários.

## CAPÍTULO 2

### CAMPO GRAVITACIONAL TERRESTRE

#### 2.1 - POTENCIAL DE UM CORPO COM DISTRIBUIÇÃO ASSIMÉTRICA

Dado um corpo com distribuição qualquer de massa, isto é, sem simetrias, o potencial gerado por um elemento de massa "dm" do corpo sobre um ponto externo a este corpo e a uma distância " $\Delta$ " do citado elemento é dado por  $dV = -(1/\Delta)Gdm$  (Figura 2.1).

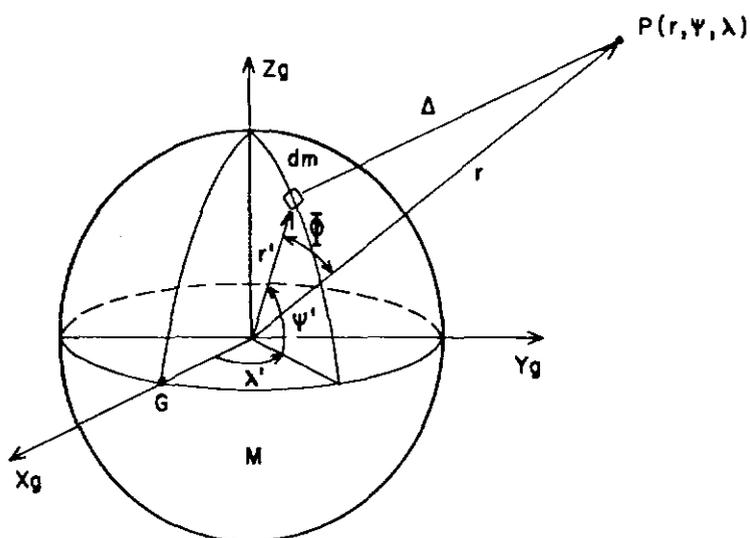


Fig. 2.1 - Sólido assimétrico:  $r$  = raio vetor,  $\psi$  = latitude,  $\lambda$  = longitude.

O potencial gerado em P e a força gravitacional de atração neste ponto têm ambos o sinal negativo, pois são dados por  $dV = -Gdm/\Delta$  e  $F = -m\nabla V$ , onde o símbolo  $\nabla$  é o operador gradiente. Usar-se-á aqui o símbolo  $U = -V$ , de forma que tanto U quanto F (força) terão agora em diante sinais positivos, mas com os mesmos significados que anteriormente. Assim,

$$U = G \int_M \frac{dM}{\Delta}, \quad (2.1)$$

onde  $G$  é constante de atração universal. A distância  $\Delta$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi, \\ &= r^2 \left[ 1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \phi \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $\phi$  é o ângulo entre  $r$  e  $r'$ . Pondo a última equação na forma:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \phi \right]^{-1/2} \quad (2.3)$$

é fácil observar que o termo entre parênteses nada mais é do que a função geratriz dos polinômios de Legendre que, para  $r > r'$ , é escrita como:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \phi) \quad (2.4)$$

que, substituída na Equação 2.1, resulta,

$$U = G \int_M \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \phi) dM. \quad (2.5)$$

O  $\cos \phi$  é dado por:

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rr'} = \sin \psi \sin \psi' + \cos \psi \cos \psi' \cos(\lambda - \lambda'), \quad (2.6)$$

e utilizando o teorema da adição de Legendre (Heiskanen and Moritz, 1967):

$$P_n(\cos\phi) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\text{sen}\psi) P_{nm}(\text{sen}\psi') \cdot \cos m(\lambda - \lambda'), \quad (2.7)$$

onde  $\delta_{m0}$  é o delta de Kronecker definido por:

$$\delta_{m0} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ 0 & \text{se } m \neq 0 \end{cases}$$

e  $P_{nm}$  são os polinômios associados de Legendre. Substituindo a Equação 2.7 na Equação 2.5 encontra-se:

$$U = \frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \int_M (2 - \delta_{m0}) \left(\frac{r'}{r}\right)^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\text{sen}\psi') \cdot P_{nm}(\text{sen}\psi) \cos m(\lambda - \lambda') dM. \quad (2.8)$$

Como a integração é em toda massa e em  $r'$ ,  $\psi'$ ,  $\lambda'$  então  $r$  pode sair do sinal de integral. Desenvolvendo o  $\cos m(\lambda - \lambda')$ , multiplicando e dividindo a Equação 2.8 por  $M$  e  $a_e^n$ , onde  $M$  é a massa da Terra e  $a_e$  o semi-eixo equatorial do elipsóide da Terra adotado (ou um parâmetro arbitrário), tem-se:

$$U = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \text{sen } m\lambda] P_{nm}(\text{sen}\psi), \quad (2.9)$$

onde:

$$\begin{pmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{pmatrix} = \frac{(2 - \delta_{m0})}{a_e^n M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_M r'^n P_{nm}(\text{sen}\psi') \begin{pmatrix} \cos m\lambda' \\ \text{sen } m\lambda' \end{pmatrix} dM, \quad (2.10)$$

e os valores de  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  devem ser acompanhados dos valores de  $GM$  e  $a_e$ .

Os coeficientes  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  são chamados coeficientes dos harmônicos esféricos. Existem também os coeficientes completamente normalizados ( $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$ ) que são muito utilizados em teoria de satélites. As relações entre eles (Heiskanen and Moritz, 1967) são:

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \left[ \frac{(n+m)!}{(2-\delta_{m0})(2n+1)(n-m)!} \right]^{1/2} \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix}. \quad (2.11)$$

Para  $m = 0$ ,  $C_{n0} = -J_n$  e  $S_{n0} = 0$ , onde os  $J_n$  são os harmônicos zonais deduzidos diretamente do potencial gravitacional terrestre, enquanto os  $C_{nm}$  e os  $S_{nm}$  são deduzidos da função de força ( $U = -V$ ), daí o sinal negativo.

A Equação 2.9 quando escrita em função dos coeficientes completamente normalizados fica na forma:

$$U = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(\sin\psi), \quad (2.12)$$

onde  $\bar{P}_{nm}(\sin\psi)$  é o polinômio associado de Legendre completamente normalizado e é tal que:

$$\bar{P}_{nm} = \left[ (2-\delta_{m0})(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_{nm} \quad (2.13)$$

e ainda:

$$P_{nm}(u) = (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u), \quad (2.14)$$

onde:

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2-1)^n, \text{ sendo } u = \sin\psi. \quad (2.15)$$

A fórmula para cálculo direto dos polinômios associados de Legendre (Heiskanen and Moritz, 1967) é dada por:

$$P_{nm}(u) = 2^{-n}(1-u^2)^{m/2} \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!} \cdot u^{n-m-2k} \quad (2.16)$$

Observando a Equação 2.10 podem-se tirar algumas conclusões físicas sobre os harmônicos do geopotencial. Estes coeficientes são denominados:

a) Zonais

Quando  $m = 0$ , neste caso a distribuição de massa independe da longitude, pois é simétrica em relação ao eixo de rotação. Para  $m = 0$ , costuma-se definir um outro coeficiente,  $J_n = -C_{n0}$ , que caracteriza os harmônicos zonais.

b) Setoriais

Ocorrem quando  $m = n$ , e neste caso já não existe simetria porque a distribuição depende da longitude.

c) Tesserais

Quando  $m \neq n$ , a distribuição que gera tais harmônicos é completamente não-simétrica e estes são entre outras perturbações responsáveis por fenômenos de ressonância que serão comentados posteriormente.

Ainda da Equação 2.10 pode-se verificar que:

- 1)  $C_{00} = 1$ , Terra com distribuição esférica de massa.

- 2) Se a origem do sistema de coordenadas coincidir com o centro de massa do corpo, então pela Expressão 2.10 tem-se:

$$C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0 \quad \text{e} \quad S_{00} = S_{n_0} = 0 .$$

- 3) Considerando inicialmente que o eixo  $z'$  (rotação ou polar instantâneo) não seja um eixo principal de inércia, então:

$$C_{21} = \frac{1}{3a_e^2 M} \int_M r'^2 P_{21}(\text{sen}\psi') \cos\lambda' \, dM = \frac{1}{Ma_e^2} \int_M r' \text{sen}\psi' .$$

$$. r' \cos\psi' \cos\lambda' \, dM = \frac{1}{Ma_e^2} \int_M z' x' \, dM = E/Ma_e^2 .$$

Analogamente,

$S_{21} = F/Ma_e^2$ , onde E e F são produtos de inércia. Se  $z'$  for eixo principal de inércia,  $E = F = 0$ . Entretanto, nos modelos mais recentes do geopotencial, através de observações de satélites, os coeficientes  $C_{21}$  e  $S_{21}$  foram encontrados na ordem de  $10^{-9}$ , mostrando que o eixo de rotação Z está ligeiramente afastado do eixo principal de inércia.

$$4) C_{20} = \frac{1}{Ma_e^2} \left( \frac{A+B}{2} - C \right) = -J_2 \quad (\text{achatamento polar}) .$$

$$5) C_{22} = \frac{1}{4a_e^2 M} (B - A) \quad (\text{elipticidade equatorial}) ,$$

$$S_{22} = D/2a_e^2 M \quad (D=0 \text{ se o meridiano que passa pelo eixo principal de inércia coincidissem com Greenwich}),$$

A, B, C são momentos principais de inércia, enquanto E, F, G são produtos de inércia. A relação  $(A - C)$  ou, de modo mais geral,  $[(A+B)/2 - C]$  é o achatamento dinâmico do corpo.

6) O coeficiente  $C_{30} = -J_3$  representa a deformação da Terra conhecida como forma de pera.

Os coeficientes dos harmônicos do geopotencial caracterizam: *quanto à forma*: as deformações que a Terra apresenta em relação a uma Terra perfeitamente esférica; *quanto à distribuição de massa*: a maneira pela qual a massa é distribuída (simetrias e assimetrias) em relação aos três eixos principais de inércia.

Uma melhor visualização dos coeficientes dos harmônicos do geopotencial pode ser feita graficamente, Figura 2.2, usando a Equação 2.10, e representando o produto  $P_{nm}(\sin\psi)\{\cos m\lambda, \sin m\lambda\}$  como os harmônicos esféricos.

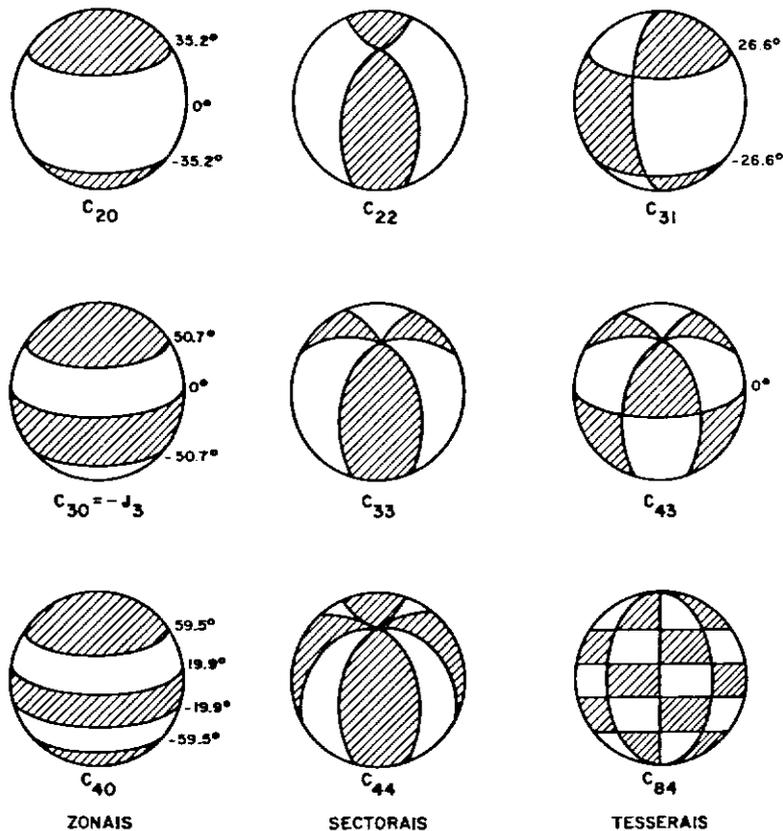


Fig. 2.2 - Representação dos harmônicos esféricos.



$$\mathbf{r}_A = \mathbf{R}_{Y_A}(-\psi)\mathbf{R}_Z(\lambda)\mathbf{r}' , \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{r}_A$  e  $\mathbf{r}'$  são vetores ou matrizes colunas dos sistemas  $X_A, Y_A, Z_A$  e  $X', Y', Z'$ , respectivamente; enquanto  $\mathbf{R}_{Y_A}(-\psi)$  representa uma rotação de  $\psi$  no sentido contrário à regra da mão direita e  $\mathbf{R}_Z(\lambda)$  uma rotação no sentido positivo. Pondo  $\mathbf{T} = \mathbf{R}_{Y_A}(-\psi)\mathbf{R}_Z(\lambda)$  e efetuando o produto matricial encontra-se:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\lambda & \cos\psi \operatorname{sen}\lambda & \operatorname{sen}\psi \\ -\operatorname{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi \cos\lambda & -\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\lambda & \cos\psi \end{pmatrix} . \quad (3.2)$$

A Equação 3.1 fica então na forma:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{T}\mathbf{r}' , \quad (3.3)$$

o mesmo é válido para:

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{T}\dot{\mathbf{r}}' , \quad (3.4)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{T}\ddot{\mathbf{r}}' , \quad (3.5)$$

pois  $\mathbf{T}$  é um operador de rotação que gira qualquer vetor, de um mesmo sistema de referência, para outro vetor.

A transformação do sistema fixo no corpo para o sistema de coordenadas inercial é obtida de acordo com a Figura 3.2, como segue:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_Z(-\theta)\mathbf{r}' = \mathbf{R}_Z^T(\theta)\mathbf{r}' , \quad (3.6)$$

sendo:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

e  $\theta$  é o TSAG, ou Tempo Sideral Aparente de Greenwich.

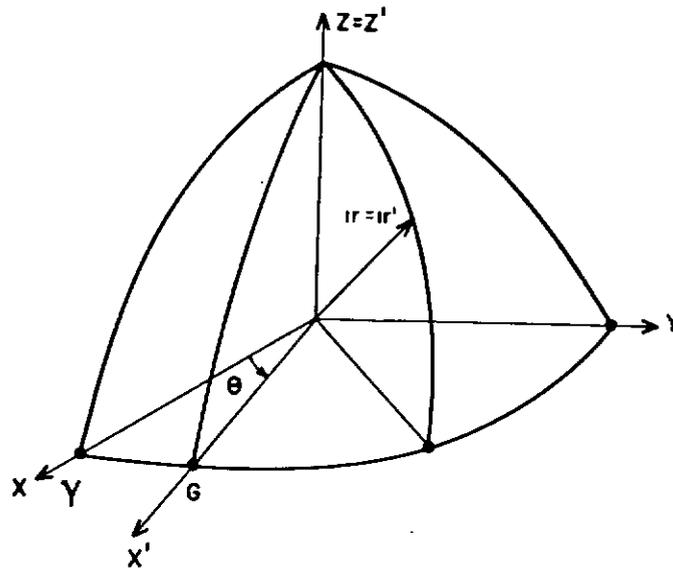


Fig. 3.2 - Sistemas inercial e girante.

Em virtude das Equações 3.1 e 3.6 tem-se:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}^T(\theta)\mathbf{T}^T\mathbf{r}_A = (\mathbf{T}\mathbf{R})^T\mathbf{r}_A; \quad (3.8)$$

definindo  $\mathbf{G} = \mathbf{T}\mathbf{R}$  vem:

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}^T\mathbf{r}_A. \quad (3.9)$$

Analogamente é válido para a aceleração, uma vez que a órbita do satélite é um plano "fixo" no espaço que, por hipótese, não depende da velocidade de rotação da Terra, então,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{G}^T \ddot{\mathbf{r}}_A, \quad (3.10)$$

Lembrando que:

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \nabla_{X_A} U \\ \nabla_{Y_A} U \\ \nabla_{Z_A} U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial U / \partial r \\ (1/r \cos \psi)(\partial U / \partial \lambda) \\ (1/r)(\partial U / \partial \psi) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Da Equação 2.9, e tomando  $\mu = GM$ , a aceleração que atua numa massa de prova externa ao corpo (Terra), em relação ao sistema de coordenadas fixo na Terra  $\bar{e}$ :

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n \begin{bmatrix} -(n+1) P_{nm} \{C_{nm} \cos m \lambda + S_{nm} \sin m \lambda\} \\ m \sec \psi P_{nm} \{-C_{nm} \sin m \lambda + S_{nm} \cos m \lambda\} \\ \cos \psi P'_{nm} \{C_{nm} \cos m \lambda + S_{nm} \sin m \lambda\} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

onde  $P'_{nm}$  é a derivada de  $P_{nm}$  em relação a  $\sin \psi$ , e a expressão  $\cos \psi P'_{nm}$  pode ser calculada através de duas expressões de recorrência:

$$\sec \psi P_{nm} = \left( \frac{2n-1}{n-m} \right) \sin \psi (\sec \psi P_{n-1,m}) - \left( \frac{n+m-1}{n-m} \right) (\sec \psi P_{n-2,m}), \quad (3.13)$$

$$\cos \psi P'_{nm} = -n \sin \psi (\sec \psi P_{nm}) + (n+m) (\sec \psi P_{n-1,m}). \quad (3.14)$$

As expressões do  $\cos m \lambda$  e  $\sin m \lambda$  podem ser calculadas pelas seguintes fórmulas de recorrência:

$$\cos m \lambda = \cos[(m-1)\lambda] \cos \lambda - \sin[(m-1)\lambda] \sin \lambda, \quad (3.15)$$

$$\sin m \lambda = \sin[(m-1)\lambda] \cos \lambda + \cos[(m-1)\lambda] \sin \lambda, \quad (3.16)$$

$$(n-m)P_{nm} - (2n-1)\text{sen}\psi P_{n-1,m} + (n+m-1)P_{n-2,m} = 0 . \quad (3.17)$$

Assim, a força devida ao campo gravitacional fica da forma:

$$\mathbf{A}_G = \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{G}^T \ddot{\mathbf{r}}_A , \quad (3.18)$$

onde  $\ddot{\mathbf{r}}_A$  é dado pela Equação 3.12.

No cálculo da Equação 3.12 os coeficientes  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  são considerados até a ordem que se deseja ou que se conhece.

Atualmente os coeficientes dos harmônicos do geopotencial são determinados e tabelados na forma completamente normalizada, de maneira que é melhor escrever a Equação 3.12 na forma normalizada, ou seja,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_A = & -\frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \bar{C}_n \begin{bmatrix} (n+1)\bar{P}_n \\ 0 \\ -\cos\psi \bar{P}'_n \end{bmatrix} + \\ & + \frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^N \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \begin{bmatrix} -(n+1)\bar{P}_{nm} (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \text{sen } m\lambda) \\ m \sec\psi \bar{P}_{nm} (-\bar{C}_{nm} \text{sen } m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \\ \cos\psi \bar{P}'_{nm} (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \text{sen } m\lambda) \end{bmatrix}, \quad (3.19) \end{aligned}$$

onde os  $\bar{P}_{nm}$  normalizados podem ser calculados diretamente pelas expressões de recorrência (Kuga et alii, 1983):

$$\begin{aligned} \sec\psi \bar{P}_{nm} = & \left(\frac{2n+1}{n^2-m^2}\right)^{1/2} \left[ (2n-1)^{1/2} \text{sen}\psi \sec\psi \bar{P}_{n-1,m} + \right. \\ & \left. - \left(\frac{n^2-m^2-2n+1}{2n-3}\right)^{1/2} \sec\psi \bar{P}_{n-2,m} \right], \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\cos\psi \bar{P}'_{nm} = -n \operatorname{sen}\psi \operatorname{sec}\psi \bar{P}_{nm} + \left[ \frac{2n+1}{2n-1} (n^2 - m^2) \right]^{1/2} \operatorname{sec}\psi \bar{P}_{n-1,m}, \quad (3.21)$$

Lembre-se que  $m \leq n$  e:

$$\begin{aligned} \cos\psi &= R/r, & \cos\lambda &= X/R, \\ \operatorname{sen}\psi &= Z/r, & \operatorname{sen}\lambda &= Y/R, \\ \operatorname{sec}\psi &= r/R, & R &= (X^2 + Y^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.2 - ATRAÇÃO GRAVITACIONAL DO SOL E DA LUA

A perturbação gravitacional de um terceiro corpo, no caso o Sol ou a Lua, pode ser estudada através do conhecido problema reduzido dos 3 corpos, onde um deles tem massa desprezível em relação aos outros dois. O potencial perturbador, devido ao terceiro corpo, é assim obtido (Kovalevsky, 1967):

$$R_i = GM_i \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}{r_i^3} \right), \quad (3.23)$$

onde  $M_i$  e  $r_i$  são respectivamente massa e distância do corpo perturbador que pode ser o Sol ou a Lua. A aceleração sobre o satélite, causado por esses corpos, é dada pelo gradiente do potencial  $R$  em relação a  $\mathbf{r}$ , ou:

$$\mathbf{A}_i = \nabla R_i = -GM_i \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right), \quad (3.24)$$

ou ainda:

$$\begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix} = -GM_i \begin{pmatrix} (X - X_i)/\Delta^3 + X_i/r_i^3 \\ (Y - Y_i)/\Delta^3 + Y_i/r_i^3 \\ (Z - Z_i)/\Delta^3 + Z_i/r_i^3 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

onde:

$$\Delta = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = [(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2]^{1/2}. \quad (3.26)$$

As coordenadas  $(X_i, Y_i, Z_i)$  do Sol e da Lua podem ser calculadas diretamente (Escobal, 1965) ou obtidas por interpolações de tabelas de intervalos de 1/2 a 1 dia.

### 3.3 - FORÇA DE ARRASTO

Quando um satélite se move através da atmosfera experimenta uma força de atrito denominada força de arrasto, a qual tem sentido contrário ao movimento do satélite e depende do quadrado da velocidade. Matematicamente, a força de arrasto específica pode ser representada por (NASA, 1977):

$$\mathbf{A}_A = - \frac{1}{2} C_D \frac{S}{m} \rho v_R \mathbf{v}_R, \quad (3.27)$$

onde  $C_D$  é o coeficiente de arrasto,  $S$  é a secção transversal do satélite,  $m$  massa do satélite,  $\rho$  a densidade da atmosfera no ponto em que se encontra o satélite e  $\mathbf{v}_R$  é a velocidade do satélite relativa à atmosfera,  $v_R = |\mathbf{v}_R|$ . Dependendo da forma do satélite,  $C_D$  e  $S$  podem ser considerados constantes, embora dependam da atitude do satélite. Pode-se usar uma secção transversal média sem implicar erros consideráveis. O parâmetro  $C_D$  varia suavemente com a forma do satélite e com a composição da atmosfera.

A velocidade relativa  $\mathbf{v}_R$  é calculada admitindo que a atmosfera tem a mesma velocidade de rotação que a Terra. Então,

$$\mathbf{v}_R = \dot{\mathbf{r}} - \vec{\omega}_T \wedge \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \dot{X} + \omega_T Y \\ \dot{Y} - \omega_T X \\ \dot{Z} \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

sendo  $\omega_T = |\vec{\omega}_T|$ , e  $\dot{\mathbf{r}}$  é a velocidade do satélite relativa ao sistema inercial.

A densidade atmosférica  $\rho$  é função da altitude e da temperatura exosférica  $T_e$ . Esta, por sua vez, depende do fluxo solar médio e instantâneo da época do ano (posição do Sol) e do índice geomagnético. O fluxo solar tem variações periódicas de longo período (11 anos), variações semi-anuais e de curto período (27 dias). Existem modelos para o cálculo da densidade atmosférica; os mais populares são os de Jacchia. A expressão final para a aceleração de arrasto fica na forma:

$$\begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix} = - \frac{1}{2} C_D \frac{S}{m} \rho v_R \begin{pmatrix} \dot{X} + \omega_T Y \\ \dot{Y} - \omega_T X \\ \dot{Z} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

### 3.4 - FORÇAS DE MARÉS DEVIDAS À LUA E AO SOL

As forças gravitacionais do Sol e da Lua fazem com que a Terra se alongue na direção aproximada de cada um destes corpos perturbadores (Figura 3.3).

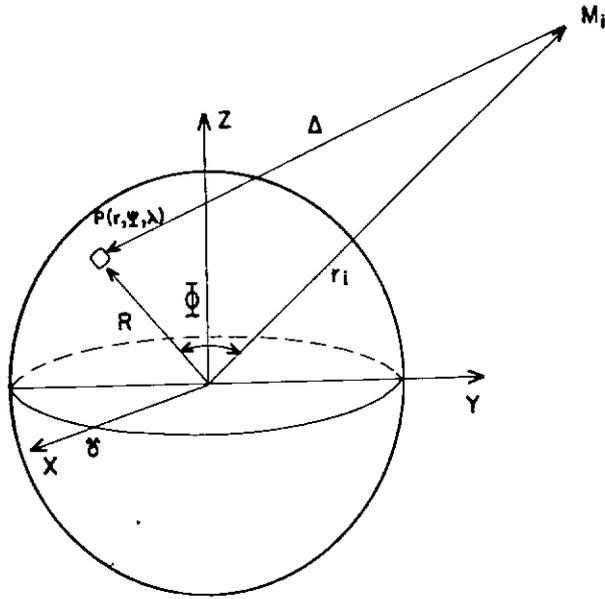


Fig. 3.3 - Força de maré.

O potencial gerado pelo corpo  $M_i$  (perturbador) num ponto da superfície terrestre é dado por:

$$U_i = \frac{GM_i}{\Delta} = \frac{GM_i}{r_i} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R}{r_i} \right)^n P_n(\cos \phi) . \quad (3.30)$$

O potencial  $U_i$  atua na Terra deformando-a suavemente, criando assim uma nova distribuição de massa. Essa nova distribuição gera um potencial adicional que será o potencial de maré. Tomando para  $U_i$  o termo principal de grau 2 tem-se:

$$U_i = \frac{GM_i}{r_i} \left( \frac{R}{r_i} \right)^2 P_2(\cos \phi) . \quad (3.31)$$

O potencial perturbador de maré na superfície é  $R_i = k_n U_i$ , onde  $k_n$  é um coeficiente de elasticidade de grau  $n$ . O potencial  $R_i$  num ponto externo à Terra é proporcional à razão  $(R/r)^{n+1}$ , de tal forma que na superfície essa razão seja 1. Assim,  $R_i$  pode ser escrito como:

$$R_i = k_2 \left( \frac{R}{r} \right)^3 U_i = k_2 \frac{R^5}{r^3} \frac{GM_i}{r_i^3} P_2(\cos\phi) , \quad (3.32)$$

onde  $M_i$  é a massa do corpo perturbador (Sol ou Lua).

O polinômio  $P_2(\cos\phi)$  da Expressão 3.32 dado pelas tabelas é  $P_2(u) = 3u^2/2 - 1/2$ , e o  $\cos\phi$  foi inicialmente calculado em função de  $R$  e  $r_i$ , mas para analisar o efeito perturbador de maré sobre um ponto do espaço, numa posição  $(r, \psi, \lambda)$ , o  $\cos\phi$  é calculado por  $r$  e  $r_i$ , uma vez que  $r$  é paralelo a  $R$  no ponto considerado. Na verdade o ângulo  $\phi$  é o ângulo entre a direção  $r$  e a direção do bojo de deformação que gera o potencial de maré, porque devido ao fato de a Terra não ser perfeitamente elástica, a deformação leva um certo tempo para ocorrer e a rotação da Terra faz com que o bojo esteja um pouco adiantado (em longitude) em relação ao corpo perturbador. Esse ângulo é, entretanto, muito pequeno e é aqui negligenciado. Assim,

$$R_i = \frac{1}{2} k_2 \frac{GM_i}{r_i^3} \frac{R^5}{r^3} [3(\hat{r} \cdot \hat{r}_i)^2 - 1] , \quad (3.33)$$

pondo:

$$C = \frac{1}{2} k_2 \frac{GM_i}{r_i^3} R^5 ,$$

então:

$$\begin{aligned} A_{M_i} = \nabla R_i = & -9C r^{-5} \mathbf{r} (\hat{r} \cdot \hat{r}_i)^2 + 6C r^{-3} (\hat{r} \cdot \hat{r}_i) \nabla (\hat{r} \cdot \hat{r}_i) + \\ & + 3C_i r^{-5} \mathbf{r} , \end{aligned}$$

e usando:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i) = \left[ -\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{1}}{r} \right] \mathbf{r}_i, \\ \mathbf{1} = \mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k}, \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{r}, \quad \nabla \mathbf{r} = \mathbf{1}, \end{array} \right. \quad (3.34)$$

obtêm-se:

$$\mathbf{A}_{M_i} = \frac{3}{2} k_2 \frac{GM_i}{r_i^3} \left( \frac{R}{r} \right)^5 \left\{ [1 - 5(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i)^2] \mathbf{r} + 2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i) \hat{\mathbf{r}}_i \mathbf{r} \right\}. \quad (3.35)$$

A Expressão 3.35 escrita na forma desenvolvida é

$$\left( \begin{array}{c} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{array} \right)_{M_i} = \frac{3}{2} k_2 \frac{GM_i}{r_i^3} \frac{R^5}{r^5} \left( \begin{array}{c} [1 - 5D^2]X + 2DrX_i \\ [1 - 5D^2]Y + 2DrY_i \\ [1 - 5D^2]Z + 2DrZ_i \end{array} \right), \quad (3.36)$$

onde:

$$D = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}{rr_i} = \frac{XX_i + YY_i + ZZ_i}{rr_i} \quad (3.37)$$

e  $r_i = (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2)^{1/2}$ , coordenadas do corpo perturbador (Sol ou Lua).

Os coeficientes de maré (elasticidade) são denominados números de Love. As deformações da Terra causadas por marés da Lua e do Sol podem produzir perturbações observáveis na órbita do satélite, porém a sua magnitude depende de propriedades elásticas da Terra, representadas pelos números de Love. Inicialmente supunha-se que os números de Love fossem globais, isto é, constantes para toda a Terra. Entretanto, hoje se sabe que eles são funções de ponto. Observações fei

tas no período 1970-1973 pelos satélites BE-C (Beacon Explorer C), GEOS1 e GEOS2 (NASA, 1977) encontraram para  $k_2$  uma variação do tipo:

$$0,245 \pm 0,005 \leq k_2 \leq 0,31 \pm 0,01 . \quad (3.38)$$

### 3.5 - FORÇA DE PRESSÃO DE RADIAÇÃO

A força devida à pressão de radiação pode ter efeito significativo sobre a órbita de um satélite com grande razão área/massa. A aceleração causada por esta força é na direção Sol-satélite, no sentido oposto ao versor  $\hat{r}_S$ , e é dada por:

$$\mathbf{A}_{PR} = -\nu C_R \frac{S}{m} P_S \hat{r}_S , \quad (3.39)$$

onde  $\nu$  é o fator de eclipse, tal que  $\nu = 0$  quando o satélite se encontra na sombra da Terra e  $\nu = 1$  quando está iluminado;  $C_R$  é um fator que depende da reflectividade do satélite;  $S$ , secção transversal;  $m$ , a massa do satélite;  $P_S$  a pressão de radiação nas vizinhanças da Terra; e  $\hat{r}_S = \mathbf{r}_S / r_S$ , onde  $\mathbf{r}_S$  é o raio vetor do Sol.

O fator de eclipse pode ser calculado conforme a posição do satélite em relação à Terra e ao plano terminador (T) que separa as regiões da luz e sombra. (Figura 3.4).

Pela Figura 3.4 as seguintes relações são válidas:

$$h = \mathbf{r} \cdot \hat{r}_S ,$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{r} - h \hat{r}_S , \quad (3.40)$$

$$\mathbf{D} \cdot \hat{r}_S = 0 ,$$

$$D = \sqrt{r^2 - h^2} .$$

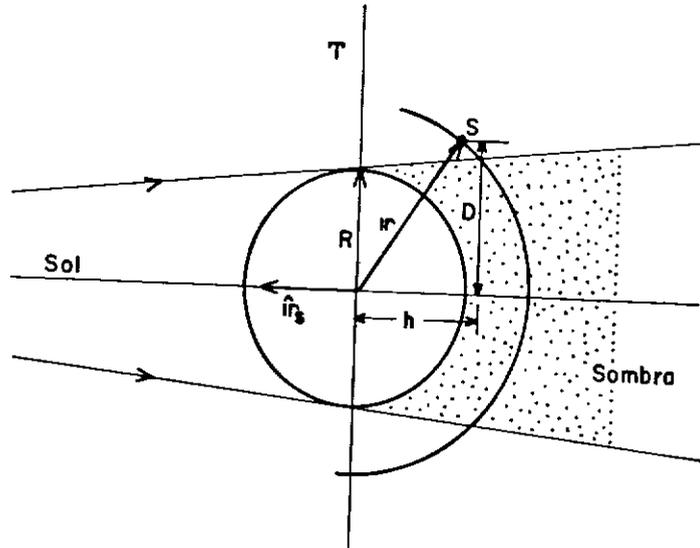


Fig. 3.4 - Função de sombra.

Na Figura 3.4, se  $h \geq 0$ , o satélite está antes do terminador, logo  $v = 1$ . Por outro lado, para  $h < 0$  tem-se:

$$\begin{cases} D \geq R, & v = 1 \text{ (luz)}, \\ D < R, & v = 0 \text{ (sombra)}. \end{cases} \quad (3.41)$$

Na Figura 3.4 não se considerou a penumbra devida à dimensão da fonte luminosa que é o Sol, pois seu efeito é muito pequeno. A constante  $P_S$  está relacionada diretamente à radiação média incidente nas proximidades da Terra e é definida por:

$$P_S = I/c, \quad (3.42)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz e  $I$  uma constante de radiação definida como a radiação incidente por centímetro quadrado de área, por minuto, situada a uma unidade astronômica e fora da atmosfera:

$$I = 7,95 \times 10^7 \text{ ergs.cm}^{-2}.\text{min}^{-1} = 1,33 \text{ Kwatt/m}^2. \quad (3.43)$$

### 3.5.1 - ALBEDO

O albedo  $\bar{a}$  é a radiação indireta refletida pela Terra e obviamente depende das propriedades refletoras da superfície terrestre, sendo, portanto, maior nos pólos e menor no equador, ou seja,  $\bar{a}$  é função da latitude ( $\psi$ ). O coeficiente de albedo  $\bar{a}$  é definido por:

$$a(\psi) = a_0 + a_2 \text{sen}^2(\psi + c_2) + \dots \quad (3.44)$$

onde  $a_0 = 0,219$  e  $a_2 = 0,410$  (Lautman, 1977) respectivamente, e  $c_2 \cong 0$ . A força de pressão de radiação age sobre o satélite na direção Sol-satélite, enquanto a de albedo o faz na direção Terra-satélite, uma vez que sô se considera a componente difusa da radiação e negligencia-se a especular. A Expressão 3.44 sô é vâlida para a região (I) de incidência (veja-se a Figura 3.5), enquanto para as regiões (II) e (III),  $a = 0$ , porque nestas regiões a incidência da luz é praticamente razante. As sim, introduzindo um fator  $\eta$  de albedo a Expressão 3.44 fica:

$$a = \eta(a_0 + a_2 \text{sen}^2\psi) .$$

O ângulo de  $10^0$  para a região neutra da Figura 3.5 foi escolhido arbitrariamente.

O fator  $\eta$  é calculado conforme se segue.

Se  $h \geq 0$ , então  $v = 1$  e

$$\begin{cases} D < R' , & \eta = 1 , \\ D \geq R' , & \eta = 0 , \end{cases}$$

onde  $R' = r \cos 5^0$ .

Se  $h < 0$ , então  $\eta = 0$  e

$$\begin{cases} D < R, & v = 0, \\ D \geq R, & v = 1. \end{cases}$$

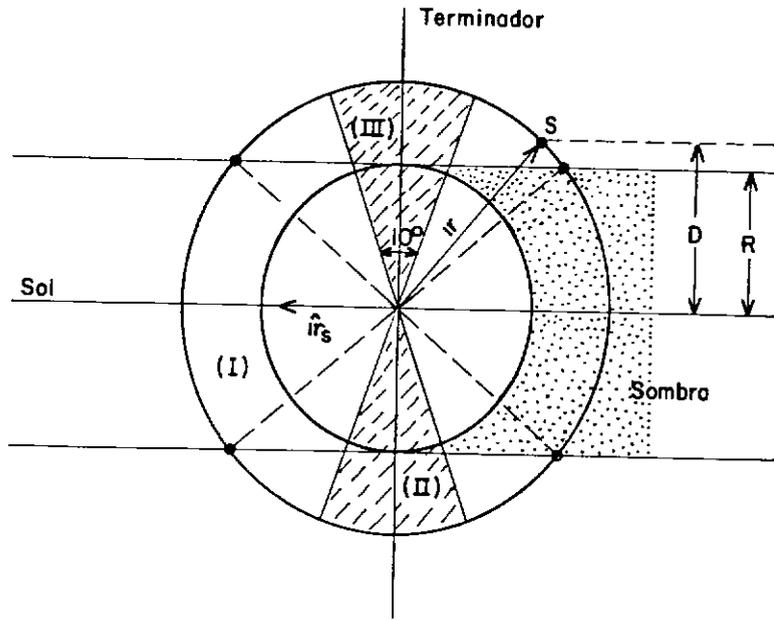


Fig. 3.5 - Regiões de reflexões (I) e neutras (II, III).

Assim, a análise do algoritmo para as três regiões resulta no diagrama da Figura 3.6.

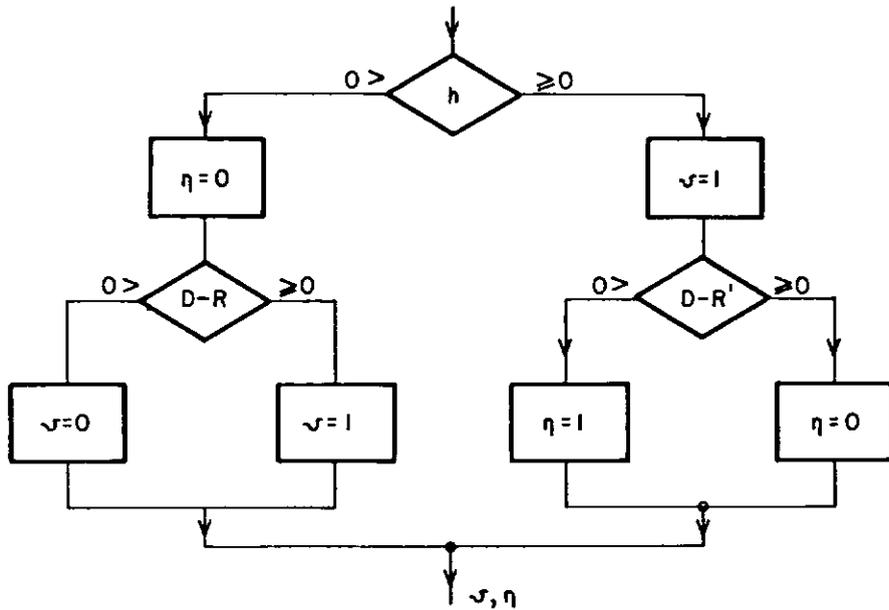


Fig. 3.6 - Diagrama de regiões de reflexão e neutras.

A força de albedo  $\vec{e}$  na direção radial e  $\vec{e}$  dada por:

$$\mathbf{F}_A = a(\psi)A_{PR} \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.45)$$

Logo a expressão geral para a pressão da radiação fica na forma:

$$\begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{pmatrix} = v C_R \frac{S}{m} P_S \begin{bmatrix} -x_S/r_S \\ -y_S/r_S \\ -z_S/r_S \end{bmatrix} + \eta \left[ a_0 + a_2 \left( \frac{Z}{r} \right)^2 \right] \begin{bmatrix} X/r \\ Y/r \\ Z/r \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

### 3.6 - EQUAÇÃO GERAL DAS FORÇAS QUE ATUAM NO SATÉLITE

A equação do movimento do sistema, incluindo as principais forças que atuam no satélite,  $\vec{e}$  (método de Cowell):

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}_G + \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_L + \mathbf{A}_S + \mathbf{A}_{PR} + \mathbf{A}_{ML} + \mathbf{A}_{MS}, \quad (3.47)$$

sendo os  $\mathbf{A}(s)$ , pela ordem, aceleração do campo gravitacional da Terra, aceleração de arrasto, aceleração devida à atração da Lua e do Sol, acelerações à pressão de radiação e aceleração devida às marés da Lua e do Sol.

A ordem de grandeza dessas forças, em um sistema de unidades normalizado,  $\vec{e}$  apresentado na Tabela 3.1.

É bom lembrar ainda que a aceleração  $\mathbf{A}_G$   $\vec{e}$  dada por  $\mathbf{A}_G = G^T \mathbf{r}_A = (\mathbf{T} \mathbf{R})^T \mathbf{r}_S$ , onde  $\mathbf{T}$   $\vec{e}$  função de  $\psi$  e  $\lambda$ , que são calculados pelas Relações 3.22 e  $\mathbf{R}$  depende de  $\theta$ (TSAG). As acelerações  $\mathbf{A}_i$  poderiam conter ainda uma terceira matriz para corrigir da precessão e nutação (Spier, 1971).

A inclusão de forças perturbadoras no modelo deve ser feito em função da situação física apresentada, por exemplo, para satélites

tes baixos, além do geopotencial, s̄o se deve incluir o arrasto e eventualmente mar̄es, enquanto para sat̄elites a grandes altitudes deve-se incluir s̄o press̄o de radiaç̄o e lunissolar.

TABELA 3.1

COMPARAÇ̄O DAS FORÇAS PERTURBADORAS  
COM O CAMPO CENTRAL

PERTURBAÇ̄OES	TIPO	SAT. PR̄XIMO	GEOSTACIONÁRIO
$\ddot{r} = -(u/r^3)r$	Kepler	1	1
$+ (u/r^3) J_{20} (a_e/r)^2 f_{20}(\psi)r$	Achatamento	$10^{-3}$	$10^{-5}$
$+ (u/r^3) \sum_{n,m} J_{nm} (a_e/r)^n f_{nm}(\psi, \lambda)r$	Geopotencial	$10^{-6}$	$10^{-8}$
$+ \mu_L \left[ \frac{r_L - r}{ r_L - r ^3} - \frac{r_L}{r_L^3} \right] + \mu_S \left[ \frac{r_S - r}{ r_S - r ^3} - \frac{r_S}{r_S^3} \right]$	Lunissolar	$10^{-7}$	$10^{-5}$
$- \frac{1}{2} C_D (S/m) \rho v_r v_r$	Arrasto	$10^{-7}$	0
$- v C_R (S/m) P_S \hat{r}_S$	P. Radiaç̄o	$10^{-8}$	$10^{-6}$
$+ \nabla R_i$	Mar̄es (h = 1000 km)	$10^{-10}$	$10^{-13}$
+ ...			

## CAPÍTULO 4

### ESTUDO ANALÍTICO DO MOVIMENTO PERTURBADO

No Capítulo 2 as equações foram escritas de forma apropriada para integração numérica das perturbações que atuam na órbita de um satélite. Neste capítulo as perturbações são estudadas de forma analítica e diretamente nos elementos da órbita. É óbvio que as perturbações que podem ser tratadas inteiramente de forma analítica são as do tipo conservativo, como geopotencial, lunissolar e marés terrestres. As perturbações não-conservativas como o arrasto atmosférico e a pressão de radiação são melhor tratadas de forma semi-analítica, isto é, calculando suas variações médias por órbita e estendendo-as para vários dias. O estudo analítico das perturbações é feito basicamente usando as equações de Lagrange do movimento planetário escritas em função da função perturbadora, ou em função das forças em três direções bem definidas. O primeiro passo então é escrever a função perturbadora do geopotencial em função dos elementos da órbita, que são  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $M$ , ou seja, semi-eixo maior, excentricidade, inclinação, longitude do nodo ascendente, argumento do perigeu e anomalia média, respectivamente. É também usada aqui a anomalia  $v = \omega + f$ , onde  $f$  é a anomalia verdadeira.

#### 4.1 - POTENCIAL PERTURBADOR EM FUNÇÃO DOS ELEMENTOS DA ÓRBITA

O estudo analítico das perturbações gravitacionais que atuam num satélite requer que se tenha o seu potencial perturbador em função dos elementos keplerianos da órbita, começando pelo geopotencial que tem por potencial perturbador a relação:

$$R = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n [(C_{nm} \cos m \lambda + S_{nm} \operatorname{sen} m \lambda] P_{nm}(\operatorname{sen} \psi), \quad (4.1)$$

onde os termos  $P_{nm}(\text{sen}\psi)\text{sen}m\lambda$ ,  $P_{nm}(\text{sen}\psi)\text{cos}m\lambda$  são os chamados *harmônicos esféricos* que na forma complexa generalizada fica:

$$X_{nm}(\lambda, \psi) = P_{nm}(\text{sen}\psi)\exp(im\lambda) . \quad (4.2)$$

Assim, sabendo que a ascensão reta e a longitude estão relacionadas através do tempo sideral aparente de Greenwich ( $\theta$ ) por  $\alpha = \lambda + \theta$ , então:

$$X_{nm}(\lambda, \psi) = e^{-im\theta} X_{nm}(\alpha, \psi) ,$$

e tendo em vista a Equação A.29 do Apêndice A o harmônico esférico  $X_{nm}(\lambda, \psi)$  poderá ser escrito como:

$$X_{nm}(\lambda, \psi) = e^{-im\theta} \sum_{p=0}^n F_{nmp}^*(I) i^{n-m} \exp[i(kv + m\Omega)](-1)^{m-n} ,$$

e definindo:

$$R = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_{nm} ,$$

e depois de tomar as partes real e imaginária dos harmônicos esféricos tem-se que:

$$\begin{aligned} R_{nm} &= \frac{\mu}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n \{C_{nm} R_e[X_{nm}(\lambda, \psi)] + S_{nm} I_m[X_{nm}(\lambda, \psi)]\}(-1)^{m-n} = \\ &= \frac{\mu}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{p=0}^n (-1)^{m-n} F_{nmp}^*(I) \{C_{nm} R_e[i^{n-m} e^{i[kv + m(\Omega - \theta)]}] + \\ &+ S_{nm} I_m[i^{n-m} e^{i[kv + m(\Omega - \theta)]}]\} , \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $R_e$  e  $I_m$  significam parte real e imaginária, respectivamente.

As partes real e imaginária da função em questão devem ser consideradas para dois casos: quando  $n-m = \text{par}$  ou  $n-m = \text{ímpar}$ . Tomando a função complexa:

$$f = i^{n-m} e^{i[kv + m(\Omega - \theta)]} = (-1)^{(n-m)/2} \cos A + (-1)^{(n-m+1)/2} \text{sen} A,$$

onde:

$$A = kv + m(\Omega - \theta),$$

$$k = n - 2p, \text{ e}$$

$$\text{INT} = [(n-m)/2] \text{ é a parte inteira de } (n-m)/2,$$

$$R_e f = (-1)^{\text{INT}} \begin{cases} \left[ \begin{matrix} \cos A \\ -\text{sen} A \end{matrix} \right]_{n-m=2,4,6,\dots \text{ par}}, \\ \left[ \begin{matrix} \cos A \\ -\text{sen} A \end{matrix} \right]_{n-m=1,3,5,\dots \text{ ímpar}}, \end{cases}$$

$$I_m f = (-1)^{\text{INT}} \begin{cases} \left[ \begin{matrix} \text{sen} A \\ \cos A \end{matrix} \right]_{n-m=2,4,6,\dots \text{ par}}, \\ \left[ \begin{matrix} \text{sen} A \\ \cos A \end{matrix} \right]_{n-m=1,3,5,\dots \text{ ímpar}}. \end{cases}$$

Assim, a função potencial  $R_{nm}$  pode ser escrita como se segue:

$$R_{nm} = \frac{\mu}{r} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{p=0}^n (-1)^{m-n} F_{nmp}^*(I) (-1)^{\text{INT}} \left\{ C_{nm} \begin{cases} \left[ \begin{matrix} \cos A \\ -\text{sen} A \end{matrix} \right]_{n-m, \text{ par}} \\ \left[ \begin{matrix} \cos A \\ -\text{sen} A \end{matrix} \right]_{n-m, \text{ ímpar}} \end{cases} + S_{nm} \begin{cases} \left[ \begin{matrix} \text{sen} A \\ \cos A \end{matrix} \right]_{n-m, \text{ par}} \\ \left[ \begin{matrix} \text{sen} A \\ \cos A \end{matrix} \right]_{n-m, \text{ ímpar}} \end{cases} \right\}, \quad (4.4)$$

onde:

$$F_{nmp}(I) = (-1)^{\text{INT}} F_{nmp}^*(I).$$

Assim, a função da inclinação fica da forma:

$$F_{nmp}(I) = \frac{(2p)!(2n-2p)!(-1)^{\text{INT}}}{(n-m)!2^n p!(n-p)!} \sum_{j=j_1}^{j_2} \begin{pmatrix} n-m \\ 2p-j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+m \\ j \end{pmatrix} \cdot (-1)^j c^{n+m+2p-2j} s^{n-m-2p+2j}, \quad (4.5)$$

sendo  $j_1 = \max[0, 2p-n+m]$ ,  $j_2 = \min[2p, n+m]$  e  $\text{INT} = [(n-m)/2]$ .

Entrando com o fator  $(-1)^{m-n}$  para dentro do colchete da Equação 4.4 é possível escrever:

$$R_{nm} = \frac{\mu}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(I) \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{bmatrix} \cos A + \\ + \begin{bmatrix} S_{nm} \\ C_{nm} \end{bmatrix} \sin A \end{array} \right\} \begin{array}{l} n-m, \text{ par,} \\ n-m, \text{ ímpar,} \end{array} \quad (4.6)$$

que é a mesma expressão apresentada por Kaula (1966).

Segundo a característica de D'Alembert da Mecânica Celeste a função da inclinação  $F_{nmp}(I)$  é da ordem de  $s^{|\alpha|}$ , onde  $s = \sin(I/2)$  e  $\alpha = m-n+2p$ , multiplicada por um polinômio em  $c = \cos(I/2)$ , ou seja,

$$F_{nmp}(I) = s^{|\alpha|} J_{nmp}(c), \quad (4.7)$$

onde a função  $J_{nmp}(c)$  é dada no Apêndice A. A derivada  $\partial F_{nmp}(I)/\partial I$  é também necessária nas equações planetárias de Lagrange, logo:

$$\frac{\partial F_{nmp}(I)}{\partial I} = \frac{|\alpha|}{2} s^{|\alpha|-1} c J_{nmp}(c) - \frac{s^{|\alpha|}}{2} \frac{\partial J_{nmp}(c)}{\partial I} \quad (4.8)$$

A Função  $F_{nmp}(I)$  deve ser normalizada quando os coeficientes  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  também o forem (ver tabela no Apêndice A).

#### 4.2 - FUNÇÃO DA EXCENTRICIDADE

Para que a função perturbadora dada pela Equação 4.6 fi que em função dos elementos keplerianos, é necessário exprimir  $r^{-n-1}[\cos(n-2p)f, \text{sen}(n-2p)f]$  em função de  $e$  e  $M$ . Usando a Equação B.9 do Apêndice B,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1} \begin{Bmatrix} \cos(n-2p)f \\ \text{sen}(n-2p)f \end{Bmatrix} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{npq}(e) \exp[i(n-2p+q)M], \quad (4.9)$$

que substituídas na Equação 4.6:

$$R_{nm} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{a}{a}\right)^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(I) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{npq}(e) \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} \cos A + \\ + \begin{Bmatrix} S_{nm} \\ -C_{nm} \end{Bmatrix} \text{sen} A \begin{cases} n-m, \text{ par,} \\ n-m, \text{ ímpar,} \end{cases} \quad (4.10)$$

onde  $A = (n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega-\theta)$  e  $G_{npq}$  é dada (Apêndice B) por:

$$G_{npq}(e) = (1 + \beta^2)^n \sum_{s=0}^{s_1} \sum_{r=0}^{r_1} \begin{pmatrix} 2p-2n \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2p \\ r \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot (-\beta)^{s+r} J_{q-s+r} [(n-2p+q)e], \quad (4.11)$$

sendo  $s_1 = 0$  se  $n = p$  e  $\infty$  se  $n > p$ ;  $r_1 = 0$  se  $p = 0$  e  $\infty$  se  $p > 0$ . Logo, a expressão final do potencial gravitacional perturbador fica:

$$R = \frac{\mu}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{a}\right)^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(I) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{npq}(e) \cdot S_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta), \quad (4.12)$$

onde:

$$S_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta) = \begin{cases} \left[ \begin{matrix} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{matrix} \right] \cos A + \left[ \begin{matrix} S_{nm} \\ C_{nm} \end{matrix} \right] \sen A & n-m, \text{ par,} \\ & n-m, \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (4.13)$$

A derivada  $\partial G_{npq}(e)/\partial e$ , necessária nas equações planetárias de Lagrange, pode ser vista no Apêndice B.

#### 4.3 - INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE LAGRANGE

As equações planetárias de Lagrange são dadas (Kaula, 1966) por:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n_0 a} \frac{\partial R}{\partial M}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{n_0 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n_0 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= - \frac{\cos I}{n_0 a^2 (1-e^2)^{1/2} \sen I} \frac{\partial R}{\partial I} + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n_0 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\cos I}{n_0 a^2 (1-e^2)^{1/2} \sen I} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{n_0 a^2 (1-e^2)^{1/2} \sen I} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{n_0 a^2 (1-e^2)^{1/2} \sen I} \frac{\partial R}{\partial I}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\frac{dM}{dt} = n_0 - \frac{1 - e^2}{n_0 a^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{n_0 a} \frac{\partial R}{\partial a} ,$$

onde  $n_0 = (\mu/a^3)^{1/2}$  é o movimento médio e  $R$  é o potencial perturbador dado pela Equação 4.12. A perturbação mais significativa do potencial perturbador é a devida a  $C_{20}$  (ou  $-J_2$ ), uma vez que este é cerca de 1000 vezes maior do que os outros coeficientes ( $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$ ) do geopotencial. Assim, o potencial dominante será:

$$R_{20} = \frac{\mu C_{20}}{a} \left( \frac{a}{a} e \right)^2 \sum_p \sum_q F_{20p}(I) G_{2pq}(e) \cdot \cos[(2 - 2p)\omega + (2 - 2p + q)M] , \quad (4.15)$$

onde eliminando perturbações periódicas e pondo:  $2 - 2p = 0$  e  $2 - 2p + q = 0$ , resulta em  $q = 0$ ,  $p = 1$ . Logo,

$$R_{20} = \frac{\mu C_{20}}{a} \left( \frac{a}{a} e \right)^2 F_{201}(I) G_{210}(e) , \quad (4.16)$$

que substituído nas Equações 4.14 permite concluir que:

$$\frac{da}{dt} = 0 ,$$

$$\frac{de}{dt} = 0 ,$$

$$\frac{dI}{dt} = 0 , \quad (4.17)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3n_0 C_{20}}{4(1 - e^2)^2} \left( \frac{a}{a} e \right)^2 (1 - 5\cos^2 I) ,$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3n_0 C_{20} a^2 e^2}{2(1 - e^2)^2 a^2} \cos I ,$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{3n_0 C_{20} a_e^2}{4(1-e^2)^{3/2} a^2} (3\cos^2 I - 1) .$$

Se o valor de  $C_{20}$  é cerca de  $-1082,7 \times 10^{-6}$  e usando valores típicos de um satélite geodésico,  $e = 0,01$  e  $a = 1,12a_e$ , nas Equações 4.17, elas se tornam (Kaula, 1966):

$$\frac{d\omega}{dt} \approx 3,55 (5\cos^2 I - 1) (^{\circ}/\text{dia}) ,$$

$$\frac{d\Omega}{dt} \approx -6,70 \cos I (^{\circ}/\text{dia}) , \quad (4.18)$$

$$\frac{dM}{dt} \approx 14,37 + 0,0093 (3\cos^2 I - 1) (\text{rev./dia}) .$$

Os ângulos para os quais  $\dot{\omega} = 0$  são conhecidos como *ângulos críticos* e seus valores são  $63^{\circ},4$  e  $116^{\circ},56$ . Note-se que  $\dot{\omega} > 0$  para valores antes de  $I = I_{\text{crít}}$ , e  $\dot{\omega} < 0$  para  $63^{\circ},4 < I < 116^{\circ},5$ , voltando para  $\dot{\omega} > 0$  após  $116^{\circ},56$  (Figura 4.1).

Note-se pelas Equações 4.17 que  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{\Omega}$  e  $\dot{M}$  são todos proporcionais ao achatamento  $C_{20}$  e a um fator  $(a_e/a)^2$  que é chamado *fator de amortecimento* da perturbação de achatamento.

Um satélite síncrono com o Sol (heliossíncrono) tem  $\dot{\Omega} = 360^{\circ}/1 \text{ ano} = 360^{\circ}/365 \text{ dias} \approx 0,98^{\circ}/\text{dia}$ .

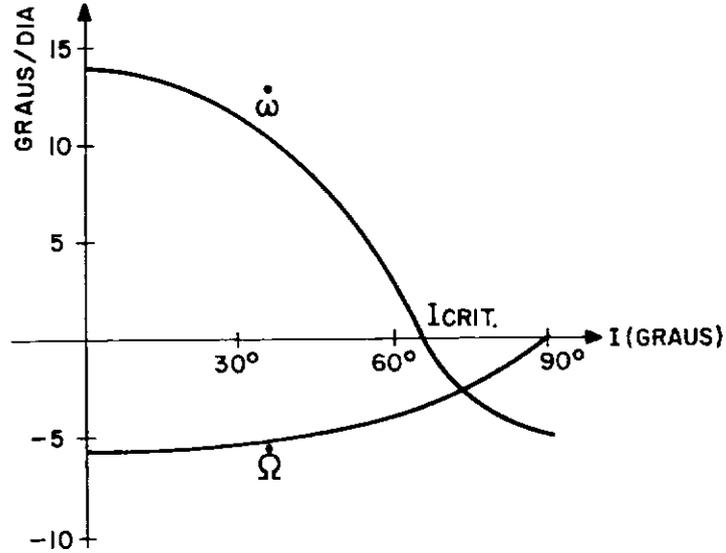


Fig. 4.1 - Variação de  $\omega$  e  $\Omega$ .

Reescrevendo a Equação 4.12 do potencial perturbador na forma:

$$R_{nmpq} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{a}{a}\right)^n F_{nmp}(I) G_{npq}(e) S_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta) \quad (4.19)$$

e calculando as derivadas parciais de  $R_{nmpq}$  em relação a  $a, e, i, \Omega, \omega, M$ , e substituindo nas Equações de Lagrange 4.14, obtêm-se, para o caso geral:

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{nmpq} = \frac{2\mu}{n_0 a^2} \left(\frac{a}{a}\right)^n F_{nmp}(I) G_{npq}(e) (n-2p+q) S'_{nmpq},$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{nmpq} = \frac{(1-e^2)\mu}{n_0 a^2 e} \left(\frac{a}{a}\right)^n F_{nmp}(I) G_{npq}(e) S'_{nmpq} \left[ (n-2p+q) \frac{n-2p}{\sqrt{1-e^2}} \right],$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{nmpq} = & \frac{\mu}{n_0 a^3} \left(\frac{a}{a}\right)^n \left[ \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e} F_{nmp}(I) G'_{npq}(e) - \right. \\ & \left. - \frac{\text{ctg} I}{(1-e^2)^{1/2}} F'_{nmp}(I) G_{npq}(e) \right] S_{nmpq}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dI}{dt}\right)_{nmpq} &= \frac{\mu}{n_0 a^3 \operatorname{sen} I (1 - e^2)^{1/2}} \left(\frac{a e}{a}\right)^n F_{nmp}(I) G_{npq}(e) \cdot \\ &\cdot S'_{nmpq} [(n-2p)\cos I - m] , \\ \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{nmpq} &= \frac{\mu}{n_0 a^3 \operatorname{sen} I (1 - e^2)^{1/2}} \left(\frac{a e}{a}\right)^n F'_{nmp}(I) G_{npq}(e) S_{nmpq} , \\ \left(\frac{dM}{dt}\right)_{nmpq} &= n_0 + \frac{\mu}{n_0 a^3} \left(\frac{a e}{a}\right)^n F_{nmp}(I) \cdot \\ &\cdot S_{nmpq} \left[ 2(n+1)G_{npq}(e) - \frac{1-e^2}{e} G'_{npq}(e) \right] , \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde:

$$F'_{nmp}(I) = \frac{dF_{nmp}(I)}{dI} ,$$

$$G'_{npq}(e) = \frac{dG_{npq}(e)}{de} ,$$

$$S'_{nmpq} = \frac{dS_{nmpq}}{dA} , \quad e$$

A  $\bar{e}$  é dado pela Equação 4.10.

O passo seguinte  $\bar{e}$  o da integração das equações de Lagrange. A derivada do argumento  $A = (n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega-\theta)$  em relação ao tempo  $\bar{e}$ :

$$\frac{dA}{dt} = (n-2p)\dot{\omega} + (n-2p+q)\dot{M} + m(\dot{\Omega}-\dot{\theta}) = \dot{A} .$$

Logo :

$$dt = \frac{1}{\dot{A}} dA \quad (4.21)$$

e integrando as Equações 4.20 após substituir dt da Equação 4.21 e tendo em conta que:

$$\bar{S}_{nmpq} = \int S_{nmpq} dA ,$$

obtem-se:

$$\Delta a_{nmpq} = \frac{2\mu}{n_0 a^2} \left(\frac{ae}{a}\right)^n F_{nmp}(I) G_{npq}(e) \int \frac{S'_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta)}{\dot{A}} dA ,$$

$$\Delta a_{nmpq} = \frac{2\mu}{n_0 a^2 \dot{A}} \left(\frac{ae}{a}\right)^n F_{nmp}(I) G_{npq}(e) S_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta) [n-2p+q]$$

$$\Delta e_{nmpq} = \frac{1-e^2}{n_0 a^2 e} \frac{\mu}{\dot{A}} \left(\frac{ae}{a}\right)^n F_{nmp}(I) G_{npq}(e) S_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta) .$$

$$\cdot \left[ (n-2p+q) - \frac{n-2p}{\sqrt{1-e^2}} \right] ,$$

$$\Delta \omega_{nmpq} = \frac{\mu}{n_0 a^2 \dot{A}} \left(\frac{ae}{a}\right)^n \left[ \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e} F_{nmp}(I) G'_{npq}(e) - \right. \\ \left. + (1-e^2)^{1/2} \cotg I F'_{nmp}(I) G_{npq}(e) \right] \bar{S}_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta) ,$$

$$\Delta I_{nmpq} = \frac{\mu}{n_0 a^3 \text{sen} I (1-e^2)^{1/2}} \left(\frac{ae}{a}\right)^n F_{nmp}(I) G_{npq}(e) [(n-2p)\cos I - m] . \\ \cdot S_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta) ,$$

$$\Delta\Omega_{nmpq} = \frac{\mu}{n_0 a^3 \sin I (1 - e^2)^{1/2} \dot{A}} \left(\frac{a}{a}\right)^n F_{nmp}(I) G_{npq}(e) \bar{S}_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta),$$

$$\Delta M_{nmpq} = \frac{\mu}{n_0 a^3 \dot{A}} \left(\frac{a}{a}\right)^n [2(n+1)G_{npq}(e) - \frac{1-e^2}{e} G'_{npq}(e)] \cdot F_{nmp}(I) \bar{S}_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta). \quad (4.22)$$

É óbvio que nesta integração foram consideradas os elementos orbitais que entram nas funções no segundo membro das Equações 4.22, em valores médios ( $\bar{a}$ ,  $\bar{e}$ ,  $\bar{I}$ ,  $\bar{\Omega}$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{M}$ ) no intervalo  $\Delta t$ . No caso de os elementos médios não serem acessíveis, podem-se usar os elementos osculadores, pois a relação entre eles  $\bar{e}$ , por exemplo, para o semi-eixo maior,  $a = \bar{a} + \delta a$ , onde  $\delta a$  representa as perturbações periódicas que são da ordem de 0,1% do valor do elemento em questão, por exemplo, se  $a = 7000$  km,  $\delta a = 7$  km. Este erro, quando introduzido nas funções do segundo membro das Equações 4.22, se propagará de tal forma a conduzir o resultado final a erros da ordem de centenas de metros. Em modelos mais sofisticados onde se exige uma precisão melhor, e onde as forças não-gravitacionais são calculadas semi-analiticamente considerando suas variações médias por órbita, a integração das Equações 4.22 deve ser feita usando elementos médios. No caso de se ter só os elementos osculadores, os elementos médios podem ser obtidos por subtração daqueles, das perturbações periódicas que podem ser calculadas usando as próprias Equações 4.22 para  $\Delta t = 0$ . Isto é válido porque as perturbações periódicas gravitacionais são as mais significativas. Poder-se-ia também, com menor precisão, transformar osculador para médio, pelo método de Brouwer. Observe-se que as Equações 4.22 não são calculadas quando  $\dot{A} = 0$ , que pode ocorrer para *perturbações seculares*, onde  $n-2p+q = 0$  e  $q = m = 0$ , ou em casos de *ressonância* profunda que será discutida no Capítulo 6. Note-se também que as funções  $S_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta)$  e  $\bar{S}_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \theta)$  exigem, para seu cálculo, que seus argumentos seculares sejam propagados no tempo, isto é,

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega} \Delta t ,$$

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega} \Delta t , \quad (4.23)$$

$$M = M_0 + \dot{M} \Delta t ,$$

onde os  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\omega}$  e  $\dot{M}$  são obtidos em primeira aproximação pelas Equações 4.17, ou de maneira mais precisa incluindo todas as perturbações seculares através da substituição de  $n-2p+q=0$  e  $q=m=0$  nas Equações 4.20, resultando em:

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{n,0,p,0} = \frac{n_0 C_{n_0}}{\text{sen} I (1-e^2)^{1/2}} \left(\frac{a}{e}\right)^n F'_{n_0 p}(I) G_{n_0 p}(e) ,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{n,0,p,0} &= n_0 C_{n_0} \left(\frac{a}{e}\right)^n \left[ \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e} F_{n_0 p}(I) G'_{n_0 p}(e) - \right. \\ &\quad \left. + \frac{\text{cotg} I}{(1-e^2)^{1/2}} F'_{n_0 p}(I) G_{n_0 p}(e) \right] , \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dM}{dt}\right)_{n,0,p,0} &= n_0 + n_0 a C_{n_0} \left(\frac{a}{e}\right)^n F_{n_0 p}(I) [2(n+1) G_{n_0 p}(e) - \\ &\quad + \frac{1-e^2}{e} G'_{n_0 p}(e)] , \end{aligned}$$

onde  $n$  é par e  $p = n/2$ , para qualquer  $p \leq n$ . É importante notar que  $a$ ,  $e$  e  $I$  não sofrem variação para perturbações seculares, isto é,  $\dot{a} = \dot{e} = \dot{I} = 0$ .

Em caso de ressonância as Equações 4.22 são podem ser usadas até períodos de batimento ( $P_B$ ) máximos de 50 dias, onde:

$$P_B = 1/|\dot{A}| , \quad (4.25)$$

sendo  $\dot{A}$  em revoluções por dia. Para  $P_B > 50$  dias a linearidade das Equações 4.22 é "quebrada" devido ao aparecimento de pequenos divisores. É óbvio também que as Equações 4.20 e 4.22 contêm singularidades para pequenas excentricidades e inclinações.

Assim, a variação devida a perturbações do geopotencial nos elementos da órbita é dada por:

$$a = a_0 + \Delta a ,$$

$$e = e_0 + \Delta e ,$$

$$I = I_0 + \Delta I ,$$

(4.26)

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega} \Delta t + \Delta \Omega ,$$

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega} \Delta t + \Delta \omega ,$$

$$M = M_0 + \dot{M} \Delta t + \Delta M ,$$

sendo  $\dot{\Omega}, \dot{\omega}, \dot{M}$  calculados pelas Equações 4.24 e  $\Delta t$  é o intervalo de integração (por exemplo, de 10 a 20 dias). Os deltas são obtidos somando-se em  $n, m, p$  e  $q$ , por exemplo:

$$\Delta a = \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{\infty} \Delta a_{nmpq} ,$$

e o  $q$ , que teoricamente varia de  $-\infty$  a  $+\infty$ , na prática é determinado pela relação  $G_{npq}(e) \approx e^{|q|}$ . Então, estabelecendo a ordem que se quer calcular  $G_{npq}(e)$ , calcula-se  $q$ .

#### 4.4 - PERTURBAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR

As perturbações tratadas até aqui são lineares e de 1ª ordem e isso é possível porque as equações de variação dos elementos

contêm os coeficientes dos harmônicos esféricos que são da ordem de  $10^{-6}$ , com exceção de  $J_2$  que é da ordem de  $10^{-3}$ . Supondo entretanto que um elemento orbital seja  $\epsilon_i = \epsilon_{0i} + \Delta\epsilon_i$ , e que se queira calcular as perturbações até 2ª ordem, basta introduzir nas equações de Lagrange  $\epsilon_i = \epsilon_{0i} + \Delta\epsilon_i$  e expandir o potencial perturbador  $R(\epsilon_i)$  até termos de 1ª ordem, isto é:

$$R(\epsilon_i) = R(\epsilon_{0i}) + \left. \frac{\partial R}{\partial \epsilon_i} \right|_{\epsilon_{0i}} \Delta\epsilon_i ,$$

onde  $\Delta\epsilon_i$  é de 1ª ordem e quando multiplicado por  $\partial R/\partial \epsilon_i$ , também de 1ª ordem, resulta em termos de 2ª ordem. Assim, nas primeiras Equações de Lagrange aparecem termos (Brouwer, 1961) de 1ª e de 2ª ordem,

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n_0 a_0} \left( \frac{\partial R}{\partial M} \right)_0 + \left[ \frac{1}{n_0 a_0^2} \left( \frac{\partial R}{\partial M} \right)_0 + \frac{2}{n_0 a_0} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial M \partial a} \right)_0 \right] \Delta_1 a .$$

#### 4.5 - PERIODICIDADE DAS PERTURBAÇÕES

Tendo em vista que o argumento das perturbações periódicas é:

$$A = (n-2p+q)M + (n-2p)\omega + m(\Omega-\theta) ,$$

então, se:

- a)  $m = 0$  (zonais), as perturbações são de *curto e longo período* e os coeficientes dos harmônicos são  $J_2, J_3, J_4, \dots$
- b)  $m = 0$ ,  $n$  par e  $p = n/2$  (zonais pares), as perturbações são de *curto período e seculares* (longitudinais). Os coeficientes no caso são  $J_2, J_4, J_6, J_8, \dots$
- c)  $m = 0$ ,  $n$  ímpar (zonais ímpares), as perturbações são de *curto e longo período* ( $J_3, J_5, J_7, \dots$ ).

As perturbações periódicas são transversais e  $\bar{a}$  medida que o período vai aumentando o efeito vai atuando mais longitudinalmente até ficar totalmente longitudinal como no caso das seculares.

#### 4.6 - ARRASTO ATMOSFÉRICO

Depois do achatamento terrestre o arrasto atmosférico é para satélites baixos,  $h < 1000$  km, a perturbação mais significativa. Entretanto, em virtude da dificuldade de modelar a densidade atmosférica de forma analiticamente integrável, a não ser em modelos aproximados, é conveniente que as perturbações do arrasto atmosférico sejam calculadas semi-analiticamente, isto é, calculando as variações médias dos elementos por período a cada 1 ou 2 dias, permitindo assim a propagação no intervalo que se desejar. Para estudar as forças dissipativas é mais prático usar as equações de Lagrange na forma de Gauss (Bate et alii, 1971), ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{n_0 \sqrt{1-e^2}} [R e \operatorname{sen} f + T(1+e \operatorname{cos} f)] , \\ \dot{e} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n_0 a} [R \operatorname{sen} f + T(\operatorname{cos} E + \operatorname{cos} f)] , \\ \dot{i} &= \frac{1}{n_0 a \sqrt{1-e^2}} N \frac{r}{a} \operatorname{cos}(\omega + f) , \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{n_0 a \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} I} N \frac{r}{a} \operatorname{sen}(\omega + f) , \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n_0 a e} \left\{ -R \operatorname{cos} f + T \left[ \frac{r}{a(1-e^2)} + 1 \right] \operatorname{sen} f \right\} - \dot{\Omega} \operatorname{cos} I , \\ \dot{M} &= n_0 - \frac{2rR}{n_0 a^2} - (1-e^2)^{1/2} (\dot{\omega} + \dot{\Omega} \operatorname{cos} I) , \end{aligned} \tag{4.27}$$

onde R, T e N são as componentes da força perturbadora nas direções radial, transversal e normal ao plano da órbita, respectivamente, de acordo com a Figura 4.2.

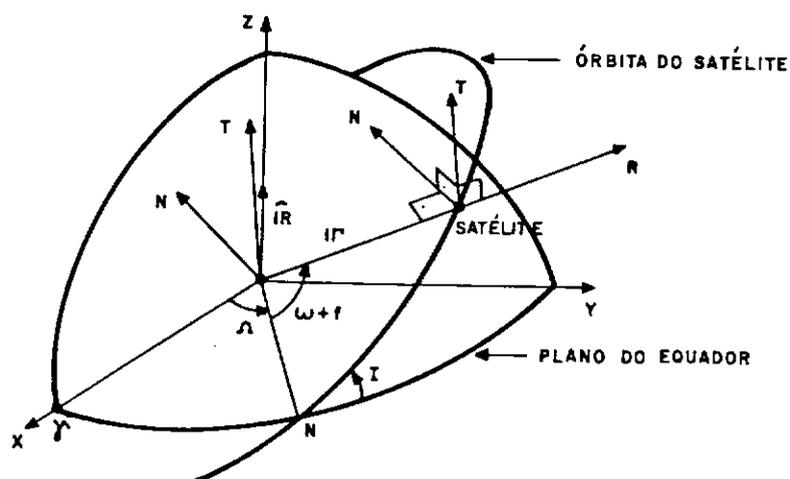


Fig. 4.2 - Direções de projeção da força perturbadora.

A força de arrasto por unidade de massa que atua no satélite é dada por:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho \mathbf{v} \mathbf{v}, \quad (4.28)$$

onde  $C_D$  é o coeficiente de arrasto,  $A/m$  é a relação área-massa do satélite,  $\rho$  é a densidade atmosférica no ponto onde se encontra o satélite,  $\mathbf{v}$  é a velocidade relativa do satélite em relação à atmosfera, isto é, é a velocidade do satélite menos a velocidade da atmosfera e  $v = |\mathbf{v}|$ .

A velocidade do satélite em coordenadas polares é:

$$\dot{\mathbf{r}}_S = \dot{r} \hat{e}_R + r \dot{f} \hat{e}_T, \quad (4.29)$$

enquanto a velocidade da atmosfera no ponto em que se encontra o satélite  $\vec{v}$ :

$$\vec{v}_{\text{atm}} = \omega_T \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{r} = \omega_T r \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{e}}_R, \quad (4.30)$$

O  $\hat{\mathbf{k}}$  no sistema móvel  $\bar{\mathbf{e}}$  (Pilchowski et alii, 1981):

$$\hat{\mathbf{k}} = R_{31}\hat{\mathbf{e}}_R + R_{32}\hat{\mathbf{e}}_T + R_{33}\hat{\mathbf{e}}_N, \quad (4.31)$$

logo:

$$\mathbf{v} = \vec{v}_S - \vec{v}_{\text{atm}} = \begin{pmatrix} v_R \\ v_T \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{f} - \omega_T r \cos I \\ +\omega_T r \sin I \cos(\omega + f) \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

pois  $R_{32} = \cos(\omega + f)\sin I$ ,  $R_{33} = \cos I$ , e

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f},$$

$$\dot{r} = \frac{ae(1 - e^2)\sin f}{(1 + e \cos f)^2} \dot{f} = \frac{e \sin f}{a(1 - e^2)} r^2 \dot{f}.$$

As componentes da força de arrasto que são substituídas nas Equações 4.27 são então da forma:

$$\begin{pmatrix} R \\ T \\ N \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v \begin{pmatrix} \frac{e \sin f}{a(1 - e^2)} r^2 \dot{f} \\ r \dot{f} - \omega_T r \cos I \\ +\omega_T r \sin I \cos(\omega + f) \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

sendo:

$$v = (v_N^2 + v_R^2 + v_T^2)^{1/2} .$$

Na integração, onde aparece  $r dt$  substitui-se  $dt$  por  $(r^2/G)df$  e o  $\cos E$  na Equação 4.27 troca-se por:

$$\cos E = \frac{\cos f + e}{1 + e \cos f} . \quad (4.34)$$

Supondo  $\epsilon_i = (a, e, I, \Omega, \omega, M)$  então  $\dot{\epsilon}_i = f_i(\epsilon_i, f)$  representa qualquer das Equações 4.27.

A propagação semi-analítica da órbita exige que se calcule a variação média  $\bar{\epsilon}_i$  por período do satélite e isto é feito da forma:

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{1}{T} \int_0^T f_i(\epsilon_i, f) dt , \quad i = 1,6 , \quad (4.35)$$

ou integrando-a em anomalia verdadeira,

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_i(\epsilon_i, f) \frac{r^2 df}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} , \quad (4.36)$$

o que é equivalente a eliminar as variáveis de curto período das equações. A densidade  $\rho$  pode ser calculada a cada 2 minutos e considerada constante neste intervalo. Assim, a variação nos elementos orbitais, devida ao arrasto atmosférico é

$$\Delta \epsilon_i = \epsilon_i - \epsilon_{i_0} = \bar{\epsilon}_i (t - t_0) , \quad i = 1,6 . \quad (4.37)$$

Outra força de origem aerodinâmica que atua no satélite é a força de ascensão ("lift") que tende a levantar o satélite no plano da órbita, mas esta força é muito pequena quando comparada com a força de arrasto, por isso não é aqui considerada.

Como a força de arrasto depende do quadrado da velocidade, é fácil visualizar que no perigeu seu efeito é maior e, portanto, haverá maior dissipação de energia, causando em consequência perda de altura do apogeu, isto é, produzindo a circularização da órbita, ou seja, fazendo  $e$  tender para zero. Sendo  $r_p = a(1 - e)$  e  $r_{ap} = a(1 + e)$  as alturas do perigeu e apogeu, respectivamente, então

$$\Delta r_p = (1 - e)\Delta a - a\Delta e, \quad (4.38)$$

$$\Delta r_{ap} = (1 + e)\Delta a + a\Delta e,$$

vê-se que no apogeu as perturbações em  $a$  e  $e$  somam-se.

#### 4.7 - PRESSÃO DE RADIAÇÃO

A força de pressão de radiação é de efeito significativo para satélites altos, pois testes comparativos sobre forças de pressão de radiação e arrasto atmosférico demonstraram que para satélites com altura da ordem de 1000 km, a força de pressão de radiação supera a de arrasto atmosférico. A expressão matemática da força por unidade de massa, conforme já visto no Capítulo 3, é

$$\mathbf{F} = -C_R \frac{S}{m} P_S \hat{\mathbf{r}}_S, \quad (4.39)$$

onde  $C_R$  é o coeficiente de refletividade, que varia de satélite para satélite, com valores de 1 a 1,44 (Lála, 1974). A razão  $S/m$  mostra que para satélites do tipo balão, de grande área/massa, a pressão de radiação é bastante atuante. A constante  $P_S$  é da ordem de  $4,86 \times 10^{-6}$  Joule/ $m^2$ . Com o intuito de simplificar a notação, toma-se  $\mathbf{F} = K \hat{\mathbf{r}}_S$ , sendo  $K = -C_R P_S S/m$ . Assim resta agora calcular as componentes R, T e N das forças que serão substituídas nas Equações 4.27 e que são dada por:

$$\begin{aligned}
 R &= \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{e}}_R = K \hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{e}}_R = KR' , \\
 T &= \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{e}}_T = K \hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{e}}_T = KT' , \\
 N &= \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{e}}_N = K \hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{e}}_N = KN' ,
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

sendo  $\hat{\mathbf{e}}_R$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_T$  e  $\hat{\mathbf{e}}_N$  os versores nas direções R, T e N; e  $\hat{\mathbf{r}}_S$  é o versor na direção geocêntrica Terra-Sol. Foi admitido aqui que os vetores nas direções dos centros de massa Sol-Terra e Sol-satélite são paralelos. Os versores  $\hat{\mathbf{e}}_R$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_T$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_N$  e  $\hat{\mathbf{r}}_S$  são dados no Apêndice C por:

$$\hat{\mathbf{e}}_R = \begin{pmatrix} c^2 \cos(\Omega+v) + s^2 \cos(v-\Omega) \\ c^2 \sin(\Omega+v) - s^2 \sin(v-\Omega) \\ \text{senI} \text{ sen}v \end{pmatrix} (\hat{\mathbf{i}} \ \hat{\mathbf{j}} \ \hat{\mathbf{k}}) ,
 \tag{4.41}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_T = \begin{pmatrix} -c^2 \sin(\Omega+v) - s^2 \sin(v-\Omega) \\ c^2 \cos(\Omega+v) - s^2 \cos(v-\Omega) \\ \text{senI} \text{ cos}v \end{pmatrix} (\hat{\mathbf{i}} \ \hat{\mathbf{j}} \ \hat{\mathbf{k}}) ,
 \tag{4.42}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_N = \begin{pmatrix} \text{sen}\Omega \ \text{senI} \\ -\text{cos}\Omega \ \text{senI} \\ \text{cosI} \end{pmatrix} (\hat{\mathbf{i}} \ \hat{\mathbf{j}} \ \hat{\mathbf{k}}) ,
 \tag{4.43}$$

onde  $v = \omega + f$ ,  $\underline{c}$  e  $\underline{s}$  são  $\text{cos}I/2$  e  $\text{sen}I/2$ , respectivamente. O versor geocêntrico na direção do Sol (Apêndice C) é

$$\hat{\mathbf{r}}_S = \text{cos}\lambda_S \hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\lambda_S \text{cos}\epsilon \hat{\mathbf{j}} + \text{sen}\lambda_S \text{sen}\epsilon \hat{\mathbf{k}} ,
 \tag{4.44}$$

e a parte periódica ( $R'$ ,  $T'$  e  $N'$ ) das componentes  $R$ ,  $T$  e  $N$  das Equações 4.40 podem ser calculadas, ver Apêndice C, onde se usou a notação  $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$  e  $\cos \alpha = c(\alpha)$ ,  $\sin \alpha = s(\alpha)$ ,

$$R' = c_{11}c(\lambda_S - \tilde{\omega} - f) + c_{12}c(\lambda_S + \tilde{\omega} + f) + c_{21}c(\lambda_S + \omega - \Omega + f) + \\ + c_{22}c(\lambda_S - \omega + \Omega - f) + \frac{1}{2} s(\epsilon)s(I)[C(\lambda_S - \omega - f) - \\ + c(\lambda_S + \omega + f)] , \quad (4.45)$$

$$T' = c_{11}s(\lambda_S - \tilde{\omega} - f) - c_{12}s(\lambda_S + \tilde{\omega} + f) - c_{21}s(\lambda_S + \omega - \Omega + f) + \\ + c_{22}s(\lambda_S - \omega + \Omega - f) + \frac{1}{2} s(\epsilon)s(I)[s(\lambda_S - \omega - f) + \\ + s(\lambda_S + \omega + f)] , \quad (4.46)$$

$$N' = \left[ -c^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)s(\lambda_S - \Omega) + s^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)s(\lambda_S + \Omega) \right] s(I) + c(I)s(\epsilon)s(\lambda_S), \quad (4.47)$$

onde  $\lambda_S$  é a longitude do Sol (medida sobre a eclíptica),  $\epsilon$  é a obliquidade da eclíptica e os coeficientes  $c_{ij}$  que aparecem nas Equações 4.45 a 4.46 são

$$c_{11} = \cos^2 \frac{I}{2} \cos^2 \frac{\epsilon}{2} , \\ c_{12} = \cos^2 \frac{I}{2} \sin^2 \frac{\epsilon}{2} , \\ c_{21} = \sin^2 \frac{I}{2} \cos^2 \frac{\epsilon}{2} , \\ c_{22} = \sin^2 \frac{I}{2} \sin^2 \frac{\epsilon}{2} . \quad (4.48)$$

É importante notar que a componente  $N'$  da Equação 4.47 não contém elementos de curto período. As Equações 4.45 e 4.46 podem ser desenvolvidas e escritas como

$$R' = R'_p \cos f + T'_p \sin f , \tag{4.49}$$

$$T' = -R'_p \sin f + T'_p \cos f ,$$

sendo  $R'_p$  e  $T'_p$  os valores de  $R'$  e  $T'$  no perigeu, onde  $f = 0$ , ou seja, são funções periódicas de longo período. Assim, as componentes da força perturbadora  $R$ ,  $T$  e  $N$  podem ser escritas na forma final

$$R = R_p \cos f + T_p \sin f ,$$

$$T = -R_p \sin f + T_p \cos f , \tag{4.50}$$

$$N = KN' ,$$

sendo  $R_p = KR'_p$ ,  $T_p = KT'_p$  os valores de  $R$  e  $T$  no perigeu. A componente  $N$  não contém termos de curto período.

A pressão de radiação só atua no satélite quando este se encontra na região iluminada pelo Sol, portanto, é preciso calcular de forma analítica os ângulos, em anomalia excêntrica (ou verdadeira), de entrada e saída do satélite na sombra. Uma maneira de fazer isso é calcular a interseção do cilindro de sombra projetado pela Terra na direção oposta ao Sol, com a elipse da órbita do satélite (Escobal, 1965), conforme a Figura 4.3.

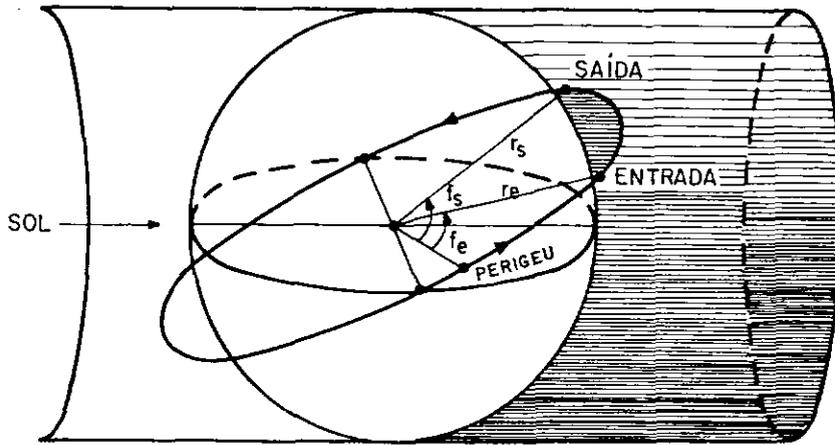


Fig. 4.3 - Entrada e saída do satélite na sombra.

As Equações 4.50, assim como as Equações 4.27, estão escritas e podem ser integradas em função da anomalia verdadeira desde a saída até a entrada do satélite na sombra, resultando nas seguintes variações por órbita dos elementos orbitais (Cook, 1962):

$$\Delta a = \frac{2}{n_0^2 a} [A T_p + a(\cos E_E - \cos E_S)] , \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \Delta e = & \frac{T_p}{\mu} \left[ 3a^2(1 - e^2)^{1/2} D - \frac{c}{2e} + \frac{a}{2e} (1 - 4e^2)A \right] - \\ & + \frac{R_p}{2\mu} \left[ F + \frac{a(1 - e^2)}{e^2} H + \frac{1}{e} B \right] , \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \Delta I = & \frac{N}{\mu} \left\{ \left[ \frac{c}{2(1 - e^2)} + \frac{(1 + 2e^2)}{2(1 - e^2)} aA - \frac{3a^2 e}{(1 + e^2)^{1/2}} D \right] \cos \omega - \right. \\ & \left. + \frac{F}{2e} \operatorname{sen} \omega \right\} , \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\Delta\Omega = \frac{N}{\mu \operatorname{sen} I} \left\{ \frac{F \cos\omega}{e} + \left[ \frac{c}{2(1-e^2)} + \frac{1+2e^2}{2(1-e^2)} aA - \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3a^2e}{(1-e^2)^{1/2}} D \right] \operatorname{sen}\omega \right\}, \quad (4.54)$$

$$\Delta\omega + \Delta\Omega \cos I = - \frac{R_p}{\mu e} \left[ 3a^2(1-e^2)^{1/2} D + \frac{c}{2e} - \frac{a}{2e} (1+2e^2)A \right] + \\ + \frac{T_p}{2\mu e^3} [eB + a(1-e^2)H], \quad (4.55)$$

$$\Delta M = - \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a} G - (1-e^2)^{1/2} (\Delta\omega + \Delta\Omega \cos I) - \\ + \frac{2}{n_0^2 a} [P R_p + Q \sqrt{1-e^2} T_p], \quad (4.56)$$

onde:

$$r_{E,s} = a(1 - e \cos E_{E,s}), \\ A = r_E \operatorname{sen} f_E - r_S \operatorname{sen} f_S, \\ B = r_E^2 \cos f_E - r_S^2 \cos f_S, \\ C = r_E^2 \operatorname{sen} f_E - r_S^2 \operatorname{sen} f_S, \\ D = \operatorname{arctg} \left[ \frac{(1-e^2)^{1/2} \operatorname{tg}(f/2)}{1+e} \right]_{f_E}^{f_S}, \\ F = r_E^2 - r_S^2, \\ G = (E - e \operatorname{sen} E) \Big|_{E_E}^{E_S}, \\ H = r_E - r_S, \quad (4.57)$$

$$P = \left[ \begin{array}{c} (1+e^2)\text{sen}E - \frac{3e}{2} E - \frac{e}{4} \text{sen}2E \\ E_S \\ E_E \end{array} \right],$$

$$Q = \left[ \begin{array}{c} \frac{e}{4} \text{cos}2E - \text{cos}E \\ E_S \\ E_E \end{array} \right],$$

sendo  $f_E$ ,  $E_E$ ,  $f_S$  e  $E_S$  ângulos de entrada e saída na sombra em anomalia verdadeira e excêntrica, respectivamente.

Se o satélite estiver permanentemente iluminado, e se  $\xi$  representar qualquer um dos elementos orbitais, então:

$$\dot{\xi} = \frac{\Delta\xi}{P} = \frac{n_0 \Delta\xi}{2\pi}, \quad (4.58)$$

ou seja, a variação por período pode ser considerada como a derivada no tempo. Para satélites iluminados a integração das Equações 4.27 é de 0 a  $2\pi$ , o que resulta em:

$$\dot{a} = 0,$$

$$\dot{e} = \frac{3(1-e^2)^{1/2}}{2an_0} T_P,$$

$$\dot{I} = - \frac{3Ne \cos\omega}{2an_0(1-e^2)^{1/2}},$$

(4.59)

$$\dot{\Omega} = - \frac{3Ne \text{sen}\omega}{2an_0(1-e^2)^{1/2} \text{sen}I},$$

$$\dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos I = - \frac{3(1-e^2)^{1/2}}{2an_0e} R_P,$$

$$\dot{M} = -(1-e^2)^{1/2} (\dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos I) + \frac{3e}{n_0a} R_P,$$

onde:

$$R_p = KR'_p ,$$

$$T_p = KT'_p , \quad e$$

$$N = kN' .$$

Das Equações 4.45, 4.46 e 4.50 tem-se que:

$$R'_p = c_{11}c(\lambda_S - \tilde{\omega}) + c_{12}c(\lambda_S + \tilde{\omega}) + c_{21}c(\lambda_S + \omega - \Omega) + c_{22}c(\lambda_S - \omega + \Omega) + \frac{1}{2} s(I)s(\epsilon)[c(\lambda_S - \omega) - c(\lambda_S + \omega)] ,$$

$$T'_p = c_{11}s(\lambda_S - \tilde{\omega}) - c_{12}s(\lambda_S + \tilde{\omega}) - c_{21}s(\lambda_S + \omega - \Omega) + c_{22}s(\lambda_S - \omega + \Omega) + \frac{1}{2} s(I)s(\epsilon)[s(\lambda_S - \omega) + s(\lambda_S + \omega)] , \quad (4.60)$$

$$N' = \left[ -c^2 \left( \frac{\epsilon}{2} \right) s(\lambda_S - \Omega) + s^2 \left( \frac{\epsilon}{2} \right) s(\lambda_S + \Omega) \right] s(I) + c(I)s(\epsilon)s(\lambda_S) .$$

As Equações 4.59 mostram que quase todos os elementos da órbita estão sujeitos a perturbações de longo período e é notável no caso da excentricidade onde, pelo fato de  $T_p$  ser de longo período, a órbita será ora mais excêntrica ora menos.

#### 4.8 - PRESSÃO DA LUZ REFLETIDA (ALBEDO)

A reflexão da luz pela superfície da Terra é de forma bastante complicada e depende do tipo de matéria sobre a qual o satélite está passando, por exemplo: terra, matas, rios, oceanos, geleiras, etc. Sabe-se, entretanto, que a radiação predominante na reflexão é do tipo difusa. Assim, tomando a componente difusa refletida na direção radial do satélite é fácil aceitar que a radiação refletida é igual a radiação incidente multiplicada por um coeficiente de reflexão da su

perfície da Terra. Esse coeficiente difere para cada região, por exemplo nos pólos a reflexão é maior. Entretanto, toma-se aqui um coeficiente médio que se admite ser válido para toda a região iluminada da Terra e o valor adotado para esse coeficiente é  $\bar{\alpha} = 0,31$ . A força de pressão de radiação devida ao albedo é na direção radial e no sentido Terra-satélite, logo sua expressão é:

$$F_A = \bar{\alpha} C_R \frac{S}{m} P_S \hat{r} = \bar{\alpha} K' \hat{r} , \quad (4.61)$$

onde  $K' = C_R(S/m)P_S$ , já visto na Seção 4.5, e  $\bar{\alpha}$  é o coeficiente de albedo.

Para estudar a influência da força de albedo nos elementos orbitais basta obter suas componentes nas direções R, T e N e substituí-las nas Equações 4.27. Como a força de albedo é na direção radial, a única componente não-nula é R, ou seja:

$$R = F_A \cdot \hat{e}_R = \bar{\alpha} K' \hat{r} \cdot \hat{e}_R = \bar{\alpha} K' . \quad (4.62)$$

Substituindo a componente R nas Equações 4.27 obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2e}{n_0 \gamma} \bar{\alpha} K' \operatorname{sen} f , \\ \dot{e} &= \frac{\gamma}{n_0 a} \bar{\alpha} K' \operatorname{sen} f , \\ \dot{\omega} &= \frac{\gamma}{n_0 a e} \bar{\alpha} K' \operatorname{cos} f , \\ \dot{M} &= n_0 - \frac{2\bar{\alpha} K'}{n_0 a} (1 - e \operatorname{cos} E) - \gamma \dot{\omega} , \end{aligned} \quad (4.63)$$

sendo  $\gamma = (1 - e^2)^{1/2}$ . Os demais elementos da órbita não são perturbados pelo albedo. Usando as relações

$$\operatorname{sen}f dt = \frac{1}{n_0} (\cos E - e) dE , \quad (4.64)$$

$$\operatorname{cos}f dt = \frac{\gamma}{n_0} \operatorname{sen}E dE ,$$

e integrando a Equação 4.63 em anomalia excêntrica obtêm-se:

$$\Delta a = \frac{2e}{n_0^2 \gamma} \bar{a} K' (A^* - eB^*) ,$$

$$\Delta e = \frac{\gamma}{n_0^2 a} \bar{a} K' (A^* - eB^*) ,$$

$$\Delta \omega = \frac{\gamma^2}{n_0^2 a e} \bar{a} K' C^* , \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \Delta M = & - \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a} (B^* - eA^*) - \frac{2\bar{a} K'}{n_0^2 a} \left[ \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) B^* - \right. \\ & \left. + 2aA^* + \frac{e^2}{4} D^* \right] - \gamma \Delta \omega , \end{aligned}$$

sendo:

$$A^* = \operatorname{sen}E_E - \operatorname{sen}E_S ,$$

$$B^* = E_E - E_S ,$$

$$C^* = \operatorname{cos}E_E - \operatorname{cos}E_S ,$$

$$D^* = \operatorname{sen}2E_E - \operatorname{sen}2E_S .$$

(4.66)

Analisando as expressões anteriores das derivadas e suas integrações, vê-se que o albedo  $\bar{s}_0$  introduz perturbações periódicas de *curto período*.

Analisando as Equações 4.50 das componentes (R, T e N) da força de pressão de radiação nota-se a sua natureza periódica, de curto e longo período, sendo a parte de curto período (período orbital) representada por  $\text{senf}$  e  $\text{cosf}$ , e a parte de longo período pelos argumentos  $\lambda_s \pm \omega \pm \Omega$ ,  $\lambda_s \pm \omega$  e  $\lambda_s \pm \Omega$  das funções  $R_p$ ,  $T_p$  e  $N$ . Assim, como essas forças são substituídas nas Equações 4.27 conclui-se que os elementos da órbita estão sujeitos a perturbações de curto e longo período. Entretanto, as Equações 4.59 mostram que: a) para satélites permanentemente iluminados o semi-eixo maior não é afetado por nenhuma perturbação periódica, b) para satélites que passam pela sombra, o semi-eixo maior contém perturbações de longo período. Os longos períodos das funções  $R_p$ ,  $T_p$  e  $N$  são do tipo:

$$P = \frac{2\pi}{\dot{\lambda}_s \pm \dot{\omega} \pm \dot{\Omega}}, \frac{2\pi}{\dot{\lambda}_s \pm \dot{\omega}}, \frac{2\pi}{\dot{\lambda}_s \pm \dot{\Omega}} \quad (4.67)$$

e podem variar de 20 a 180 dias. Na integração analítica das Equações 4.59 surgem os mesmos denominadores da expressão do período (P) e portanto os seguintes casos de ressonância podem ocorrer:

$$\dot{\lambda}_s \pm \dot{\omega} \pm \dot{\Omega} = 0 ,$$

$$\dot{\lambda}_s \pm \dot{\omega} = 0 , \quad (4.68)$$

$$\dot{\lambda}_s \pm \dot{\Omega} = 0 .$$

#### 4.9 - COMPOSIÇÃO DAS DIVERSAS PERTURBAÇÕES

As diversas perturbações que atuam num satélite artificial, ou seja, força devida ao campo gravitacional, força de arrasto atmosférico, força de pressão de radiação e outras, podem ser juntadas aditivamente (ver Apêndice D) da forma:

$$a = a_0 + \Delta a_G + \Delta a_A + \Delta a_{PR} + \dots$$

$$e = e_0 + \Delta e_G + \Delta e_A + \Delta e_{PR} + \dots$$

$$I = I_0 + \Delta I_G + \Delta I_A + \Delta I_{PR} + \dots$$

(4.69)

$$\Omega = \Omega_0 + \Delta \dot{\Omega} t + \Delta \Omega_G + \Delta \Omega_A + \Delta \Omega_{PR} + \dots$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta \dot{\omega} t + \Delta \omega_G + \Delta \omega_A + \Delta \omega_{PR} + \dots$$

$$M = M_0 + \Delta \dot{M} t + \Delta M_G + \Delta M_A + \Delta M_{PR} + \dots$$

onde  $a_0$ ,  $e_0$ ,  $I_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\omega_0$  e  $M_0$  são valores iniciais (de preferência médios);  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{M}$  são calculados pelas Expressões 4.24 sō para perturbações seculares; e os  $\Delta(a_G, e_G, I_G, \Omega_G, \omega_G, M_G)$  sō as perturbações periōdicas devidas ao geopotencial. As variações com índices A e PR sō as devidas ao arrasto e  $\bar{a}$  pressão de radiação, respectivamente.

## CAPÍTULO 5

### PERTURBAÇÕES NÃO-LINEARES

#### 5.1 - MÉTODO DE BROUWER

O coeficiente  $C_{20}(-J_2)$  do geopotencial é cerca de 1000 vezes maior do que todos os outros coeficiente  $C_{nm}, S_{nm}$ . É de esperar, portanto, que se os efeitos de  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  são descritos como perturbações lineares (Equações 4.22), o efeito de  $C_{20}$  deve ser considerado como perturbação não-linear, de ordem  $(C_{20})^2$ . Para isso, lança-se mão da teoria de perturbação de Von Zeipel que consiste basicamente no seguinte: toma-se a função hamiltoniana do sistema, em função das variáveis de Delaunay  $(L, G, H, \ell, g, h)$  e efetua-se uma série de transformações canônicas eliminando sucessivamente as variáveis  $\ell = M$  (curto período), depois  $g = \omega$  (longo período) e em seguida  $h = \Omega$  (longo período), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H(L, G, H, \ell, g, h) &\xrightarrow{TC} H'(L', G', H', \_, g', \_) , \\ &\xrightarrow{TC} H''(L'', G'', H'', \_, \_, \_) , \end{aligned} \quad (5.1)$$

sendo  $H$  o hamiltoniano,  $L = (\mu a)^{1/2}$ ,  $G = L(1 - e^2)^{1/2}$  e  $H = G \cos I$ , então pelas equações de Hamilton

$$\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i ,$$

$$\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i ,$$

onde  $p_i = (L, G, H)$  e  $q_i = (\ell, g, h)$ , e como o último hamiltoniano  $H''$  das Equações 5.1 não contém os  $q_i$ , tem-se que:

$$\begin{cases} p_i'' = (\text{cte})_i , \\ q_i'' = q_i'' + (\text{cte})_i(t - t_0) . \end{cases} \quad (5.2)$$

A vantagem de obter uma equação como a Equação 5.2 é que, por esta ser linear no tempo, permite que se faça a propagação no tempo. O objetivo do método empregado é encontrar funções geratrizes que permitam as transformações propostas até chegar às Equações 5.2, que são as variáveis médias (seculares). Assim, conforme o método de Von Zeipel, a função geratriz  $S$  é expandida em termos de ordem zero até 2ª ordem, sendo que a ordem é aqui caracterizada pela presença de  $J_2$  (1ª ordem) e  $J_2^2$  (2ª ordem). O  $H$  escrito como  $H = H_0 + H_1(J_2)$  é de 1ª ordem, e as equações resultantes são equivalentes às de Lagrange (Equações 4.22) que também são de 1ª ordem. Colocando o termo  $H_2(J_2^2)$  em  $H$ , as equações resultantes são de 2ª ordem, mas isso só é feito no novo hamiltoniano, uma vez que se espera existir uma transformação canônica que permita escrever o novo hamiltoniano com termos de 2ª ordem a partir do antigo que só contém termos de 1ª ordem.

A transformação canônica conveniente é aquela em que  $S = S(q,P)$ , onde  $S$ , a função geratriz da transformação (Goldstein, 1953), satisfaz às equações:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \begin{cases} L = L' + \partial S_1 / \partial \ell + \partial S_2 / \partial \ell + \dots , \\ G = G' + \partial S_1 / \partial g + \partial S_2 / \partial g + \dots , \\ H = H' + \partial S_1 / \partial h + \partial S_2 / \partial h + \dots , \end{cases} \quad (5.3)$$

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial p_i} \begin{cases} \ell' = \ell + \partial S_1 / \partial L' + \partial S_2 / \partial L' + \dots , \\ g' = g + \partial S_2 / \partial G' + \partial S_2 / \partial G' + \dots , \\ h' = h + \partial S_2 / \partial H' + \partial S_2 / \partial H' + \dots , \end{cases} \quad (5.4)$$

sendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = [L, G, H] \\ q_i = [\ell, g, h] \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_i = [\ell', g', h'] \\ P_i = [L', G', H'] \end{array} \right. .$$

A função geratriz deve portanto conter  $S_2$  para captar termos de 2ª ordem e  $\bar{e}$  é escolhida da seguinte forma:

$$S = L'\ell + G'g + H'h + S_1(L', G', H', \ell, g) + S_2(L', G', H', \ell, g) + \dots , \quad (5.5)$$

onde:

$$S_0 = L'\ell + G'g + H'h .$$

O hamiltoniano  $\bar{e}$  escrito como uma expansão de ordem zero até uma dada ordem e na notação aqui adotada  $F = -H$ , ou seja:

$$F = F_0 + F_1 + \dots , \quad (5.6)$$

onde:

$$F_0 = \frac{\mu}{2a} \quad e \quad F_1 = R \text{ (até 1ª ordem),}$$

sendo:

$$R = \frac{\mu a^2 C_{20}}{a^3} \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_2(\text{sen}\psi) ,$$

fazendo  $k_2 = a^2_e J_2/2$  e como:

$$\text{sen}\psi = \text{sen}I \text{sen}(g+f) ,$$

então:

$$R = \frac{\mu k_2}{a^3} \left[ \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 I \right) \frac{a^3}{r^3} + \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 I \right) \frac{a^3}{r^3} \cos(2g + 2f) \right] . \quad (5.7)$$

Assim, escrevendo a Equação 5.7 em função das variáveis de Delaunay, tem-se:

$$A = -1/2 + (3/2) \cos^2 I = -1/2 + (3/2)H^2/G^2 ,$$

$$B = 3/2 - (3/2)\cos^2 I = 3/2 - (3/2)H^2/G^2 ,$$

então:

$$F_1 = R = \frac{\mu^4 k_2}{L^6} A \frac{a^3}{r^3} + \frac{\mu^4 k_2}{L^6} B \frac{a^3}{r^3} \cos(2g + 2f) .$$

Definindo agora (Brouwer, 1959):

$$(a/r)^3 = (L/G)^3 + \sigma_1 ,$$

$$(a/r)^3 \cos(2g + 2f) = \sigma_2 ,$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são funções periódicas de  $\ell$  e  $g$ , o hamiltoniano em variáveis de Delaunay resulta em:

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\mu^4 k_2 A}{L^3 G^3} + \frac{\mu^4 k_2}{L^6} (A\sigma_1 + B\sigma_2) , \quad (5.8)$$

que, como se observa, não contém termos em  $h$ .

Efetuada a primeira transformação canônica que objetiva eliminar os termos de curto período (em  $\ell$ ), tem-se:

$$F(L, G, H, \ell, g) \rightarrow F'(L', G', H', \_, g') ,$$

$$F_0(L) + F_1(L, G, H, \ell, g) + \dots = F'_0(L') + F'_1(L', G', H', \ell, g) + \\ + F'_2(L', G', H', \ell, g) + \dots,$$

mas devido às Equações 5.3 e 5.4 é permitido escrever:

$$F_0(L' + S_{1\ell} + S_{2\ell} + \dots) + F_1(L' + S_{1\ell} + S_{2\ell} + \dots, G' + \\ + S_{1g} + S_{2g} + \dots, H', \ell, g) + \dots = \\ = F'_0(L') + F'_1(L', G', H', \ell, g) + F'_2,$$

$$F_0(L') + \frac{\partial F_0}{\partial L'} S_{1\ell} + \frac{\partial F_0}{\partial L'} S_{2\ell} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} S_{1\ell}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} S_{2\ell}^2 + \dots \\ + F_1(L', G', H', \ell, g) + \frac{\partial F_1}{\partial L'} S_{1\ell} + \frac{\partial F_1}{\partial L'} S_{2\ell} + \frac{\partial F_1}{\partial G'} S_{1g} + \\ + \frac{\partial F_1}{\partial G'} S_{2g} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial L'^2} S_{1\ell}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial L'^2} S_{2\ell}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial G'^2} S_{1g}^2 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial G'^2} S_{2g}^2 + \dots = F'_0(L') + F'_1(L', G', H', \ell, g) + \\ + \frac{\partial F'_1}{\partial g} \frac{\partial S_1}{\partial G'} + F'_2.$$

Separando os termos de mesma ordem obtêm-se, para

ordem zero:

$$F_0(L') = F'_0(L'), \quad (5.9a)$$

ordem 1:

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'} S_{1\ell} + F_1(L', G', H', \ell, g) = F'_1(L', G', H', \ell, g), \quad (5.9b)$$

ordem 2:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} S_{1\ell}^2 + \frac{\partial F_0}{\partial L'} S_{2\ell} + \frac{\partial F_1}{\partial L'} S_{1\ell} + \frac{\partial F_1}{\partial G'} S_{1g} = F_2' + \frac{\partial F_1'}{\partial g} \frac{\partial S_1}{\partial G'} . \quad (5.9c)$$

As Equações 5.9a e 5.9b fornecem, respectivamente:

$$F_0(L') = F_0'(L') = \mu^2/2L'^2 , \quad e \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \ell} = \left[ \frac{\partial F_0}{\partial L'} \right]^{-1} (F_1' - F_1) ,$$

onde  $F_1$  é dado pela Equação 5.8 e  $F_1'$  é a sua parte não-periódica.  $F_1$  é desdobrada em uma parte secular e em uma parte periódica da seguinte forma:

$$F_{1s} = \frac{\mu^4 k_2}{L^3 G^3} A , \quad (5.11)$$

$$F_{1p} = \frac{\mu^4 k_2}{L^6} (A\sigma_1 + B\sigma_2) , \quad (5.12)$$

$$F_1' = \frac{\mu^4 k_2}{L'^3 G'^3} A . \quad (5.13)$$

Assim, a segunda das Equações 5.10 torna-se:

$$\frac{\partial S_1}{\partial \ell} = \frac{\mu^4 k_2}{L'^3} (A\sigma_1 + B\sigma_2) . \quad (5.14)$$

A integração desta expressão, para obter  $S_1$ , faz-se me diante o uso das integrais (Brouwer, 1959):

$$\int \sigma_1 d\ell = \int \left[ \frac{a^3}{r^3} - \frac{L^3}{G^3} \right] d\ell = \frac{L^3}{G^3} (f - \ell + e \operatorname{senf}) , \quad (5.15)$$

$$\int \sigma_2 \, d\ell = \frac{L^3}{G^3} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2g + 2f) + \frac{e}{2} \operatorname{sen}(2g + f) + \frac{e}{6} \operatorname{sen}(2g + 3f) \right], \quad (5.16)$$

que substituïdas na Equação 5.14 e integrando-a resulta em:

$$S_1 = \frac{\mu^2 k_2}{G^3} \left\{ A(f - \ell + e \operatorname{sen} f) + B \left[ \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2g + 2f) + \frac{e}{2} \operatorname{sen}(2g + f) + \frac{e}{6} \operatorname{sen}(2g + 3f) \right] \right\}. \quad (5.17)$$

Na Equação 5.17 não aparece constante de integração por que s̄o serão usadas as derivadas parciais de S<sub>1</sub>.

As relações entre as antigas e novas variáveis são calculadas pelas Expressões 5.3 e 5.4, que dependem de S = S<sub>0</sub> + S<sub>1</sub> + S<sub>2</sub> + ...; assim para introduzir termos de 2ª ordem, tem-se de calcular S<sub>2</sub> pela Expressão 5.9c, onde aparece o termo S<sub>1ℓ</sub><sup>2</sup> de 2ª ordem. Mas como a primeira transformação relaciona s̄o variáveis de curto período (que tem pequena amplitude) e como o cálculo de S<sub>2</sub> seria bastante laborioso, Brouwer preferiu avaliar o termo de 2ª ordem através de F<sub>2</sub><sup>1</sup> e s̄o introduzi-lo nas equações de Hamilton para o cálculo das variações dos elementos médios no tempo, como será feito adiante.

A derivada parcial de S<sub>1</sub> em relação a g é:

$$\frac{\partial S_1}{\partial g} = \frac{\mu^2 k_2}{G^3} B \left[ \cos(2g + 2f) + e \cos(2g + f) + \frac{e}{3} \cos(2g + 3f) \right], \quad (5.18)$$

pondo  $\gamma_2 = \mu^2 k_2 / L^4$  e usando as Equações 5.3 e 5.4, tem-se para uma aproximação de 1ª ordem:

$$L = L' \left\{ 1 + \gamma_2 \left[ \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G'^2} \right) \left( \frac{a^3}{r^3} - \frac{L'^3}{G'^3} \right) + \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{H^2}{G'^2} \right) \frac{a^3}{r^3} \cos(2g+2f) \right] \right\},$$

$$G = G' \left\{ 1 + \gamma_2 \frac{L'^4}{G'^4} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{H^2}{G'^2} \right) \left[ \cos(2g+2f) + e \cos(2g+f) + \frac{e}{3} \cos(2g+3f) \right] \right\}, \quad (5.19)$$

$$H = H',$$

$$\begin{aligned} \ell = \ell' - \frac{\gamma_2}{e} \frac{L'}{G'} \left\{ \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G'^2} \right) \left( \frac{a^2}{r^2} \frac{G'^2}{L'^2} + \frac{a}{r} + 1 \right) \text{sen}f + \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^2}{G'^2} \right) \left( -\frac{a^2}{r^2} \frac{G'^2}{L'^2} - \frac{a}{r} + 1 \right) \text{sen}(2g+f) + \left( \frac{a^2}{r^2} \frac{G'^2}{L'^2} + \frac{a}{r} + \frac{1}{3} \right) \text{sen}(2g+3f) \right\}, \\ g = g' + \frac{\gamma_2}{e} \frac{L'^2}{G'^2} \left\{ \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G'^2} \right) \left( \frac{a^2}{r^2} \frac{G'^2}{L'^2} + \frac{a}{r} + 1 \right) \text{sen}f + \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^2}{G'^2} \right) \left[ \left( -\frac{a^2}{r^2} \frac{G'^2}{L'^2} - \frac{a}{r} + 1 \right) \text{sen}(2g+f) + \left( \frac{a^2}{r^2} \frac{G'^2}{L'^2} + \frac{a}{r} + \frac{1}{3} \right) \text{sen}(2g+3f) \right] \right\} + \gamma_2 \frac{L'^4}{G'^4} \left\{ \left( -\frac{3}{2} + \frac{15}{2} \frac{H^2}{G'^2} \right) \cdot (f - \ell + e \text{sen}f) + \left( \frac{9}{2} - \frac{15}{2} \frac{H^2}{G'^2} \right) \left[ \frac{1}{2} \text{sen}(2g+2f) + \frac{e}{2} \text{sen}(2g+f) + \frac{e}{6} \text{sen}(2g+3f) \right] \right\}, \quad (5.20) \end{aligned}$$

$$h = h' - 3\gamma_2 \frac{L'^4 H}{G'^5} \left[ f - \lambda + e \operatorname{sen} f - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2g + 2f) - \right. \\ \left. + \frac{e}{2} \operatorname{sen}(2g + f) - \frac{e}{6} \operatorname{sen}(2g + 3f) \right],$$

onde:

$$E - e \operatorname{sen} E = \lambda,$$

$$r \operatorname{sen} f = (1 - e^2)^{1/2} a \operatorname{sen} E,$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E,$$

$$r \operatorname{cos} f = a(\cos E - e).$$

Como já foi comentado, as perturbações de curto período são de pequena amplitude, portanto sō se faz necessārio avaliar termos de 2ª ordem atravēs da parte secular da Expressāo 5.9c, que ē:

$$\left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} \left( \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial F_1}{\partial G'} \frac{\partial S_1}{\partial g} \right]_S = F_2^* \quad (5.21)$$

Substituindo as derivadas parciais de  $S_1$ ,  $F_0$  e  $F_1$  na Equaçāo 5.21, obtēm-se para  $F_2^*$ :

$$F_2^* = \frac{\mu^6 k_2^2}{L'^{10}} \left[ \frac{15}{32} \frac{L'^5}{G'^5} \left( 1 - \frac{18}{5} \frac{H^2}{G'^2} + \frac{H^4}{G'^4} \right) + \frac{3}{8} \frac{L'^6}{G'^6} \left( 1 - 6 \frac{H^2}{G'^2} + 9 \frac{H^4}{G'^4} \right) - \right. \\ \left. + \frac{15}{32} \frac{L'^7}{G'^7} \left( 1 - 2 \frac{H^2}{G'^2} - 7 \frac{H^4}{G'^4} \right) \right] - \frac{3\mu^6 k_2^2}{16L'^{10}} \left[ \left( \frac{L'^5}{G'^5} - \frac{L'^7}{G'^7} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left( 1 - 16 \frac{H^2}{G'^2} + 15 \frac{H^4}{G'^4} \right) \right] \cos 2g',$$

onde no último termo do 2º membro  $g$  foi substituído por  $g'$ , o que é possível por ter este termo o fator  $k_2^2$  multiplicado.

O hamiltoniano final da primeira transformação toma a forma:

$$F' = \frac{\mu^2}{2L'^2} + \frac{\mu^4 k_2}{L'^3 G'^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G'^2} \right) + F_2^* , \quad (5.23)$$

e  $F_2^*$  pode ser separado em duas partes, uma periódica ( $F_{2p}^*$ ) e uma secular ( $F_{2s}^*$ ):

$$F_2^* = F_{2s}^*(L', G', H') + F_{2p}^*(L', G', H', g') . \quad (5.24)$$

A nova função geratriz para eliminar  $g'$  é:

$$S^* = L''g' + G''g' + H''h' + S_1^*(L'', G'', H'', g') , \quad (5.25)$$

e a transformação canônica  $\bar{F}' = F''$  que expandida em Taylor resulta em:

$$F'_0 = F'_1(L', G', H') + F_2^* = F''_0 + F''_1 + F''_2 ,$$

$$F'_0 + F'_1 \left( L'', G'' + \frac{\partial S_1^*}{\partial g^1} , H'' \right) + F_{2s}^* + F_{2p}^* = F''_0 + F''_1 + F''_2 , \quad (5.26)$$

ou:

$$F'_0 = F''_0 , \quad (5.27a)$$

$$F'_1 = F''_1 , \quad (5.27b)$$

$$\frac{\partial F'_1}{\partial G''} \frac{\partial S_1^*}{\partial g^1} + F_{2p}^* = 0 , \quad (5.27c)$$

$$F_{2s}^* = F''_2 . \quad (5.27d)$$

Da Equação 5.23, obtêm-se:

$$\frac{\partial F_1'}{\partial G''} = \frac{3}{2} \frac{\mu^4 k_2}{L'^3 G''^4} \left( 1 - 5 \frac{H^2}{G''^2} \right), \quad (5.28)$$

em que  $L'$  e  $H$  foram substituídos por  $L''$  e  $H''$ . Assim a Equação 5.27c fornece:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1^*}{\partial g'} = G'' \gamma_2 & \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{L'^2}{G''^2} - \frac{L'^4}{G''^4} \right) \left( 1 - 16 \frac{H^2}{G''^2} + 15 \frac{H^4}{G''^4} \right) \right] \cdot \\ & \cdot \left( 1 - 5 \frac{H^2}{G''^2} \right)^{-1} \cos 2g'. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Esta expressão contém o fator:

$$\left( 1 - 5 \frac{H^2}{G''^2} \right)^{-1} = (1 - 5 \cos^2 I)^{-1},$$

que para  $I = 63,4^0$  (ângulo crítico) apresenta singularidade e a sua transformação não é possível.

As equações de 1ª ordem para termos seculares e de longo período são:

$$L' = L'',$$

$$G' = G'' + \partial S_1^* / \partial g', \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} G' = G'' & \left\{ 1 + \gamma_2 \left( \frac{L'^2}{G''^2} - \frac{L'^4}{G''^4} \right) \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - 11 \frac{H^2}{G''^2} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. + 5 \frac{H^4}{G''^4} \left( 1 - 5 \frac{H^2}{G''^2} \right)^{-1} \right] \cos 2g'' \right\}, \end{aligned}$$

$$H' = H''.$$

Da Equação 5.29, obtêm-se:

$$S_1^* = G'' \gamma_2 \left( \frac{L'^2}{G''^2} - \frac{L'^4}{G''^4} \right) \left[ \frac{1}{16} \left( 1 - 11 \frac{H^2}{G''^2} \right) - \right. \\ \left. + \frac{5}{2} \frac{H^2}{G''^4} \left( 1 - 5 \frac{H^2}{G''^2} \right)^{-1} \right] \text{sen} 2g'' , \quad (5.31)$$

e a relação entre as coordenadas é:

$$l' = l'' - \frac{\partial S_1^*}{\partial L''} , \\ l' = l'' + \gamma_2 \frac{L'}{G''} \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - 11 \frac{H^2}{G''^2} \right) - 5 \frac{H}{G''^4} \left( 1 - 5 \frac{H^2}{G''^2} \right)^{-1} \right] \text{sen} 2g'' , \\ g' = g'' - \frac{\partial S_1^*}{\partial G''} , \quad (5.32)$$

$$g' = g'' + \gamma_2 \left[ \frac{1}{16} \frac{L'^2}{G''^2} \left( 1 - 33 \frac{H^2}{G''^2} \right) - \frac{3}{16} \frac{L'^4}{G''^4} \left( 1 - \frac{55}{3} \frac{H^2}{G''^2} \right) + \right. \\ \left. + \left( -\frac{25}{2} \frac{L'^2}{G''^2} + \frac{35}{2} \frac{L'^4}{G''^4} \right) \frac{H^4}{G''^4} \left( 1 - 5 \frac{H^2}{G''^2} \right)^{-1} - \right. \\ \left. + 25 \left( \frac{L'^2}{G''^2} - \frac{L'^4}{G''^4} \right) \frac{H^6}{G''^6} \left( 1 - 5 \frac{H^2}{G''^2} \right)^{-2} \right] \text{sen} 2g'' ,$$

$$h' = h'' - \frac{\partial S_1^*}{\partial H} , \\ h' = h'' + \gamma_2 \left( \frac{L'^2}{G''^2} - \frac{L'^4}{G''^4} \right) \left[ \frac{11}{8} \frac{H}{G''} + 10 \frac{H^3}{G''^3} \left( 1 - 5 \frac{H^2}{G''^2} \right)^{-1} + \right. \\ \left. + 25 \frac{H^5}{G''^5} \left( 1 - 5 \frac{H^2}{G''^2} \right)^{-2} \right] \text{sen} 2g'' ,$$

onde nestas três últimas equações  $g'$  foi substituído por  $g''$ .

O hamiltoniano para a última transformação é:

$$F^{**} = \frac{\mu^2}{2L'^2} + \frac{\mu^4 k_2}{L'^3 G''^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G''^2} \right) + F_2^{**}, \quad (5.33)$$

usando as equações de Hamilton, é possível determinar as variações seculares no tempo, incluindo termos de 2ª ordem representados aqui por  $\gamma_2^2(J_2^2)$  e introduzidos através da Expressão 5.22:

$$\frac{d\ell''}{dt} = - \frac{\partial F^{**}}{\partial L'},$$

$$\begin{aligned} \frac{d\ell''}{dt} = n_0 \left\{ 1 + 3\gamma_2 \frac{L'^3}{G''^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G''^2} \right) + \gamma_2^2 \left[ \frac{75}{32} \frac{L'^5}{G''^5} + \frac{3}{2} \frac{L'^6}{G''^6} - \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{45}{32} \frac{L'^7}{G''^7} + \left( -\frac{135}{16} \frac{L'^5}{G''^5} - 9 \frac{L'^6}{G''^6} + \frac{45}{16} \frac{L'^7}{G''^7} \right) \frac{H^2}{G''^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{75}{32} \frac{L'^5}{G''^5} + \frac{27}{2} \frac{L'^6}{G''^6} + \frac{315}{32} \frac{L'^7}{G''^7} \right) \frac{H^4}{G''^4} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{dg''}{dt} = - \frac{\partial F^{**}}{\partial G''},$$

$$\begin{aligned} \frac{dg''}{dt} = n_0 \left\{ 3\gamma_2 \frac{L'^4}{G''^5} \left( -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \frac{H^2}{G''^2} \right) + \gamma_2^2 \left[ \frac{75}{32} \frac{L'^6}{G''^6} + \frac{9}{4} \frac{L'^7}{G''^7} - \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{105}{32} \frac{L'^8}{G''^8} + \left( -\frac{189}{16} \frac{L'^6}{G''^6} - 18 \frac{L'^7}{G''^7} + \frac{135}{16} \frac{L'^8}{G''^8} \right) \frac{H^2}{G''^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{135}{32} \frac{L'^6}{G''^6} + \frac{135}{4} \frac{L'^7}{G''^7} + \frac{1155}{32} \frac{L'^8}{G''^8} \right) \frac{H^4}{G''^4} \right] \right\}, \quad (5.34) \end{aligned}$$

$$\frac{dh''}{dt} = - \frac{\partial F^{**}}{\partial H},$$

$$\begin{aligned} \frac{dh''}{dt} = n_0 \left\{ -3\gamma_2 \frac{L'^4}{G''^4} \frac{H}{G''} + \gamma_2^2 \left[ \left( \frac{27}{8} \frac{L'^6}{G''^6} + \frac{9}{2} \frac{L'^7}{G''^7} - \frac{15}{8} \frac{L'^8}{G''^8} \right) \frac{H}{G''} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( -\frac{15}{8} \frac{L'^6}{G''^6} - \frac{27}{2} \frac{L'^7}{G''^7} - \frac{105}{8} \frac{L'^8}{G''^8} \right) \frac{H^3}{G''^3} \right] \right\}, \end{aligned}$$

sendo que  $n_0 = \mu^2/L'^3 = \mu^{1/2}/a_0^{3/2}$ .

A Figura 5.1 representa graficamente as perturbações seculares e periódicas.

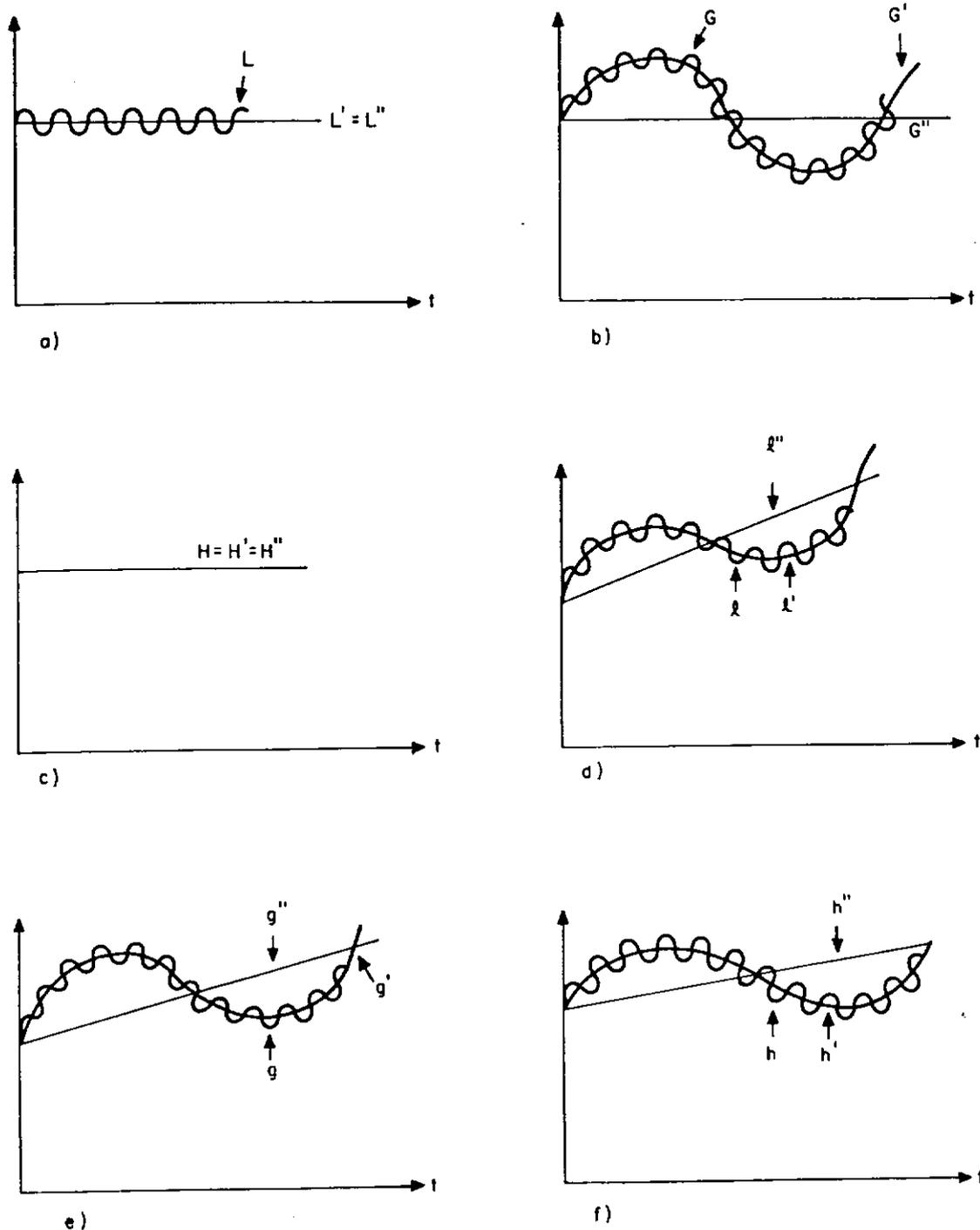


Fig. 5.1 - Representação das perturbações seculares de longo e curto períodos: (a - f) variáveis canônicas de Delaunay.

A seqüência de cálculos que deve ser adotada é a que se segue.

Dados:  $\ell, g, h, L, G, H$  (elementos osculadores) no tempo  $t_i$ , e substituídos nas Equações 5.19 e 5.20, tem-se:

$$\left. \begin{aligned} L &= L' + F_1(L', G', H, \ell, g, f) , \\ G &= G' + F_2(L', G', H, \ell, g, f) , \end{aligned} \right\} \Rightarrow (L', G', H') \\ H &= H' , \quad (5.35a)$$

$$\left. \begin{aligned} \ell &= \ell' + f_1(L', G', H, \ell, g, f) , \\ g &= g' + f_2(L', G', H, \ell, g, f) , \\ h &= h' + f_3(L', G', H, \ell, g, f) , \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\ell', g', h')$$

sendo  $r, f, r/a$  calculados com as expressões

$$\begin{aligned} E - e \operatorname{sen} E &= \ell , \\ r \operatorname{sen} f &= (1 - e)^{1/2} a \operatorname{sen} E , \\ r \operatorname{cos} f &= a(\operatorname{cos} E - e) . \end{aligned}$$

Em seguida utilizam-se as Equações 5.30 e 5.32 introduzindo o valor  $g'' = g'$  e obtêm-se:

$$\left. \begin{aligned} L' &= L'' , \\ G' &= G'' + F^*(L'', G'', H, g'') , \\ H' &= H'' , \end{aligned} \right\} \Rightarrow (L'', G'', H'') , \quad (5.35b)$$

com os valores de  $L''$ ,  $G''$ ,  $H''$  podem-se calcular  $\ell''$ ,  $g''$  e  $h''$ , ou seja:

$$\left. \begin{aligned} \ell' &= \ell'' + f_1^*(L'', G'', H'', g'') , \\ g' &= g'' + f_2^*(L'', G'', H'', g'') , \\ h' &= h'' + f_3^*(L'', G'', H'', g'') . \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\ell'', g'', h'') . \quad (5.35c)$$

Estes  $\ell''$ ,  $g''$ ,  $h''$ ,  $L''$ ,  $G''$ ,  $H''$  são as constantes de integração para o tempo ( $t_i$ ) e os elementos de partida na integração das Equações 5.34 que podem ser escritas na forma:

$$\begin{aligned} \ell''_{i+1} &= \ell''_i + C_\ell \Delta t , \\ g''_{i+1} &= g''_i + C_g \Delta t , \\ h''_{i+1} &= h''_i + C_h \Delta t , \end{aligned} \quad (5.35d)$$

$$L'', G'', H'' = \text{constantes e } \Delta t = t - t_0.$$

Assim, inicia-se o processo inverso até chegar nos elementos osculadores  $\ell$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $H$  para o tempo  $t_{i+1}$  e, calculam-se as novas coordenadas para este tempo, isto é:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_X & B_X & 0 \\ A_Y & B_Y & 0 \\ A_Z & B_Z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos E - e \\ \text{sen} E \\ 0 \end{pmatrix} , \\ \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} &= \frac{an}{r} \begin{pmatrix} A_X & B_X & 0 \\ A_Y & B_Y & 0 \\ A_Z & B_Z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\text{sen} E \\ \cos E \\ 0 \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde:

$$n = (\mu/a^3)^{1/2} ,$$

$$A_X = a(\text{cosh} \cos I - \text{sinh} \text{sen} I) ,$$

$$A_Y = a(\text{sinh} \cos I + \text{cosh} \text{sen} I) ,$$

$$A_Z = a \text{sen} I \text{cosh} , \tag{5.37}$$

$$B_X = - a \sqrt{1 - e^2} (\text{sinh} \cos I + \text{cosh} \text{sen} I) ,$$

$$B_Y = a \sqrt{1 - e^2} (\text{cosh} \cos I - \text{sinh} \text{sen} I) ,$$

$$B_Z = a \sqrt{1 - e^2} \text{sen} I \text{cosh} .$$

A anomalia excêntrica "E" pode ser calculada pela equação de Kepler:

$$\lambda = E - e \text{sen} E .$$

A teoria de Brouwer foi posteriormente ampliada para coeficientes zonais até ordem  $J_5$ . Como os coeficientes dos harmônicos esféricos do geopotencial de ordem  $J_3$ ,  $J_4$  e  $J_5$  são da mesma ordem de  $J_2^2$  e este último só foi considerado para termos seculares (que são os mais significativos) do hamiltoniano, as correções acrescentadas para os harmônicos de ordem superior ( $J_3$ ,  $J_4$ ,  $J_5$ ) só introduzem termos de longo período e seculares, no hamiltoniano e na função geratriz. Assim, a teoria é a mesma aplicada à ordem  $J_2$  até a transformação  $(\lambda, g, h, L, G, H) \rightarrow (\lambda', g', h', L', G', H')$ , ou seja, até os termos de curto período. Da transformação  $(\lambda', g', h', L', G', H')$  de longo período em diante é que se usam as correções para as ordens superiores.

## CAPÍTULO 6

### RESSONÂNCIA E LIBRAÇÃO DE SATÉLITES GEOESTACIONÁRIOS

#### 6.1 - RESSONÂNCIA

Em teoria de satélite os fenômenos de ressonância estão sempre ligados aos pequenos divisores que ocorrem quando  $\dot{A} = (n - 2p)\dot{\omega} + (n - 2p + q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}) \cong 0$ . Existem várias situações em que  $\dot{A} \cong 0$ , por exemplo, se

$$n - 2p = n - 2p + q = 1, \quad (6.1)$$

tem-se que  $q = 0$  e  $n = 1 + 2p$ . Assim,

$$\dot{A} = \dot{\omega} + \dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}). \quad (6.2)$$

Se  $\dot{\omega}$  e  $\dot{\Omega}$  forem pequenos comparados com  $\dot{\theta}$  e  $\dot{M}$ , eles podem ser negligenciados e obtêm-se:

$$\dot{A} \cong \dot{M} - m\dot{\theta}. \quad (6.3)$$

Existe, portanto, um valor de  $m$  que torna  $\dot{M} \cong m\dot{\theta}$  e, em consequência,  $\dot{A} = 0$ . Isto permite a seguinte interpretação:  $\dot{A} = 0$ , ou a ressonância ocorre quando a velocidade angular do satélite ( $\dot{M}$ ) é um múltiplo inteiro ( $m\dot{\theta}$ ) da velocidade angular da Terra. Lembrando que  $\dot{M} \cong n_0$ , o valor de  $m$  que anula a Equação 6.3 é  $m = [\dot{M}/\dot{\theta}]_{int}$ , mas  $\dot{\theta} = 1$  rotação/dia, então:

$$m \cong n_0(\text{rev./dia})^{-1}. \quad (6.4)$$

Exemplo 1: Se um satélite dá 14 revoluções por dia, quais são os seus harmônicos ressonantes?

Solução:  $m = 14$ , e como  $n \geq m$  e  $n-1 = \text{par}$ ,

$$n = 14, 15, 16, 17, \dots,$$

porém, da Equação 6.1, obtém-se:

$$p = \left[ \frac{n-1}{2} \right]_{\text{int}} = 7, 8, 9, \dots,$$

e como  $n$  está relacionado à Equação 6.1, então os valores reais de  $n$  que produzem ressonância são:

$$n = 15, 17, 19, \dots \text{ pois } n \geq m.$$

Os harmônicos ressonantes são:

$$C_{(15, 17, 19, \dots)_{14}} \text{ e } S_{(15, 17, 19, \dots)_{14}}. \quad (6.5)$$

Exemplo 2: No caso de um satélite geoestacionário (ou geossíncrono) que tem  $I \cong 0^0$ , a condição para que haja ressonância é que em  $(n - 2p)\dot{\omega} + (n - 2p + q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}) \cong 0$  tenha-se:

$$n - 2p = n - 2p + q = m, \quad (6.6)$$

ou seja,  $q = 0$  e  $n - m = 2p$  (par), conforme a Tabela 6.1.

A ressonância nesse caso ocorre quando a Equação 6.1 é satisfeita, obtendo-se:

$$\dot{\omega} + \dot{M} + \dot{\Omega} - \dot{\theta} = 0. \quad (6.7)$$

Como  $\dot{\omega}$  e  $\dot{\Omega} \ll \dot{\theta} = 360^0/\text{dia}$ , e  $\dot{M} \sim \dot{\theta}$  ocorre um pequeno divisor. A ressonância ocorre pelo fato de o satélite ter a mesma velocidade angular da Terra.

TABELA 6.1

HARMÔNICOS RESSONANTES

	n	m > 0	n - m	p	RESSONANTE	HARMÔNICO
q = 0, m ≠ 0	2	1	1	0	não	C <sub>21</sub> , S <sub>21</sub>
n - m = par	--	2	0	0	sim	C <sub>22</sub> , S <sub>22</sub>
p = [(n-m)/2]	3	1	2	1	sim	C <sub>31</sub> , S <sub>31</sub>
--	--	2	1	0	não	C <sub>32</sub> , S <sub>32</sub>
--	etc.	3	0	0	sim	C <sub>33</sub> , S <sub>33</sub>

6.2 - LIBRAÇÃO DE SATÉLITES GEOESTACIONÁRIOS

Para saber qual a influência dos harmônicos ressonantes nos elementos keplerianos da órbita, basta tomar a expressão do potencial perturbador:

$$R_{nmpq} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{a_e}{a}\right)^n F_{nmpq}(I) G_{npq}(e) \left\{ \begin{array}{l} \left[ C_{nm} \right]^{n-m, \text{ par}} \\ \left[ S_{nm} \right]^{\bar{m} \text{ impar}} \end{array} \cos A + \right. \\ \left. + \begin{array}{l} \left[ S_{nm} \right]^{n-m, \text{ par}} \\ \left[ -C_{nm} \right]^{\bar{m} \text{ impar}} \end{array} \sin A \right\}, \quad (6.8)$$

e substituir as condições de ressonância da Tabela 6.1 na Equação 6.8, ou seja:

$$R_{nm, (n-m)/2, 0} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^n F_{nm, n-m/2}(I) G_{n, (n-m)/2, 0}(e) \cdot \{ C_{nm} \cos m(\omega + M + \Omega - \theta) + S_{nm} \sin m(\omega + M + \Omega - \theta) \}. \quad (6.9)$$

Esta expressão substituída nas Equações de Lagrange 4.14 mostra a variação dos elementos keplerianos devido aos harmônicos ressonantes.

Definindo:

$$C_{nm} = J_{nm} \cos m \lambda_{nm} , \quad (6.10)$$

$$S_{nm} = J_{nm} \sin m \lambda_{nm} ,$$

tal que

$$J_{nm} = \sqrt{C_{nm}^2 + S_{nm}^2} , e$$

$$\lambda_{nm} = \frac{1}{m} \operatorname{tg}^{-1}(S_{nm}/C_{nm}) ,$$

a Equação 6.9 torna-se:

$$\begin{aligned} R_{n,m,(n-m)/2,0} = & \frac{\mu}{a} \left( \frac{a_e}{a} \right)^n F_{n,m,(n-m)/2,0}^{(I)} G_{n,m,(n-m)/2,0}^{(e)} \cdot \\ & \cdot J_{nm} [\cos m \lambda_{nm} \cos(\omega + M + \Omega - \theta) + \\ & + \sin m \lambda_{nm} \sin(\omega + M + \Omega - \theta)] , \end{aligned} \quad (6.11)$$

e chamando

$$Q_{nm} = \frac{\mu}{a} \left( \frac{a_e}{a} \right)^n F_{n,m,(n-m)/2,0}^{(I)} G_{n,m,(n-m)/2,0}^{(e)} J_{nm} \quad (6.12)$$

a Equação 6.11 torna-se:

$$R_{n,m,(n-m)/2,0} = Q_{nm} \cos m(\omega + M + \Omega - \lambda_{nm} - \theta) . \quad (6.13)$$

Observando a Equação 6.11 verifica-se que devido ao fator  $(a_e/a)^n$  os harmônicos ressonantes mais significativos são aqueles em que  $n$  é pequeno, ou seja,  $n=m=2$  (pois, no caso  $a_e/a \approx 1/6,6$ ).

A Equação 6.13 pode ser então escrita na forma:

$$R_{2200} = Q_{22} \cos 2(\omega + M + \Omega - \lambda_{22} - \theta) . \quad (6.14)$$

Este potencial perturbador substituído nas Equações de Lagrange 4.14 mostra como variam os elementos keplerianos devido ao fenômeno da ressonância oriundo dos harmônicos  $C_{22}$  (elipticidade equatorial da Terra) e  $S_{22}$  (eixo principal de inércia que não coincide com Greenwich). Por exemplo, como:

$$C_{22} = 1,57117 \times 10^{-6} ,$$

$$S_{22} = -0,90310 \times 10^{-6} ,$$

então:

$$J_{22} = 1,81222 \times 10^{-6} , \text{ e}$$

$$\lambda_{22} = 14,95^\circ \text{ Oeste} ,$$

ou

$$\lambda_2 = 345,05^\circ \text{ Leste} .$$

Introduzindo a longitude astronômica ( $\lambda_A$ ) na Equação 6.13, conhecida como longitude de perna quebrada ("broken legged"), porque é medida em dois planos, e definida por:

$$\lambda_A = \omega + \Omega + M , \quad (6.15)$$

tem-se:

$$R_{2200} = Q_{22} \cos 2(\lambda_A - \lambda_{22} - \theta) . \quad (6.16)$$

Se a inclinação do satélite for  $I = 0^\circ$  e de acordo com a Figura 6.1, tem-se que:

$$\lambda = \lambda_A - \theta = \omega + \Omega + M - \theta ,$$

onde:

$\lambda$  = longitude contada de Greenwich,

$\gamma$  = ponto vernal,

G = Greenwich .

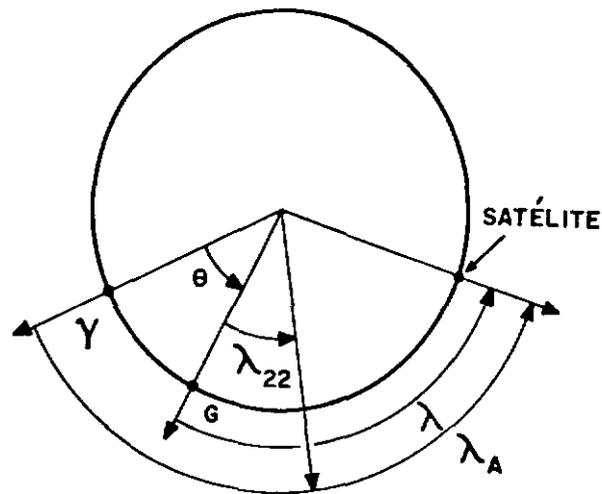


Fig. 6.1 - Representação das longitudes.

Tomando a primeira das Equações de Lagrange 4.14:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n_0 a} \frac{\partial R}{\partial M} = - \frac{4}{n_0 a} Q_{22} \operatorname{sen} 2(\lambda - \lambda_{22}) ,$$

e

$$\ddot{\lambda} = \ddot{M} = \frac{\partial n_0}{\partial a} \dot{a} = \left[ -\frac{3n_0}{2a} \right] \left[ -\frac{4}{n_0 a} Q_{22} \text{sen}2(\lambda - \lambda_{22}) \right], \quad (6.17)$$

$$\ddot{\lambda} = \frac{6}{a^2} Q_{22} \text{sen}2(\lambda - \lambda_{22}),$$

conclui-se que o satélite que deveria estar fixo sobre um ponto da Terra oscila em longitude.

A constante  $\lambda_{22}$  é a longitude do semi-eixo maior do equador elíptico da Terra, conforme mostra a Figura 6.2.

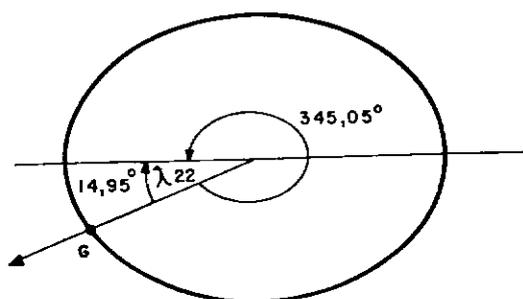


Fig. 6.2 - Equador elíptico.

Na Equação 6.17 introduzindo a transformação:

$$2(\lambda - \lambda_{22}) = \phi + k\pi, \text{ tem-se:}$$

$$\lambda = \frac{\phi}{2} + \frac{k\pi}{2} + \lambda_{22},$$

$$\ddot{\phi} + \frac{12}{a^2} Q_{22} \text{sen}\phi = 0. \quad (6.18)$$

A Equação 6.18 é a mesma do pêndulo, e  $\phi = 0$  e  $\phi = \pi$  são pontos de equilíbrio (estável e instável).

Os pontos de equilíbrio estável ( $\phi = 0$ ) são:

$$\lambda = \lambda_{22} + \frac{\pi}{2} ; \lambda_{22} + \frac{3\pi}{2} ; \dots \quad k = 1,3,5,\dots$$

Os pontos de equilíbrio instável ( $\phi = \pi$ ) são:

$$\lambda = \lambda_{22} + \pi ; \lambda_{22} + 2\pi , \dots \quad k = 1,3,5,\dots$$

onde  $k$  toma s̄o valores ímpares porque os valores pares de  $k$  acarretariam pontos estáveis e instáveis com a mesma longitude.

As trajetórias do satélite nas vizinhanças das condições de equilíbrio estão representadas na Figura 6.3.

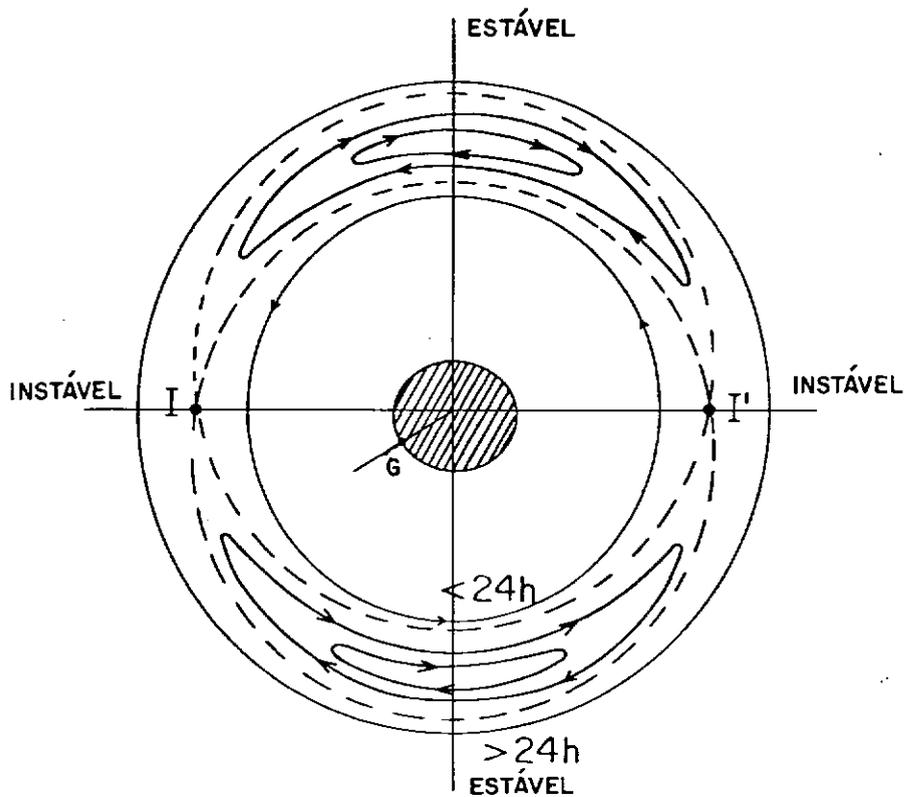


Fig. 6.3 - Pontos de estabilidade de um satélite geostacionário.

A longitude geográfica (Figura 6.4) quando contada por Oeste é negativa, ou seja:

$$\lambda_G = -(360^\circ - \lambda) \quad (6.19)$$

e para os pontos de equilíbrio estável tem-se que:

$$\lambda_1 = \lambda_{22} + 90^\circ = 75,05^\circ \Rightarrow \lambda_G = -284,95^\circ ,$$

$$\lambda_2 = \lambda_{22} + 270^\circ = 255,05^\circ \Rightarrow \lambda_G = -104,95^\circ .$$

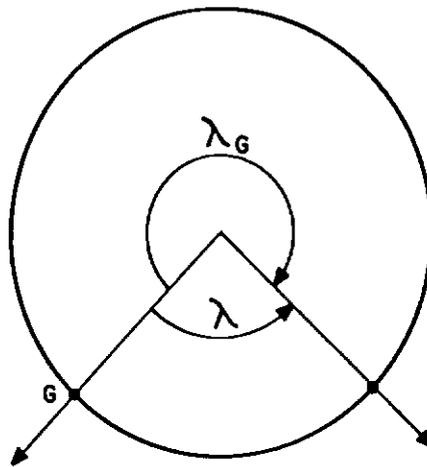


Fig. 6.4 - Longitude geográfica.

Para a resolução da Equação 6.17, é conveniente fazer a substituição  $\phi = \lambda - \lambda_{22} - \pi/2$  e  $\sigma^2 = 6Q_{22}/a^2$ , então:

$$\ddot{\phi} + \sigma^2 \text{sen}2\phi = 0 . \quad (6.20)$$

Multiplicando a Equação 6.20 por  $\dot{\phi}$  e integrando-a tem-se:

$$\dot{\phi}^2 - \sigma^2 \text{cos}2\phi = 0 , \quad (6.21)$$

e para  $\dot{\phi} = 0$ ,  $\phi = \phi_{\text{max}}$  e  $C = -\sigma^2 \text{cos}2\phi_{\text{max}}$ , substituídos na Equação 6.21, e usando a relação  $\text{cos}2\phi = 1 - 2\text{sen}^2\phi$ , obtêm-se:

$$\frac{d\phi}{dt} = [2\sigma^2(\text{sen}^2\phi_{\text{max}} - \text{sen}^2\phi)]^{1/2} = [2\sigma^2K^{-2}(1 - K^2 \text{sen}^2\phi)]^{1/2}, \quad (6.22)$$

onde:

$$K^2 = \frac{1}{\text{sen}^2\phi_{\text{max}}},$$

logo:

$$t = \frac{aK}{\sqrt{12Q_{22}}} \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 - K^2 \text{sen}^2\phi)^{1/2}} = \frac{aK}{\sqrt{12Q_{22}}} F(K, \phi), \quad (6.23)$$

sendo  $F(K, \phi)$  uma integral elíptica incompleta de primeira classe e  $K$  um parâmetro que depende de quão afastado está o satélite das condições de equilíbrio, dado por  $K = 1/\text{sen}\phi_{\text{max}}$ . Quando  $K > 1$ , o satélite oscila em torno da posição de equilíbrio (Figura 6.3). Para  $K = 1$ , o satélite se desloca em  $I$  para  $I'$  ou vice-versa e o tempo para atingir estas posições é infinito; as curvas pontilhadas na Figura 6.3 representam este caso. Quando  $K < 1$ , o satélite está fora da região do movimento síncrono. Sua posição em relação à Terra deriva e ele não é mais estacionário.

Então o período completo para a integral elíptica é  $4F(K, \pi/2)$ , ou:

$$T = \frac{2aK}{(3Q_{22})^{1/2}} F(K, \pi/2),$$

finalmente,

$$T = \frac{2a}{(3Q_{22})^{1/2}} F\left(\frac{1}{K}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.24)$$

A Tabela 6.2 mostra o período de libração para órbitas geoestacionárias sob a influência do harmônico setorial de grau dois.

TABELA 6.2

PERÍODO DE LIBRAÇÃO

a km	I graus	$\phi_{\max}$ graus	$J_{22}$	$Q_{22}$ $\text{km}^2/\text{s}^2$	T dias
42095	0	80	$2,3 \times 10^{-6}$	$1,49 \times 10^{-6}$	1044
42095	0	65	$2,3 \times 10^{-6}$	$1,49 \times 10^{-6}$	1064
42135	31	65	$2,3 \times 10^{-6}$	$1,29 \times 10^{-6}$	1144
42135	31	65	$1,83 \times 10^{-6}$	$1,03 \times 10^{-6}$	1109

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATE, R.R.; MUELLER, D.D.; WHITE, J.F. *Fundamentals of astrodynamics*. New York, Dover, 1971.
- BROUWER, D. Solution of problem of artificial satellite theory without drag. *Astronomical Journal*, 17():378,397, Nov. 1959.
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G.M. *Methods of celestial mechanics*. New York, Academic, 1961.
- COOK, G.E. Luni-solar perturbations of the orbits of an Earth satellite. *The Geophysical Journal of Royal Astronomical Society*, 6(3):271-291, Apr. 1962.
- COURANT, R.; HILBERT, D. *Methods of Mathematical physics*. Vol. I. Interscience Publ. Inc., New York, 1973.
- ESCOBAL, P.R. *Methods of orbit determination*. New York, John Wiley, 1965.
- GIACAGLIA, G.E.O. The equations of motion of an artificial satellite in nonsingular variables. *Celestial Mechanics*, 15:191-215, 1977.
- *Transformation of spherical harmonics and application to geodesy and satellite theory*. São José dos Campos, INPE, 1979. (INPE-1453-RPE/018).
- GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. Singapore, Addison-Wesley, 1973.
- HEISKANEN, W.A.; MORITZ, H. *Physical geodesy*. San Francisco, W.H. Freeman, 1967.
- KAULA, W.M. *Theory of satellite geodesy*. London, Blaisdell, 1966.
- KING HELE, D.G. *Theory of satellites orbits in atmosphere*. London, Butterworths, 1964.
- KOVALEVSKY, J. *Introduction to celestial mechanics*. New York, NY, Springer-Verlag, 1967.
- KUGA, H.K.; MEDEIROS, V.M.; CARRARA, V. *Cálculo recursivo da aceleração do geopotencial*. São José dos Campos, INPE, 1983. (INPE - 2735 -RPE/433).

- LÁLA, P. Perturbation of the satellite orbit due to solar radiation pressure, s.l., s.c.p., (1974). NASA, National Geodetic Satellite Program. Washington, 1977. (NASA SP-365).
- LAUTMAN, D.A. Perturbations of a close-Earth satellite due to sunlight diffusely reflected from the Earth. *Celestial Mechanics*, 16(1):3-25, 1977.
- NASA. National geodetic satellite program. Washington, 1977. (NASA SP-365).
- PILCHOWSKI, H.U.; SILVA, W.C.C.; FERREIRA, L.D.D. *Introdução à mecânica celeste*. São José dos Campos, INPE, 1981. (INPE-2126-RPE/350).
- SPIER, G.W. *Design and Implementation of Models for Double Precision Trajectory Program (DPTRAJ)*. Pasadena, CA, JPL, 1971. (Technical memorandum 33.451).

## APÊNDICE A

### EXPRESSÃO ANALÍTICA DA FUNÇÃO DA INCLINAÇÃO

Os harmônicos esféricos  $P_{nm}(\sin\psi)(\cos m\lambda, \sin m\lambda)$  são escritos aqui em função dos elementos keplerianos da órbita, ou seja, dos parâmetros,  $a, e, I, \Omega, \omega, M$  (ou  $T$ ). Isto se faz efetuando a rotação dos harmônicos esféricos para um sistema de coordenadas no plano da órbita (Giacaglia, 1979) (Figura A.1).

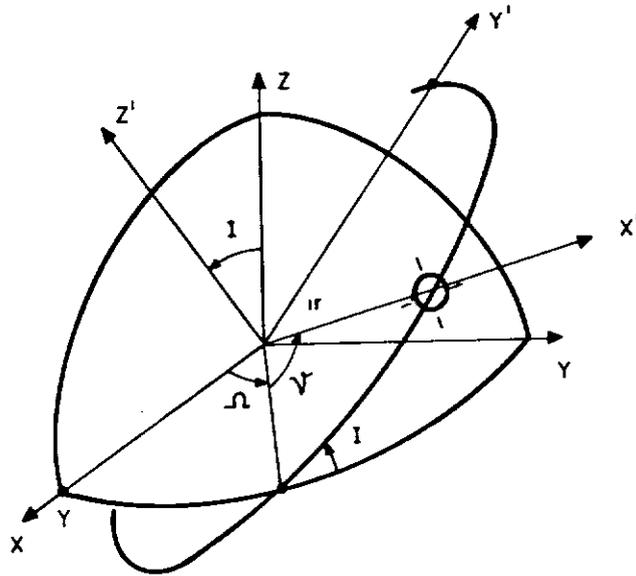


Fig. A.1 - Órbita do satélite.

A transformação de coordenadas do sistema inercial ( $X, Y, Z$ ) para o sistema do plano da órbita  $\bar{e}$  da seguinte forma:

$$X' = R_{11}X + R_{12}Y + R_{13}Z ,$$

$$Y' = R_{21}X + R_{22}Y + R_{23}Z , \quad (A.1)$$

$$Z' = R_{31}X + R_{32}Y + R_{33}Z ,$$

sendo os  $R_{ij}$  (Bate et alii, 1971):

$$R_{11} = C(\Omega)C(v) - S(\Omega)C(I)S(v) ,$$

$$R_{12} = C(\Omega)C(I)S(v) + S(\Omega)C(v) ,$$

$$R_{13} = S(I)S(v) ,$$

$$R_{21} = -C(\Omega)S(v) - S(\Omega)C(I)C(v) ,$$

$$R_{22} = C(\Omega)C(I)C(v) - S(\Omega)S(v) , \tag{A.2}$$

$$R_{23} = S(I)C(v) ,$$

$$R_{31} = S(\Omega)S(I) ,$$

$$R_{32} = -C(\Omega)S(I) ,$$

$$R_{33} = C(I) .$$

Nas Equações A.2 foi usada a notação  $\cos\alpha = C(\alpha)$ ,  $\sin\alpha = S(\alpha)$ .

Definindo os operadores  $X_1, X_2$  como:

$$X_1^2 = -\frac{\partial}{\partial X} + i\frac{\partial}{\partial Y} = -D_1 + iD_2 , \tag{A.3}$$

$$X_2^2 = \frac{\partial}{\partial X} + i\frac{\partial}{\partial Y} = D_1 + iD_2 ,$$

resultam em:

$$D_1 = (X_2^2 - X_1^2)/2 , \tag{A.4}$$

$$D_2 = (X_2^2 + X_1^2)/2i , \quad i = (-1)^{1/2} .$$

A transformação dos operadores do sistema  $(X',Y',Z')$  para o sistema  $(X,Y,Z)$  fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial X'}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Z'} \frac{\partial Z'}{\partial X} , \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X'} \frac{\partial X'}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial Z'} \frac{\partial Z'}{\partial Y} ,$$

ou na notação já usada:

$$D_1 = D_1' R_{11} + D_2' R_{21} + D_3' R_{31} , \quad (\text{A.6})$$

$$D_2 = D_1' R_{12} + D_2' R_{22} + D_3' R_{32} .$$

O operador  $D_3$  pode ser obtido lembrando que nas Equações A.3  $-X_1^2 X_2^2 = D_1^2 + D_2^2$  e levando em conta que  $1/r$  é uma função harmônica (pois, satisfaz a equação de Laplace,  $\nabla^2(1/r) = 0$ ), assim:

$$(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) \frac{1}{r} = 0 ,$$

e

$$X_1^2 X_2^2 \frac{1}{r} = D_3^2 \frac{1}{r} ,$$

então:

$$X_1 X_2 = D_3 = \frac{\partial}{\partial Z} , \quad (\text{A.7})$$

Substituindo a Equação A.6 na primeira das Equações A.3, tem-se que:

$$X_1^2 = \underbrace{D_1'(iR_{12} - R_{11})}_A + \underbrace{D_2'(iR_{22} - R_{21})}_B + \underbrace{D_3'(iR_{32} - R_{31})}_F ,$$

e substituindo  $D_1^i$ ,  $D_2^i$  e  $D_3^i$  nas Equações A.4, tem-se:

$$X_1^2 = -\frac{X_1^{i2}}{2} (A + Bi) + \frac{X_2^{i2}}{2} (A - Bi) + X_1^i X_2^i F .$$

Demonstra-se que:

$$A + Bi = -2c^2 e^{-i(v+\Omega)} ,$$

$$A - Bi = -2s^2 e^{i(v-\Omega)} , \quad (A.8)$$

$$F = -2i s c e^{-i\Omega} ,$$

onde  $c = \cos(I/2)$ ,  $s = \sin(I/2)$ , sendo  $e$  a base neperiana de logaritmos; assim:

$$X_1^2 = (-c e^{(-i/2)(v+\Omega)} X_1^i + i s e^{(i/2)(v-\Omega)} X_2^i)^2 ,$$

ou

$$X_1 = -c e^{(-i/2)(v+\Omega)} X_1^i + i s e^{(i/2)(v-\Omega)} X_2^i , \quad (A.9)$$

os quais relacionam os operadores nos dois sistemas.

Analogamente, substituindo a Equação A.6 na segunda das Equações A.3, tem-se:

$$X_2 = i s e^{(-i/2)(v-\Omega)} X_1^i - c e^{(i/2)(v+\Omega)} X_2^i , \quad (A.10)$$

resultando então para as Equações A.9 e A.10:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} X_1^i \\ X_2^i \end{pmatrix} , \quad (A.11)$$

sendo  $\det Q = c^2 + s^2 = 1$  que caracteriza uma rotação própria.

Resta agora desenvolver o harmônico esférico  $X_{nm}(\lambda, \psi)$  que, tendo em vista a relação  $\alpha = \lambda + \theta$ , resulta em:

$$X_{nm}(\alpha, \psi) = P_{nm}(\text{sen}\psi)\exp[i\text{m}(\lambda+\theta)] = X_{nm}(\lambda, \psi)e^{i\text{m}\theta}, \quad (\text{A.12})$$

onde são válidas as duas notações  $\exp(i\theta) = e^{i\theta}$ .

O harmônico esférico:

$$X_{nm}(\alpha, \psi) = P_{nm}(\text{sen}\psi)\exp(i\text{m}\alpha),$$

pode ser escrito (Courant and Hilbert, 1973) como:

$$X_{nm} = \frac{(-1)^n r^{n+1}}{(n-m)!} \left[ \frac{\partial}{\partial X} + i \frac{\partial}{\partial Y} \right]^m \left[ \frac{\partial}{\partial Z} \right]^{n-m} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (\text{A.13})$$

que de acordo com as Equações A.3 torna-se:

$$X_{nm} = \frac{(-1)^n}{(n-m)!} r^{n+1} X_1^{n-m} X_2^{n+m} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (\text{A.14})$$

A Equação A.14 é, portanto, a forma final para o harmônico esférico (na forma complexa) em função dos operadores  $X_1, X_2$ . Resta agora encontrar uma expressão que efetue a rotação do harmônico  $X_{nm}$  de um sistema para outro.

A rotação do harmônico esférico  $X_{nm}$  é efetuada mediante o uso das Equações A.11, mas primeiramente determina-se o produto  $X_1^{n-m} X_2^{n+m}$  utilizando a expressão binomial:

$$(a+x)^N = \sum_{p=0}^N \binom{N}{p} a^p x^{N-p}, \quad (\text{A.15})$$

sendo o somatório de zero a  $N = n-m$  ou  $n+m$  sempre positivo:

$$\begin{aligned}
 X_1^{n-m} X_2^{n+m} &= (-c e^{-i(v+\Omega)/2} X_1^i + i s e^{i(v-\Omega)/2} X_2^i)^{n-m} \\
 &\cdot (i s e^{-i(v-\Omega)/2} X_1^i - c e^{i(v+\Omega)/2} X_2^i)^{n+m} = \\
 &= \sum_{r=0}^{n-m} \sum_{j=0}^{n+m} \binom{n-m}{r} \binom{n+m}{j} (-1)^{r+n+m-j} c^{r+n+m-j} s^{n-m-r+j} \\
 &\cdot i^{n-m-r+j} X_1^{r+j} X_2^{2n-r-j} e^{i[(n-r-j)v+m\Omega]} .
 \end{aligned}$$

Para uniformizar a transformação é conveniente que os expoentes de  $X_1^i$  e  $X_2^i$  fiquem na forma  $n-k$  e  $n+k$ , então:

$$r+j = n-k ,$$

$$2n-r-j = n+k ,$$

assim como  $r$  e  $j$  variam de zero até  $n-m$  e  $n+m$ , respectivamente,

$$\begin{aligned}
 X_1^{n-m} X_2^{n+m} &= \sum_{k=-n}^n \sum_{j=j_1}^{j_2} \binom{n-m}{n-k-j} \binom{n+m}{j} (-1)^{m-k+j} c^{2n-2j+m-k} \\
 &\cdot s^{2j-m+k} i^{k-m} e^{i[kv+m\Omega]} X_1^{n-k} X_2^{n+k} .
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Definindo  $D'_{nmk}(I, v, \Omega)$  como:

$$\begin{aligned}
 D'_{nmk}(I, v, \Omega) &= \sum_{j=j_1}^{j_2} \binom{n-m}{n-k-j} \binom{n+m}{j} (-1)^{m-k+j} i^{k-m} c^{2n-2j+m-k} \\
 &\cdot s^{2j-m+k} e^{i[kv+m\Omega]} ,
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

obtem-se:

$$X_1^{n-m} X_2^{n+m} = \sum_{k=-n}^n D'_{nmk}(I, v, \Omega) X_1^{n-k} X_2^{n+k} . \tag{A.18}$$

De acordo com as propriedades dos elementos binomiais:

$$\binom{N}{p} = \frac{N!}{(N-p)!p!} \quad \text{para } p \geq 0 \text{ e } N \geq p ,$$

donde se conclui que:

$$j_1 = \bar{m} \bar{x}[0, m-k] , \tag{A.19}$$

$$j_2 = \bar{m} \bar{i} n[n-k, n+m] .$$

Substituindo a Equação A.18 na Equação A.14, obtêm-se:

$$X_{nm} = \frac{(-1)^n}{(n-m)!} r^{n+1} \sum_{k=-n}^n D'_{nmk}(I, v, \Omega) X_1^{n-k} X_2^{n+k} \left( \frac{1}{r} \right) , \tag{A.20}$$

mas, em decorrência da Equação A.14 tem-se:

$$X_1^{n-k} X_2^{n+k} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{(n-k)!}{(-1)^n r^{n+1}} X'_{nk} . \tag{A.21}$$

Assim a Equação A.20 fica na forma:

$$X_{nm} = \sum_{k=-n}^n \frac{(n-k)!}{(n-m)!} D'_{nmk}(I, v, \Omega) X'_{nk} . \tag{A.22}$$

Escrevendo

$$D_{nmk}(I, v, \Omega) = \frac{(n-k)!}{(n-m)!} D'_{nmk}(I, v, \Omega) , \tag{A.23}$$

a Equação A.22 toma sua forma definitiva:

$$X_{nm}(\alpha, \psi) = \sum_{k=-n}^n D_{nmk}(I, v, \Omega) X'_{nk}(\alpha', \psi') , \tag{A.24}$$

que é a expressão que efetua a rotação do harmônico esférico  $X_{nm}(\alpha, \psi)$  na forma complexa, e  $D_{nmk}$  é o operador de rotação.

Usando as Equações A.23 e A.24, efetua-se a rotação dos harmônicos  $X_{nm}(\alpha, \psi)$  para  $X'_{nm}(\alpha', \psi')$ , mas como no sistema do plano da órbita  $(X', Y', Z')$   $\alpha' = \psi' = 0$ , então:

$$X_{nm}(\alpha, \psi) = \sum_{k=-n}^n D_{nmk}(I, v, \Omega) X'_{nk}(\alpha', \psi'), \quad (\text{A.25})$$

$$X_{nm}(\alpha, \psi) = \sum_{k=-n}^n \frac{(n-k)!}{(n-m)!} D'_{nmk}(I, v, \Omega) P_{nk}(0),$$

porém dos polinômios associados de Legendre obtêm-se:

$$P_{nk}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } n-k \text{ ímpar} \\ \frac{(2n-2p)!(-1)^p}{2^n p!(n-p)!} & \text{se } n-k = 2p \text{ (par)}, \end{cases}$$

como  $k$  varia de  $-n$  a  $+n$ , logo  $0 \leq p \leq n$ ,  $k = n - 2p$ . Assim:

$$X_{nm}(\alpha, \psi) = \sum_{p=0}^n \frac{(2p)!}{(n-m)!} \frac{(2n-2p)!(-1)^p}{2^n p!(n-p)!} D'_{nm(n-2p)}(I, v, \Omega) \quad (\text{A.26})$$

Substituindo  $D'_{nm(n-2p)}$  na Equação A.17, obtêm-se:

$$X_{nm}(\alpha, \psi) = \sum_{p=0}^n \frac{(2p)!(2n-2p)!(-1)^{m-n}}{(n-m)! 2^n p!(n-p)!} \sum_{j=j_1}^{j_2} \begin{pmatrix} n-m \\ 2p-j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+m \\ j \end{pmatrix} \cdot (-1)^j c^{n+m+2p-2j} s^{n-m-2p+2j} e^{[i(kv+m\Omega)]} i^{n-m}. \quad (\text{A.27})$$

Define-se a função  $F_{nmp}^*(I)$  na forma:

$$F_{nmp}^*(I) = \frac{(2p)!(2n-2p)!}{(n-m)!2^n p!(n-p)!} \sum_{j=j_1}^{j_2} \begin{pmatrix} n-m \\ 2p-j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+m \\ j \end{pmatrix} \cdot (-1)^j c^{n+m+2p-2j} s^{n-m-2p+2j}, \quad (A.28)$$

onde:

$$j_1 = \max[0, 2p-n+m] \quad e$$

$$j_2 = \min[2p, n+m].$$

Portanto, a Equação A.27 pode ser escrita como:

$$X_{nm}(\alpha, \psi) = \sum_{p=0}^n (-1)^{m-n} F_{nmp}^*(I) \exp\{i[(n-2p)v + m\Omega]\} i^{n-m}. \quad (A.29)$$

O que se conhece por função da inclinação  $\bar{e}$ :

$$F_{nmp}(I) = (-1)^k F_{nmp}^*(I),$$

onde  $k = [(n-m)/2]$  inteiro. Então:

$$F_{nmp}(I) = \frac{(2p)!(2n-2p)!(-1)^k}{(n-m)!2^n p!(n-p)!} \sum_{j=j_1}^{j_2} \begin{pmatrix} n-m \\ 2p-j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+m \\ j \end{pmatrix} \cdot (-1)^j c^{n+m+2p-2j} s^{n-m-2p+2j}, \quad (A.30)$$

sendo:

$$j_1 = \max[0, 2p-n+m], \quad j_2 = \min[2p, n+m] \quad e \quad k = [(n-m)/2]_{int}.$$

Definindo:

$$\alpha = m-n+2p \quad e \quad F_{nmp}(I) = s^{|\alpha|} J_{nmp}(c),$$

então:

$$J_{nmp}(c) = s^{-|\alpha|} F_{nmp}(I) .$$

Introduzindo:

$$F_{nmp}^j = \frac{(2p)!(2n-2p)!(-1)^k}{(n-m)!2^n p!(n-p)!} \binom{n-m}{2p-j} \binom{n+m}{j} (-1)^j , \quad (A.31)$$

tem-se

$$J_{nmp}(c) = \sum_{j=j_1}^{j_2} F_{nmp}^j c^{\alpha+2n-2j} s^{-\alpha-|\alpha|+2j} .$$

Tomando agora,

$$\begin{cases} 2A_1 = 2j - \alpha - |\alpha| \\ A_2 = \alpha + 2n - 2j \end{cases}$$

e desenvolvendo:

$$c^{A_2} s^{2A_1} = c^{A_2} (1-c^2)^{A_1} = c^{A_2} \sum_{r=0}^{A_1} (-1)^r \binom{A_1}{r} c^{2r} ,$$

tem-se:

$$J_{nmp}(c) = \sum_{j=j_1}^{j_2} F_{nmp}^j \sum_{r=0}^{A_1} (-1)^r \binom{A_1}{r} c^{2r+A_2} . \quad (A.32)$$

A derivada  $\partial J_{nmp}(c)/\partial c$  também é importante e dada por:

$$\frac{\partial J_{nmp}(c)}{\partial c} = \sum_{j=j_1}^{j_2} F_{nmp}^j \sum_{r=0}^{A_1} (-1)^r (2r+A_2) \binom{A_1}{r} c^{2r+A_2-1} . \quad (A.33)$$

e

$$\frac{\partial F_{nmp}^{(I)}}{\partial I} = \frac{|\alpha|}{2} s^{|\alpha|-1} c J_{nmp}(c) - \frac{1}{2} s^{|\alpha|+1} \frac{\partial J_{nmp}(c)}{\partial c} \quad (A.34)$$

Os valores de  $J_{nmp}$  são mostrados na Tabela A.1.

TABELA A.1

FUNÇÃO  $J_{nmp}$  E FATOR DE NORMALIZAÇÃO

n	m	p	$ \alpha  =  m + 2p - n $	$J_{nmp}(c)$	$N_{nm}$
2	0	0	2	$-3c^2/2$	$\sqrt{5}$
2	0	1	0	$-1/2 + 3c^2 - 3c^4$	$\sqrt{5}$
2	0	2	2	$-3c^2/2$	$\sqrt{5}$
2	1	0	1	$3c^2$	$(5/3)^{1/2}$
2	1	1	1	$3c^2 - 6c^3$	$(5/3)^{1/2}$
2	1	2	3	$-3c$	$(5/3)^{1/2}$
2	2	0	0	$3c^4$	$(5/12)^{1/2}$
2	2	1	2	$6c^2$	$(5/12)^{1/2}$
2	2	2	4	3	$(5/12)^{1/2}$
3	3	3	6	15	$(14/720)^{1/2}$
10	10	10	20	$10^8$ *	$10^{-8}$ *
20	20	20	40	$10^{23}$ *	$10^{-23}$ *
30	30	30	60	$10^{40}$ *	$10^{-40}$ *
n	n	n	2n	$(2n)!/2^n \cdot n!$ *	$[2(2n+1)/(2n)!]^{1/2}$

\* significa da ordem de.

Quando os coeficientes ( $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$ ) que aparecem nas Equações A.6 estiverem na forma completamente normalizada ( $\bar{C}_{nm}$ ,  $\bar{S}_{nm}$ ), então a função da inclinação deve ser também normalizada, isto é, multiplicada pelo fator de normalização  $N_{nm}$ , ou:

$$\bar{F}_{nmp}(I) = N_{nm} F_{nmp}(I) = s^{|\alpha|} N_{nm} J_{nmp}(c),$$

$$\partial \bar{F}_{nmp}(I) / \partial I = N_{nm} \partial F_{nmp}(I) / \partial I, \quad (\text{A.35})$$

sendo

$$N_{nm} = [(2 - \delta_{m0})(2n+1)(n-n)! / (n+m)!]^{1/2}.$$

## APÊNDICE B

### FUNÇÃO DA EXCENTRICIDADE

A função da excentricidade surge quando se quer escrever as relações do tipo  $(r/a)^n [\cos mf, \sin mf]$  em função da excentricidade  $e$  e da anomalia média  $M$ . Para isto, efetua-se uma expansão de Fourier do tipo:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\ell \exp(itf) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} X_j^{\ell,t}(e) \exp(ijM), \quad (\text{B.1})$$

sendo que o coeficiente de Fourier  $X_j^{\ell,t}$  é dado por:

$$X_j^{\ell,t}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^\ell \exp[i(tf - jM)] dM. \quad (\text{B.2})$$

Levando em conta que:

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}, \quad e = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}, \quad (\text{B.3})$$

$$Z = \exp(iE) = e^{iE},$$

onde  $E$  é a anomalia excêntrica, então:

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E = (1 + \beta^2)^{-1} (1 - \beta/Z)(1 - \beta Z),$$

$$\exp(if) = \frac{a}{r} (1 + \beta^2)^{-1} Z(1 - \beta/Z)^2, \quad (\text{B.4})$$

$$\exp(-iM) = Z^{-1} \exp\left[\frac{e}{2} (Z - Z^{-1})\right],$$

$$dM = \frac{1}{i} \frac{r}{a} Z^{-1} dZ.$$

Assim, substituindo as Equações B.4 na expressão dentro do sinal de integração de  $X_j^{\ell, t}(e)$ , Equação B.2, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^\ell \exp[i(tf - jM)] dM &= \frac{1}{i} (1 + \beta^2)^{-\ell-1} (1 - \beta Z)^{\ell-t+1} \cdot \\ &\cdot \left(1 - \frac{\beta}{Z}\right)^{\ell+t+1} Z^{t-j-1} \cdot \\ &\cdot \exp\left[\frac{j e}{2} (Z - Z^{-1})\right] dZ \end{aligned}$$

desenvolvendo

$$\begin{aligned} (1 - \beta Z)^{\ell-t+1} &= \sum_{s=0}^{s_1} \binom{\ell-t+1}{s} (-\beta)^s Z^s, \\ (1 - \beta Z)^{\ell+t+1} &= \sum_{r=0}^{r_1} \binom{\ell+t+1}{r} (-\beta)^r Z^{-r}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Substituindo estas três últimas equações no integrando da Equação B.2, tem-se:

$$\begin{aligned} X_j^{\ell, t}(e) &= \frac{1}{2\pi i} (1 + \beta^2)^{-\ell-1} \sum_{s=0}^{s_1} \sum_{r=0}^{r_1} \binom{\ell-t+1}{s} \binom{\ell+t+1}{r} (-\beta)^{s+r} \cdot \\ &\cdot \oint Z^{-1-(j-t-s+r)} \exp\left[\frac{j e}{2} (Z - Z^{-1})\right] dZ, \end{aligned}$$

onde a integral  $\oint$  é efetuada no plano complexo, ao longo do círculo  $Z = 1$ . A definição da função de Bessel na forma complexa é:

$$J_\lambda(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint Z^{-1-\lambda} \exp\left[\frac{1}{2} \alpha(Z - Z^{-1})\right] dZ, \tag{B.6}$$

logo, tomando  $\lambda = j-t-s+r$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \chi_j^{\ell, t}(e) &= (1 + \beta^2)^{-\ell-1} \sum_{s=0}^{s_1} \sum_{r=0}^{r_1} \begin{pmatrix} \ell-t+1 \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell+t+1 \\ r \end{pmatrix} \\ &\cdot (-\beta)^{s+r} J_{j-t-s+r}(je) . \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Nas expressões do tipo:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1} \begin{Bmatrix} \cos(n-2p)f \\ \text{sen}(n-2p)f \end{Bmatrix} , \quad (\text{B.8})$$

identificando os índices nas Equações B.1 e B.8 encontra-se:

$$\ell = -n-1 ,$$

$$n-2p = t ,$$

e definindo por conveniência  $j = n-2p+q$ , tem-se:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1} \exp[i(n-2p)f] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi_j^{-n-1, n-2p}(e) \exp(ijM) .$$

Tomando:

$$\chi_{n-2p+q}^{-n-1, n-2p} = G_{npq}$$

tem-se:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1} \exp[i(n-2p)f] = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{npq}(e) \exp[i(n-2p+q)M] , \quad (\text{B.9})$$

sendo (Giacaglia, 1977):

$$G_{npq}(e) = (1+\beta^2)^n \sum_{s=0}^{s_1} \sum_{r=0}^{r_1} \begin{pmatrix} 2p-2n \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2p \\ r \end{pmatrix} (-\beta)^{s+r} J_{q-s+r}[(n-2p+q)e] . \quad (\text{B.10})$$

A vantagem de escolher  $j = n - 2p + q$  é que para perturbações seculares  $n - 2p + q = 0$ . Na Equação B.10 tem-se que:

$$s_1 = \begin{cases} 0 & \text{se } n = p \\ \infty & \text{se } n > p \end{cases} \quad \text{e} \quad r_1 = \begin{cases} 0 & \text{se } p = 0 \\ \infty & \text{se } p > 0 \end{cases},$$

e fazem-se necessárias as relações:

$$\begin{pmatrix} -k \\ j \end{pmatrix} = (-1)^j \begin{pmatrix} k+j-1 \\ j \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -k \\ -j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -j \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{B.11})$$

Pela Equação B.10 é fácil verificar que:

$$G_{nmp}(e) = G_{n,n-p,-q}(e). \quad (\text{B.12})$$

A função de Bessel que aparece na Equação B.10, quando  $je \leq 2$ , tem convergência rápida na forma:

$$J_N(je) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(N+j)!} \left(\frac{je}{2}\right)^{N+2j}, \quad (\text{B.13})$$

e tem por propriedade:

$$J_{-N}(je) = (-1)^N J_N(je). \quad (\text{B.14})$$

A Equação B.10 converge facilmente para valores em que  $(je/2) \leq 1$ , ou  $[(n-2p+q)e/2] \leq 1$ .

Define-se:

$$G_{npq}(e) = e^{|q|} K_{npq}(\gamma). \quad (\text{B.15})$$

A Equação B.15 faz parte da característica de D'Alembert, que afirma que a função da excentricidade  $G_{npq}(e)$  é da ordem de  $e^{|q|}$ .

multiplicada por uma s\u00e9rie em  $\gamma = \sqrt{1 - e^2}$ . Nas equa\u00e7\u00f5es planet\u00e1rias de Lagrange aparece tamb\u00e9m  $\partial G_{npq}(e)/\partial e$ , que pode ser calculado por:

$$\frac{\partial G_{npq}(e)}{\partial e} = [q] e^{[q]-1} K_{npq}(\gamma) + e^{[q]} \frac{\partial K_{npq}(\gamma)}{\partial e}, \quad (B.16)$$

onde:

$$\frac{\partial K_{npq}(\gamma)}{\partial e} = \frac{\partial K_{npq}(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial e} = - \frac{e}{\gamma} \frac{\partial K_{npq}(\gamma)}{\partial \gamma}.$$

As fun\u00e7\u00f5es  $F_{nmp}(I)$  e  $G_{npq}(e)$  s\u00e3o conhecidas por fun\u00e7\u00e3o da inclina\u00e7\u00e3o e excentricidade, respectivamente, enquanto  $J_{nmp}(c)$  e  $K_{npq}(\gamma)$  s\u00e3o as fun\u00e7\u00f5es de D'Alembert da inclina\u00e7\u00e3o e excentricidade. A fun\u00e7\u00e3o  $G_{npq}(e)$  tirada da Equa\u00e7\u00e3o B.2 pode ser calculada exatamente sempre que  $n-2p+q = 0$ , ou seja:

$$G_{npq}(e) = X_{n-2p+q}^{-n-1, n-2p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^{-n-1} \cdot \exp\{i[(n-2p)f - (n-2p+q)M]\} dM. \quad (B.17)$$

Por exemplo, para calcular  $G_{210}(e)$  o procedimento \u00e9 o seguinte:

$$G_{210}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 dM,$$

por\u00e9m, como  $r^2(df/dt) = G = na^2 \sqrt{1 - e^2}$  (3\u00aa lei de Kepler) tem-se:

$$r^2 \frac{df}{dM} \frac{dM}{dt} = na^2 \sqrt{1 - e^2},$$

ou

$$dM = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} df,$$

logo,

$$G_{210}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} df = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1+e\cos f}{(1-e^2)^{3/2}} df$$

$$G_{210}(e) = (1-e)^{-3/2} \text{ (Tabela B.2).}$$

TABELA B.2

FUNÇÕES  $G_{npq}(e)$  e  $K_{npq}(\gamma)$

$n$	$p$	$q$	$n$	$p$	$q$	$G_{npq}(e) = G_{n-n-2p,-q}(e)$	$K_{npq}(\gamma), \gamma = \sqrt{1-e^2}$
2	0	-2	2	2	2	0	0
2	0	-1	2	2	1	$-e/2 + e^3/16 + \dots$	$-7/16 - \gamma^2/16 + \dots$
2	0	0	2	2	0	$1 - 5e^2/2 + 13e^4/16 + \dots$	$-11/16 + 7\gamma^2/8 + 13\gamma^4/16 + \dots$
2	0	1	2	2	-1	$7e/2 - 123e^3/16 + \dots$	$-67/16 + 123\gamma^2/16 + \dots$
2	0	2	2	2	-2	$17e^2/2 - 115e^4/6 + \dots$	$-32/3 + 115\gamma^2/6 + \dots$
2	1	-2	2	1	2	$9e^2/4 + 7e^4/4 + \dots$	$4 - 23\gamma^2/4 + \dots$
2	1	-1	2	1	1	$3e/2 + 27e^3/16 + \dots$	$51/16 - 27\gamma^2/16 + \dots$
			2	1	0	$(1-e^2)^{3/2}$	$1/\gamma^3$

## APÊNDICE C

### COMPONENTES DAS FORÇAS DE PRESSÃO DE RADIAÇÃO

A força de pressão de radiação  $\vec{e}$  é decomposta segundo três direções ortogonais, que são: a direção radial (R), a direção transversal (T) que pertence ao plano da órbita e é perpendicular ao raio vetor do satélite, e a direção normal (N) perpendicular ao plano da órbita e em consequência a R e T. Estas três direções têm por versores  $\hat{e}_R$ ,  $\hat{e}_T$  e  $\hat{e}_N$ , respectivamente.

As relações entre os versores  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  do sistema inercial e os versores  $\hat{e}_R$ ,  $\hat{e}_T$  e  $\hat{e}_N$  são (Bate, 1971):

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_R \\ \hat{e}_T \\ \hat{e}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} & R_{31} \\ R_{12} & R_{22} & R_{32} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

onde cada versor pode ser escrito na forma mais conveniente:

$$\hat{e}_R = R_{11}\hat{i} + R_{21}\hat{j} + R_{31}\hat{k} = \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ R_{31} \end{pmatrix} (\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k}), \quad (\text{C.2})$$

e

$$\begin{aligned} R_{11} &= \cos v \cos \Omega - \operatorname{sen} v \operatorname{sen} \Omega \cos I \\ &= \cos v \cos \Omega (c^2 + s^2) + \operatorname{sen} v \operatorname{sen} \Omega (c^2 - s^2), \quad \text{sendo } \begin{cases} c = \cos I/2 \\ s = \operatorname{sen} I/2 \end{cases} \\ &= c^2 \cos(v + \Omega) + s^2 \cos(v - \Omega), \end{aligned}$$

$$R_{21} = c^2 \operatorname{sen}(v + \Omega) - s^2 \operatorname{sen}(v - \Omega), \quad (\text{C.3})$$

$$R_{31} = \text{sen} i \text{ sen} v .$$

Desenvolvendo da mesma forma as componentes de  $\hat{e}_T$  e  $\hat{e}_N$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \hat{e}_R &= \begin{bmatrix} c^2 \cos(v + \Omega) + s^2 \cos(v - \Omega) \\ c^2 \text{sen}(v + \Omega) - s^2 \text{sen}(v - \Omega) \\ \text{sen} I \text{ sen} v \end{bmatrix} (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) , \\ \hat{e}_T &= \begin{bmatrix} -c^2 \text{sen}(v + \Omega) - s^2 \text{sen}(v - \Omega) \\ c^2 \cos(v + \Omega) - s^2 \cos(v - \Omega) \\ \text{sen} I \text{ cos} v \end{bmatrix} (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) , \\ \hat{e}_N &= \begin{bmatrix} \text{sen} \Omega \text{ sen} I \\ -\text{cos} \Omega \text{ sen} I \\ \text{cos} I \end{bmatrix} (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) . \end{aligned} \tag{C.4}$$

### C.1 - CÁLCULO DO VERSOR DO SOL ( $\hat{e}_S$ )

A Figura C.1 mostra o sistema inercial X, Y, Z e a órbita do Sol inclinada de  $\epsilon$  (obliquidade da eclíptica) em relação ao equador terrestre, onde:

- $\hat{e}_S$  - versor no sentido Terra-Sol,
- $\lambda$  - longitude do Sol,
- $\delta$  - declinação do Sol.

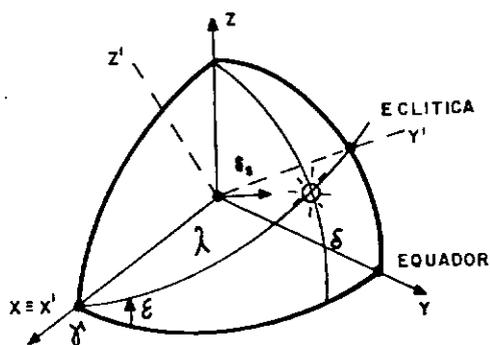


Fig. C.1 - Obliquidade da eclíptica.

A transformação do sistema  $X, Y, Z$  para o sistema  $X', Y', Z'$  do plano da eclíptica faz-se através de duas rotações; uma de  $\epsilon$  em torno de  $X$  levando o plano  $XY$  para  $X'Y'$ , e uma de  $\lambda$  em torno de  $Z'$  levando  $X'$  para o Sol. Assim:

$$\mathbf{X}' = R_X(\epsilon)\mathbf{X} , \tag{C.5}$$

$$\mathbf{X}'' = R_{Z'}(\lambda)\mathbf{X}' = R_{Z'}(\lambda)R_X(\epsilon)\mathbf{X} ,$$

sendo  $\mathbf{X}'$  o vetor coluna das componentes do vetor posição no sistema da eclíptica e  $\mathbf{X}$  o vetor coluna no sistema inercial.

Definindo  $\mathbf{M}(\lambda, \epsilon) = R_{Z'}(\lambda)R_X(\epsilon)$  pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}(\lambda, \epsilon) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{e}}_S \\ \hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{e}}_T \\ \hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{e}}_N \end{pmatrix} = \mathbf{M}(\lambda, \epsilon) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix} ,$$

logo,

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_S \\ \hat{e}_T \\ \hat{e}_N \end{pmatrix} = \mathbf{M}(\lambda, \epsilon) \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

ou seja, vale a mesma transformação para os versores de base. Assim, desenvolvendo a matriz  $\mathbf{M}(\lambda, \epsilon)$  tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\lambda, \epsilon) &= \begin{pmatrix} \cos\lambda & \text{sen}\lambda & 0 \\ -\text{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\epsilon & \text{sen}\epsilon \\ 0 & -\text{sen}\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\lambda & \text{sen}\lambda \cos\epsilon & \text{sen}\lambda \text{sen}\epsilon \\ -\text{sen}\lambda & \cos\lambda \cos\epsilon & \cos\lambda \text{sen}\epsilon \\ 0 & -\text{sen}\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix}, \quad (\text{C.7}) \end{aligned}$$

e o versor de interesse para este caso,  $\hat{e}_S = \hat{r}_S, \bar{e}$ :

$$\hat{e}_S = \hat{r}_S = \cos\lambda \hat{i} + \text{sen}\lambda \cos\epsilon \hat{j} + \text{sen}\lambda \text{sen}\epsilon \hat{k}. \quad (\text{C.8})$$

## C.2 - CÁLCULO DAS COMPONENTES DA FORÇA DE PRESSÃO DE RADIAÇÃO SEGUNDO AS DIREÇÕES R, T E N

A força de pressão de radiação com boa aproximação  $\bar{e}$  es crita da seguinte forma:  $F_{PR} = (-1/2)C_R(S/m)P_S \hat{r}_S$ , onde definindo os coeficientes constantes como  $K$ ,  $F_{PR} = -K \hat{r}_S$ , o sinal  $\bar{e}$  negativo porque a força  $\bar{e}$  no sentido Sol-Terra, isto  $\bar{e}$ , contrário a  $\hat{r}_S$ .

Assim, as componentes segundo as direções R, T e N são:

$$R = F_{PR} \cdot \hat{e}_R = -K \hat{r}_S \cdot \hat{e}_R = -K R'.$$

Usando a notação  $\cos\alpha = c(\alpha)$  e  $\text{sen}\alpha = s(\alpha)$ , tem-se:

$$R' = c(\lambda)[c^2c(v+\Omega) + s^2c(v-\Omega)] + s(\lambda)c(\epsilon)[c^2s(v+\Omega) - \\ + s^2s(v-\Omega)] + s(\lambda)s(\epsilon)s(I)s(v) , \text{ ou}$$

$$R' = c^2[c(\lambda)c(v+\Omega) + s(\lambda)s(v+\Omega)c(\epsilon)] + s^2[c(\lambda)c(v-\Omega) - \\ + s(\lambda)s(v-\Omega)c(\epsilon)] + s(\lambda)s(\epsilon)s(I)s(v) , \text{ ou}$$

$$R' = c^2\left\{c(\lambda)c(v+\Omega)\left[c^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + s^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right] + s(\lambda)s(v+\Omega)\left[c^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) - \\ + s^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right]\right\} + s^2\left\{c(\lambda)c(v-\Omega)\left[c^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + s^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right] - s(\lambda)s(v-\Omega) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[c^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) - s^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right]\right\} + s(\lambda)s(\epsilon)s(I)s(v) ,$$

$$R' = c^2\left(\frac{I}{2}\right)c^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)c(\lambda-v) + c^2\left(\frac{I}{2}\right)s^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)c(\lambda+v) + s^2\left(\frac{I}{2}\right)c^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \cdot \\ \cdot c(\lambda+v-\Omega) + s^2\left(\frac{I}{2}\right)s^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)c(\lambda-v+\Omega) + \frac{1}{2} s(\epsilon)s(I) \cdot \\ \cdot [c(\lambda-v) - c(\lambda+v)] . \quad (C.9)$$

Da mesma forma,  $T = \mathbf{F}_{PR} \cdot \hat{\mathbf{e}}_T = -K \hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{e}}_T = -KT'$ , onde:

$$T' = c^2\left(\frac{I}{2}\right)c^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)s(\lambda-v) - c^2\left(\frac{I}{2}\right)s^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)s(\lambda+v) - \\ + s^2\left(\frac{I}{2}\right)c^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)s(\lambda+v-\Omega) + s^2\left(\frac{I}{2}\right)s^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)s(\lambda-v+\Omega) + \\ + \frac{1}{2} s(\epsilon)s(I)[s(\lambda-v) + s(\lambda+v)] , \quad (C.10)$$

$$N = \mathbf{F}_{PR} \cdot \hat{\mathbf{e}}_N = -K \hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{e}}_N = -K N'$$

e:

$$N' = \left[ -c^2 \left( \frac{\epsilon}{2} \right) s(\lambda - \Omega) + s^2 \left( \frac{\epsilon}{2} \right) s(\lambda + \Omega) \right] s(I) + c(I) s(\epsilon) s(\lambda) . \quad (C.11)$$

Note-se que a componente  $N'$  ou  $N$  (normal ao plano da  $\bar{o}r$  bita) não depende de  $v = \omega + f$ .

## APÊNDICE D

### EQUAÇÕES DE LAGRANGE COM FORÇAS DISSIPATIVAS

As variações dos elementos orbitais devidas às forças perturbadoras, dissipativas ou não, podem ser adicionadas às equações de Lagrange, como é demonstrado a seguir.

Para o caso conservativo, a equação da força que atua num ponto (massa) imerso neste campo é sempre deduzível do potencial do campo através de seu gradiente, ou seja:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -m \nabla U, \quad (D.1)$$

onde  $U$  é o potencial do campo (com sinal positivo). Para o caso geral, com perturbações, a força específica toma a forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U + \mathbf{A}, \quad (D.2)$$

sendo  $\mathbf{A}$  uma aceleração perturbadora qualquer. A Equação D.2 pode ser escrita na forma:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}, \quad (D.3)$$

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = -\nabla U + \mathbf{A}. \quad (D.4)$$

Multiplicando as Equações D.3 e D.4 escalarmente por  $(-\dot{\mathbf{r}}/\partial s_\ell)$  e  $(\dot{\mathbf{r}}/\partial s_\ell)$ , respectivamente, e somando

$$\sum_{k=1}^6 \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_\ell} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_k} - \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_\ell} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_k} \right)}_{[s_\ell, s_k]} \frac{ds_k}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_\ell} \cdot (-\nabla U)}_{\partial U / \partial s_\ell} - \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_\ell}}_{\partial T / \partial s_\ell} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_\ell} \cdot \mathbf{A},$$

$$\sum_{k=1}^6 [s_{\ell}, s_k] \frac{ds_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial s_{\ell}} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_{\ell}} \cdot \mathbf{A} , \quad (\text{D.5})$$

onde T e U são as energias cinéticas e potenciais, respectivamente, e  $F$  é o hamiltoniano.

A notação  $[s_{\ell}, s_k]$  refere-se ao colchete de Lagrange de finido por:

$$[s_{\ell}, s_k] = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial X_i}{\partial s_{\ell}} \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial s_k} - \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial s_{\ell}} \frac{\partial X_i}{\partial s_k} \right) , \quad (\text{D.6})$$

que goza das seguintes propriedades:

$$[s_{\ell}, s_{\ell}] = 0 ,$$

$$[s_{\ell}, s_k] = -[s_k, s_{\ell}] , \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [s_{\ell}, s_k] = 0 .$$

As duas primeiras propriedades são evidentes, mas a terceira requer demonstração, como se segue (Kaula, 1966):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [s_{\ell}, s_k] &= \frac{\partial}{\partial s_{\ell}} \left[ \dot{X}_i \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial s_k} - \frac{\partial X_i}{\partial s_k} \ddot{X}_i \right] - \\ &+ \frac{\partial}{\partial s_k} \left[ \dot{X}_i \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial s_{\ell}} - \frac{\partial X_i}{\partial s_{\ell}} \ddot{X}_i \right] , \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

mas no caso de forças perturbadoras,  $\ddot{X}_i = \partial U / \partial X_i + A_i$ , relação esta obtida da Equação D.4. Assim, substituindo-a, na Expressão D.8, tem-se:



$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \left( \frac{\partial F}{\partial M} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial F}{\partial \omega} \right) + \frac{1-e^2}{na^2e} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial M} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} \right) \cdot \mathbf{A}, \\ \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned} \quad (D.12)$$

$$\frac{dM}{dt} = - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial F}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial F}{\partial a} - \left( \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e} + \frac{2}{na} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \right) \cdot \mathbf{A},$$

Observa-se que o segundo membro das Equações D.12 contém os termos das equações de Lagrange na forma conservativa e os correspondentes às forças perturbadoras não-conservativas. Assim, as Equações D.12 podem ser escritas na forma:

$$\frac{d^*a}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{2}{na} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial M} \cdot \mathbf{A},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^*e}{dt} &= \frac{de}{dt} + \frac{1-e^2}{na^2e} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial M} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} \right) \cdot \mathbf{A}, \\ \vdots & \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned} \quad (D.13)$$

$$\frac{d^*M}{dt} = \frac{dM}{dt} - \left( \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e} + \frac{2}{na} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \right) \cdot \mathbf{A},$$

onde o (\*) significa variação geral em relação a todas as perturbações.

Tomando como exemplo a equação para a variação do semi-eixo maior, pode-se verificar que o termo:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial M} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{n} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \quad (D.14)$$

substituído na 1ª das Equações D.13 resulta em:

$$\frac{d^*a}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{2a^2}{\mu} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}, \quad (D.15)$$

onde se pode notar que o 2º termo do 2º membro da Equação D.15 é a variação no tempo do semi-eixo maior da órbita, ou seja,  $da/dt$  na forma de Gauss, fornecido por King-Hele (1964). Assim:

$$\frac{d^*a}{dt} = \frac{da}{dt} \Big|_{\text{conservativa}} + \frac{da}{dt} \Big|_{\text{outras}} \quad (D.16)$$

Isso mostra que as variações no tempo dos elementos (na forma conservativa) podem se adicionar à variação no tempo dos mesmos elementos, calculadas pelas equações de Lagrange na forma de Gauss, que permitem a inclusão de forças não-conservativas.

A força específica  $\mathbf{A}$  que aparece nas Equações D.13 é uma soma vetorial de todas as forças (por unidade de massa) perturbadoras não-conservativas, ou seja:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{arrasto}} + \mathbf{A}_{\text{pressão de radiação}} + \dots \quad (D-17)$$