1. Publicação nº	2. Versão	3. Data	5. Distribuição
INPE-3168-PRE/538		*Julho, 1984*	☐ Interna ☒ Externa
4. Origem *DIN/DPD*	Programa *ATCOMP*		☐ Restrita

6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es)
CONJUNTOS NEBULOSOS
REGRAS DE DECISÃO NEBULOSAS
MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES NEBULOSAS

7. C.D.U.: *681.325.6*

8. Título *INPE-3168-PRE/538*

TUTORIAL: CONJUNTOS NEBULOSOS E APLICAÇÕES

10. Páginas: *10*

11. Última página: *09*

12. Revisada por

Oscar Pereira Dias Júnior

9. Autoria *Orion de Oliveira Silva*
Celso de Renna e Souza

Assinatura responsável

13. Autorizada por

Nelson de Jesus Parada
Diretor Geral

14. Resumo/Notas

Apresentam-se resultados encontrados na literatura, cobrindo tópicos sobre a teoria de conjuntos nebulosos, incluindo medidas entrópicas, minimização de funções de chaveamento nebuloso e aplicações de conjuntos nebulosos. A apresentação é uniforme, com exemplos, aplicações e comentários. Mostram-se resultados obtidos pelos autores no estudo do problema de regras de decisão, como também algumas aplicações. Apresenta-se também uma técnica para minimização de funções nebulosas.

15. Observações *Trabalho convidado aceito para apresentação no 5º Congresso Brasileiro de Automática/1º Congresso Latino-Americano de Automática, a realizar-se de 03 a 06 de setembro de 1984, em Campina Grande, Pb.*

TUTORIAL: CONJUNTOS NEBULOSOS E APLICAÇÕES

Orion de Oliveira Silva
Celso de Renna e Souza

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq
Av. dos Astronautas, 1758 - Caxia Postal 515 - 12200 - São José dos Campos - SP

Resumo

Apresentam-se resultados encontrados na literatura, cobrindo tópicos sobre a teoria de conjuntos nebulosos, incluindo medidas entrópicas, minimização de funções de chaveamento nebuloso e aplicações de conjuntos nebulosos. A apresentação é uniforme, com exemplos, aplicações e comentários. Mostram-se resultados obtidos pelos autores no estudo do problema de regras de decisão, como também algumas aplicações. Apresenta-se também uma técnica para minimização de funções nebulosas.

Tutorial: Fuzzy Sets and Applications.

Abstract

In this report results found scattered in the literature are presented, covering topics in the Theory of Fuzzy sets, including entropic measures, fuzzy function minimization and applications of fuzzy sets. The presentation is uniform with examples, applications and comments, and some results obtained by the authors in the study of decision rule induction problems are presented, as well as some applications. A technique for fuzzy function minimization is also presented.

1. INTRODUÇÃO

Na teoria de conjuntos de Cantor considera-se uma coleção ou conjunto de elementos que podem exemplificar conceitos, e estudam-se então as operações válidas, estabelecendo leis que descrevem as propriedades gerais dessas operações.

Sem uma interpretação semântica de conceitos inexatos é difícil saber que conceitos inexatos podem ser representados mais satisfatoriamente que outros. Tal representação foi avaliada no artigo Zadeh (1965), onde ele descreveu um certo tipo de conhecimento exato obtido a partir de conceitos inexatos.

Para obter uma descrição mais precisa dos conjuntos que são encontrados na vida real - por exemplo: "o conjunto dos homens velhos" que não têm fronteiras bem definidas, Zadeh (1965) estendeu o conceito de conjunto de uma maneira simples e elegante, e denominou este modelo "Conjuntos Nebulosos". Esta extensão foi feita atribuindo um grau de pertencimento[1] a cada elemento do conjunto. O pertencimento (ou o "grau de certeza", como também será chamado) de que um homem com 35 anos faça parte do conjunto de "velhos" pode ser 0,7 por exemplo; ou seja, diz-se que um homem com 35 anos tem grau de certeza 0,7 de ser velho. A escolha do grau de certeza "0,7" é arbitrária.

Desde o artigo de Zadeh (1965) muitos progressos têm sido feitos no desenvolvimento da teoria de conjuntos nebulosos e suas aplicações. A mesma teoria tem sido aplicada em muitas áreas da Engenharia. Tais conjuntos permitem modelar aspectos da comunicação humana e também tomar decisões sob incerteza ou informação parcial.

2. CONJUNTOS NEBULOSOS E SUAS OPERAÇÕES

Como já foi indicado, Zadeh (1965) caracterizou um conjunto nebuloso (classe) A em um conjunto não-vazio de pontos (objetos) X, por uma função de pertencimento (característica) μ_A, que associa a cada ponto $x \in X$ um número real no intervalo $[0,1]$. O valor $\mu_A(x)$ representa o grau de pertencimento de x em A. Quando A é um conjunto no sentido da teoria de Cantor, então $\mu_A(x)$ pode tomar somente dois valores, 0(zero) ou 1(um). Então, o que irá diferenciar um conjunto nebuloso de um conjunto comum é apenas a função de pertencimento.

---
[1] *A palavra "pertencimento foi criada por um dos autores para melhor traduzir a idéia de "membership" de acordo com a Gramática Metódica da Língua Portuguesa, Napoleão Mendes de Almeida, parágrafo 630.1, sufixo "mento", pág. 397.*

Exemplo 2.1 - Conjuntos Nebulosos

O Conjunto Nebuloso de todas as pessoas velhas pode ser representado por:

$$A = \{\ldots (10;\ 0{,}2),\ (15;\ 0{,}3),\ (20;\ 0{,}4),\ (25;\ 0{,}5),\ (30;\ 0{,}55),\ (35;\ 0{,}6) \ldots\};$$ onde 10, 15, 10, ... representam as idades das pessoas.

Como se pode ver no Exemplo 2.1 a forma específica da função de pertencimento é intuitiva, não existindo ainda critérios estabelecidos para a sua criação, apesar de existirem vários trabalhos sobre o assunto (Zadeh 1975a, b e c).

Definição 2.1 - Conjunto nebuloso vazio

Um conjunto nebuloso é vazio se, e somente se, a sua função de pertencimento é identicamente zero em X: $\phi_n = \{(x, \mu_A(x))\}$, onde $\forall x \in X$, $\mu_A(x) = 0$.

Definição 2.2 - Igualdade entre dois conjuntos nebulosos

Dois conjuntos nebulosos A e B são iguais, (A = B), se, e somente se, $\mu_A(x) = \mu_B(x)\ \forall x \in X$.

Definição 2.3 - Complemento

O conjunto nebuloso complemento do conjunto nebuloso A é denotado por $\neg A$ (ou às vezes A') e é definido por: $A' = \{(x, \mu_{A'}(x))\}$, onde:

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x),\ \forall x \in X.$$

Definição 2.4 - Subconjunto

Um conjunto nebuloso A está contido no conjunto nebuloso B se, e somente se, $\forall x \in X$, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

Definição 2.5 - União

A união de dois conjuntos nebulosos A e B com suas funções de pertencimento $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ é um conjunto C e é designado por $C = A \cup B$, cuja função de pertencimento é dada por:

$$\mu_C(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \vee \mu_B(x),\ \forall x \in X.$$

Definição 2.6 - Interseção

A interseção de dois conjuntos nebulosos A e B com suas funções de pertencimento $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ é um conjunto D e é escrita na forma $D = A \cap B$, cuja função de pertencimento é dada por:

$$\mu_D(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)\ \forall x \in X.$$

Definição 2.7 - Potenciação

A potência $\alpha \in R$ (conjunto dos números reais) de um conjunto nebuloso A é denotada por $A^\alpha = AA \ldots A$ (α vezes) e é definida em termos da função de pertencimento de A pela seguinte relação:

$$\mu_{A^\alpha}(x) = [\mu_A(x)]^\alpha = \mu_A(x)\,\mu_A(x) \ldots \mu_A(x)\ (\alpha \text{ vezes}),\ \forall x \in X.$$

Se $\alpha = 2$, $\mu_{A^2}(x) = [\mu_A(x)]^2$, $\forall x \in X$ (concentração) ou (muito A).

Se $\alpha = 0{,}5$, $\mu_{A^{0,5}}(x) = [\mu_A(x)]^{0,5}$, $\forall x \in X$ (dilatação) ou (mais ou menos A).

Se $\alpha = 1{,}25$, $\mu_{A^{1,25}}(x) = [\mu_A(x)]^{1,25}$, $\forall x \in X$ (mais A).

Se $\alpha = 0{,}75$, $\mu_{A^{0,75}}(x) = [\mu_A(x)]^{0,75}$, $\forall x \in X$ (menos A).

Definição 2.8 - Conjunto nebuloso normal

Um conjunto nebuloso A é normal se, e somente se, $\sup \mu_A(x) = 1$; caso contrário, A é subnormal (sup = supremo).

Obs.: As operações que seguem são definidas para conjuntos finitos.

Definição 2.9 - Produto cartesiano

Se $A_1, \ldots, A_n$ são subconjuntos dos conjuntos $X_1, \ldots, X_n$, respectivamente, o produto cartesiano de $A_1, \ldots, A_n$, denotado por $A_1 \times \ldots \times A_n$, é definido como um subconjunto nebuloso de $X_1 \times \ldots \times X_n$ e sua função de pertencimento é dada por: $\mu_{A_1 \times \ldots \times A_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{A_n}(x_n)$, onde:

$$\mu_{A_k}(x_n) \wedge \mu_{A_1}(x_1) = \min(\mu_{A_k}(x_n);\ \mu_{A_1}(x_1)).$$

Definição 2.10 - Relação nebulosa

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ conjuntos nebulosos e seja $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, então uma relação nebulosa n-ária R em X é um subconjunto nebuloso de X.

Definição 2.11 - Composição

Sejam U, V e W conjuntos nebulosos e R e S relações nebulosas em UxV e VxW, respectivamente; então a operação de "composição" (max min) de R e S é uma relação nebulosa em UxW, denotada por RoS e definida da seguinte maneira:

$$(RoS)\ (U, W) = \underset{v}{V}[S(V, W) \wedge R(u, v)] =$$

$\max\ (\min[S(v, w); R(u, v)])$, onde $v \in V$, $\forall(u, w) \in U \times W$. A função de pertencimento pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mu_{RoS}(u, w) = \max_{v} \min\ [\mu_S\ (v, w),\ \mu_R\ (u, v)].$$

Exemplo 2.2 - Composição

Sejam as relações R e S dadas por matrizes; neste caso, por exemplo,

$$R(u, v) \qquad S(v, w) \qquad (RoS)(u, w)$$

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,9 \\ 0,4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,5 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mu_R\ (u_1, v_1) \wedge \mu_S\ (v_2, w_1) = 0,3 \wedge 0,5 =$

$\min(0,3; 0,5) = 0,3$

$\mu_R\ (u_1, v_2) \wedge \mu_S\ (v_2, w_1) = 0,8 \wedge 0,4 =$

$\min(0,8; 0,4) = 0,4$

$V(0,3; 0,4) = 0,3\ V\ 0,4 = \max\ (0,3; 0,4) =$

$0,4 = (RoS)\ (u_1, w_1) = \mu_{RoS}(u_1, w_1)$

Definição 2.12 - Projeção

Seja R uma relação nebulosa n-ária em $X = X_1 x \ldots x X_n$; então, uma projeção de R em $Y = X_{i_1}\ X_{i_2} x \ldots x X_{i_k}$ é uma relação nebulosa k-ária $R_q(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$ em X, que é definida da seguinte maneira maneira:

$$R_q(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}) = \underset{(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) \in Y}{V} R\ (x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \max_{(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) \in Y} R(x_1, \ldots, x_n)$$

e sua função de pertencimento é dada por:

$$\mu_{R_q}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = \underset{(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) \in Y}{V} \mu_R(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \max_{(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) \in Y} \mu_R(x_1, \ldots, x_n)$$

Definição 2.13 - Extensão cilíndrica

Relações nebulosas distintas em $U_1 x \ldots x U_n$ podem ter projeções idênticas em $U_{i_1} \ldots x U_{i_k}$.

Dada uma relação R_q em $U_{i_1} x \ldots x U_{i_k}$, existe uma única relação $\overline{R}_q$ (extensão cilíndrica) em $U_1 x \ldots x U_n$ (isto é, uma relação que contém todas as outras relações cuja projeção sobre $U_{i_1} x \ldots x U_{i_k}$ é R_q). Em consequência da Definição 2.13 a sua função de pertencimento é dada por:

$$\mu_{\overline{R}_q}(U_1, \ldots, U_n) = \mu_{R_q}(u_{i_1}, \ldots, U_{i_k})$$

Algumas propriedades e proposições da extensão cilíndrica são dadas em Zadeh (1968 b), e Chang (1977).

2.2 - Medida de nebulosidade (entropia nebulosa)

A análise da medida de nebulosidade na teoria de conjuntos nebulosos foi feita por De Luca e Termini (1971, 1972 a e b, e 1974) e Knopfmacher (1975). Seu significado, no entanto, é bastante diferente daquele da entropia clássica, porque nenhum conceito probabilístico é utilizado.

Seja I um conjunto não-vazio e seja L um reticulado booleano; como já foi citado, qualquer mapeamento de I para L é chamado conjunto nebuloso £ (Goguen, 1967).

Seja £(I) a classe de todos os mapeamentos de I para L. É possível introduzir uma estrutura de reticulado de £(I) pelas operações binárias "v" e "∧", associando qualquer par de conjuntos nebulosos f, g ε £(I) aos conjuntos nebulosos fvg e f g de £(I), definidos da seguinte maneira:

$(fvg)\ (x) = \max\ \{f(x), g(x)\}$ com $£ = [0,1]$,

$(f \wedge g)\ (x) = \min\ \{f(x), g(x)\}$.

Para todo conjunto nebuloso, f ε £(I), De Luca e Termini (1971) introduziram uma medida de "grau de nebulosidade" que será denotada por d(f); esta deve depender somente dos valores assumidos por f em I. A medida d(f) pode ser, por exemplo usando a função de Shannon $S(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$ esta:

$$d(f) \stackrel{\Delta}{=} k \sum_{h=1}^{N} S(f(x_h)).$$

Definição 2.14 - Entropia nebulosa normalizada

A entropia nebulosa é chamada "entropia nebulosa normalizada" quando, em d(f), postula-se o valor de k = 1/N; então, tem-se: en tropia nebulosa normalizada = $\upsilon(f) \triangleq$ $\triangleq \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{N} S(f(s_h))$. Este nome é apenas apropriado porque se dela tomar-se o logaritmo na base 2(dois), tem-se:

$$0 \leq \upsilon(f) \leq 1 \ \forall f \in \mathcal{L}(I)$$

Algumas propriedades adicionais e mais detalhes podem ser vistos em Knopfmacher (1975).

2.3 - Modus Ponens nebuloso

Definição 2.15 - Grau de certeza

"Regras de Decisão" são semelhantes às "regras de produção" usados por vários autores, tais como: Shortfliffe (1973, 1975), Shortliffe et alli (1975), Capocelli e De Luca (1973), Waterman (1974), Richerier (1975) e Coulon et alli(1977). O esquema geral é:

CONDIÇÃO $\Longrightarrow$ DECISÃO

isto é, se uma situação satisfaz uma condição, então a regra designa para ela uma DECISÃO (que pode ser válida, inválida ou não ter validade prática). A idéia é paralela à do comando "se ... então" em linguagens de programação.

O grau de certeza é aqui definido como um número do intervalo [0,1] que determina o grau de confiabilidade (confiança) que se tem em uma "regra de produção" ou "regra de decisão".

Definição 2.16 - Grau de certeza global

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os graus de certeza das regras $r_1, r_2, \ldots, r_n$, que tenham a mesma decisão; o grau de certeza global de $r_1, \ldots, r_n$, é dado por:

$$\mu(R) = 1-1^{-Z}, \text{ onde } Z \triangleq \sum_{i=1}^{n} \log_2 (1-x_i)^1$$

Definição 2.17 - Modus Ponens Composicional (nebuloso)

Sejam P e R relações nebulosas no conjunto U, e Q uma relação nebulosa no conjunto W.

O mosus ponens composicional é definido por Zadeh et alli (1975) da seguinte maneira:

(a) Se x é P, então y é Q, representado por (x, y) é $(\overline{P}' \oplus \overline{Q})$.

(b) Se x é R, então y é Ro $(\overline{P}' \oplus \overline{Q})$, onde P' é o complemento de P; $\overline{P}'$é a extensão cilíndrica de P' em W; $\overline{Q}$ é a extensão cilíndrica de Q em U; $\mu_{P \oplus Q}(u) =$ min $(1, \mu_P(u) + \mu_Q(u)$ + é soma limitada, ou seja, $0 \leq x \oplus y \leq 1, \forall x, y \in [0,1]$; e "o" é a operação de composição.

Definição 2.18 - Modus ponens composicional modificado (Silva e Souza 1982)

Sejam P e R relações nebulosas no conjunto U, e Q uma relação nebulosa no conjunto W.

O modus ponens composicional modificado é definido da seguinte maneira:

(a) "Se x é P, então (k) y é Q", representado por "(x, y) é $F(k, x_{ij}, y_{ij})$", onde se admite que $\overline{P}'$ e $\overline{Q}$ são dados por "arrays" de duas dimensões, cujos elementos são os valores das respectivas funções de pertencimento representadas por x_{ij} e y_{ij}.

(b) "Se x é R", portanto "y é RoF (k, x_{ij}, y_{ij})".

A função

$$F(k, x, y) = \begin{cases} y^k \text{ se } x \leq y \\ x^{(1+x-y)k} \text{ se } x > y \\ 1 \text{ se } k = x = y = 0. \end{cases}$$

A associação de um grau de certeza a uma regra nebulosa "se ... então" parece ser um passo natural. O efeito de "k", através do operador F, é modificar a função de pertencimento do conjunto nebuloso que representa a conclusão. Isto pode ser feito associando um grau de certeza ao conjunto nebuloso conclusão, admitindo que o grau de certeza da premissa é 1 (um). A modificação considerada tem de ser consistente com a causada pelo operador F na regra de decisão (produção) nebulosa "se então" e agir independentemente sobre cada valor da função de pertencimento P. A consistência desejada pode ser expressa pelo fato de se considerar um operador modificador $g:[0,1] \times Q \rightarrow [0,1]$. (onde Q é medido pela sua função de pertencimento), tal que para qualquer $K \in [0,1]$ e quaisquer relações nebulosas P e Q tenha-se:

$$g(k, F(1, x_{ij}, y_{ij})) = F(k, x_{ij}, y_{ij}).$$

$$\text{A função: } g(k, y_i) = \begin{cases} y_i^k, \ y_i, \ k \in [0,1] \\ 0 \quad \forall y_i = 1 \text{ e } k = 0, \end{cases}$$

é consistente com a função F(k, x, y).

Silva (1982) utilizou a regressão linear e o modus ponens modificado no problema de estimativa de produtividade, como componentes de métodos de previsão de safras, usando um banco de regras montado a partir de séries históricas de produtividade e de variáveis climáticas.

---

[1] *Shafer (1976) chamou a esta fórmula "peso de evidência".*

3. MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES DE CHAVEAMENTO NEBULOSO

Os conceitos básicos para minimização de funções de chaveamento, ou seja, a álgebra de Boole e o seu relacionamento com a teoria de circuitos de chaveamento, poderão ser encontrados em Frederick e Peterson (1968), Gerald (1970) e outros.

Serão discutidas, nesta seção, funções de chaveamento nebulosas por meio de Álgebra nebulosa. Quem primeiro discutiu o problema foi Chang (1977); depois, outros trabalhos foram feitos como o de Sig e Chen (1972), sendo os trabalhos de Kandel (1973, 1974 e 1977) os que mais se destacaram.

Definição 3.1 – Álgebra Nebulosa

Uma álgebra nebulosa é definida como um sistema algébrico $\mathcal{Z} = \langle Z, +, *, - \rangle$, onde Z tem pelo menos dois elementos distintos e $\forall$ x, y, z $\in$ Z o sistema $\mathcal{Z}$ satisfaz ao seguinte conjunto de axiomas:

1. Idempotência: $x + x = x$ e $x * x = x$.
2. Comutatividade: $x + y = y + x$ e $x * y = y * x$.
3. Associatividade: $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x * y) * z = x * (y * z)$.
4. Absorção: $x + (x * y) = x$ e $x * (x + y) = x$.
5. Distributividade: $x + (y * z) = (x + y) * (x + z)$
   $x * (y + z) = x * y + x * z$.
6. Complementação: Se $x \in Z \Longrightarrow \exists!\ \bar{x} \in Z$ e $(\bar{\bar{x}}) = x$.
7. Identidades: $(\exists!\ e_+)$ tal que $(\forall x)\ x + e_+ = e_+ + x = x$.
   $(\exists!\ e_*)$ tal que $(\forall x)\ x * e_* = e_* * x = x$.
8. Leis de De Morgan $\overline{x + y} = \bar{x} * \bar{y}$ e $\overline{x * y} = \bar{x} + \bar{y}$.

Note-se que, na álgebra de Boole, têm-se ainda:

$(\forall x)\ (\exists \bar{x})$ tal que $x * \bar{x} = 0$ e $x + \bar{x} = 1$

Será considerada a álgebra nebulosa para o caso onde $\mathcal{Z} = \langle [0,1], +, *, - \rangle$ e onde "+", "*" e "-" serão interpretados como "máximo" (máx), "mínimo" (min) e "complemento" (comp.). Nesta álgebra tem-se:

$$\forall x \in [0,1] \begin{cases} x + 0 = x \\ x + 1 = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{matrix} x * 0 = 0 \\ x * 1 = x \end{matrix}$$

Definição 3.2 – Formas nebulosas

Formas nebulosas, geradas por $x_1, \ldots, x_n$, são definidas recursivamente como segue:

(a) Os números "0" e "1" são formas nebulosas.

(b) Uma variável x_i é uma forma nebulosa.

(c) Se A é uma forma nebulosa, então $\bar{A}$ também o é.

(d) Se A e B são formas nebulosas, então $A + B$ e $A * B$ também os são.

(e) São formas nebulosas somente as obtidas pela aplicação finita de (a) a (d) acima.

Definição 3.3 – Grau de pertencimento de uma forma nebulosa

O grau de pertencimento $\mu(S)$ de uma forma S é univocamente determinado pelas seguintes regras:

1) $\mu(S) = 0$, se $S = 0$;
2) $\mu(S) = 1$, se $S = 1$;
3) $\mu(S) = \mu(x_i)$, se $S = x_i$;
4) $\mu(S) = 1 - \mu(A)$, se $S = \bar{A}$;
5) $\mu(S) = \min\ [\mu(A), \mu(B)]$, se $S = A * B$; e
6) $\mu(S) = \max\ [\mu(A), \mu(B)]$, se $S = A + B$.

Definição 3.4 – Cláusula

Uma cláusula é uma disjunção de um ou mais literais, como $(x_1 + x_2)$.

Definição 3.5 – Frase

Uma frase é uma conjunção de um ou mais literais, como $(x_1 * x_2)$.

Definição 3.6 – Forma normal disjuntiva

Uma forma S é uma forma normal disjuntiva se $S = P_1 + P_2 + \ldots + P_m$, $m \geq 1$ e todo P_i, $1 \leq i \leq m$ é uma frase.

Definição 3.7 – Forma normal conjuntiva

Uma forma S é uma forma normal conjuntiva se, e somente se, $S = C_1 * C_2 x \ldots * C_k$, $k \geq 1$, e todo C_j, $1 \leq j \leq k$, é uma cláusula.

Definição 3.8 – Formal normal mínima

Uma forma normal disjuntiva é considerada como uma forma de complexidade mínima se não houver:

(1) qualquer outra forma equivalente que envolva menor número de frases;

(2) qualquer outra forma equivalente que envolva o mesmo número de frases, mas com menor número total de literais.

Definição 3.9 – Implicante nebuloso

Uma frase f_j inclui outra frase $_i$ se, e somente se, f_j contiver todos os literais de f_i e também $\mu(f_i) \leq \mu(f_j)$. Uma frase nebulosa f_k é um implicante nebuloso de uma forma nebulosa F se, e somente se, $\mu(f_k) \leq \mu(F)$ sobre todas as possíveis alternativas.

Definição 3.10 – Implicante primário nebuloso (I.P.N.)

Um implicante nebuloso f_j é um implicante primário nebuloso (I.P.N.) se, e somente se, não for incluído em nenhum outro implicante nebuloso de F.

(i.e. $\mu(f_j) \leq \mu(f_k) \leq \mu(F) \Longleftrightarrow k = j$).

Kandel (1973) mostrou que a forma de complexidade mínima deve consistir em uma soma de frases representadas por implicantes primos (primários) nebulosos, à semelhança do caso clássico (não-nebuloso).

Exemplo 3.1 – Comparação entre a álgebra nebulosa e a álgebra de Boole

Seja $F = xyz + \overline{x}yz$; a função F pode ser escrita como $F = yz\,(x + \overline{x})$. Na álgebra de Boole, F é reduzido para yz e tem-se somente um implicante primário. Entretanto, na álgebra nebulosa têm-se dois implicantes primários, xyz e $\overline{x}yz$.

Já se sabe que, para minimizar funções booleanas (não-nebulosas), são aplicadas as seguintes identidades:

(1) $x + x = x$ e $x.x = x$; (2) $x + 0 = x$ e $x.1 = x$; (3) $x + 1 = 1$ e $x.0 = 0$; (4) $x + \overline{x} = 1$ e $x.\overline{x} = 0$. As regras (1), (2) e (3) são verdadeiras para a álgebra nebulosa. Em geral, não se pode aplicar a identidade (4) para expressões nebulosas.

Definição 3.11 – Consenso nebuloso ou consenso interativo nebuloso

Sejam R e Q duas frases sobre o conjunto de variáveis nebulosas $x_1, x_2, \ldots x_n$. O consenso nebuloso de R e Q ($R \Psi Q$) é definido como o conjunto de frases $\{R_i, Q_i\}$, onde $R = x_i R_i$ e $Q = \overline{x}_i Q_i$ (ou $R = \overline{x}_i R_i$ e $Q = x_i Q_i$) e $x_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se frase $R_i Q_i$ inclui a conjunção $x_j \overline{x}_j$ para pelo menos um j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Se o conjunto $\{R_i Q_i\}$ é vazio, diz-se que $R \Psi Q = 0$.

Qualquer dos literais ou frases repetidas são removidas do consenso nebuloso de R e Q.

Exemplo 3.2 – Sejam as expressões: $R = x_1 x_2 \overline{x}_2 x_3$ e $Q = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_2 x_3 \Longrightarrow R \Psi Q = \{x_2 \overline{x}_2 x_3, x_1 \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_2 x_3\}$.

$\cancel{x_1}\, x_2\, \overline{x}_2\, x_3 = \cancel{x_1}\, R_1 \Longrightarrow R_1 = x_2\, \overline{x}_2\, x_3,$

$x_1\, \cancel{x_2}\, \overline{x}_2\, x_3 = \cancel{x_2}\, R_1 \Longrightarrow R_2 = x_1\, \overline{x}_2\, x_3,$

$x_1\, x_2\, \overline{x}_2\, \cancel{x_3} = x_3\, \cancel{R_3} \Longrightarrow R_3 = x_1\, x_2\, \overline{x}_2,$

$\cancel{\overline{x}_1}\, x_2\, \overline{x}_2\, x_3 = \cancel{\overline{x}_1}\, Q_1 \Longrightarrow Q_1 = x_2\, \overline{x}_2\, x_3,$

$\overline{x}_1\, x_2\, \cancel{\overline{x}_2}\, x_3 = \cancel{\overline{x}_2}\, Q_1 \Longrightarrow Q_2 = \overline{x}_1\, x_2\, x_3,$

$R_1\, Q_1 = x_2\, \overline{x}_2\, x_3\, x_2\, \overline{x}_2\, x_3 = x_2\, \overline{x}_2\, x_3,$

$R_2\, Q_2 = x_1\, \overline{x}_2\, x_3\, \overline{x}_1\, x_2\, x_3 = x_1\, \overline{x}_1\, x_2\, \overline{x}_2,\, x_3,$

então $R \Psi Q = \{x_2\, \overline{x}_2\, x_3,\ x_1\, \overline{x}_1\, x_2\, \overline{x}_2\, x_3\}$.

Teorema 3.1 (Brian, 1966).

Uma expressão soma de produto $F' = P_1 + P_2 + \ldots + P_r$ para a função $F(x_2, x_2, \ldots, x_n)$ é a soma de todos os IPNs de $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se, e somente se:

1) nenhuma frase inclui qualquer outra, $P_j \leq P_i\ \forall$ i e j, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$;

2) o consenso nebuloso de quaisquer duas frases, $P_i \Psi P_j$, ou não existe ($P_i \Psi P_j = 0$), ou toda a frase que pertence ao conjunto descrito por $P_i \Psi P_j$ está incluída em alguma outra no conjunto $\{P_k\}_k^r = 1$.

Exemplo 3.3 – Seja $F(x_1, x_2) = \overline{x}_1 + x_1 x_2 \overline{x}_2$, $\overline{x}_1 \Psi x_1 x_2 \overline{x}_2 = x_2 \overline{x}_2$.

Adicionando $x_2 \overline{x}_2$ a $F(x_1, x_2)$, tem-se que: $F(x_1, x_2) = \overline{x}_1 + x_1 x_2 \overline{x}_2 + x_2 \overline{x}_2$ e $F' = \overline{x}_1 + x_2 \overline{x}_2$, porque $x_1 x_2 \overline{x}_2$ inclusive $x_1 \overline{x}_2$.

Baseado no Teorema 2.1 tem-se o seguinte algoritmo (Kandel, 1973) que converte a função de sua forma normal disjuntiva para uma soma de IPNs.

Algoritmo 3.1 – Gera implicantes primários nebulosos

Entrada: O conjunto de frases que representa $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Saída: O conjunto de IPNs de $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Passo 1 – Compara-se cada frase com todas as outras da expressão e remove-se qualquer frase que inclua qualquer outra frase.

Passo 2 – Adiciona-se o consenso nebuloso a todo par de frases da expressão, verificando quais as frases no consenso nebuloso não incluem qualquer outra.

O processo é iterativo e termina quando todas as possíveis operações de consenso forem executadas.

Usando as regras da álgebra nebulosa, a função nebulosa F de "n" variáveis pode ser escrita na forma:

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{k \in \Gamma} (\prod_{j \in S(k)} x_j)$$

onde Γ e S(k) são conjuntos indexados da seguinte forma: $\overline{x_j} = x_{j+n}$.

Exemplo 3.4 – $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x}_1 x_2 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 x_3 \overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3 = \prod_{j \in S(1)} x_j + \prod_{j \in S(2)} x_j + \prod_{j \in S(3)} x_j + \prod_{j \in S(4)} x_j = \sum_{k \in \Gamma} (\prod_{j \in S(k)} x_j)$

onde n=3, Γ = {1, 2, 3, 4} e S(1) = {1, 2, 4}, S(2) = {1, 2, 6}, S(3) = {1, 3, 6}, S(4) = {1, 2, 3}.

Todo implicante pode ser univocamente representado por uma lista binária de tamanho 2n.

Exemplo 3.5 – As frases $x_1 \overline{x}_1 x_3 x_3$, $x_1 \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_2 x_3$ e $x_1 x_2 x_3$, em $F(x_1, x_2, x_3)$, são representadas por 111100, 111110 e 111000, respectivamente $\overline{x}_1 \equiv x_4$; $\overline{x}_2 \equiv x_5$ e $x_3 \equiv x_6$.

Exemplo 3.6 – <u>Aplicação do algoritmo</u>

Seja $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_1 x_2 x_4 + x_1 \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4$ e seja $R_1 = x_1 \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$, $R_2 = x_1 \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_4$, $R_3 = x_1 \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4$. $R_1 \Psi R_3 = \{a_1, a_2\}$, onde $a_1 = x_1 \overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_3 x_4$ e $a_2 = x_1 \overline{x}_1 x_2 x_4$. $R_2 \Psi R_3 = \{b_1, b_2\}$, onde $b_1 = x_1 \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 \overline{x}_4$ e $b_2 = x_1 \overline{x}_1 x_2 x_3$.

As frases a_1 e b_1 incluem as frases a_2 e b_2, respectivamente.

Adicionando-se $R_1 \Psi R_3$ e $R_2 \Psi R_3$ à $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ e removendo as frases que incluem outra tem-se $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \overline{x}_1 x_2 x_3$ $x_1 x_1 x_2 x_4 + x_1 x_1 x_2 x_4 + x_1 \overline{x}_1 x_2 x_3$ Seja $R_4 = x_1 \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$, $R_5 = x_1 \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_4$, $R_6 = x_1 \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_4$, $R_7 = x_1 \overline{x}_1 x_2 x_3$. $R_4 \Psi R_7 = \{x_1 \overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_3, x_1 \overline{x}_1 x_2\}$.

A frase $x_1 \overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_3$ é incluída na frase $x_1 \overline{x}_1 x_2$. Adicionando $R_4 \Psi R_7$ à função e removendo as frases que incluem outra, tem-se:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \overline{x}_1 x_2$.

Definição 3.12 – <u>Peso</u>

O peso da lista w é o número de uns (1) na lista de zeros (0) e uns.

Um procedimento sistemático para conseguir os IPNs pode ser feito da seguinte maneira:

Passo 1: Arranjam-se todas as frases em grupos, tal que as do mesmo grupo tenham o mesmo peso. Os grupos são ordenados em uma tabela em termos de seus pesos crescentes. Cada linha da tabela de frases consiste na lista binária que representa a frase que é rotulada com seus equivalentes decimais.

Passo 2: Compara-se toda lista binária do grupo de menor peso com cada lista binária dos grupos sucessivos; sempre que possível, suprime-se a lista incluída que é comparada por meio do axioma $x + x_j = x$. Repete-se isto comparando cada frase que não tenha sido suprimida, em um grupo de peso w, com toda frase, que não tenha sido suprimida, nos grupos sucessores de pesos w + 1, w + 2, ..., até que todas as possíveis aplicações do teorema da inclusão tenham sido esgotadas. O processo termina quando nenhuma exclusão for possível. As frases restantes são os implicantes nebulosos, que não são incluídos em qualquer outra frase do conjunto.

Exemplo 3.7 – Seja $F(x_1, x_2, x_3 x_4) = x_1 \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 \overline{x}_3 x_4 \overline{x}_4 + \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_3 + \overline{x}_3 \overline{x}_4 + x_4 \overline{x}_4 + x_2 x_4 + x_1 x_2 + \overline{x}_3$, então $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_7 x_8 + x_3 x_6 x_7 + x_7 x_8 + x_4 x_8 + x_2 x_4 + x_1 x_2 + x_7 = \Sigma(2, 3, 17, 38, 80, 192, 243, 252)$.

As listas binárias, que representam os implicantes da função, são dadas por:

2	=	00000010	x_7,
3	=	00000011	$x_7 x_8$,
17	=	00010001	$x_4 x_8$,
38	=	00100110	$x_3 x_6 x_7$,
80	=	01010000	$x_2 x_4$,
192	=	11000000	$x_1 x_2$,
243	=	11110011	$x_1 x_2 x_3 x_4 x_7 x_8$,
252	=	11111100	$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$.

Usando o Algoritmo 2.1 obtêm-se a tabela de implicantes. (Tabela 3.1).

As frases excluídas são marcadas com o sinal (γ). As frases representadas por (3), (38) e (243) são eliminadas por (2), e a frase (252) por (80), respectivamente. Então, $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(2, 17, 80, 192) = \overline{x}_3 + x_1 x_2 + x_2 x_4 + x_4 \overline{x}_4$.

A definição de consenso nebuloso, dada anteriormente, não abrange todo o conjunto de implicantes primos nebulosos de $f(x_1, \dots, x_n)$, mas um conjunto que consiste de todos os implicantes primos nebulosos essenciais[1], mais alguns implicantes primos que não são essenciais.

---

[1] *Essencial no sentido de ser indispensável para a função f.*

TABELA 3.1

CONJUNTO DE IMPLICANTES

DECIMAL	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	w
(2)	0	0	0	0	0	0	1	0	1
(3)	0	0	0	0	0	0	1	1	2
(17)	0	0	0	1	0	0	0	1	2
(80)	0	1	0	1	0	0	0	0	2
(192)	1	1	0	0	0	0	0	0	2
(38)	0	0	1	0	0	1	1	0	3
(243)	1	1	1	1	0	0	1	1	6
(252)	1	1	1	1	1	1	0	0	6

Exemplo 3.8 – Em $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$, os termos $x_1 x_2$ e $x_1 \bar{x}_2$ são obviamente implicantes primos de $f(x_1, x_2)$; ambos são essenciais. O consenso, como definido originalmente, irá produzir $x_1 x_2 \psi \bar{x}_1 \bar{x}_2 = 0$.

Entretanto, o termo $x_1 \bar{x}_1$ pode ser adicionado a $f(x_1, x_2)$, sem mudar a função; este termo não inclui nenhum outro implicante nebuloso de $f(x_1, x_2)$. Então, $f(x_1 x_2) = x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_1 x_1$, onde esta é a representação de implicantes primos da função.

4. CONCLUSÕES

O presente documento teve como meta descrever resultados encontrados na literatura, nas áreas de teoria dos conjuntos nebulosos, bem como descrever resultados obtidos pelo autor ao aplicar o modus ponens modificado.

O trabalho tem três objetivos principais:

- Dar uma motivação ao estudo de álgebra de conjuntos nebulosos (fuzzy sets).
- Estimular as aplicações de "Fuzzy Sets" a várias áreas de aplicações.
- Dar a motivação ao estudo de minimização de funções onde as variáveis tomam valores no intervalo [0,1].

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRIAN, S. *Choise and Chance*. Belmont Dickenson, 1966.

CAPOCELLI, R.M.; DE LUCA, A. *Fuzzy sets and decision theory*. Information and Control, 23:446-473, 1973.

CHANG, R.L.P. Fuzzy Decision tree algorithms. *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernectics*, SMC-7(1):28-35, jan. 1977.

COULON, P.; AKMIN, Y.; LANEL, J.M.; MONGILS, M. *A language to describe knowledge by a network of procedures*. Nancy, Universities of Paris, Centre de Recherche in Informatique, 1977.

DE LUCA, A.; TERMINI, S. A definition of a non-probabilistic entropy, in the setting of fuzzy sets theory. *Information and Control*, 20:301-312, 1972b.

—— Algebraic properties of fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 40(3):373-386, 1972a.

—— Algorithms aspects in the systems analysis. *Scientia*, 106:659-671, 1971.

—— Entropy of L-fuzzy sets. *Information and Control*, 24:55-73, 1974.

FREDERICH, J.H.; PETERSON, G.R. *Introduction to Switching Theory and Logical design*. London, John Wiley, 1968.

GERALD, A.M. *Manual of logic circuits*. New Jersey, Pretince Hall, 1970.

GOGUEN, J.A.L. Fuzzy sets. *Journal at Mathematical Analysis and Application*, 18(5):145-175, 1967.

KANDEL, A. A note on the simplification of fuzzy switching function. *Information Science*, 13(2):91-94, 1977.

—— On minimization of fuzzy function. *IEEE Transaction on Computer*, C22(9):826-832, sept. 1973.

—— On the minimization of incompletely specified fuzzy functions. *Information and Control*, 26:141-153, 1974.

KNOPFMACHER, J. On measure of fuzzyness. *Journal at Mathematical Analysis and Application*, 49(1):229-334, 1975.

RYCHERIER, M.D. The student production system. *A study of encoding knowledge in production systems*. Pittsburg, Carnegie-Mellon University, 1975.

SHAFER, G.A. *A mathematical theory of evidence*. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1976.

SHORTLIFFE, E.H. *Computer-based medical consultation MYCIN*. Ph.D., Amsterdan, Stanford University Scholl of Medicine. Division of Clinical Pharmacology, 1975. (Artificial Intelligence Series, 2).

SHORTLIFFE, E.H.; STANTON, C.A.; BRUCE, C. V.; THOMAS, C.M.; STANLEY, N.C. *An Artificial Intelligence program to advise physicians regarding antimicrobial therapy*. Computer on Biomedical Research, 6:544-560, 1973.

SHORTLIFFE, E.H.; DAVIS, R.; AXLINE, S.G.; BUCKMAN, B.G.; GREEN, C.C.; COHEN, S.N. *Computer-based consultations in clinical therapeutes:* explanation and rule acquisition capabilities of the MYCIN system. Computers on Biomedical Research, 8:303-320, 1975.

SIG, P.; CHEN, C.S. Minimization of fuzzy function. *IEEE Transaction on Computer*, C21(1):100-102, jan. 1972, short notes.

SILVA, O.O.; SOUZA, C.R. *Changing the fuzzy rule of detachment.* INPE-2266-PRE/047, maio de 1982.

SILVA, O.O. *Indução de regras de decisão.* São José dos Campos, SP, INPE, maio de 1979. (INPE-1492-RPE/036).

SILVA, O.O. *Um método de estimativa de produtividade agrícola.* São José dos Campos, SP, INPE, novembro de 1982. (INPE-2566-PRE/214).

ZADEH, L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338-353, 1965.

—— Probability measure of fuzzy events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23(2):421-427, 1968b.

—— The concept of a linguist variable and its application to approximate reasoning I. *Information Science*, 8(3):211-249, 1975a.

—— The concept of a linguist variable and its application to approximate reasoning II. *Information Science*, 8(4):301-357, 1975b.

—— The concept of a linguist variable and its application to approximate reasoning III. *Information Science*, 9(1):43-80, 1975c.

ZADEH, L.A.; FU K.S.; TANAKA, K.; SHIMURA, M. *Fuzzy sets and their Applications to Cognitive and Decisions Processes.* Academic Press. New York, 1975.

WATERMAN, P.A. *Adaptative production systems.* Pittsburgh, Department of Phychology. Carnegie Mellon University, 1974.