

COMPARAÇÃO DE UM MÉTODO ANALÍTICO NÃO-SINGULAR COM O MÉTODO DE COWELL  
PARA A PROPAGAÇÃO DE ÓRBITAS DE SATÉLITES ARTIFICIAIS  
INCLUINDO O ARRASTO ATMOSFÉRICO

Luis Danilo Damasceno Ferreira

Wilson Custódio Canesin da Silva

Hélio Koiti Kuga

Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE/CNPq

São José dos Campos - 12200 - C.P. 515 - São Paulo - Brasil

1 - INTRODUÇÃO

Apresenta-se um propagador analítico não-singular de órbitas de satélites artificiais. As equações de Lagrange são escritas sob a forma não-singular usando variáveis equinociais, as quais são integradas para elementos médios ao longo de um período, considerando a perturbação do arrasto atmosférico. As variações médias assim obtidas são adicionadas às perturbações devidas ao geopotencial, segundo o método de Brouwer em elementos equinociais, permitindo assim a propagação da órbita até o tempo desejado. Apresentam-se os resultados de testes onde se comparam dados obtidos pela propagação de órbitas de satélites, usando o procedimento proposto, com dados calculados através de um integrador numérico pelo método de Cowell.

2 - ELEMENTOS EQUINOCIAIS

Quando o movimento de um satélite artificial é descrito por meio dos elementos clássicos Keplerianos ( $a, e, I, \Omega, \omega, M$ ), ocorrem singularidades para órbitas equatoriais ( $I \cong 0$ ) e órbitas circulares ( $e \cong 0$ ) nas equações de movimento. Estas singularidades são evitadas mediante transformações adequadas, onde as equações de movimentos são escritas em função de elementos equinociais (não-singulares) que são definidos por (Broucke and Cefola, 1972; Eckstein, 1973):

$$\begin{aligned}
 a^* &= a \quad , \\
 h &= e \sin(\Omega + \omega) \quad , \\
 l &= e \cos(\Omega + \omega) \quad , \\
 p &= \sin \frac{I}{2} \sin \Omega \quad , \\
 q &= \sin \frac{I}{2} \cos \Omega \quad , \\
 \bar{L} &= \Omega + \omega + M \quad .
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

A escolha de  $\sin \frac{I}{2}$  nas definições de  $p$  e  $q$  evita ambigüidades entre órbitas diretas e retrógradas, como no caso de  $\sin I$ .

### 3 - PERTURBAÇÕES DEVIDAS AO GEOPOTENCIAL

As perturbações seculares devidas ao geopotencial nos elementos equino-  
ciais são obtidas derivando as Equações 1 ou:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}^* &= \dot{a} \quad , \\
 \dot{h} &= \dot{e} \sin(\Omega + \omega) + e(\dot{\Omega} + \dot{\omega}) \cos(\Omega + \omega) \quad , \\
 \dot{l} &= \dot{e} \cos(\Omega + \omega) - e(\dot{\Omega} + \dot{\omega}) \sin(\Omega + \omega) \quad , \\
 \dot{p} &= \frac{1}{2} \cos \frac{I}{2} \dot{I} \sin \Omega + \sin \frac{I}{2} \dot{\Omega} \cos \Omega \quad , \\
 \dot{q} &= \frac{1}{2} \cos \frac{I}{2} \dot{I} \cos \Omega - \sin \frac{I}{2} \dot{\Omega} \sin \Omega \quad , \\
 \dot{\bar{L}} &= \dot{\Omega} + \dot{\omega} + \dot{M} \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

onde  $\dot{a}$ ,  $\dot{e}$ ,  $\dot{I}$ ,  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{M}$  são as variáveis seculares dos elementos clássicos se-  
gundo o método de Brouwer (1959) com  $\dot{a} = \dot{e} = \dot{I} = 0$ .

Integrando as Equações 2 e tendo em conta que  $a$ ,  $e$ ,  $I$  são constantes  
tem-se:

$$\begin{aligned}
 h_G &= h_0 \cos(\dot{\omega} \Delta t) + l_0 \sin(\dot{\omega} \Delta t) \quad , \\
 l_G &= l_0 \cos(\dot{\omega} \Delta t) - h_0 \sin(\dot{\omega} \Delta t) \quad ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_G &= p_0 \cos(\dot{\Omega} \Delta t) + q_0 \sin(\dot{\Omega} \Delta t) \quad , \\
 q_G &= q_0 \cos(\dot{\Omega} \Delta t) - p_0 \sin(\dot{\Omega} \Delta t) \quad , \\
 \bar{L}_G &= \bar{L}_0 + \dot{L} \Delta t \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

sendo:  $h_0, l_0, p_0, q_0, \bar{L}_0$  os valores dos elementos no tempo  $t_0$ ,  $\dot{\omega} = \dot{\Omega} + \dot{\omega}$ , e  $\Delta t$  o intervalo de integração.

#### 4 - PERTURBAÇÃO DEVIDA AO ARRASTO ATMOSFÉRICO

Em virtude da dificuldade de modelar a densidade atmosférica de forma analiticamente integrável, a não ser em modelos aproximados, é conveniente que as perturbações do arrasto atmosférico sejam obtidas, calculando numericamente as variações médias dos elementos por período orbital a cada um ou dois dias, e utilizando estas variações para a propagação no intervalo desejado [Silva e Ferreira, 1984]. Para isto é mais prático usar as equações de Lagrange na forma de Gauss [Bate et alii, 1971], escritas em função dos elementos equinociais. Assim, na propagação da órbita, o cálculo da variação média dos elementos equinociais médios  $\bar{E}_i$  por período do satélite, é feito da forma:

$$\bar{E}_i = \frac{1}{T} \int_0^T f_i(E_i, L) dt \quad , \quad i = 1, 6 \quad ,
 \tag{4}$$

onde a função  $f_i$  depende também da densidade atmosférica que é calculada, p.ex., a cada dois minutos e considerada constante neste intervalo. Assim, a variação nos elementos equinociais, devido ao arrasto atmosférico, é (Silva e Ferreira, 1984):

$$\Delta E_i = E_i - E_{i0} = \bar{E}_i (t - t_0) \quad .
 \tag{5}$$

Então, levando em consideração as Equações 3 e a Equação 5, as equações que representam tanto as perturbações do geopotencial quanto as do arrasto atmosférico tomam a forma:

$$E_i = E_j + \bar{E}_j \Delta t, \quad (6)$$

sendo  $E_i = (a^*, h, l, p, q, L)$ ,  $E_j = (a_0^*, h_G, l_G, p_G, q_G, L_G)$  dados pelas Equações 3 e  $\bar{E}_j$  é a variação média obtida pela Equação 4. Resumindo, as Equações 6 representam a propagação dos elementos equinociais, levando em conta a parte secular do geopotencial e as variações médias destes elementos, devido ao arrasto atmosférico.

##### 5 - COMPARAÇÃO COM O MÉTODO DE COWELL

A análise qualitativa do procedimento analítico é feita ao comparar os resultados da órbita com os obtidos através da integração numérica pelo método de Cowell. A comparação é muito dificultada devido à propagação analítica ser executada em elementos médios, e a propagação numérica, em elementos osculadores. Um método não-singular semelhante ao de Lyddane (1963), proposto por Hoots (1981) com evidente rapidez computacional, foi implementado de forma a permitir a transformação dos elementos médios no vetor de estado cartesiano osculador. Assim, a comparação pode ser feita a qualquer intervalo de amostragem, por exemplo, a cada hora. Para teste foi escolhido o satélite solssíncrono Landsat-5, em cujos boletins são fornecidos os elementos médios de Brouwer e os elementos cartesianos correspondentes. Na órbita propagada, a partir dos elementos cartesianos, foram utilizados os coeficientes zonais até  $J_5$  e o modelo atmosférico de Jacchia (1971). O integrador utilizado foi um preditor corretor de passo múltiplo de ordem 12, com tolerância de  $10^{-8}$ . Esta órbita é tomada como referência para a avaliação dos erros da propagação analítica proposta. Em adição, na propagação analítica também foi utilizado o modelo atmosférico de Jacchia (1971) para a obtenção da variação média devido ao arrasto atmosférico (Equação 4). Os erros foram então projetados nas componentes radial, normal e transversal (radial track, cross track, along track), da órbita de referência. A Figura 1 mostra os resulta



dos da simulação dos métodos em computador. Como era de esperar, os maiores erros foram da ordem de 6 km, ou seja, um erro em arco de  $\sim 0.05^{\circ}$  para uma propagação de órbita de 5 dias, bastante coerente com resultados contidos na literatura para teorias semi-analíticas de 1ª ordem (Liu et alii, 1980).

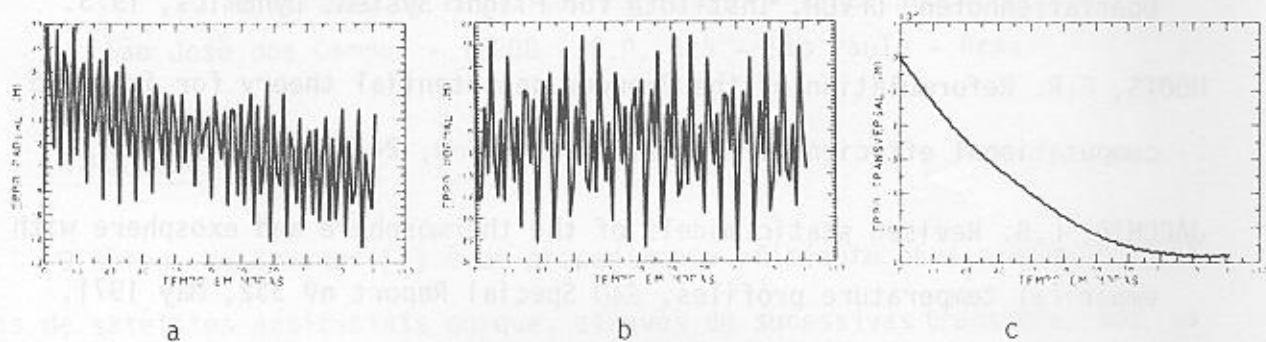


Fig. 1 - Erros projetados nas componentes radial (a), normal (b) e transversal (c).

## 6 - CONCLUSÃO

Uma análise preliminar revela que o método analítico é bastante promissor e a evidente vantagem repousa no fato da maior rapidez computacional aliada à razoável precisão na previsão dos elementos orbitais. O método apresenta também características de não-singularidade, o que permite a utilização de qualquer tipo de órbita sem restrição. Uma avaliação mais constante das variações devidas ao arrasto atmosférico, por exemplo, a cada dia, poderia resultar numa melhor estimativa dos efeitos atmosféricos; já que permitiria a atualização de dados dinâmicos que influem no comportamento da atmosfera superior, tais como o fluxo solar e a atividade geomagnética.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATE, R.R.; MOELLER, D.D.; WHITE, J.F. Fundamentals of astrodynamics. New York, Dover, 1971.
- BROUCKE, R.A.; CEFOLA, P.J. On the equinoctial orbit elements. *Celestial Mechanics*, 5:303-310, 1972.

- BROUWER, D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *Astronomical Journal*, 64, nº 1274:378-397, Nov. 1959.
- ECKSTEIN, M.C. A satellite orbit model without singularities. Oberfaffenhofen, DFVLR, Institute for Flight Systems Dynamics, 1973.
- HOOTS, F.R. Reformulation of the Brouwer geopotential theory for improved computational efficiency. *Celestial Mechanics*, 24:367-375, 1981.
- JACCHIA, L.G. Revised static models of the thermosphere and exosphere with empirical temperature profiles. *SAO Special Report* nº 332, May 1971.
- LIU, J.J.F.; ALFORD, R.L. Semianalytic theory for a close-Earth artificial satellite. *J. Guidance and Control*, Vol.3(4):304-311, July-Aug. 1980.
- LYDDANE, R.H. Small eccentricities or inclinations in the Brouwer theory of the artificial satellite. *Astronomical Journal*, 68(8):555-558, Oct. 1963.
- SILVA, W.C.C.; FERREIRA, L.D.D. Satélite artificial-Movimento orbital. São José dos Campos, INPE, julho, 1984 (INPE-3163-RPE/458).