

CONTROLE DE ATITUDE DE UM SATÉLITE ARTIFICIAL ATRAVÉS DA EXTENSÃO DA
TEORIA DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

Luiz Carlos Gadelha de Souza
Marcelo Lopes de Oliveira e Souza

Instituto de Pesquisas Espaciais - MCT/INPE
12201 - São José dos Campos - CP. 515 - SP

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se uma nova lei de controle de atitude para satélites artificiais. Esta lei baseia-se numa extensão da teoria do regulador linear quadrático para o caso em que a dinâmica é descrita por um sistema de equações fracamente não-lineares (equações de Euler) em relação a um sistema de eixos presos ao satélite. Focaliza-se apenas a fase em que os ângulos e as velocidades angulares do satélite são pequenas, e a lei de controle é aproximadamente linear em relação ao estado. Os resultados obtidos são parciais (pois a presente pesquisa está em andamento), mas sugerem que: 1) os termos não-lineares das equações são relevantes apenas nos instantes iniciais, tornando-se, em seguida, desprezíveis; 2) apesar deles, a lei de controle implementada reduz as velocidades angulares e os ângulos com rapidez maior do que a de outra já simulada com sucesso; 3) a lei permite calcular aproximadamente a energia gasta no processo.

ATTITUDE CONTROL OF AN ARTIFICIAL SATELLITE BY EXTENDING THE LINEAR
QUADRATIC REGULATOR THEORY.

ABSTRACT

In this work a new attitude control law for artificial satellites is presented. It is based on an extension of the theory of linear quadratic regulator to the case where the dynamics is described by a weakly nonlinear system of equations (Euler's equations) with respect to a reference system fixed to the satellite. Only the phase in which the satellite has small angles and angular velocities is considered. During it the control law is approximately linear with respect to the state. The results obtained are partial (since this is an on-going research), but suggest that: 1) the nonlinear terms of the equations are relevant in the initial instants only, but they become negligible later; 2) despite those terms, the implemented control law reduces the angular velocities and angles faster than other law already simulated with success; 3) that law allows to approximately calculate the energy spent in the process.

Keywords: Attitude control; Optimal control; Nonlinear control systems; Regulator theory; Satellites, artificial.

1. INTRODUÇÃO

A eficiência em efetuar manobras, bem como em manter um satélite artificial numa determinada atitude, depende diretamente da lei de controle empregada. Além disto, o tempo de vida útil do satélite é aumentado graças à otimização do combustível e/ou da energia gastos em tais operações.

Neste trabalho determina-se e implementa-se uma lei de controle baseada numa extensão do regulador linear quadrático a certos sistemas não-lineares. Também faz-se uma avaliação da influência dos termos não-lineares, presentes nas equações que descrevem a dinâmica do satélite, sobre o comportamento da lei de controle. Tais termos são

devidos a efeitos giroscópicos e causam o acoplamento entre aquelas equações.

A teoria aqui utilizada foi iniciada por Al'brekht (1962), Lukes (1969) e Willemstein (1975). Uma primeira tentativa de aplicá-la foi feita por Dabbous & Ahmed (1981), visando apenas a redução das velocidades angulares do satélite, sem se importar com o comportamento e a possível redução dos ângulos (relevantes para o controle de atitude de um satélite artificial).

A eficiência desta lei de controle é comparada com a de outra, simulada com sucesso por Souza (1980), tendo como critérios: i) o tempo de estabilização e ii) as magnitudes dos

torques empregados na redução dos ângulos e das velocidades angulares do satélite.

As condições iniciais do problema e os valores máximos permitidos para os ângulos e para as velocidades angulares implicam num estudo dos pesos integrantes do índice de desempenho adotado. Este, por sua vez, permite calcular a energia gasta na fase final de apontamento e na operação normal de um satélite artificial.

O trabalho está assim organizado: Após esta introdução, na Seção 2 resume-se a teoria utilizada; na Seção 3 fazem-se o equacionamento e a implementação numérica do problema; na Seção 4 discutem-se algumas alternativas para estimar a energia; e na Seção 5 apresentam-se os resultados e as conclusões.

2. UMA EXTENSÃO DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO INVARIANTE NO TEMPO

O problema do regulador linear quadrático para um sistema linear invariante no tempo satisfazendo a:

$$\forall t \in [0, T]; \dot{x}(t) = F(x(t), U(t)); \quad (1)$$

$$F(x(t), U(t)) = A \cdot x(t) + B \cdot U(t)$$

$$x(0) = x_0 \text{ e } x(T) = 0$$

(onde $x(t)$ representa o estado do sistema no instante t) consiste em determinar uma lei de controle $U(\cdot)$ (contínua por partes) que minimize globalmente o índice de desempenho dado por:

$$J(x_0, U(\cdot), T) = \frac{1}{2} \int_0^T G(x(t), U(t)) dt;$$

$$G(x(t), U(t)) = \left[x^T(t) Q x(t) + U^T(t) R U(t) \right] \quad (2)$$

(onde $Q \geq 0$, $R > 0$, $T > 0$) satisfazendo (1).

O sistema aqui abordado é descrito pelas equações de Euler, tornando-o não-linear em relação ao estado, o que impossibilita a utilização da teoria do regulador linear quadrático na sua forma usual. Entretanto Al'brekht (1962), Lukes (1969) e Willemstein (1975) es tenderam tal teoria a casos não-lineares, os quais são resumidos a seguir.

Considerando que as funções $F(\cdot, \cdot)$ e $G(\cdot, \cdot)$ nas Equações 1 e 2 são analíticas em torno de $x=0$ e $U=0$, a lei de controle $U(\cdot)$ pode ser expandida em uma série de potências, na forma:

$$\forall t \in [0, T], U(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots \quad (3)$$

onde o primeiro termo $u_1(t)$ é linear em relação a $x(t)$ e dado por:

$$\forall t \in [0, T], u_1(t) = -R^{-1} B^T K(t) x(t), \quad (4)$$

sendo $K(\cdot)$ a solução da equação diferencial de Riccati com condição final $K(T)=0$. Particularmente, quando $T \rightarrow \infty$, $K(\cdot)$ tende para um K constante, o qual é a solução da equação

algébrica de Riccati. Os termos seguintes da expansão $u_2(t)$, $u_3(t)$, ... não são lineares em relação a $x(t)$, mas são calculados por meio de um algoritmo descrito por Dabbous & Ahmed (1981).

Neste trabalho a série foi expandida somente até o segundo termo $u_2(t)$, que é dado por:

$$u_2(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \left[J_{x^2}^2(x) \right]_{x=x(t)}, \quad (5)$$

onde: $[J_{x^2}^2(x)]_{x=x(t)}$ representa a derivada parcial de $J_{x^2}^2(x)$ em relação a x , avaliada em $x(t)$; e $J_{x^2}^2(x)$ é encontrado através de uma expansão polinomial, na forma:

$$J_{x^2}^2(x) = \sum_{\ell=1}^n \alpha_{\ell} x_{i_1} \cdot x_{j_1} \cdot x_{k_1}, \quad (6)$$

onde: n é o número de todas as combinações possíveis entre as variáveis de estado no termo $x_{i_1} \cdot x_{j_1} \cdot x_{k_1}$, e os alfas (α_{ℓ}) são constantes a serem determinadas por meio de um sistema de equações resultantes da identidade:

$$A_{x^2} \cdot x \cdot \left[J_{x^2}^2(x) \right] = -f^2(x) \cdot \left[J^2(x) \right], \quad (7)$$

onde: $A_{x^2} = A - B^{-1} R B^T K$, $J^2(x) = x^T \cdot K \cdot x$, e $f^2(x)$ representa os termos do segundo grau em x presentes em $F(\cdot, \cdot)$.

Nota: Maiores detalhes quanto à aplicação deste método podem ser encontrados nos trabalhos de Lukes (1969) e Willemstein (1975).

3. EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA E SUA IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

3.1 - Equacionamento

O movimento do satélite em relação a um referencial inercial, escrito nas coordenadas de um referencial constituído pelos três eixos principais de inércia do satélite (referencial móvel), é descrito pelas equações de Euler:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \dot{\omega}_1 + \omega_2 \cdot \omega_3 (I_3 - I_2) &= T_1, \\ I_2 \cdot \dot{\omega}_2 + \omega_1 \cdot \omega_3 (I_1 - I_3) &= T_2, \\ I_3 \cdot \dot{\omega}_3 + \omega_1 \cdot \omega_2 (I_2 - I_1) &= T_3, \end{aligned} \quad (8)$$

onde:

ω_1, ω_2 e ω_3 representam as velocidades angulares em relação ao referencial inercial; I_1, I_2 e I_3 são os momentos principais de inércia do satélite; T_1, T_2 e T_3 representam as somas dos torques internos $T_{i_1, 1, 2, 3}$ (produzidos no satélite) mais os torques externos $T_{e1, 2, 3}$ (devidos ao meio).

Os ângulos Θ_1, Θ_2 e Θ_3 medem os desvios do satélite em relação ao referencial inercial e são determinados através das seguintes relações:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_1 &= \omega_1, \\ \dot{\Theta}_2 &= \omega_2, \\ \dot{\Theta}_3 &= \omega_3. \end{aligned} \quad (9)$$

As equações 8 podem ser reescritas na forma:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= U_1 + \beta_1 \cdot f_1 + A_{ex1} \\ \dot{\omega}_2 &= U_2 + \beta_2 \cdot f_2 + A_{ex2} \\ \dot{\omega}_3 &= U_3 + \beta_3 \cdot f_3 + A_{ex3}\end{aligned}\quad (10)$$

onde: $A_{ex1} = T_{e1}/I_1$, $A_{ex2} = T_{e2}/I_2$ e $A_{ex3} = T_{e3}/I_3$ são termos relacionados com os torques externos; $f_1 = \omega_2 \cdot \omega_3$, $f_2 = \omega_1 \cdot \omega_3$ e $f_3 = \omega_1 \cdot \omega_2$ são termos não-lineares; $\beta_1 = (I_3 - I_2)/I_1$, $\beta_2 = (I_2 - I_3)/I_2$ e $\beta_3 = (I_2 - I_1)/I_3$ são coeficientes constantes; e finalmente U_1, U_2 e U_3 são encontrados por meio de (3) e representam $T_{i1}/I_1, T_{i2}/I_2$ e T_{i3}/I_3 , respectivamente. De finindo as seguintes relações:

$$\begin{aligned}x_1 &= \omega_1 & x_4 &= \dot{\theta}_1 \\ x_2 &= \omega_2 & x_5 &= \dot{\theta}_2 \\ x_3 &= \omega_3 & x_6 &= \dot{\theta}_3\end{aligned}\quad (11)$$

e supondo temporariamente* $T_{ei} = 0$, as Equações 9 e 10 podem se escritas na forma matricial: $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot U(t) + f(x)$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \beta_1 \cdot f_1 \\ \beta_2 \cdot f_2 \\ \beta_3 \cdot f_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nesta notação $f(x)$ representa os termos não-lineares, $x(t)$ as variáveis de estado e $U(t)$ as variáveis de controle.

O índice de desempenho também pode ser escrito na forma matricial:

$$J(x_0, U(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + U^T(t) R U(t)] dt,$$

onde:

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{bmatrix} \quad e \quad R = \begin{bmatrix} \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix}$$

representam os pesos relacionados com o estado e com o controle, respectivamente.

A controlabilidade do sistema pode ser verificada através da expressão $\rho[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = \eta$, onde ρ representa o posto e η a dimensão do sistema (1). No caso, $\rho = \eta = 6$.

Os torques internos T_i são gerados em torno dos eixos principais de inércia do satélite por meio da aceleração dos volantes a reação. Os sinais elétricos a serem aplicados aos volantes, para produzir tais torques,

são calculados através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}_1 &= -T_{i1}/J_1 \\ \hat{\Omega}_2 &= -T_{i2}/J_2 \\ \hat{\Omega}_3 &= -T_{i3}/J_3\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}SE_1 &= [T_{i1} + (J_1/CT_1) \cdot \Omega_1]/G_1 \\ SE_2 &= [T_{i2} + (J_2/CT_2) \cdot \Omega_2]/G_2 \\ SE_3 &= [T_{i3} + (J_3/CT_3) \cdot \Omega_3]/G_3\end{aligned}\quad (13)$$

onde: Ω_1, Ω_2 e Ω_3 são as velocidades angulares dos volantes a reação; J_1, J_2 e J_3 são os momentos principais de inércia dos volantes a reação; G_1, G_2 e G_3 são os ganhos dos volantes a reação; CT_1, CT_2 e CT_3 são as constantes de tempo dos volantes a reação; SE_1, SE_2 e SE_3 são os sinais elétricos aplicados aos volantes a reação.

Na prática, Ω_1, Ω_2 e Ω_3 seriam medidos por tacômetros; T_{i1}, T_{i2} e T_{i3} seriam fornecidos pelos controladores; e SE_1, SE_2 e SE_3 seriam calculados como nas Equações 13. Para isto basta que a relação entre SE_j e T_{ij} seja biunívoca (para cada Ω_j), e não necessariamente linear como expresso anteriormente (e detalhado por White e Hansen (1961)).

3.2 - Implementação Numérica

A simulação numérica foi implementada no computador Burroughs B-6800 do INPE, utilizando para a integração das equações diferenciais um método de Runge-Kutta de ordem 4(5) detalhado por Forsythe e outros (1977). Como base para esta simulação foram tomados os dados da missão TD-1A, com o objetivo de manter os resultados comparados com a realidade. As constantes de tempo, os ganhos, os torques externos e os valores iniciais para os ângulos e para as velocidades angulares foram retiradas do modo 5 (fase final de apontamento, e operação normal) da simulação feita por Souza (1980), para o mesmo satélite (ver Tabela 1a). Também são fornecidos (ver Tabela 1b) as inércias, os pesos relacionados com o índice de desempenho, e a matriz inicial K_0 , usada na solução numérica da equação algébrica de Riccati. Esta matriz satisfaz a condição de que a matriz $A - S \cdot K_0$, onde $S = BR^{-1}B^T$, tenha autovalores com parte real negativa, conforme recomendado por Kwakernaak e Sivan (1972).

* Os $T_{ei} \neq 0$ serão incluídos como perturbações.

TABELA 1 Grandezas utilizadas na simulação

(a)			
CTES. DE TEMPO (S)	GANHOS (N.m/V)	TORQUES EXTERNOS (N.m)	
$CT_1 = 20$	$G_1 = 8,9013 \times 10^{-3}$	$T_{e1} = 1 \times 10^{-4}$	
$CT_2 = 20$	$G_2 = 8,9013 \times 10^{-3}$	$T_{e2} = 1 \times 10^{-4}$	
$CT_3 = 20$	$G_3 = 8,9013 \times 10^{-3}$	$T_{e3} = 1 \times 10^{-4}$	
θ_0 (rad)		ω_0 (rad/s)	
$\theta_{01} = 9,70402 \times 10^{-3}$		$\omega_{01} = -1,90080 \times 10^{-4}$	
$\theta_{02} = 2,98003 \times 10^{-2}$		$\omega_{02} = 1,37535 \times 10^{-3}$	
$\theta_{03} = 1,18882 \times 10^{-3}$		$\omega_{03} = 3,13759 \times 10^{-5}$	
(b)			
MÁTRIZ K_0	PESOS		
101010	$\lambda_1 = 0,1$	$\lambda_4 = 0,01$	$\lambda_7 = 1,0$
010101	$\lambda_2 = 0,01$	$\lambda_5 = 0,00001$	$\lambda_8 = 0,1$
101010	$\lambda_3 = 1,0$	$\lambda_6 = 0,01$	$\lambda_9 = 1,0$
010101			
101010			
010101			
MOMENTOS DE INERCIA (kg. m ²)			
$I_1 = 225$	$J_1 = 0,017$		
$I_2 = 207$	$J_2 = 0,017$		
$I_3 = 121$	$J_3 = 0,017$		

4. CÁLCULO DA ENERGIA

Discutem-se a seguir duas maneiras de fazer este cálculo:

A primeira é apresentada por Kwakernaak e Sivan (1972), os quais mostram que se o sistema (1) é estabilizável e detectável, então o índice de desempenho assume o valor $x_0^T K x_0$. Este é função apenas do estado inicial x_0 do sistema, e inclui a parcela $x^T(t) Q x(t)$ (que não tem significado físico), além da parcela desejada $U^T(t) R U(t)$, ambas presentes na integral do índice de desempenho. Logo, e embora simples, $x_0^T K x_0$ é apenas uma estimativa por excesso para esta última.

A segunda é através da integração numérica da parcela $U^T(t) R U(t)$, excluindo-se assim a influência da parcela $x^T(t) Q x(t)$ no valor obtido. Este é exato, embora não tenha expressão algébrica e aumente o trabalho numérico.

É importante observar neste ponto que o cálculo da energia constitui um dos critérios mais importantes para a comparação da eficiência de uma lei de controle.

5. RESULTADOS E CONCLUSÕES

5.1 - Resultados

As Figuras 1, 2 e 3 apresentam os gráficos das componentes de $u_1(t)$ em função do tempo. As Figuras 4, 5 e 6 apresentam os gráficos das componentes de $f(x)$ relacionados com as velocidades angulares do satélite e das componentes de $u_2(t)$ relacionados com o controle. Observando e comparando os gráficos das Figuras 1, 2 e 3 com os das Figuras 4, 5 e 6, respectivamente, conclui-se que: 1) os termos não-lineares $f(x)$ e $u_2(t)$ possuem aproximadamente a mesma ordem de grandeza; 2) as magnitudes de $f(x)$ e $u_2(t)$ são inferiores às

de $u_1(t)$; 3) os termos não-lineares $f(x)$ e $u_2(t)$ só são relevantes no início da operação, tornando-se desprezíveis em relação ao termo $u_1(t)$ no decorrer do processo.

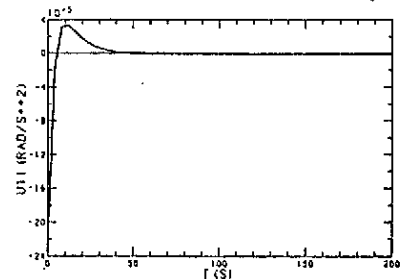


Fig. 1 - U11 x Tempo

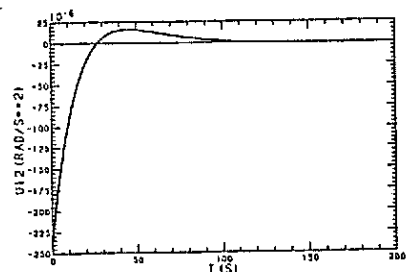


Fig. 2 - U12 x Tempo

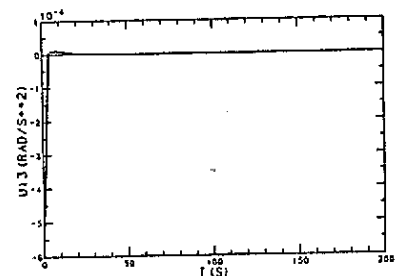


Fig. 3 - U13 x Tempo

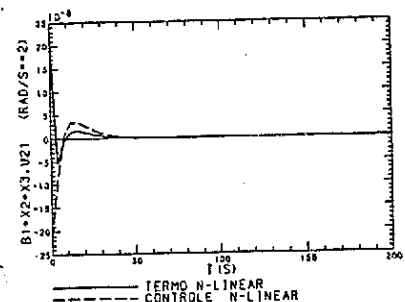


Fig. 4 - B1.x2.x3, U21 x Tempo

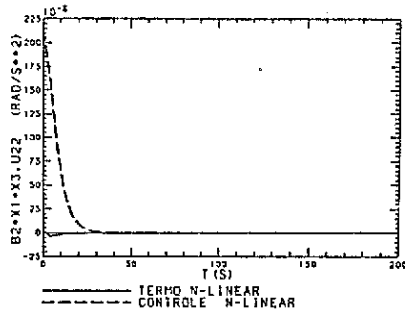


Fig. 5 - $\beta 2 \cdot x1 \cdot x3$, $U22$ x Tempo

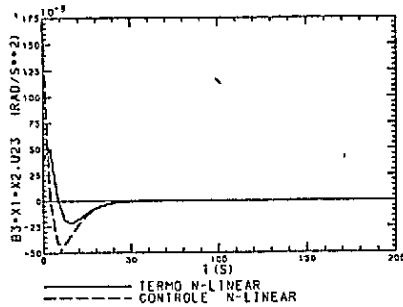


Fig. 6 - $\beta 3 \cdot x2 \cdot x2$, $U23$ x Tempo

As Figuras 7,9 e 11 apresentam os gráficos das componentes da velocidade angular ω do satélite em função do tempo, ao se empregar a lei de controle ótimo e a lei de controle clássica, simuladas por Souza (1980). As Figuras 8,10,12 apresentam os gráficos dos ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 correspondentes em função do tempo. Observando os gráficos das Figuras 7,8,9,10,11 e 12, conclui-se que: 1) em todos os casos em que foi empregada a lei de controle ótimo, os tempos de estabilização (critério de 2%) foram menores do que os produzidos pela lei de controle clássica (ver Tabela 2); 2) em nenhuma das manobras realizadas empregando a lei de controle ótima houve "sobrelevação" nos ângulos.

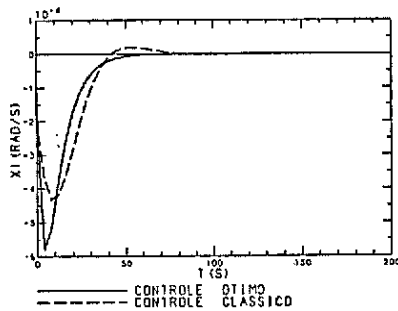


Fig. 7 - $x1$ x Tempo

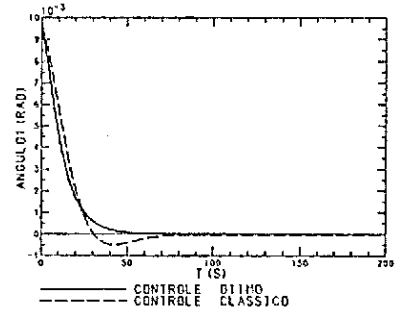


Fig. 8 - Ângulo 1 x Tempo

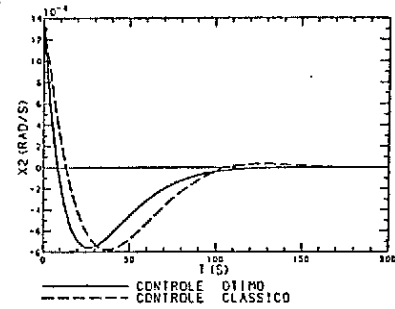


Fig. 9 - $x2$ x Tempo

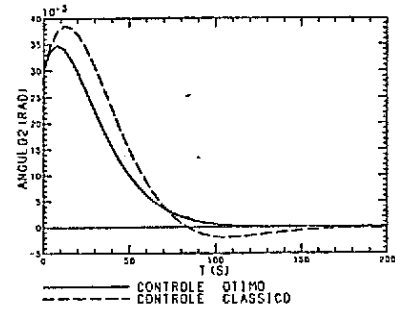


Fig. 10 - Ângulo 2 x Tempo

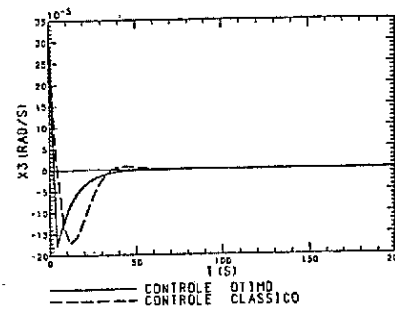


Fig. 11 - $x3$ x Tempo

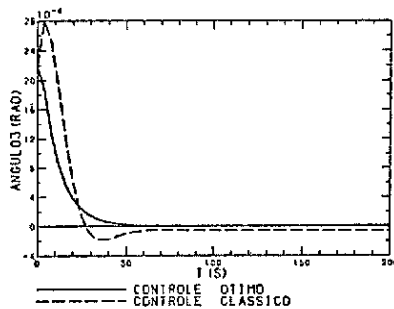


Fig. 12 - Ângulo 3 x Tempo

TABELA 2 - Tempo de estabilização

VALOR NA ESTABILIZAÇÃO	TEMPO (S) CLÁSSICO	TEMPO (S) ÓTIMO
$\omega_1 = -.3802 \text{ E-}05$	80	60
$\Theta_1 = .19408 \text{ E-}03$	68	44
$\omega_2 = .27507 \text{ E-}04$	160	108
$\Theta_2 = .59600 \text{ E-}03$	164	104
$\omega_3 = .6275 \text{ E-}05$	60	40
$\Theta_3 = .4377 \text{ E-}04$	-	44

Os torques que empregam a lei de controle ótimo atingem magnitudes ligeiramente maiores que as dos torques que empregam a lei de controle clássica no mesmo intervalo de tempo, embora se mantenham inferiores aos valores máximos permitidos (ver Tabela 3).

TABELA 3 - Torques máximos

	MÁXIMO	CLÁSSICO	ÓTIMO
TORQUES (N.m)	0.1335	0.0105	0.0476
TORQUES (N.m)	0.1335	0.0269	0.0528
TORQUES (N.m)	0.1335	0.0113	0.0680

5.2 - Conclusões

Neste trabalho apresentou-se uma lei de controle para satélites artificiais baseada numa extensão do regulador linear quadrático a certos sistemas não-lineares. Verificou-se que tal lei reduziu os ângulos e as velocidades angulares do satélite eficientemente, e os termos não-lineares presentes na dinâmica do satélite não são relevantes no início da operação de controle, tornando-se desprezíveis em seguida.

Mostrou-se ainda que o tratamento do problema através da extensão do regulador linear

quadrático possibilita um cálculo da energia gasta na operação de controle de atitude do satélite, conforme indicado na Seção 4. Este cálculo poderá constituir o mais importante critério de comparação entre a lei de controle clássica e a de controle ótimo. Um maior aperfeiçoamento deste trabalho pode ser conseguido estendendo o controle da atitude do satélite à fase de apontamento grosso, para estimar o combustível gasto nesta operação, e considerando para os torques externos seus valores reais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AL'BREKHT, E.G. On the Optimal Stabilization of Nonlinear Systems. J.Appl. Math, 25: 1254-1266, 1962.
- DABBOUS, T.E.; AHMED, N.V. Nonlinear Feedback Regulation of Satellite Angular Moments. IEEE Trans. on Aerospace and Electr. Systems, 8:2-10, 1981.
- FORSYTHE, G.E.; MALCOLM, M.A.; MOLER, C.B. Computer Methods for Mathematical Computations. New Jersey, Prentice-Hall, Inc, 1977.
- KWAKERNAK, H.; SIVAN, R. Linear Optimal Control Systems. New York, John Wiley & Sons, 1972.
- LUKES, D.L. Optimal Regulation of Nonlinear Dynamical Systems. SIAM JOURNAL, 7:75-100, 1969.
- SOUZA, M.L.O. Estudo e Desenvolvimento de um Sistema de Controle de Atitude Ativo em Três Eixos para Satélites Artificiais Usando Atuadores Pneumáticos a Gas Frio e Volante a Reação. Tese de Mestrado, S. J. dos Campos, SP, (INPE-2000-TDL/042) 1980.
- WILLEMSTEIN, A.P. Optimal Regulation of Nonlinear Dynamical Systems on a Finite Interval. SIAM JOURNAL, 15:1050-1069, 1975.
- WHITE, J.S.; HANSEN, Q.M. Study of Systems Using Inertia Wheels for Precise Attitude Control of a Satellite. Washington, D.C., NASA, 1961 (NASA TND-691).