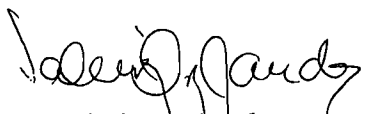

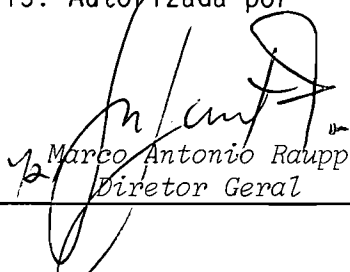
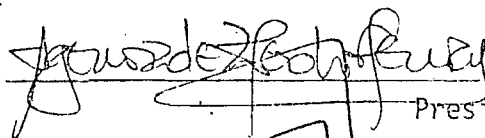



1. Publicação nº <i>INPE-4313-TDL/280</i>	2. Versão	3. Data <i>Agosto 1987</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>PG/DMC</i>	Programa <i>FRH/CEA</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>DETERMINAÇÃO DE ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS - FILTRO DE KALMAN QUATERNION SENSORES INERCIAIS E NÃO-INERCIAIS - MATRIZ DE COVARIÂNCIAS</i>			
7. C.D.U.: <i>629.7.062.2:629.783</i>			
8. Título <i>INPE-4313-TDL/280</i> <i>UTILIZAÇÃO CONJUNTA DE SENSORES INERCIAIS E NÃO-INERCIAIS EM DETERMINAÇÃO DE ATITUDE DE SATÉLITES VIA FILTRO DE KALMAN</i>		10. Páginas: <i>134</i>	11. Última página: <i>C.10</i>
9. Autoria <i>Valtair Antonio Ferraresi</i>		12. Revisada por  <i>Valcir Orlando</i>	
Assinatura responsável 		13. Autorizada por  <i>Marco Antonio Raupp</i> <i>Diretor Geral</i>	
14. Resumo/Notas <i>Neste trabalho são analisados e comparados quatro procedimentos que utilizam sensores inerciais (girômetros) e não-inerciais (sensores solares e de horizonte), na determinação de atitude de satélites artificiais de baixa altitude. A estimação de estado, parametrizado em quatérnions, é realizada através do Filtro Estendido de Kalman. O uso dos quatérnions como parametrização de estado apresenta alguns problemas à aplicação do Filtro de Kalman. Estes problemas devem-se à singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado parametrizado, que é uma condição difícil de se manter numericamente. São analisados três procedimentos que evitam esta dificuldade através de técnicas de redução da matriz de covariâncias dos erros no estado. Também é analisado um procedimento usual de estimação de estado com renormalização forçada do quatérnion. A comparação e a análise do desempenho dos quatro procedimentos são efetuados através de resultados obtidos a partir de simulação em computador digital.</i>			
15. Observações <i>Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital, aprovada Dezembro de 1986.</i>			

Aprovada pela Banca Examinadora
em cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de Mestre
em Ciência Espacial

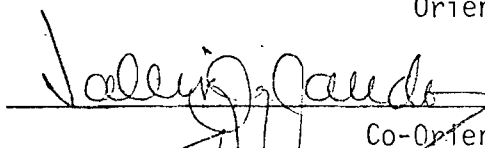
Dr. Agenor de Toledo Fleury


Presidente

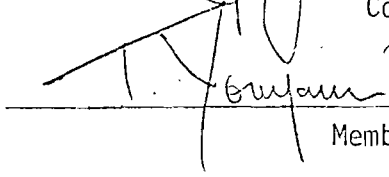
Dr. Atair Rios Neto


Orientador

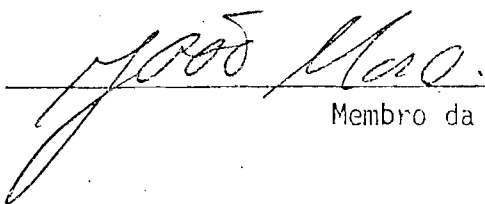
Dr. Valcir Orlando


Co-Orientador

Dr. Takashi Yoneyama


Membro da Banca
-convidado-

Dr. João Moro


Membro da Banca

Candidato: Valtair Antonio Ferraresi

São José dos Campos, 11 de dezembro de 1986

À minha família

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Pesquisas Espaciais pela facilidade concedida à realização deste trabalho.

Aos Drs. Atair Rios Neto e Valcir Orlando pela orientação do trabalho e incentivos a sua realização.

Ao colega Nei Cardoso Cardenuto pelo fornecimento de importantes rotinas computacionais utilizadas nos procedimentos desenvolvidos.

À minha esposa, Domercília, pelo seu apoio e incentivo.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

ABSTRACT

Four procedures that use inertial sensors (gyrometers) and non-inertial sensors (sun and horizon sensors) in the attitude determination of low orbits artificial satellites are compared. The parameterized state estimation in quaternion is made through the Extended Kalman Filter. The use of the quaternion as state parameterization results in some problems in the Kalman Filter application. These problems are due to the error covariance matrix singularity in the parameterized state, that is a difficult condition to be numerically maintained. Four procedures that avoid this difficulty are analysed. These procedures performance comparison and analysis are made through obtained from digital simulation.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	<i>xi</i>
LISTA DE SÍMBOLOS	<i>xiii</i>
<u>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</u>	01
<u>CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS</u>	05
2.1 - Introdução	05
2.2 - Sistemas de Navegação Inercial	05
2.3 - Filtro estendido de Kalman	08
2.4 - Processamento sequencial das observações	15
2.5 - Técnica de ruído adaptativo	16
<u>CAPÍTULO 3 - DETERMINAÇÃO DE ATITUDE ATRAVÉS DO FILTRO DE KALMAN</u>	21
3.1 - Introdução	21
3.2 - Atitude cinemática	22
3.3 - Procedimento usual de estimação de estado com renormalização forçada dos quatêrnions	27
3.3.1 - Esquema de filtragem	32
3.3.1.1 - Introdução	32
3.3.1.2 - Propagação da atitude	33
3.3.1.3 - Propagação da matriz de covariâncias dos erros no estado	34
3.3.1.4 - Algoritmo de determinação de atitude	37
3.4 - Singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado	39
3.5 - Descrição dos procedimentos que evitam os problemas de singularidade	41
3.5.1 - Representação truncada da matriz de covariâncias dos erros no estado	41
3.5.2 - Representação reduzida da matriz de covariâncias dos erros no estado, empregando propriedades da matriz de rotação	47

3.5.3 - Representação reduzida da matriz de covariâncias dos erros no estado através do vetor erro dos quatêrnions.... 55

CAPÍTULO 4 - DESCRIÇÃO DOS TESTES EFETUADOS E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS 65

4.1 - Introdução 65

4.2 - Descrição dos procedimentos de simulação 65

4.3 - Análise dos resultados 70

4.4 - Resultados e comentários 73

4.5 - Verificação da singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado 83

CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE CONTINUIDADE 89

5.1 - Conclusão 89

5.2 - Perspectivas de continuidade 90

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 93

APÊNDICE A - DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO DE ESTADO E MATRIZ DE TRANSIÇÃO DO RUÍDO NO ESTADO

APÊNDICE B - A MATRIZ $Z(q(t))$

APÊNDICE C - MODELO DE AVALIAÇÃO DO GIRÔMETRO INTEGRADOR E EQUAÇÕES DAS OBSERVAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Diagrama esquemático de estimador de atitude	07
3.1 - Evolução do algoritmo no tempo	38
3.2 - Algoritmo de determinação de atitude	38
4.1 - Esquema de simulação	66
4.2 - Elementos keplerianos da órbita	67
4.3 - Resultado do procedimento usual com renormalização: a) erro em quatérnion; b) erro em deriva; c) resíduo normalizado	74
4.4 - Resultado do procedimento usual com renormalização: a) erro angular no eixo x; b) erro angular no eixo y; c) erro angular no eixo z	75
4.5 - Resultado da representação truncada: a) erro em quatérnion; b) erro em deriva; c) resíduo normalizado	76
4.6 - Resultado da representação truncada: a) erro angular no eixo x; b) erro angular no eixo y; c) erro angular no eixo z	77
4.7 - Resultado da representação reduzida empregando propriedades da matriz de rotação: a) erro em quatérnion; b) erro em deriva; c) resíduo normalizado	78
4.8 - Resultado da representação reduzida empregando propriedades da matriz de rotação: a) erro angular no eixo x; b) erro angular no eixo y; c) erro angular no eixo z ..	79
4.9 - Resultado da representação reduzida através do vetor erro dos quatérnions: a) erro em quatérnion; b) erro em deriva; c) resíduo normalizado	80
4.10 - Resultado da representação reduzida através do vetor erro dos quatérnions: a) erro angular no eixo x; b) erro angular no eixo y; c) erro angular no eixo z	81
4.11 - Valores de $\hat{q}^T(t)$ $Pq(t)$ $\hat{q}(t)$ do procedimento usual com renormalização	83

	<u>Pág.</u>
4.12 - Valores de $\hat{q}^T(t) Pq(t) \hat{q}(t)$ da representação truncada..	84
4.13 - Valores de $\hat{q}^T(t) Pq(t) \hat{q}(t)$ da representação reduzida em pregando propriedades da matriz de rotação	84
4.14 - Valores de $\hat{q}(t)^T Pq(t) \hat{q}(t)$ da representação reduzida <u>a</u> través do vetor erro dos quatêrnions.....	85
4.15 - Valores de $\hat{q}^T(t) Pq(t) \hat{q}(t)$ do procedimento usual com renormalização e ruído adaptativo.....	86
4.16 - Valores de $\hat{q}^T(t) Pq(t) \hat{q}(t)$ da representação truncada com ruído adaptativo	86
4.17 - Valores de $\hat{q}(t) Pq(t) \hat{q}(t)$ da representação reduzida em pregando propriedades da matriz de rotação com ruído adaptativo	87
4.18 - Valores de $\hat{q}^T(t) Pq(t) \hat{q}(t)$ da representação reduzida através do vetor erro dos quatêrnions com ruído adapta tivo	87
C.1 - Esquema básico do giro integrador	C.2
C.2 - Malha de torqueamento analógico	C.4
C.3 - Disposição dos eixos dos girômetros em relação aos <u>ei</u> xos do veículos.....	C.4
C.4 - Ângulos entre os versores de (x,y,z) com as direções OS e OT	C.6

LISTA DE SÍMBOLOS

- $A(\underline{q}(t))$ - Matriz de atitude com formalismo dos quatêrniõs
- $\underline{b}(t)$ - Vetor das componentes de deriva dos girômetros
- $E[\cdot]$ - Operador valor esperado
- $F(t)$ - Matriz $n \times n$ de funções contínuas do tempo para o modelo dinâmico
- $F(\underline{\bar{x}}(t), t)$ - Matriz de derivadas parciais da função $\underline{f}(\underline{x}(t), t)$ em relação ao estado, avaliado ao longo da trajetória de referência $\underline{\bar{x}}(t)$.
- $\underline{f}(\underline{x}(t), t)$ - Função vetorial de dimensão n cujas componentes podem ser funções não-lineares do estado
- $G(t)$ - Matriz de funções contínuas do tempo para o modelo dinâmico
- $\tilde{G}(t)$ - Matriz de funções contínuas do tempo para o modelo dinâmico do estado reduzido
- $H(\underline{\bar{x}}(t), t)$ - Matriz de derivadas parciais da função $\underline{h}(\underline{x}(t), t)$ no modelo das observações, relativa ao estado $\underline{\bar{x}}(t)$
- $H_y(\underline{\bar{x}}(t), t)$ - Matriz de derivadas parciais da função $\underline{h}(\underline{x}(t), t)$ no modelo das observações, relativa ao estado truncado
- $\tilde{H}(\underline{\bar{x}}(t), t)$ - Matriz de derivadas parciais da função $\underline{h}(\underline{x}(t), t)$ no modelo das observações, relativa ao estado reduzido
- $\underline{h}(\underline{x}(t), t)$ - Função vetorial de dimensão m , cujas componentes podem ser funções não-lineares do estado, no modelo das observações.
- I_{ixi} - Matriz identidade de dimensão ixi

$K(\underline{x}(t), t)$	-	Matriz ganho de Kalman relativa ao estado $\underline{x}(t)$
$K_y(\underline{x}(t), t)$	-	Matriz ganho de Kalman relativa ao estado truncado
$\tilde{K}(\underline{x}(t), t)$	-	Matriz ganho de Kelman relativa ao estado reduzido
$M(K+1)$	-	Matriz do modelo das pseudo-observações
$N(\cdot, \cdot)$	-	Distribuição normal
N	-	Números de intervalo de propagação
\underline{n}	-	Vetor de rotação
\bar{O}_{ixj}	-	Matriz ixj de elementos nulos
$P(t)$	-	Matriz de covariâncias dos desvios da trajetória nominal no estado
$P_q(t)$	-	Matriz de covariâncias dos desvios da trajetória nominal no estado relativo aos quatérminons
$P_y(t)$	-	Matriz de covariâncias dos desvios da trajetória nominal no estado truncado
$\tilde{P}(t)$	-	Matriz de covariâncias dos desvios da trajetória nominal no estado reduzido
$Q(t)$	-	Matriz de densidade espectral do ruído dinâmico
Q_1, Q_2	-	Partições da matriz $Q(t)$ de dimensão 3×3
\underline{Q}_q	-	Vetor formado pelos elementos da diagonal da matriz $Q(t)$
$\underline{q}(t)$	-	Vetor das componentes do quatérnicon
$R(t)$	-	Matriz de covariâncias do ruído nas observações
$\underline{r}(t)$	-	Resíduo das observações
$r_v(t)$	-	Resíduo verdadeiro das observações
$S(\underline{q}(t))$	-	Matriz de transformação de estado
t	-	tempo

t_k	-	K-ésimo instante de amostragem da velocidade angular
t_0	-	instante inicial
$\underline{u}(t)$	-	Vetor velocidade angular, cujas componentes são medidas pelos giros
$\underline{x}(t)$	-	Vetor de estado
$\underline{x}_y(t)$	-	Vetor de estado truncado
$\tilde{\underline{x}}(t)$	-	Vetor de estado reduzido
$\underline{Y}(t)$	-	Vetor de observações
$Z(\underline{q}(t))$	-	Matriz de função dos quatérnions
$Z_{in}(k+1)$	-	Pseudo-medida escalar em t_{k+1}
$\Gamma(t, t_0)$	-	Matriz de transição do ruído no estado $\underline{x}(t)$
$\Gamma_y(t, t_0)$	-	Matriz de transição do ruído no estado truncado
$\tilde{\Gamma}(t, t_0)$	-	Matriz de transição do ruído no estado reduzido
$\gamma(t, t_0)$	-	Partições da matriz $\tilde{\Gamma}(t, t_0)$ de dimensão 3x3
$\Delta \underline{b}(t)$	-	Vetor erro em deriva dos girômetros
$\Delta \underline{q}(t)$	-	Vetor erro em quatérnions
$\Delta \underline{x}(t)$	-	Vetor erro de estado
$\Delta \underline{x}_y(t)$	-	Vetor erro de estado truncado
$\Delta \tilde{\underline{x}}(t)$	-	Vetor erro de estado reduzido
$\Delta \underline{\beta}$	-	Vetor erro angular
δ	-	Incremento
δ_{kj}	-	Função delta de Kronecker
$\delta(t-\tau)$	-	Função delta de Dirac
$\underline{\varepsilon}(t)$	-	Vetor de ruído branco gaussiano
$\underline{n}(t)$	-	Vetor de ruído branco gaussiano no estado $\underline{x}(f)$
$\underline{n}_1(t), \underline{n}_2(t)$	-	Partições do vetor $\underline{n}(t)$

$\theta(t, t_0)$	-	Matriz de transição do estado relativo aos quatêrnions
$\theta_y(t, t_0)$	-	Matriz de transição do estado relativo aos quatêrnions truncado
$\tilde{\theta}(t, t_0)$	-	Matriz de transição do estado relativo aos quatêrnions reduzido
θ	-	ângulo de rotação
$\Lambda(t, t_0)$	-	Matriz de rotação
$\underline{v}(t)$	-	Vetor de ruído branco gaussiano nas observações
$\Pi(t, t_0)$	-	Partições da matriz $\tilde{\Phi}(t, t_0)$ de dimensão 3x3
$\Sigma(t, t_0)$	-	Partições da matriz $\Gamma(t, t_0)$ de dimensão 4x3
$\Sigma_y(t, t_0)$	-	Partições da matriz $\Gamma_y(t, t_0)$ de dimensão 3x3
σ_0	-	Desvio padrão angular das observações
$\Phi(t, t_0)$	-	Matriz de transição do estado
$\Phi_y(t, t_0)$	-	Matriz de transição do estado truncado
$\tilde{\Phi}(t, t_0)$	-	Matriz de transição do estado reduzido
$\Psi(t, t_0)$	-	Partições da matriz $\Phi(t, t_0)$ de dimensão 4x3
$\Psi_y(t, t_0)$	-	Partições da matriz $\Phi_y(t, t_0)$ de dimensão 3x3
$\Omega(\underline{\omega}(t))$	-	Matriz de funções das velocidades angulares
$\hat{\cdot}$	-	Denota valor estimado
$\bar{\cdot}$	-	Denota valor de referência
$\underline{\cdot}$	-	Denota grandeza vetorial
$\dot{\cdot}$	-	Denota derivada no tempo
\times	-	Denota produto vetorial
\otimes	-	Denota produto de quatêrnions

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste trabalho analisam-se quatro procedimentos de determinação de atitude, via Filtro de Kalman, aplicados a sistema de navegação autônoma de satélites artificiais, utilizando sensores inerciais acoplados ("strapdown") ao veículo (Joos, 1978; Cardenuto, 1984) e sensores não-inerciais (Wertz, 1978). As medidas dos sensores inerciais são utilizadas para realizar a propagação da atitude através de substituição direta de suas medidas nas equações cinemáticas de atitude do veículo, possibilitando a integração destas durante um determinado período de tempo. As medidas dos sensores não-inerciais alimentam um procedimento de estimação de atitude, permitindo a recalibração periódica dos sensores inerciais. A recalibração é feita através da estimação conjunta da atitude do satélite e das derivas dos sensores inerciais (Lefferts et alii, 1982).

Para a representação do estado utiliza-se o formalismo de quatérnions (Wertz, 1978), considerando-se para as quatro primeiras variáveis de estado as quatro componentes dos quatérnions e para as três últimas, as derivas dos girômetros (sensores inerciais). A parametrização do estado em quatérnions tem sido largamente empregada em procedimentos de determinação de atitude, devido as várias vantagens dessa parametrização em relação a outras existentes (ângulos de Euler, eixos/ângulos de Euler, por exemplo). As principais vantagens decorrem do fato da matriz de atitude possuir forma algébrica, quando expressa em função dos quatérnions (a necessidade de funções trigonométricas é eliminada) e da ausência de singularidade, qualquer que seja a atitude do satélite. O emprego de quatérnions impõe, porém, certas dificuldades à implementação do processo de estimação de estado via Filtro de Kalman. Isto se deve ao fato das suas componentes estarem submetidas ao vínculo de norma unitária. Esta restrição implica na singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado, que é uma condição difícil de se manter devido ao acúmulo de erros numéricos.

Cardenuto (1984) implementou um procedimento desenvolvido por Lefferts et alii (1982) no qual é considerada a aplicação direta do Filtro de Kalman para a determinação da atitude do satélite, utilizando as medidas dos girômetros na fase de propagação do algoritmo do Filtro e dos sensores não-inerciais para a atualização das estimativas do estado. Após cada atualização o vínculo de norma unitária dos quatêrnions é mantida através da renormalização forçada deste parâmetro, nada sendo feito com relação a manutenção da singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado. No decorrer deste trabalho este procedimento será chamado de Procedimento Usual de Estimação de Estado com Renormalização Forçada dos Quatêrnions.

O objetivo deste trabalho é efetuar-se uma comparação entre o procedimento implementado por Cardenuto (1984) com outros três procedimentos de determinação de atitude (incluindo comparação entre os desempenhos destes três procedimentos entre si), também desenvolvidos por Lefferts et alii (1982), que incluem técnicas de manutenção da singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado. Esta comparação será efetuada com base em resultados obtidos a partir de testes dos quatro procedimentos, via simulação numérica em computador digital, considerando-se suas aplicações a um satélite de baixa altitude.

Os três procedimentos que serão analisados e comparados entre si e com o procedimento usual de estimação com renormalização são os seguintes:

- a) Representação Truncada da Matriz de Covariâncias dos Erros no Estado;
- b) Representação Reduzida da Matriz de Covariâncias dos Erros no Estado, Empregando Propriedades da Matriz de Rotação;
- c) Representação Reduzida da Matriz de Covariâncias dos Erros no Estado Através do Vetor Erros dos Quatêrnions.

Será também implementada conjuntamente com os procedimentos citados, uma técnica adaptativa de estimação do ruído no estado (Rios Neto e Kuga, 1982) que será utilizada para a determinação, a priori, dos termos da diagonal da matriz de densidade espectral do ruído dinâmico. Esta técnica será também utilizada em um dos testes dos procedimentos para a estimação sequencial do vetor de estado e dos citados termos da matriz de densidade espectral do ruído dinâmico, para verificação de sua influência na manutenção da singularidade.

No Capítulo 2 são resumidamente apresentados os principais fundamentos teóricos que alicerçam os procedimentos de determinação de atitude a serem analisados. No Capítulo 3 descreve-se os quatro procedimentos de estimação de estado a serem analisados e comparados. No Capítulo 4 são apresentados e discutidos os testes utilizados para avaliar o desempenho de cada método. Finalmente o Capítulo 5 é dedicado às conclusões e sugestões para aprimoramento e continuidade deste trabalho.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são resumidamente apresentados os principais fundamentos teóricos, visando auxiliar a leitura dos capítulos subsequentes a leitores com pouca familiarização com a área de estimação de atitude e navegação inercial. Inicialmente será esclarecida a necessidade de medidas auxiliares, providas por sensores não-inerciais. A seguir, descreve-se brevemente o Filtro de Kalman em sua versão estendida à aplicação a sistemas não-lineares: o chamado Filtro Estendido de Kalman (e.g.: Liebelt, 1967; Jazwinski, 1970; Gelb, 1974; Maybeck, 1979). Finalmente, descreve-se uma técnica de ruído adaptativo, para a estimação do nível de ruído no estado segundo um critério que mantém a coerência estatística entre o estado e o resíduo das observações. (Rios Neto e Kuga, 1982).

2.2 - SISTEMAS DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

Um sistema de navegação, em geral, é definido como um sistema capaz de fornecer a posição de um veículo em relação a um referencial no decorrer do tempo. Sistemas de navegação inerciais são sistemas capazes de determinar a posição do veículo a partir de medidas do movimento obtidas por sensores inerciais. Assim sendo, se a aceleração inercial do veículo for conhecida, tanto em magnitude quanto em direção, é possível realizar-se uma integração numérica a partir de condições iniciais, obtendo-se a velocidade e a posição do veículo no decorrer do tempo. Para a determinação autônoma de atitude há a necessidade de se manter a bordo um referencial inercial. Este sistema de referência é geralmente obtido utilizando-se dispositivos chamados giroômetros.

Existem duas concepções de Sistema de Navegação Inercial: aquele onde os componentes inerciais (girômetros e acelerômetros) são montados numa plataforma estabilizada e aquela onde estes componentes são fixos diretamente na estrutura do veículo ("strapdown").

No sistema de plataforma estabilizada os sensores inerciais são isolados do veículo por anéis de cardan e estabilizados inercialmente através de servos mecanismos na plataforma. Os eixos sensíveis dos girômetros e dos acelerômetros formam um triedro ortogonal, definindo o sistema de referência da plataforma, o qual é utilizada para os cálculos de navegação.

O sistema "strapdown", embora imaginado há muito tempo, só teve sua execução possível com os progressos em miniaturização da eletrônica de tratamento numérico. Neste sistema o núcleo que comporta os girômetros e os acelerômetros é fixo no próprio veículo, formando um triedro ortogonal, de preferência alinhado com os seus eixos principais de inércia. Nesta configuração, as medidas são tomadas no referencial móvel do próprio veículo, necessitando de transformações de coordenadas para o sistema de referência adotado, envolvendo assim uma tarefa adicional para o computador a bordo.

Existem diversos fatores que levam à existência de erros tendenciosos nas medidas dos sensores inerciais. Em se tratando de girômetros, esses erros são conhecidos como derivas ("drift"). A deriva total resulta da soma de várias parcelas de derivas as quais possuem origem distintas. Estas parcelas estão divididas em dois tipos: o primeiro é de origem estática, tendo como causas as imperfeições de fabricação e montagem, e erros devidos à eletrônica associada ao instrumento. O segundo, denominado deriva dinâmica, surge quando o sensor está em operação. Esses erros podem ser determinados em laboratório, permitindo a realização de esquemas de compensação (Maybeck, 1979) que visam extrair esses erros das medidas.

Para aplicações em navegação de curto período, como lançadores e mísseis de médio alcance, este procedimento, aliado a giroscópios de qualidade excepcionais garantem uma navegação precisa. Porém, para navegação de longa duração como em aviões, mísseis estratégicos e determinação de atitude de satélites artificiais, surge a necessidade de uma referência externa a fim de tornar possível a correção do acúmulo de erros residuais, conduzindo ao que é denominado Sistema de Navegação Inercial Auxiliado. Este nome resulta do fato de, neste sistema, ser necessário a utilização de medidas auxiliares, realizadas por sensores não-inerciais de atitude (por exemplo: sensores solares, de horizonte e estelares).

Para aplicações em satélites, a base de um sistema auxiliado geralmente consta de um modelo de propagação de atitude e dois conjuntos de medidas. O primeiro é obtido por sensores inerciais e o segundo é obtido através de sensores não-inerciais. As medidas dos sensores inerciais são geralmente utilizadas para a realização da propagação da atitude, através da integração de suas equações cinemáticas, durante determinados períodos de tempo. As medidas dos sensores não-inerciais geralmente alimentam procedimentos de estimação ótima de atitude, os quais permitem a recalibração e reinicialização periódica dos sensores inerciais. Na Figura 2.1 é apresentada a título ilustrativo, um diagrama esquemático de um estimador de atitude do tipo citado.

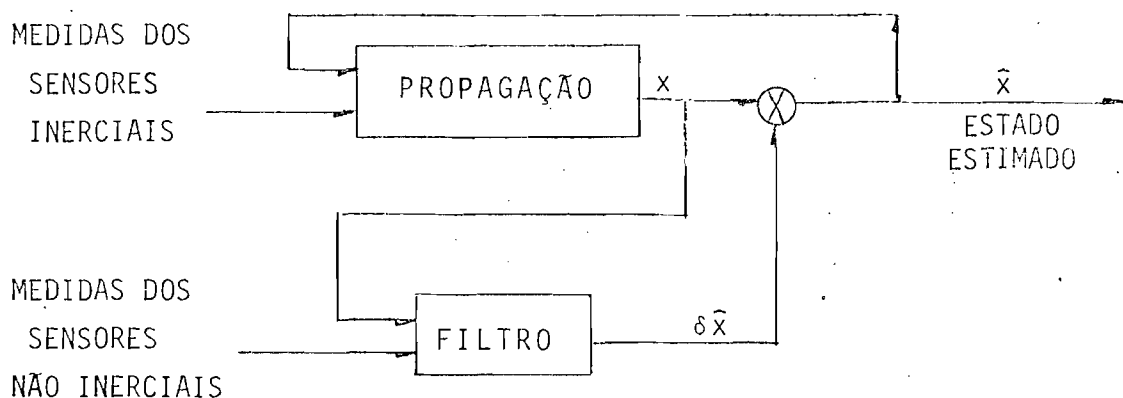


Fig. 2.1 - Diagrama esquemático de estimador de atitude.

No presente trabalho, os procedimentos de estimação de atitude com base em sensores inerciais e não-inerciais a serem apresentados, utilizam-se de um estimador seqüencial estocástico, o Filtro de Kalman. Na próxima seção será efetuada uma descrição resumida do Filtro de Kalman em sua forma estendida a aplicações a sistemas não-lineares.

2.3 - FILTRO ESTENDIDO DE KALMAN

O Filtro de Kalman é um algoritmo recursivo que permite a obtenção de estimativas ótimas do estado e da matriz de covariâncias dos erros no estado. Para problemas não-lineares a versão mais usada é o chamado Filtro Estendido de Kalman, do qual iniciará-se na seqüência uma descrição resumida. Trata-se de um assunto largamente difundido na literatura técnica da área e leitores interessados em maiores detalhes poderão encontrá-los em Liebelt (1967), Jazwinski (1970) e Gelb (1974) por exemplo.

Seja um sistema não-linear cuja dinâmica é caracterizada pela equação diferencial.

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), t) + G(t)\underline{\eta}(t), \quad (2.1)$$

onde:

$\underline{x}(t)$ é o vetor de estado de dimensão n ;

$\underline{f}(\underline{x}(t), t)$ é uma função vetorial de dimensão n , cujas componentes podem ser funções não-lineares do estado;

$G(t)$ é uma matriz $n \times p$ contínua e dependente do tempo;

$\underline{\eta}(t)$ é um vetor de dimensão p cujas componentes são ruídos brancos gaussianos.

A matriz de covariâncias de $\underline{n}(t)$ é dada por:

$$E [\underline{n}(t) \underline{n}^T(\tau)] = Q(t) \cdot \delta(t-\tau), \quad (2.2)$$

onde $Q(t)$ é a matriz de densidade espectral associada a $\underline{n}(t)$ e $\delta(t-\tau)$ é a função Delta de Dirac.

Suponha-se que se dispõe de observações do estado do sistema modeladas matematicamente por (Vide Apêndice C):

$$\underline{y}(t_k) = \underline{h}(\underline{x}(t_k), t_k) + \underline{v}(t_k), \quad (2.3)$$

onde:

$\underline{y}(t_k)$ é o vetor de observações de dimensão m ;

$\underline{h}(\underline{x}(t_k), t_k)$ é um vetor de dimensão m cujas componentes podem ser funções não-lineares do estado;

$\underline{v}(t_k)$ é um vetor de dimensão m cujas componentes são ruídos brancos gaussianos.

A matriz de covariâncias de $\underline{v}(t_k)$ é dada por:

$$E [\underline{v}(t_k) \underline{v}^T(t_\tau)] = R(t_k) \delta_{k\tau}, \quad (2.4)$$

onde $R(t_k)$ é a matriz de covariância associada ao ruído nas medidas $\underline{v}(t_k)$ e $\delta_{k\tau}$ é a função Delta de Kronecker. É ainda considerado que o ruído no estado $\underline{n}(t)$ é não correlacionado tanto com o estado inicial quanto com o ruído nas observações, assim como este último é não-correlacionado com o estado.

A dedução do Filtro Estendido de Kalman é feita a partir da linearização das equações de estado do sistema e equações de obser-

vações, em torno de uma trajetória de referência, ou trajetória nominal $\bar{x}(t)$, determinística, satisfazendo:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \underline{f}(\bar{x}(t), t) \quad ; \quad t \geq t_0 \quad (2.5)$$

Definindo-se $\delta x(t) \triangleq x(t) - \bar{x}(t)$, como o desvio da trajetória nominal, tem-se:

$$\frac{d\delta x(t)}{dt} = \underline{f}(x(t), t) - \underline{f}(\bar{x}(t), t) + G(t) \underline{n}(t); \quad (2.6)$$

com estatística aproximada por $N [0, P(t)]$, sendo $P(t)$ a matriz de covariâncias dos desvios da trajetória nominal, definida por:

$$P(t) = E \left\{ [x(t) - \bar{x}(t)] \cdot [x(t) - \bar{x}(t)]^T \right\} \quad (2.7)$$

Supondo-se $\delta x(t)$ suficientemente pequeno, uma expansão em série de Taylor de primeira ordem fornece:

$$\underline{f}(x(t), t) - \underline{f}(\bar{x}(t), t) \approx F(\bar{x}(t), t) \delta x(t), \quad (2.8)$$

onde:

$$F(\bar{x}(t), t) \triangleq \left[\frac{\partial \underline{f}(\bar{x}(t), t)}{\partial x(t)} \right], \quad (2.9)$$

é a matriz de derivadas parciais tomada na trajetória nominal. Com esta aproximação a equação linearizada torna-se:

$$\frac{d\delta x(t)}{dt} = F(\bar{x}(t), t) \cdot \delta x(t) + G(t) \underline{n}(t) \quad (2.10)$$

A aplicação do Filtro de Kalman ao sistema linearizado contínuo resulta, para a equação de propagação da matriz de covariâncias dos erros no estado, em uma equação de Riccati. Para evitar a integração desta equação de Riccati, inicialmente discretiza-se a Equação 2.10, obtendo-se:

$$\underline{\delta x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k) \underline{\delta x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) G(\tau) \underline{n}(\tau) d\tau, \quad (2.11)$$

onde $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ é a matriz de transição de estado do sistema apresentada pela Equação 2.10, onde:

$$\Phi(t, t_k) = F(\bar{x}(t_k), t) \cdot \Phi(t, t_k), \quad (2.12)$$

para $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, e com a condição inicial dada por:

$$\Phi(t_k, t_k) = I, \quad (2.13)$$

sendo I a matriz identidade.

Para efeito de cálculo da matriz de covariâncias dos desvios da trajetória nominal, para o estado propagado entre instante de amostragem, o ruído $\underline{n}(t)$ é usualmente aproximado por um "step-process", isto é, admite-se que o intervalo de tempo entre t_k e t_{k+1} é suficientemente pequeno, de modo a permitir que a Equação 2.11 possa ser aproximada por:

$$\underline{\delta x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k) \cdot \underline{\delta x}(t_k) + \Gamma(t_{k+1}, t_k) \cdot \underline{n}(t_k), \quad (2.14)$$

onde:

$$\Gamma(t_{k+1}, t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) G(\tau) d\tau. \quad (2.15)$$

As medidas (observações) modelada pela Equação 2.3 podem também ser funções não-lineares do estado do sistema dinâmico. Deve-se adotar para elas uma formulação análoga a que foi feita para o estado, linearizando-as em torno de medidas nominais. Seja $\bar{Y}(t_{k+1})$ o vetor de medidas calculado a partir da trajetória nominal $\bar{x}(t_{k+1})$, ou seja:

$$\bar{Y}(t_{k+1}) \triangleq h(\bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1}). \quad (2.16)$$

Definindo-se:

$$\delta \bar{Y}(t_{k+1}) \triangleq \underline{Y}(t_{k+1}) - \bar{Y}(t_{k+1}), \quad (2.17)$$

e decompondo-se a Equação 2.3 em série de Taylor, uma aproximação de primeira ordem fornece:

$$\delta \bar{Y}(t_{k+1}) = H(\bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1}) \cdot \delta \underline{x}(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad (2.18)$$

onde:

$$H(\bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1}) \triangleq \left[\frac{\partial h(\bar{x}(t_{k+1}), t_{k+1})}{\partial \underline{x}} \right] \quad (2.19)$$

é a matriz de derivadas parciais das observações em relação ao estado.

As Equações 2.14 e 2.18 são equações de um sistema linear discreto, ao qual são aplicáveis as equações do Filtro Discretizado de Kalman (Gelb, 1974). A escolha da trajetória de referência $\bar{x}(t)$, torna-se uma questão lógica: desde que se quer uma trajetória nominal

próxima a trajetória real, escolhe-se a trajetória nominal com base na estimativa mais recente do estado. Assim:

$$\bar{\underline{x}}(t_k) = \hat{\underline{x}}(t_k/t_k). \quad (2.20)$$

A partida é dada fazendo-se:

$$\bar{\underline{x}}(t_0) = \hat{\underline{x}}(t_0), \quad (2.21)$$

logo

$$\delta \underline{x}(t_0) \sim N(0, P(t_0)). \quad (2.22)$$

Com a estrutura recursiva seqüencial do Filtro de Kalman, a cada passo o sistema é relinearizado sobre a nova estimativa. Partindo-se desta imposição a melhor estimativa entre observações é dada por:

$$\hat{\underline{x}}(t/t_k) = \underline{f}(\hat{\underline{x}}(t/t_k), t) ; \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}. \quad (2.23)$$

Considerando-se o sistema linearizado, a aplicação da equação do Filtro de Kalman para a correção da estimativa (Maybeck, 1979), fornece:

$$\begin{aligned} \delta \hat{\underline{x}}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \delta \hat{\underline{x}}(t_{k+1}/t_k) + K(\hat{\underline{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \\ &\cdot [\delta \underline{y}(t_{k+1}) - H(\hat{\underline{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \delta \hat{\underline{x}}(t_{k+1}/t_k)], \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde:

$$\begin{aligned} K(\hat{\underline{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) &= P(t_{k+1}/t_k) \cdot H^T(\hat{\underline{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \\ &\cdot [H(\hat{\underline{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot P(t_{k+1}/t_k) \cdot H^T(\hat{\underline{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) + \\ &+ R(t_{k+1})]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

A correção de $\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k)$ é dada por $\delta\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_{k+1})$; sendo $\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k)$ a melhor estimativa do estado no instante t_{k+1} , a qual incorpora informações contidas em observações efetuadas até o instante t_k . Esta estimativa é obtida através da propagação do estado, com o auxílio da Equação 2.23, a partir de $\underline{\hat{x}}(t_k/t_k)$. A atualização do estado no instante t_{k+1} é então dada por:

$$\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k) + \delta\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_{k+1}), \quad (2.26)$$

sendo:

$$\delta\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k) = 0. \quad (2.27)$$

Substituindo as Equações 2.17, 2.26 e 2.27 na Equação 2.24, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_{k+1}) = & \underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k) + K(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \\ & \cdot [\underline{Y}(t_{k+1}) - h(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})], \end{aligned} \quad (2.28)$$

que é a equação para a atualização do estado do Filtro Estendido de Kalman.

Resumindo, tem-se as seguintes equações para o Filtro Estendido de Kalman:

- Propagação do estado e da matriz de covariâncias dos erros no estado

$$\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k) = \underline{\hat{x}}(t_k/t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \underline{f}(\underline{\hat{x}}(t/t_k), t) dt, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}
 P(t_{k+1}/t_k) &= \phi(t_{k+1}, t_k) \cdot P(t_k/t_k) \cdot \phi^T(t_{k+1}, t_k) + \\
 &+ \Gamma(t_{k+1}, t_k) \cdot Q(t_k) \cdot \Gamma^T(t_{k+1}, t_k)
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

- Ganho de Kalman

$$\begin{aligned}
 K(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) &= P(t_{k+1}/t_k) \cdot H^T(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \\
 &\cdot [H(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot P(t_{k+1}/t_k) \cdot H^T(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) + \\
 &+ R(t_{k+1})]^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

- Atualização do estado e da matriz de covariâncias dos erros no estado

$$\begin{aligned}
 \underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k) + K(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \\
 &\cdot [Y(t_{k+1}) - h(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})],
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 P(t_{k+1}/t_{k+1}) &= [I - K(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \\
 &\cdot H(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})] \cdot P(t_{k+1}/t_k).
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

2.4 - PROCESSAMENTO SEQUENCIAL DAS OBSERVAÇÕES

Quando os ruídos das medidas são não-correlacionados entre si, isto é, a matriz de covariâncias dos ruídos do vetor de observações, $R(t_{k+1})$, é diagonal, pode-se processar as medidas sequencialmente para a atualização do estado e da respectiva matriz de covariâncias dos erros. Isto evita a inversão matricial que aparece na Equação 2.31 para o cálculo do ganho de Kalman, transformando-a na inversão sequen

cial de m escalares. Isto geralmente acarreta em um ganho em termos de precisão e de tempo de processamento (Sorenson, 1966).

As Equações 2.31, 2.32 e 2.33 passam então a ser recursivas no processamento do vetor de observações, isto é, cada componente do vetor \bar{e} é processado separadamente. A primeira componente do vetor $Y(t_{k+1})$ é utilizada para a primeira atualização do estado, obtendo-se dessa forma uma estimativa preliminar de $\bar{x}(t_{k+1}/t_{k+1})$, que inclui informações contidas apenas na primeira componente do vetor $Y(t_{k+1})$. Usando essa estimativa como informação a priori, processa-se a segunda componente do vetor de observações, atualizando a estimativa de modo que essa inclua as informações sobre o estado contidas nessa componente do vetor de observações. Esse processo deve ser repetido sucessivamente até que a componente m do vetor de observações, correspondente ao instante t_{k+1} , tenha sido processada, obtendo-se com isso a estimativa final do vetor de estado neste instante: $\bar{x}(t_{k+1}/t_{k+1})$.

2.5 - TÉCNICA DE RUÍDO ADAPTATIVO

Para sistemas não-lineares, o filtro pode divergir em decorrência de vários fatores: erros de linearização, procedimento numérico computacional empregado e má-modelagem do sistema dinâmico.

O fenômeno ocorre quando as componentes da matriz de covariâncias dos erros no estado se tornam irrealisticamente pequenos, e com isto as componentes do ganho de Kalman (que corrige o vetor de estimativas e a matriz de covariâncias) também se tornam pequenas, reduzindo a influência de novas observações na estimativas.

Será descrito a seguir um procedimento de estimação do nível de ruído no estado para evitar problemas de divergência do filtro (Rios Neto e Kuga, 1982). A idéia básica do procedimento é estimar os termos da diagonal da matriz de densidade espectral associada ao ruído na dinâmica, $Q(k)$, a ser incorporada na propagação da matriz de cova

riâncias dos erros no estado, conforme a Equação 2.30, a partir de uma hipótese que assegura a coerência entre o resíduo nas observações e suas propriedades estatística. O critério de otimização adotado para a estimação dos termos da diagonal de $Q(k)$ é o de máxima verossimilhança do resíduo verdadeiro \underline{r}_v , onde o resíduo verdadeiro das observações é definido como a diferença entre o valor verdadeiro do vetor de observações em um dado instante, e o seu valor estimado.

Considere-se que se disponha de observações de um sistema dinâmico modeladas matematicamente por:

$$\underline{r}_v(k+1) = \underline{h}(\underline{x}(k+1/k), k+1) - \underline{h}(\underline{\hat{x}}(k+1/k), k+1), \quad (2.40)$$

sendo $\underline{x}(k+1/k)$ o valor verdadeiro do estado do sistema no instante t_{k+1} . Para simplificar a notação, substituiu-se t_k, t_{k+1} por $k, k+1$ respectivamente.

O resíduo calculado das observações é definido como a diferença entre o valor medido e o valor estimado do vetor de observações em um dado instante, isto é:

$$\underline{r}(k+1) = \underline{y}(k+1) - \underline{h}(\underline{\hat{x}}(k+1/k), k+1). \quad (2.41)$$

Assim, o resíduo calculado e o resíduo verdadeiro das observações possuem a seguinte relação:

$$\underline{r}_v(k+1) = \underline{r}(k+1) - \underline{v}(k+1), \quad (2.42)$$

onde $\underline{v}(k+1)$ é uma sequência gaussiana branca com

$$E [\underline{v}(k+1)] = 0 \quad \text{e} \quad E [\underline{v}^2(k+1)] = \hat{R}(k+1) > 0.$$

Admitindo que $\underline{r}_v(k+1)$ possui distribuição gaussiana, a hipótese de máxima verossimilhança leva a:

$$\underline{r}_v^2(k+1) = E [\underline{r}_v^2(k+1)]. \quad (2.43)$$

O procedimento de ruído adaptativo consiste em se utilizar um Filtro de Kalman operando paralelamente ao filtro principal, para a estimação dos elementos da diagonal da matriz de densidade espectral do ruído dinâmico, $Q(k)$. A fim de adequar o problema de estimação desses elementos à aplicação do Filtro de Kalman, considera-se o vetor formado pelos elementos da diagonal de $Q(k)$, $\underline{Q}_q(k)$, modelado dinamicamente por:

$$\underline{Q}_q(k+1) = \underline{Q}_q(k) + \underline{\varepsilon}(k), \quad (2.44)$$

onde $\underline{\varepsilon}(k)$ possui média nula e covariância dada por:

$$E [\underline{\varepsilon}(k) \cdot \underline{\varepsilon}^T(j)] = W(k) \cdot \delta_{kj}, \quad (2.45)$$

onde δ_{kj} é uma função Delta de Kronecker.

Desenvolvendo as Equações 2.41, 2.42 e 2.43 e considerando-se as hipóteses básicas adotadas no trabalho de Rios Neto e Kuga (1982), é obtida a equação abaixo, denominada de equação de pseudo medida escalar:

$$Z_m(k+1) = M(k+1) \cdot \underline{Q}_q(k+1) + n'(k+1), \quad (2.46)$$

onde:

$$M(k+1) = \left[\left[\sum_{j=1}^r H_j \Gamma_{j1} \right]^2; \left[\sum_{j=1}^n H_j \Gamma_{j2} \right]^2; \dots; \left[\sum_{j=1}^n H_j \Gamma_{jr} \right]^2 \right], \quad (2.47)$$

sendo H_j o j -ésimo elemento do vetor $H(k+1)$, e Γ_{ji} o elemento da j -ésima linha e i -ésima coluna da matriz $\Gamma(k)$, e ainda:

$$E [\eta'(k+1)] = 0, \quad (2.48)$$

$$E [\eta'^2(k+1)] = 4 \cdot \underline{r}^2(k+1) \cdot R(k+1) + 2 \cdot R^2(k+1). \quad (2.49)$$

A pseudo medida escalar $Z_m(k+1)$ é calculada por:

$$Z_m(k+1) \triangleq \underline{r}^2(k+1) + R(k+1) - H(k+1) \cdot \phi(k+1, k) \cdot P(k/k) \cdot \phi^T(k+1, k) \cdot H^T(k+1). \quad (2.50)$$

Para grandes erros iniciais no estado, pode ocorrer uma situação de perda de validade das hipóteses consideradas para as aproximações lineares. Portanto, para sistemas não-lineares deve-se utilizar valor $\underline{r}(k+1)$ limitados.

$$\underline{r}(k+1) = \min \left\{ \underline{r}(k+1), 3\sigma_{k+1} \right\}, \quad (2.51)$$

onde:

$$\sigma_{k+1}^2 = R(k+1). \quad (2.52)$$

Assim, o esquema de estimação do ruído fica:

- Equações da dinâmica e observações

$$\underline{Q}_q(k+1) = \underline{Q}_q(k) + \underline{\varepsilon}(k), \quad (2.53)$$

$$Z_m(k+1) = M(k+1) \cdot \underline{Q}_q(k+1) + \eta'(k+1) \quad (2.54)$$

- Propagação

$$\underline{\hat{Q}}_q(k+1/k) = I \cdot \underline{\hat{Q}}_q(k/k), \quad (2.55)$$

$$P(k+1/k) = P(k/k) + W(k), \quad (2.56)$$

onde $W(k) = 10^{-2p} \cdot I$, com "p" sendo o número de dígitos da mantissa do computador e I é a matriz identidade.

- Atualização

$$K(k+1) = P(k+1/k) \cdot M^T(k+1) \left[M(k+1) \cdot P(k+1/k) \cdot M^T(k+1) + E [\eta'^2(k+1)] \right]^{-1}, \quad (2.57)$$

$$P(k+1/k+1) = P(k+1/k) - K(k+1) \cdot M(k+1) \cdot P(k+1/k), \quad (2.58)$$

$$\underline{\hat{Q}}_q(k+1/k+1) = \underline{\hat{Q}}_q(k+1/k) + K(k+1) \cdot [Z_m(k+1) - M(k+1) \cdot \underline{\hat{Q}}_q(k+1/k)] \quad (2.59)$$

- A matriz de ruído estimada fica:

$$\underline{\hat{Q}}_q(k+1/k+1)_i = \begin{cases} \underline{\hat{Q}}_q(k+1/k+1)_i & \text{se positiva} \\ 0 & \text{se negativa} \end{cases}$$

logo:

$$Q(k+1) = \text{dig} \left\{ \underline{\hat{Q}}_q(k+1/k+1) \right\} \quad (2.60)$$

CAPÍTULO 3

DETERMINAÇÃO DE ATITUDE ATRAVÉS DO FILTRO DE KALMAN

3.1 - INTRODUÇÃO

A aplicação de Sistemas de Navegação Inerciais a satélites artificiais exige a manutenção de um referencial inercial por longo período de tempo. Portanto há necessidade de recalibração periódica dos girômetros, devido aos seus erros de deriva ("drift"). Em sistemas do tipo "strapdown", em que esta referência é mantida, por exemplo, por integração das saídas dos girômetros em computador de bordo, a recalibração pode ser feita através da estimação conjunta da atitude do satélite e derivas dos girômetros, periodicamente, a partir de medidas de sensores não-inerciais. A utilização de sensores não-inerciais para recalibração periódica de sensores inerciais dão origem aos chamados Sistemas de Navegação Inercial Auxiliado.

Neste trabalho são analisados quatro procedimentos que empregam o Filtro de Kalman para a estimação de atitude, parametrizada em quatérnions, conjuntamente com as derivas dos girômetros, procedimentos estes adequados à recalibração periódica destes através do emprego do Filtro de Kalman. Na fase de propagação das estimativas, para a redução do tempo necessário ao processamento relativo à integração da atitude, as medidas dos girômetros são utilizadas diretamente no modelo cinemático desta, evitando a integração de suas equações dinâmicas para a obtenção das velocidades angulares, (Lefferts et alii, 1982). Esta redução no tempo de processamento é importante pois isto reforça a viabilidade de aplicação do procedimento em tempo real e em computador de bordo, de modo a possibilitar a chamada navegação auxiliada autônoma.

Para a representação da atitude do satélite, utiliza-se a parametrização em quatérnions (Wertz, 1978), a qual apresenta várias vantagens em relação as outras parametrizações. Existem porém algumas

dificuldades relacionadas à aplicação do Filtro de Kalman (Lefferts et alii, 1982). Isto se deve à não-independência de suas componentes que estão submetidas ao vínculo de norma unitária do quatérnio, o que resulta na singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado. Esta é uma condição difícil de se manter numericamente. Os procedimentos analisados neste trabalho contornam, por processos diversos, esta dificuldade.

Neste capítulo serão inicialmente apresentados, na seção 3.2, as equações cinemáticas da atitude de satélite artificiais, parametrizadas em quatérnios. Na seção 3.3 apresenta-se o procedimento usual de estimação de estado com renormalização forçada dos quatérnios. Na seção 3.4 é apresentado e comentado o citado problema de singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado. Finalmente na seção 3.5 apresenta-se a descrição de três procedimentos para a manutenção da singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado através de técnicas de redução desta matriz.

3.2 - ATITUDE CINEMÁTICA

Conforme já citado, nos procedimentos de determinação de atitude a serem analisadas será considerada a parametrização em quatérnios, os quais são definidos por:

$$\underline{q} = [\underline{\bar{q}}, q_4]^T, \quad (3.1)$$

sendo que:

$$\underline{\bar{q}} = [q_1, q_2, q_3]^T = \underline{n} \text{ sen}(\theta/2), \quad (3.2)$$

$$q_4 = \text{cos}(\theta/2), \quad (3.3)$$

onde $\underline{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ é um vetor unitário na direção e sentido do eixo de rotação do satélite e θ é o ângulo de rotação. As componentes do quatérnio são relacionadas entre si, pelo vínculo de norma unitária deste, dada por:

$$|\underline{q}| \triangleq \underline{q}^T \cdot \underline{q} = 1. \quad (3.4)$$

Defina-se $A(\underline{q})$ como sendo a matriz de rotação do sistema de coordenadas de referência (usualmente o sistema inercial geocêntrico) para o sistema de coordenadas do satélite expressa em função dos elementos dos quatérnios. Esta matriz é dada por (Wertz, 1978):

$$A(\underline{q}) = (|q_4|^2 - |\underline{q}|^2) I_{3 \times 3} + 2 \cdot \underline{q} \cdot \underline{q}^T + 2q_4 [\underline{q}], \quad (3.5)$$

onde:

$$[\underline{q}] = \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Desenvolvendo-se a Equação 3.5, tem-se:

$$A(\underline{q}) = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Uma das vantagens da utilização da parametrização por quatérnios, com relação as outras parametrizações, é dada pela simpli

cidade de se obter a matriz de rotação resultante da combinação de duas rotações. O produto das matrizes correspondentes a cada rotação é substituído pelo produto de dois quatérnions, onde cada um representa respectivamente cada uma das rotações envolvidas (Wertz, 1978), como será mostrado a seguir. Seja $A(\underline{q})$ a matriz de rotação que leva a atitude do referencial do satélite ao referencial inercial no instante t , e $A(\underline{q}'')$ a mesma matriz relativa ao instante $t + \Delta t$. A matriz de rotação que transforma a atitude do satélite no instante t para a atitude no instante $t + \Delta t$, $A(\underline{q}')$ satisfaz a seguinte equação:

$$A(\underline{q}'') = A(\underline{q}') \cdot A(\underline{q}). \quad (3.8)$$

Desenvolvendo o produto acima e levando em conta a Equação 3.7, tem-se:

$$\underline{q}'' = [\underline{q}'] \underline{q}, \quad (3.9)$$

onde:

$$[\underline{q}'] = \begin{pmatrix} q'_4 & q'_3 & -q'_2 & q'_1 \\ -q'_3 & q'_4 & q'_1 & q'_2 \\ q'_2 & -q'_1 & q'_4 & q'_3 \\ -q'_1 & -q'_2 & -q'_3 & q'_4 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Considerando-se as matrizes de rotação definidas acima verifica-se, então, que \underline{q} representa a atitude do satélite com respeito ao sistema de referência no tempo t ; e \underline{q}'' representa a atitude do satélite com respeito ao sistema de referência no tempo $t + \Delta t$. Representando-se \underline{q} e \underline{q}'' por $\underline{q}(t)$ e $\underline{q}(t + \Delta t)$ respectivamente, então \underline{q}' especifica a orientação do satélite no tempo $t + \Delta t$ em relação à posição que este ocupava no tempo t . Considerando-se as Equações 3.2 e 3.3, pode-se escrever:

$$q_1' = n_x \text{ sen}(\Delta\theta/2), \quad (3.11)$$

$$q_2' = n_y \text{ sen}(\Delta\theta/2), \quad (3.12)$$

$$q_3' = n_z \text{ sen}(\Delta\theta/2), \quad (3.13)$$

$$q_4' = \text{cos}(\Delta\theta/2), \quad (3.14)$$

onde n_x, n_y, n_z são as componentes do vetor unitário de rotação no referencial do satélite no instante t (porque este é o sistema de referência para \underline{q}') e $\Delta\theta$ é o ângulo de rotação que leva a atitude do instante t ao instante $t+\Delta t$. Com isto a Equação 3.9 pode ser reescrita na forma:

$$\underline{q}(t+\Delta t) = \left\{ \text{cos}(\Delta\theta/2) \cdot I_{4 \times 4} + \text{sen}(\Delta\theta/2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & n_z & -n_y & n_x \\ -n_z & 0 & n_x & n_y \\ n_y & -n_x & 0 & n_z \\ -n_x & -n_y & -n_z & 0 \end{pmatrix} \right\} \cdot \underline{q}(t). \quad (3.15)$$

Para aplicações em determinação de atitude é conveniente converter a Equação 3.15 em uma equação diferencial. Para isto considere-se Δt infinitesimal e $\Delta\theta = \omega \Delta t$, onde ω é a magnitude da velocidade angular instantânea do satélite. Uma aproximação para pequenos ângulos é dada por:

$$\text{cos}(\Delta\theta/2) \simeq 1 \quad \text{e} \quad \text{sen}(\Delta\theta/2) = \frac{1}{2} \cdot \omega \Delta t, \quad (3.16)$$

com o que a Equação 3.15 reduz-se a:

$$\underline{q}(t+\Delta t) = \left[I_{4 \times 4} + \frac{1}{2} \cdot \Omega(\underline{\omega}(t)) \Delta t \right] \cdot \underline{q}(t), \quad (3.17)$$

onde $\underline{\omega}(t) = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ é a velocidade angular do satélite e,

$$\Omega(\underline{\omega}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Fazendo:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t}, \quad (3.19)$$

tem-se:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \Omega(\underline{\omega}(t)) \underline{q}(t), \quad (3.20)$$

que é a equação cinemática de atitude com o formalismo de quatêrnions.

Conforme já comentado, os procedimentos de determinação de atitude a serem discutidos utilizam somente o modelo cinemático da atitude do satélite. Para a sua integração, porém, necessita-se de valores da velocidade de rotação do satélite em cada instante de integração. Estes valores são normalmente obtidos através de integração das equações dinâmicas do sistema. Devido ao requisito de velocidade de pro

cessamento característico da aplicação em sistemas inerciais, em que a integração deve ser feita em tempo real em computador de bordo, a integração das equações dinâmicas é substituída por medidas das velocidades angulares obtidas mediante o emprego de girômetros. Os girômetros devem fornecer medidas da velocidade angular nos três eixos do referencial do satélite. Estas medidas são diretamente substituídas nas equações cinemáticas da atitude durante o processo de integração destas equações. Estas porém estão afetadas por, além de erros aleatórios, erros tendenciosos devido à chamada deriva giroscópica. Estas derivas são estimadas conjuntamente com o estado de atitude do sistema com o que, sua influência na determinação de atitude é compensada.

3.3 - PROCEDIMENTO USUAL DE ESTIMAÇÃO DE ESTADO COM RENORMALIZAÇÃO FORÇADA DOS QUATÉRNIONS

Considere-se o estado de atitude do satélite como sendo o vetor formado por duas partições: a primeira, $\underline{q}(t)$, é formada pelas quatro componentes do quatérnion e a segunda, $\underline{b}(t)$, pelos erros tendenciosos (derivas) dos giros nos três eixos do referencial do satélite.

$$\underline{x}(t) = [\underline{q}(t), \underline{b}(t)]^T \quad (3.21)$$

As derivas giroscópicas podem ser modeladas por:

$$\underline{u}(t) = \underline{\omega}(t) + \underline{b}(t) + \underline{n}_1(t), \quad (3.22)$$

onde $\underline{\omega}(t)$ é o vetor velocidade angular real do satélite, $\underline{u}(t) = [u_x, u_y, u_z]^T$ é o vetor velocidade angular, cujas componentes são medidas dos giros e $\underline{n}_1(t) = [n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}]^T$ é um vetor de ruídos aleatórios gaussianos de média nula e covariância dada por:

$$E [\underline{n}_1(t) \cdot \underline{n}_1^T(\tau)] = Q_1 \delta(t-\tau), \quad (3.23)$$

onde $\delta(t-\tau)$ é a função Delta de Dirac.

Substituindo a Equação 3.22 em 3.20, tem-se:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \Omega(\underline{u}(t) - \underline{b}(t) - \underline{n}_1(t)) \cdot \underline{q}(t) \quad (3.24)$$

Considere-se, agora, que o vetor das derivas giroscópica possa ser modelada dinamicamente por:

$$\frac{db(t)}{dt} = \underline{n}_2(t), \quad (3.25)$$

onde $\underline{n}_2(t) = -[\eta_{2x}, \eta_{2y}, \eta_{2z}]^T$ é um vetor de ruídos gaussiano com média nula e covariância dada por:

$$E[\underline{n}_2(t) \cdot \underline{n}_2^T(\tau)] = Q_2 \cdot \delta(t-\tau). \quad (3.26)$$

As equações 3.24 e 3.25 representam, respectivamente, a dinâmica do processo e das derivas dos giros ("rate-drift") modeladas como movimento brownianos, pois para aplicações em satélites, esta modelagem para as derivas, é satisfatória (Lefferts et alii, 1982).

A matriz $\Omega(\underline{\omega}(t))$, definida na Equação 3.18, é linear e homogênea em seu argumento, portanto:

$$\Omega(\underline{u}(t) - \underline{b}(t) - \underline{n}_1(t)) = \Omega(\underline{u}(t)) - \Omega(\underline{b}(t)) - \Omega(\underline{n}_1(t)). \quad (3.27)$$

Com isto, a Equação 3.24 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \cdot \left[\Omega(\underline{u}(t)) \cdot \underline{q}(t) - \Omega(\underline{b}(t)) \cdot \underline{q}(t) - \Omega(\underline{n}_1(t)) \cdot \underline{q}(t) \right] = \\ &= f(\underline{u}(t), \underline{q}(t), \underline{b}(t), \underline{n}_1(t)) \quad (3.28) \end{aligned}$$

Suponha-se que se dispões de estimativas $\underline{q}(t)$, $\underline{b}(t)$ e $\underline{n}(t)$: $\hat{\underline{q}}(t)$, $\hat{\underline{b}}(t)$ e $\hat{\underline{n}}(t)$, respectivamente. Suponha-se ainda que $\hat{\underline{n}}(t) = E[\underline{n}(t)] = 0$.

Linearizando-se a Equação 3.28 em torno das estimativas $\hat{\underline{q}}(t)$, $\hat{\underline{b}}(t)$ e $\hat{\underline{n}}(t)$, respectivamente, vem:

$$\begin{aligned} f(\underline{u}(t), \underline{q}(t), \underline{b}(t), \underline{n}_1(t)) &= f(\underline{u}(t), \hat{\underline{q}}(t), \hat{\underline{b}}(t), \hat{\underline{n}}_1(t)) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \hat{\underline{q}}(t)} (\underline{u}(t), \hat{\underline{q}}(t), \hat{\underline{b}}(t), \hat{\underline{n}}_1(t)) \cdot (\underline{q}(t) - \hat{\underline{q}}(t)) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \hat{\underline{b}}(t)} (\underline{u}(t), \hat{\underline{q}}(t), \hat{\underline{b}}(t), \hat{\underline{n}}_1(t)) \cdot (\underline{b}(t) - \hat{\underline{b}}(t)) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \hat{\underline{n}}_1(t)} (\underline{u}(t), \hat{\underline{q}}(t), \hat{\underline{b}}(t), \hat{\underline{n}}_1(t)) \cdot (\underline{n}_1(t) - \hat{\underline{n}}_1(t)) + 0(2), \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde $0(2)$ representa os termos de ordem superior. Considerando-se $\hat{\underline{x}}(t)$ a estimativa mais recente de $\underline{x}(t)$, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\underline{x}}(t)} (\underline{u}(t), \hat{\underline{q}}(t), \hat{\underline{b}}(t), \hat{\underline{n}}_1(t)) = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}(t)} (\underline{u}(t), \hat{\underline{q}}(t), \hat{\underline{b}}(t), \hat{\underline{n}}_1(t)) \Big|_{\hat{\underline{x}}(t)} \quad (3.30)$$

Definindo a matriz $Z(\underline{q}(t))$ por (Lefferts et alii, 1982).

$$\Omega(\underline{b}(t))\underline{q}(t) = Z(\underline{q}(t))\underline{b}(t), \quad (3.31)$$

onde:

$$Z(\underline{q}(t)) = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix}; \quad (3.32)$$

e substituindo $\Omega(\underline{b}(t)) \cdot \underline{q}(t)$ dada na Equação 3.31, em 3.29, tem-se:

$$\begin{aligned} f(\underline{u}(t), \underline{q}(t), \underline{b}(t), \underline{n}_1(t)) &= f(\underline{u}(t), \underline{\hat{q}}(t), \underline{\hat{b}}(t), \underline{\hat{n}}_1(t)) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot [\Omega(\underline{u}(t)) - \Omega(\underline{\hat{b}}(t)) + \Omega(\underline{\hat{n}}_1(t))] \cdot (\underline{q}(t) - \underline{\hat{q}}(t)) - \\ &- \frac{1}{2} \cdot Z(\underline{\hat{q}}(t)) \cdot (\underline{b}(t) - \underline{\hat{b}}(t)) + \frac{1}{2} \cdot Z(\underline{\hat{q}}(t)) \cdot (\underline{n}_1(t) - \underline{\hat{n}}_1(t)) + \\ &+ O(2). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Jã que $\Omega(\cdot)$ é linear em seus argumentos, esta equação pode, desprezando os termos de ordem superior, ser colocada na seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(\underline{u}(t), \underline{q}(t), \underline{b}(t), \underline{n}_1(t)) - f(\underline{u}(t), \underline{\hat{q}}(t), \underline{\hat{b}}(t), \underline{\hat{n}}_1(t)) &= \\ = \frac{1}{2} \left[\Omega(\underline{u}(t) - \underline{\hat{b}}(t)) \Delta \underline{q}(t) - Z(\underline{\hat{q}}(t)) \Delta \underline{b}(t) - \right. \\ \left. - Z(\underline{\hat{q}}(t)) \underline{\hat{n}}_1(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Através da Equação 3.22 define-se $\underline{\hat{\omega}}(t)$ como:

$$\begin{aligned}\underline{\hat{\omega}}(t) &= \underline{u}(t) - \underline{\hat{b}}(t) - \underline{\hat{n}}_1(t) \\ &= \underline{u}(t) - \underline{\hat{b}}(t),\end{aligned}\tag{3.35}$$

com o que, pode-se reescrever a Equação 3.34 do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (\Delta \underline{q}(t)) &= \frac{1}{2} \cdot [\Omega(\underline{\hat{\omega}}(t)) \Delta \underline{q}(t) - Z(\underline{\hat{q}}(t)) \Delta \underline{b}(t) - \\ &\quad - Z(\underline{\hat{q}}(t)) \underline{\hat{n}}_1(t)] .\end{aligned}\tag{3.36}$$

Esta é a forma final das equações cinemáticas linearizadas da atitude que, serão utilizadas no processo de determinação de atitude a ser descrito na seqüência. Conforme já comentado, o estado completo a ser estimado consistirá dos quatêrnions mais às derivas dos giroômetros. O modelo dinâmico a ser utilizado para estas derivas no processo de determinação da atitude é dado por:

$$\frac{d}{dt} (\Delta \underline{b}(t)) = \underline{n}_2(t) .\tag{3.37}$$

As Equações 3.36 e 3.37 formam assim a dinâmica linearizada do processo. Estas equações podem ser reescritas na forma matricial, da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} (\Delta \underline{x}(t)) = F(t) \Delta \underline{x}(t) + G(t) \underline{\eta}(t),\tag{3.38}$$

onde:

$$F(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \Omega(\hat{\omega}(t)) & | & -\frac{1}{2} \cdot Z(\hat{q}(t)) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 4} & | & \bar{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{7 \times 7}, \quad (3.39)$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot Z(\hat{q}(t)) & | & \bar{0}_{4 \times 3} \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & | & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{7 \times 6}, \quad (3.40)$$

sendo $\underline{\eta}(t) = [\underline{\eta}_1(t), \underline{\eta}_2(t)]^T$ o vetor ruído de estado e $\Delta \underline{x}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)$.

3.3.1 - ESQUEMA DE FILTRAGEM

3.3.1.1 - INTRODUÇÃO

Será agora descrito o esquema de filtragem, com o qual obtem-se estimativas do estado do sistema, a partir de medidas de sensores não-inerciais. Este esquema é comum a ambos os procedimentos em análise e, consiste basicamente da aplicação do Filtro de Kalman em sua versão estendida a sistemas não-lineares. Visto ser o Filtro de Kalman uma técnica bastante difundida na literatura, a descrição dada aqui é resumida. Maiores detalhes sobre este assunto podem ser encontrados em Liebelt (1967), Jazuinski (1970) e Gelb(1974) por exemplo.

O algoritmo do Filtro de Kalman usa um modelo matemático do sistema dinâmico, com o qual se trabalha, para a propagação das es

timativas do estado entre instantes de amostragem. Após cada propagação, a estimativa corrente \bar{e} é atualizada, isto é, corrigida de modo a incorporar informações sobre o estado contidas nas observações correspondentes ao instante de amostragem presente. O bom desempenho do filtro depende, entre outros fatores, da precisão do modelo dinâmico utilizado nestas propagações.

3.3.1.2 - PROPAGAÇÃO DA ATITUDE

Nas fases de propagação de atitude, entre instante de amostragem de sensores não-inerciais, somente são integradas as componentes do vetor de estado relativas aos quatérnions. As derivas dos girômetros são consideradas constantes durante o intervalo de tempo envolvido, ou seja, são integradas as seguintes equações:

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \Omega(\hat{\omega}(t)) \cdot \hat{q}(t), \quad (3.41)$$

$$\frac{d\hat{b}(t)}{dt} = 0. \quad (3.42)$$

As condições iniciais para a integração constituem-se da estimativa mais recente do vetor de estado relativo ao instante de amostragem inferior ao intervalo considerado.

Integrando a Equação 3.41, (Wertz, 1978) tem-se:

$$\hat{q}(t) = \theta(t, t_0) \hat{q}(t_0), \quad (3.43)$$

onde $\theta(t, t_0)$ é a matriz de transição de estado das componentes das equações cinemáticas relativas aos quatérnions. Esta matriz é dada por (Maybeck, 1982):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, t_0) = \frac{1}{2} \Omega(\underline{\hat{\omega}}(t)) \theta(t, t_0), \quad (3.44)$$

$$\theta(t_0, t_0) = I_{4 \times 4}. \quad (3.45)$$

Quando a direção de $\underline{\hat{\omega}}(t)$ é constante em um pequeno intervalo de tempo ou os deslocamentos angulares dos eixos do satélite são pequenos, $\theta(t, t_0)$ pode ser aproximado por (Lefferts et alii, 1982):

$$\begin{aligned} \theta(t, t_0) = & I_{4 \times 4} \cdot \cos \left[|\underline{\hat{\omega}}(t)| \cdot \frac{\Delta t}{2} \right] + \\ & + \left[\frac{\Omega(\underline{\hat{\omega}}(t))}{|\underline{\hat{\omega}}(t)|} \right] \cdot \text{sen} \left[|\underline{\hat{\omega}}(t)| \cdot \frac{\Delta t}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde $\Delta t = t - t_0$, $|\underline{\hat{\omega}}(t)| = |\hat{\omega}_x^2 + \hat{\omega}_y^2 + \hat{\omega}_z^2|^{1/2}$.

A matriz de transição dos quatêrnions, $\theta(t, t_0)$, é ortogonal, ou seja (Maybeck, 1982):

$$\theta^{-1}(t, t_0) = \theta^T(t, t_0) = \theta(t_0, t). \quad (3.47)$$

3.3.1.3 - PROPAGAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS ERROS NO ESTADO

Considerando-se $\underline{n}(t)$ constante a cada intervalo de propagação ("step-process"), a solução forçada da Equação 3.38 é dada por (Maybeck, 1982):

$$\Delta \underline{x}(t) = \Phi(t, t_0) \Delta \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, t') G(t') dt' \underline{n}(t), \quad (3.48)$$

onde $\Phi(t, t_0)$ é a matriz de transição de estado para o sistema completo, ou seja, considerando-se como estado os quatérnions acrescidos das derivas. Esta matriz satisfaz as equações (Maybeck, 1982):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} (t, t_0) = F(t) \cdot \Phi(t, t_0), \quad (3.49)$$

$$\Phi(t_0, t_0) = I_{7 \times 7}, \quad (3.50)$$

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t). \quad (3.51)$$

Resolvendo-se a Equação 3.49, (Vide Apêndice A) obtém-se:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{pmatrix} \theta(t, t_0) & | & \psi(t, t_0) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 4} & | & I_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

onde:

$$\psi(t, t_0) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \theta(t, t') Z(\underline{q}(t')) dt', \quad (3.53)$$

$$\psi(t_0, t_0) = \bar{0}_{4 \times 3}. \quad (3.54)$$

Definindo-se:

$$\Gamma(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi(t, t') G(t') dt', \quad (3.55)$$

cuja integração é apresentada no Apêndice A, a Equação 3.48 pode ser reescrita como:

$$\Delta \underline{x}(t) = \Phi(t, t_0) \Delta \underline{x}(t_0) + \Gamma(t, t_0) \underline{n}(t). \quad (3.56)$$

A matriz de covariâncias dos erros nas estimativas do estado é definida por (Jazwinski, 1970):

$$P(t) = E [\Delta \underline{x}(t) \cdot \Delta \underline{x}^T(t)] \quad (3.57)$$

Esta matriz satisfaz a seguinte equação de Riccati:

$$\frac{dP}{dt}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t), \quad (3.58)$$

cuja solução pode ser aproximada por (Maybeck, 1982):

$$P(t) = \Phi(t, t_0)P(t_0)\Phi^T(t, t_0) + \Gamma(t, t_0)Q(\tau)\Gamma^T(t, t_0), \quad (3.59)$$

onde:

$$Q(t) = \left[\begin{array}{c|c} Q_1 & \bar{0}_{3 \times 3} \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & Q_2 \end{array} \right]. \quad (3.60)$$

3.3.1.4 - ALGORITMO DE DETERMINAÇÃO DE ATITUDE

Em todos os procedimentos a serem apresentados, os ruídos das medidas são não-correlacionados entre si, isto é, a matriz de covariâncias dos ruídos nas observações, $R(t)$, é diagonal. Isto permite que se processem as medidas seqüencialmente para a atualização do estado e da respectiva matriz de covariâncias dos erros, o que evita uma inversão matricial na fase de atualização das estimativas do algoritmo do Filtro de Kalman (Sorenson, 1966).

Na Figura 3.1 apresenta-se um diagrama esquemático da evolução do processo de estimação, de modo a facilitar o entendimento do algoritmo utilizado nos procedimentos a serem apresentados. Este algoritmo consta das seguintes etapas:

- (i) propaga-se o estado do sistema e a respectiva matriz de covariâncias dos erros do instante t_k ao t_{k+1} , com o auxílio das equações cinemáticas da atitude e com os valores das velocidades angulares obtida através das medidas dos girômetros para o instante t_k .
- (ii) verifica-se $t_{k+1} = t_{jn}$, $j=1,2,3,\dots$. Caso esta igualdade se verifique, vá para o passo (iii). Caso contrário, retorne ao passo (i) incrementando k de uma unidade.
- (iii) Aplicam-se as equações de atualização do Filtro de Kalman (com o procedimento adaptativa de estimação do ruído no estado) ao processamento das observações dos sensores não-inerciais correspondentes a este instante, a fim de corrigir as estimativas. Voltar a seguir ao passo (i) incrementado j de uma unidade.

Na Figura 3.2 apresenta-se o algoritmo de determinação de atitude juntamente com o procedimento de estimação adaptativa.

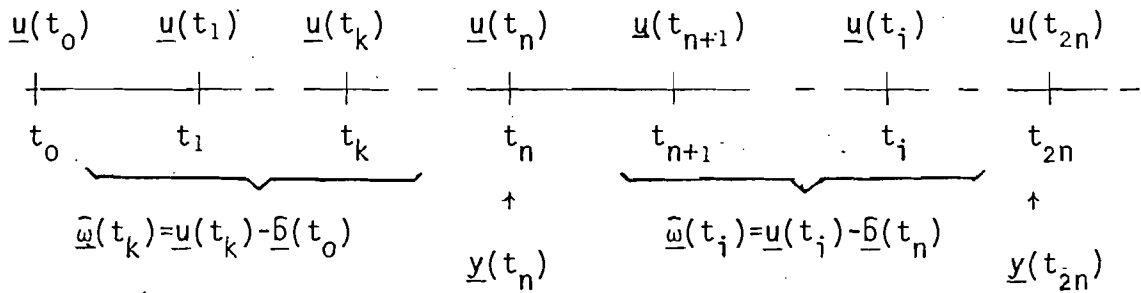


Fig. 3.1 - Evolução do algoritmo no tempo.

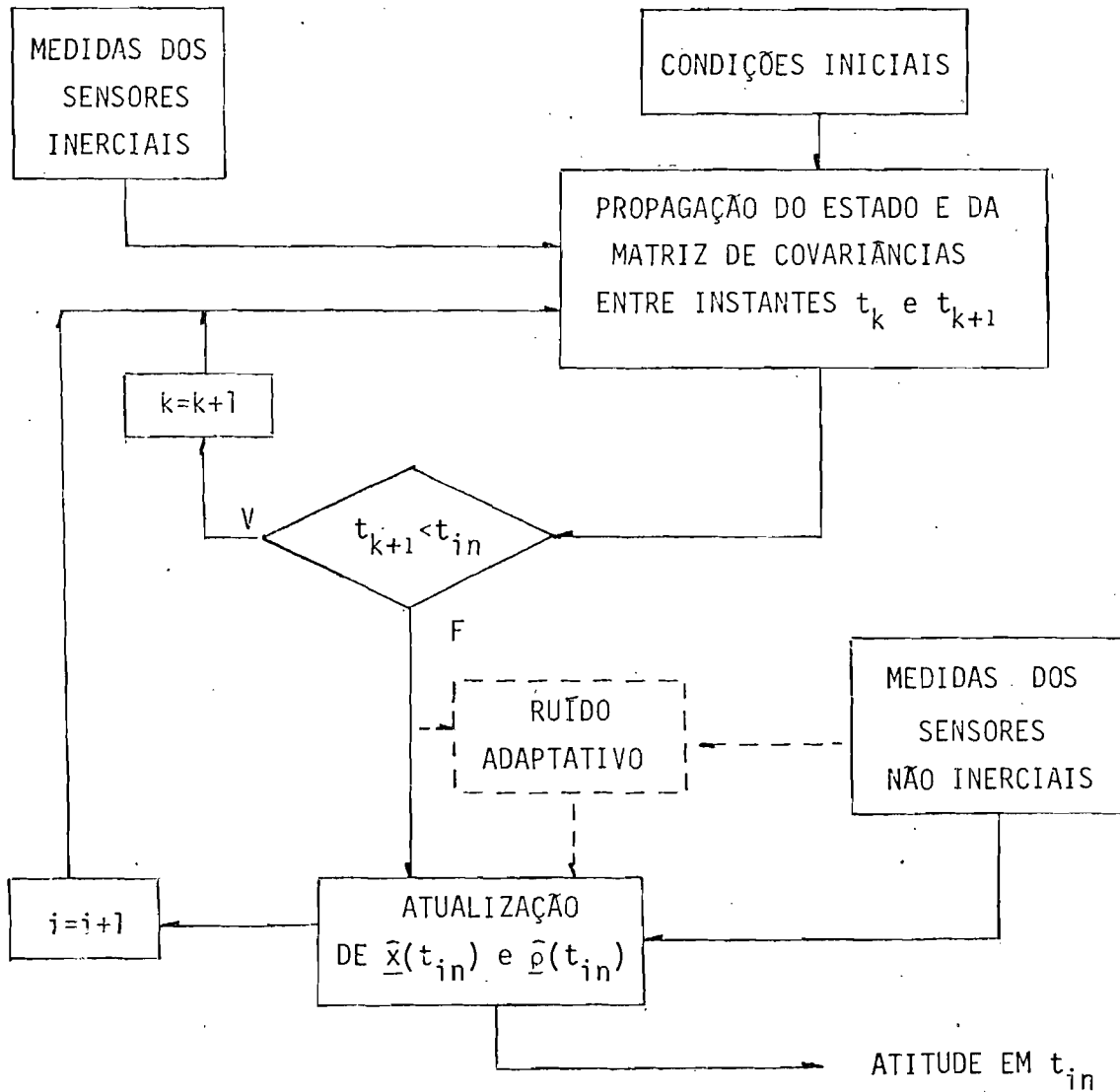


Fig. 3.2 - Algoritmo de determinação de atitude.

A utilização do procedimento de ruído adaptativo, da forma apresentada no diagrama de bloco do algoritmo de determinação de atitude (Figura 3.2), dependerá de análise da necessidade em cada aplicação específica, com base em possíveis problemas de divergência do filtro, já que a utilização desta técnica visa evitar estes problemas. Deve ser destacado que sua utilização implica em um processamento adicional e conseqüente aumento no tempo de processamento. Sua aplicação é recomendada para casos onde os problemas de divergência são relevantes.

3.4 - SINGULARIDADE DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS ERROS NO ESTADO

O uso dos quatérnions como parametrização do estado, conforme já mencionado, apresenta algumas dificuldades na aplicação do Filtro de Kalman, devido a não-independência de suas componentes que estão vinculadas de forma a obedecer a norma unitária. Este vínculo resulta na singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado (Lefferts et alii, 1982):

$$\underline{q}^T(t)\underline{q}(t) = 1. \quad (3.61)$$

Considere-se que se disponha de uma estimativa dos quatérnions colocada na seguinte forma:

$$\underline{\tilde{q}}(t) = \underline{q}(t) - \Delta\underline{q}(t), \quad (3.62)$$

onde $\underline{q}(t)$ é o valor real do quatérnion e $\Delta\underline{q}(t)$ o erro real da estimativa.

Substituindo-se $\underline{q}(t)$ obtido da Equação 3.62 na Equação 3.61, tem-se:

$$\underline{q}^T(t)\underline{q}(t) = (\underline{\tilde{q}}^T(t) + \Delta\underline{q}^T(t)) \cdot (\underline{\tilde{q}}(t) + \Delta\underline{q}(t)). \quad (3.63)$$

Considerando-se uma aproximação de primeira ordem em $\Delta\underline{q}(t)$, tem-se:

$$\underline{q}^T(t) \underline{q}(t) = 1 + 2\Delta\underline{q}^T(t)\underline{\hat{q}}(t). \quad (3.64)$$

Para que o vínculo seja satisfeito deve-se portanto ter:

$$\Delta\underline{q}^T(t) \underline{\hat{q}}(t) \approx 0. \quad (3.65)$$

A matriz de covariâncias dos erros no estado, para os qut^{er}nions, \bar{e} definida por:

$$P_q(t) = E [\Delta\underline{q}(t) \cdot \Delta\underline{q}^T(t)] . \quad (3.66)$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por $\underline{\hat{q}}(t)$, obtêm-se:

$$\underline{\hat{q}}^T(t) P_q(t) \underline{\hat{q}}(t) = \underline{\hat{q}}^T(t) \cdot E [\Delta\underline{q}(t) \Delta\underline{q}^T(t)] \cdot \underline{\hat{q}}(t), \quad (3.67)$$

$$\underline{\hat{q}}^T(t) P_q(t) \underline{\hat{q}}(t) = E [\underline{\hat{q}}(t) \Delta\underline{q}(t) \Delta\underline{q}^T(t) \underline{\hat{q}}(t)]. \quad (3.68)$$

Levando em conta a Equação 3.65, têm-se:

$$\underline{\hat{q}}^T(t) P_q(t) \underline{\hat{q}}(t) = 0. \quad (3.69)$$

Portanto $\underline{\hat{q}}(t)$ é um vetor nulo de $P_q(t)$ e, consequentemente, o vetor $[\underline{\hat{q}}(t), 0]^T$ é um vetor nulo de $P(t)$, logo a matriz de covariâncias dos erros no estado de dimensão 7x7 é singular. Devido a erros numéricos, esta singularidade é difícil de ser mantida durante o processo de estimação de estado. Os procedimentos a serem apresentados para evitar este problema, baseiam-se em transformações que permitem a substituição da matriz de covariâncias dos erros no estado por uma outra matriz não-singular de dimensão menor.

3.5 - DESCRIÇÃO DOS PROCEDIMENTOS QUE EVITAM OS PROBLEMAS DE SINGULARIDADES

3.5.1 - REPRESENTAÇÃO TRUNCADA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS ERROS NO ESTADO

Neste caso, o problema da manutenção do vínculo entre as componentes do quatérnio durante o processo de estimação é resolvido através da Equação 3.65, da qual obtém-se inicialmente a expressão de uma das componentes dos quatérnios em função das outras três. A seguir, substitui-se a expressão assim obtida na equação da propagação dos desvios nas estimativas dos quatérnios Equação 3.36, eliminando-se, desta forma, uma componente dos quatérnios. No processo de determinação de atitude estima-se apenas as três componentes restantes, além das derivas dos giros. Para a componente eliminada em cada passo, a estimativa é calculada através da Equação 3.65, a partir dos valores estimados para as outras componentes. Calculando-se, por exemplo, a componente Δq_4 através da equação do vínculo, obtém-se:

$$\Delta q_4 = - \frac{1}{q_4} \underline{q}(t) \cdot \Delta \underline{q}(t), \quad (3.70)$$

sendo $\underline{q}(t) = [q_1, q_2, q_3]^T$ e $\Delta \underline{q}(t) = [\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3]^T$.

Substituindo-se a expressão de Δq_4 , dada acima, nas equações para propagação dos erros no estado e eliminando-se esta componente das citadas equações, obtém-se um sistema de equações reduzida para um vetor erro de estado truncado dado por:

$$\Delta \underline{x}_y(t) = [\Delta \underline{q}(t), \Delta \underline{b}(t)]^T, \quad (3.71)$$

onde $\Delta \underline{b}(t) = [\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3]^T$ e $\Delta \underline{x}_y(t)$ é a diferença entre o estado estimado e o propagado.

Fica então definido, pela Equação 3.71, um vetor de estado reduzido, cujas componentes serão estimadas no processo de filtragem.

Essa redução do estado para o estimador implica em uma equivalente redução da matriz de covariâncias dos erros, definida por:

$$P_y(t) = E [\Delta x_y(t) \Delta x_y^T(t)], \quad (3.72)$$

a qual satisfaz uma equação de Riccati cuja integração fornece (Maybeck, 1982):

$$P_y(t) = \phi_y(t, t_0) P_y(t_0) \phi_y^T(t, t_0) + \Gamma_y(t, t_0) Q(t) \Gamma_y^T(t, t_0), \quad (3.73)$$

onde $\phi_y(t, t_0)$ é a matriz de transição de estado truncado e $\Gamma_y(t, t_0)$ é a matriz de transição do ruído no estado truncado, dada por:

$$\phi_y(t, t_0) = \begin{bmatrix} \theta_y(t, t_0) & \psi_y(t, t_0) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6}, \quad (3.74)$$

$$\Gamma_y(t, t_0) = \begin{bmatrix} \psi_y(t, t_0) & \Sigma_y(t, t_0) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6}, \quad (3.75)$$

Para a determinação das partições das matrizes acima, considere-se a solução da parte homogênea da equação de propagação dos erros no estado das componentes dos quatérnions, Equação 3.36:

$$\Delta q_i(t) = [\theta(t, t_0)]_{ij} \cdot \Delta q_j(t_0) \quad (3.76)$$

sendo $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Desenvolvendo-se esta equação vem:

$$\begin{aligned} \Delta q_i(t) = & [\theta(t, t_0)]_{i1} \cdot \Delta q_1(t_0) + [\theta(t, t_0)]_{i2} \cdot \Delta q_2(t_0) + \\ & + [\theta(t, t_0)]_{i3} \Delta q_3(t_0) + [\theta(t, t_0)]_{i4} \cdot \Delta q_4(t_0). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Da Equação 3.65, tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta q_4(t_0) = & \frac{1}{\hat{q}_4(t_0)} \left[\hat{q}_1(t_0) \cdot \Delta q_1(t_0) + \hat{q}_2(t_0) \cdot \Delta q_2(t_0) + \right. \\ & \left. + \hat{q}_3(t_0) \cdot \Delta q_3(t_0) \right]. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Substituindo a Equação 3.78 em 3.77 e reorganizando os termos tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta q_i(t) = & \sum_{j=1}^3 \left[[\theta(t, t_0)]_{ij} \cdot q_j(t_0) \right] - \\ & - [\theta(t, t_0)]_{i4} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\hat{q}_j(t_0) \cdot \Delta q_j(t_0)}{\hat{q}_4(t_0)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Logo:

$$\frac{\Delta q_i(t)}{\Delta q_j(t)} = [\theta(t, t_0)]_{ij} - \frac{\bar{q}_j(t_0)}{\hat{q}_4(t_0)} \cdot [\theta(t, t_0)]_{i4}. \quad (3.80)$$

Levando-se a expressão acima ao limite para $\Delta q_j(t_0) \rightarrow 0$, tem-se:

$$\frac{\partial q_i(t)}{\partial q_j(t_0)} = [\theta(t, t_0)]_{ij} - \frac{\bar{q}_j(t_0)}{\hat{q}_4(t_0)} \cdot [\theta(t, t_0)]_{i4}. \quad (3.81)$$

Portanto:

$$\left[\begin{array}{c} \partial q_i(t) \\ \partial q_j(t_0) \end{array} \right] = [\theta_y(t, t_0)]_{ij} ; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.82)$$

Da mesma forma, obtêm-se:

$$[\psi_y(t, t_0)]_{ij} = \left[\begin{array}{c} \partial q_i(t) \\ \partial b_j(t_0) \end{array} \right] ; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (3.83)$$

observe-se que:

$$[\psi_y(t, t_0)]_{ij} = [\psi(t, t_0)]_{ij} ; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (3.84)$$

onde $\psi(t, t_0)$ é determinada pela Equação 3.53. Assim:

$$\Sigma_y(t, t_0) = \int_{t_0}^t \psi_y(t, t') dt'. \quad (3.85)$$

Esta integral é resolvida no Apêndice A. Observe-se que:

$$[\Sigma_y(t, t_0)]_{ij} = [\Sigma(t, t_0)]_{ij} ; i, j = 1, 2, 3. \quad (3.86)$$

Na implementação do Filtro Estendido de Kalman utiliza-se apenas a matriz de covariâncias dos erros no estado truncado.

Considerando o estado truncado, a equação do Filtro Estendido de Kalman para o cálculo das correções das estimativas correntes do estado, Equação 2.32, fica dada por:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}_y(t_{k+1}/t_{k+1}) = & K_y(\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \left[\underline{Y}(t_{k+1}) - \right. \\ & \left. - \underline{h}(\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \right], \end{aligned} \quad (3.87)$$

onde $\underline{h}(\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})$ é a matriz de dimensão 6x1 das observações (vide Apêndice C), $\underline{Y}(t_{k+1})$ é o vetor de observações, sendo que três destas observações constituem-se dos cossenos dos ângulos formado entre a direção satélite-Terra (sensor de horizonte) e as outras três da direção satélite-Sol (sensor solar); $K_y(\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})$ é o ganho de Kalman, dado por:

$$\begin{aligned} K_y(\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) = & P_y(t_{k+1}/t_k) \cdot H_y^T(\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \\ & \cdot [H_y(\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot P_y(t_{k+1}/t_k) \cdot H_y^T(\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) + \\ & + R(t_{k+1})]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde $P_y(t_{k+1}/t_k)$ é a matriz de covariâncias dos erros no estado truncado, $H_y(\hat{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})$ é a matriz de derivadas parciais das observações, considerando o estado truncado, e $R(t_{k+1})$ é a matriz de covariância do ruído nas observações.

A matriz das derivadas parciais das observações é determinada usando-se o mesmo procedimento da Equação 3.82, utilizando para este caso, a Equação 2.18, ou seja:

$$\frac{\partial \underline{y}(t_{k+1})}{\partial \underline{x}_y(t_{k+1})} = H_y(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}), \quad (3.89)$$

onde:

$$H_y(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) = \left[\begin{array}{c|c} H_{y11}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) & \underline{0}_{3 \times 3} \\ \hline H_{y21}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) & \underline{0}_{3 \times 3} \end{array} \right]_{6 \times 6}, \quad (3.90)$$

sendo:

$$\left[H_{y11}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \right]_{ij} = \left[H_{11}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \right]_{ij} -$$

$$\frac{\hat{q}_i(t_{k+1}/t_k)}{\hat{q}_4(t_{k+1}/t_k)} \left[H_{11}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \right]_{i4}, \quad (3.91)$$

$$\left[H_{y21}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \right]_{ij} = \left[H_{21}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \right]_{ij} -$$

$$\frac{\hat{q}_i(t_{k+1}/t_k)}{\hat{q}_4(t_{k+1}/t_k)} \left[H_{21}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \right]_{i4}, \quad (3.92)$$

com $i, j = 1, 2, 3$. As matrizes H_{11} e H_{21} são determinadas no Apêndice C.

A atualização da estimativa da matriz de covariâncias dos erros no estado truncado \bar{e} é dado por:

$$P_y(t_{k+1}/t_{k+1}) = \left[I_{6 \times 6} - K_y(\bar{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot H_y(\bar{x}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \right] \cdot P_y(t_{k+1}/t_k). \quad (3.93)$$

A quarta componente, $\Delta \hat{q}_4$, do vetor erro de estado estimado \bar{e} é determinada através da Equação 3.78 e a estimativa atualizada do vetor de estado completo \bar{e} então calculada por:

$$\bar{x}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \bar{x}(t_{k+1}/t_k) + \Delta \bar{x}(t_{k+1}/t_{k+1}). \quad (3.94)$$

Note que a Equação 3.78 (equação relacionada ao vínculo dos quatêrnions) pode conduzir a grandes erros quando \hat{q}_4 for pequeno comparado com as outras componentes do quatêrnion. Isto é evitado eliminando-se em cada passo do estimador, da forma citada, a componente dos quatêrnions de maior magnitude, ao invés de se eliminar, para o truncamento, sempre a mesma componente.

3.5.2 - REPRESENTAÇÃO REDUZIDA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS ERROS NO ESTADO, EMPREGANDO PROPRIEDADES DA MATRIZ DE ROTAÇÃO

A matriz de rotação de dimensão 3x3, que transforma a matriz de atitude estimada do instante t' para o instante t é definida por (Lefferts et alii, 1982):

$$\Lambda(t, t') = A(\hat{q}(t)) \cdot A^T(\hat{q}(t')), \quad (3.95)$$

onde $A(\underline{\hat{q}}(t))$ e $A(\underline{\hat{q}}(t'))$ representam as matrizes de atitude em função dos quatérnions relativas aos instantes t e t' respectivamente (Wertz, 1978).

Da Equação 3.95 pode-se obter a seguinte relação (Lefferts et alii, 1982):

$$\theta(t,t').Z(\underline{\hat{q}}(t')) = Z(\underline{\hat{q}}(t)).\Lambda(t,t'), \quad (3.96)$$

de onde se obtêm:

$$\theta(t,t') = Z(\underline{\hat{q}}(t)) \Lambda(t,t') Z^T(\underline{\hat{q}}(t')) + \underline{\hat{q}}(t) \underline{\hat{q}}^T(t'), \quad (3.97)$$

pois:

$$Z^T(\underline{\hat{q}}(t)). Z(\underline{\hat{q}}(t)) = I_{3 \times 3}, \quad (3.98)$$

$$Z(\underline{\hat{q}}(t)) Z^T(\underline{\hat{q}}(t)) = I_{4 \times 4} - \underline{\hat{q}}(t) \underline{\hat{q}}^T(t). \quad (3.99)$$

As relações acima encontram-se demonstrada no Apêndice B.

Utilizando-se as Equações 3.96, 3.97, 3.98 e 3.99, consegue-se reduzir a dimensão da matriz de transição de estado e da respectiva matriz de covariâncias dos erros (Lefferts et alii, 1982). A matriz de covariâncias reduzida terá dimensão 6x6 e será não singular. A utilização da matriz reduzida permite que se mantenha o vínculo imposto pela norma unitária dos quatérnions. Permite que se volte à forma de representação 7x7 sem que se perca a singularidade dessa matriz, devido ao acúmulo de erros numéricos durante o processo de estimação. A matriz de transição de estado definida pela Equação 3.52 é dada por:

$$\phi(t, t_0) = \begin{matrix} \left[\begin{array}{c|c} \theta(t, t_0) & \psi(t, t_0) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} \end{array} \right]_{7 \times 7}, \end{matrix} \quad (3.100)$$

onde:

$$\psi(t, t_0) = -\frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^t \theta(t, t') Z(q(t')) dt' \dots \quad (3.101)$$

Substituindo a Equação 3.96 em 3.101, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t, t_0) &= -\frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^t Z(\hat{q}(t)) \Lambda(t, t') dt' \\ &= -\frac{1}{2} \cdot Z(\hat{q}(t)) \int_{t_0}^t \Lambda(t, t') dt' \end{aligned} \quad (3.102)$$

Definindo:

$$\Pi(t, t_0) = -\frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^t \Lambda(t, t') dt', \quad (3.103)$$

vem:

$$\psi(t, t_0) = Z(\underline{\hat{q}}(t)) \Pi(t, t_0). \quad (3.104)$$

Substituindo as Equações 3.97 e 3.104 na Equação 3.100, tem-se

$$\phi(t, t_0) = \left[\begin{array}{c|c} Z(\underline{\hat{q}}(t)) \Lambda(t, t_0) Z^T(\underline{\hat{q}}(t_0)) + \underline{\hat{q}}(t) \underline{\hat{q}}^T(t_0) & Z(\underline{q}(t)) \Pi(t, t_0) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} \end{array} \right]_{7 \times 7}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} Z(\underline{\hat{q}}(t)) & \bar{0}_{4 \times 3} \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{array} \right]_{7 \times 6} \left[\begin{array}{c|c} \Lambda(t, t_0) & \Pi(t, t_0) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{array} \right]_{6 \times 6} \left[\begin{array}{c|c} Z^T(\underline{\hat{q}}(t_0)) & \bar{0}_{3 \times 3} \\ \hline \bar{0}_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} \end{array} \right]_{6 \times 7} +$$

$$+ \left[\begin{array}{c|c} \underline{\hat{q}}(t) \underline{\hat{q}}^T(t_0) & \bar{0}_{4 \times 3} \\ \hline \bar{0}_{3 \times 4} & \bar{0}_{3 \times 3} \end{array} \right]_{7 \times 7}, \quad (3.105)$$

logo:

$$\Phi(t, t_0) = S(\underline{q}(t))\bar{\Phi}(t, t_0)S^T(\underline{q}(t_0)) + \begin{bmatrix} \underline{q}(t)\bar{q}^T(t_0) & | & \bar{0}_{4 \times 3} \\ \hline \bar{0}_{3 \times 4} & | & \bar{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (3.106)$$

7x7

onde $\bar{\Phi}(t, t_0)$ é chamada matriz de transição de estado reduzido, $S^T(\underline{q}(t))$ é a matriz que transforma o estado de dimensão 7 para o estado de dimensão 6, dada por:

$$S(\underline{q}(t)) = \begin{bmatrix} Z(\underline{q}(t)) & | & \bar{0}_{4 \times 3} \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & | & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (3.107)$$

7x6

$$\bar{\Phi}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Lambda(t, t_0) & | & \Pi(t, t_0) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & | & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (3.108)$$

6x6

A matriz de transição do ruído no estado, definida na Equação 3.55 e determinada no Apêndice A é dada por:

$$\Gamma(t, t_0) = \begin{bmatrix} \psi(t, t_0) & | & \Sigma(t, t_0) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & | & I_{3 \times 3} N \Delta t \end{bmatrix}, \quad (3.109)$$

7x6

onde:

$$\Sigma(t, t_0) = \int_{t_0}^t \psi(t, t') dt'. \quad (3.110)$$

Substituindo a Equação 3.104 em 3.110, tem-se:

$$\Sigma(t, t_0) = Z(\underline{q}(t)) \cdot \int_{t_0}^t \Pi(t, t') dt'. \quad (3.111)$$

Definindo:

$$\gamma(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Pi(t, t') dt', \quad (3.112)$$

tem-se que:

$$\Sigma(t, t_0) = Z(\hat{\underline{q}}(t)) \cdot \gamma(t, t_0). \quad (3.113)$$

Substituindo as Equações 3.104 e 3.113 em 3.109, tem-se:

$$\Gamma(t, t_0) = S(\hat{\underline{q}}(t)) \cdot \tilde{\Gamma}(t, t_0), \quad (3.114)$$

onde:

$$\tilde{r}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Pi(t, t_0) & | & \gamma(t, t_0) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & | & I_{3 \times 3} N \Delta t \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

6x6

Para o estado reduzido a matriz de covariâncias dos erros no estado de dimensão 6x6, que satisfaz uma equação de Riccati, que após a integração é dada por:

$$\tilde{P}(t) = \tilde{\Phi}(t, t_0) \tilde{P}(t_0) \tilde{\Phi}^T(t, t_0) + \tilde{r}(t, t_0) Q(t) \tilde{r}^T(t, t_0). \quad (3.116)$$

A relação entre a matriz de covariâncias dos erros no estado de dimensão 6x6 com a mesma matriz de dimensão 7x7 é dada por (Lefferts et alii, 1982):

$$\tilde{P}(t) = S^T(\underline{\hat{q}}(t)) \cdot \tilde{P}(t) \cdot S(\underline{\hat{q}}(t)), \quad (3.117)$$

$$P(t) = S(\underline{\hat{q}}(t)) \cdot \tilde{P}(t) \cdot S^T(\underline{\hat{q}}(t)). \quad (3.118)$$

Na implementação do Filtro Estendido de Kalman a matriz das derivadas parciais das observações, para o estado reduzido, é determinada utilizando a matriz definida na Equação 3.107, onde (Lefferts et alii, 1982):

$$\tilde{H}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) = H(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot S(\underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_k)). \quad (3.119)$$

Para este procedimento o ganho de Kalman de dimensão 6x6 é determinado por:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) &= \tilde{P}(t_{k+1}/t_k) \cdot \tilde{H}^T(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \\ &\cdot [\tilde{H}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \tilde{P}(t_{k+1}/t_k) \cdot \tilde{H}^T(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) + \\ &+ R(t_{k+1})]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.120)$$

A atualização da estimativa da matriz de covariâncias dos erros no estado reduzido \tilde{P} é dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= [I_{6 \times 6} - \tilde{K}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \\ &\cdot \tilde{H}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})] \cdot \tilde{P}(t_{k+1}/t_k). \end{aligned} \quad (3.121)$$

A obtenção do ganho de Kalman de dimensão 7×6 , $K(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})$, a partir de $\tilde{K}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})$ é feita pela seguinte equação:

$$K(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) = S(\underline{q}(t_{k+1}/t_k) \cdot \tilde{K}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})). \quad (3.122)$$

Com isto, a estimativa atualizada do vetor de estado é obtida diretamente pela equação usual do Filtro de Kalman:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k) + K(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot \\ &\cdot [\underline{Y}(t_{k+1}) - \underline{h}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})], \end{aligned} \quad (3.123)$$

onde $\underline{h}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})$ é a matriz de dimensão 6×1 das observações (vide Apêndice C) e $\underline{Y}(t_{k+1})$ é o vetor das observações.

Somente a matriz de covariâncias é atualizada e propagada em sua forma reduzida, não necessitando durante o processo de estimação ser transformada para a forma normal (7x7). Quando, porém, se quer obter a matriz de covariâncias normal, basta utilizar a Equação 3.118. A matriz de covariâncias de dimensão 7x7, calculada desta forma, mantém a singularidade devido ao vínculo de norma unitária dos quatérnions, já que o procedimento de estimação descrito preserva esta singularidade. Nesta representação, portanto, para efeito de estimação de estado a matriz de covariâncias dos erros no estado normal (7x7) não necessita ser implementada.

3.5.3 - REPRESENTAÇÃO REDUZIDA DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS ERROS NO ESTADO ATRAVÉS DO VETOR ERRO DOS QUATÉRNIONS

Nesta representação, o erro dos quatérnions é definido como um quatérnions que representa uma rotação infinitesimal, a qual leva a atitude estimada a coincidir com a atitude verdadeira. Define-se o incremento dos quatérnions por (Lefferts et alii, 1982; Shuster, 1981):

$$\delta \underline{q}(t) = \underline{q}(t) \otimes \underline{\hat{q}}^{-1}(t), \quad (3.124)$$

onde $\underline{\hat{q}}^{-1}(t)$ representa o conjugado do quatérnion estimado e $\delta \underline{q}(t) = [\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \delta q_4]^T$ é o vetor composto pelos incrementos das componentes dos quatérnions. Desde que este vetor corresponde a uma rotação infinitesimal, admite-se a quarta componente, δq_4 , como unitária para uma aproximação de primeira ordem (Shuster, 1981). Desse modo, todas as informações de interesse estão contidas nas três componentes restantes deste vetor (Lefferts et alii, 1982).

Desenvolvendo a Equação 3.124, tem-se:

$$\underline{q}(t) = [\underline{\hat{q}}] \cdot \delta \underline{q}(t), \quad (3.125)$$

onde:

$$\underline{\hat{q}} = \begin{bmatrix} \hat{q}_4 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_2 & \hat{q}_1 \\ \hat{q}_3 & \hat{q}_4 & -\hat{q}_1 & \hat{q}_2 \\ -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 & \hat{q}_4 & \hat{q}_3 \\ -\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_4 \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

Logo, observando a Equação 3.32, que define $Z(\underline{\hat{q}}(t))$, verifica-se que:

$$\underline{q}(t) = [Z(\underline{\hat{q}}(t)) \mid \underline{\hat{q}}(t)] \cdot \delta \underline{q}(t), \quad (3.127)$$

portanto:

$$\begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} = Z^T(\underline{\hat{q}}(t)) \cdot \underline{q}(t), \quad (3.128)$$

$$\delta q_4 = \underline{\hat{q}}^T(t) \cdot \underline{q}(t) \approx 1. \quad (3.129)$$

O vetor de estado, para este caso, é definido por:

$$\underline{\tilde{x}}(t) = [\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, b_1, b_2, b_3]^T. \quad (3.130)$$

Desta forma:

$$\underline{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} Z^T(\underline{\hat{q}}(t)) & \mid & \bar{0}_{3 \times 3} \\ \hline \bar{0}_{3 \times 4} & \mid & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}(t) \\ \hline \underline{b}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.131)$$

portanto:

$$\underline{\tilde{x}}(t) = S^T(\underline{\hat{q}}(t)) \underline{x}(t), \quad (3.132)$$

onde $S^T(\underline{\hat{q}}(t))$ é a matriz que transforma o estado de dimensão 7 no estado de dimensão 6.

As equações cinemáticas de atitude são dadas por (Lefferts et alii, 1982):

$$\frac{d\underline{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \Omega(\underline{\omega}(t)) \underline{q}(t) = \frac{1}{2} \cdot \underline{\omega}'(t) \otimes \underline{q}(t). \quad (3.133)$$

Considerando-se valores estimados esta equação fica:

$$\frac{d\underline{\hat{q}}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \Omega(\underline{\hat{\omega}}(t)) \underline{\hat{q}}(t) = \frac{1}{2} \underline{\hat{\omega}}'(t) \otimes \underline{\hat{q}}(t), \quad (3.134)$$

onde:

$$\underline{\omega}'(t) = [\omega_x, \omega_y, \omega_z, 0]^T \quad \text{e} \quad \underline{\hat{\omega}}'(t) = [\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y, \hat{\omega}_z, 0]^T.$$

Da equação 3.124, tem-se:

$$\underline{q}(t) = \delta \underline{q}(t) \otimes \underline{\hat{q}}(t), \quad (3.135)$$

Derivando-se esta equação em relação a t , tem-se:

$$\frac{d}{dt} \delta \underline{q}(t) \otimes \underline{\hat{q}}(t) + \delta \underline{q}(t) \otimes \frac{d}{dt} \underline{\hat{q}}(t) = \frac{d}{dt} \underline{q}(t). \quad (3.136)$$

Substituindo as Equações 3.133 e 3.134 em 3.136, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \underline{q}(t) \otimes \hat{\underline{q}}(t) + \delta \underline{q}(t) \otimes \left(-\frac{1}{2} \hat{\underline{\omega}}'(t) \otimes \hat{\underline{q}}(t) \right) &= \\ = \frac{1}{2} \hat{\underline{\omega}}'(t) \otimes \underline{q}(t). \end{aligned} \quad (3.137)$$

Substituindo a Equação 3.135 em 3.137, vem:

$$\frac{d}{dt} \delta \underline{q}(t) + \frac{1}{2} \delta \underline{q}(t) \otimes \hat{\underline{\omega}}'(t) = \frac{1}{2} \hat{\underline{\omega}}'(t) \otimes \underline{q}(t) \otimes \hat{\underline{q}}^{-1}(t), \quad (3.138)$$

ou:

$$\frac{d}{dt} \delta \underline{q}(t) = \frac{1}{2} (\hat{\underline{\omega}}'(t) \otimes \delta \underline{q}(t) - \delta \underline{q}(t) \otimes \hat{\underline{\omega}}'(t)). \quad (3.139)$$

Fazendo:

$$\underline{\omega}'(t) = \delta \underline{\omega}'(t) + \hat{\underline{\omega}}'(t), \quad (3.140)$$

e substituindo na Equação 3.139, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \underline{q}(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left[\hat{\underline{\omega}}'(t) \otimes \delta \underline{q}(t) - \delta \underline{q}(t) \otimes \hat{\underline{\omega}}'(t) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \delta \underline{\omega}'(t) \otimes \delta \underline{q}(t), \end{aligned} \quad (3.141)$$

onde:

$$\delta \underline{\omega}'(t) = \begin{bmatrix} \delta \underline{\omega}(t) \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\omega}(t) - \hat{\underline{\omega}}(t) \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta \underline{b}(t) - \underline{\eta}_1(t) \\ \text{---} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.142)$$

sendo $\underline{\omega}(t) = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ e $\underline{\hat{\omega}}(t) = [\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y, \hat{\omega}_z]^T$.

É fácil verificar-se que (Lefferts et al alii, 1982):

$$\delta \underline{\omega}'(t) \otimes \delta \underline{q}(t) = \delta \underline{\omega}'(t) + 0(2), \quad (3.143)$$

e

$$\frac{1}{2} \cdot [\underline{\hat{\omega}}'(t) \otimes \delta \underline{q}(t) - \delta \underline{q}(t) \otimes \underline{\hat{\omega}}'(t)] = \left[\frac{-\underline{\hat{\omega}}(t) \times \delta \underline{\hat{q}}(t)}{0} \right], \quad (3.144)$$

onde $\delta \underline{\hat{q}}(t) = [\delta q_1, q_2, q_3]^T$.

Substituindo-se as Equações 3.142, 3.143 e 3.144 em 3.141 e desprezando-se os termos de ordem superior, chega-se a:

$$\frac{d}{dt} \delta \underline{q}(t) = \left[\frac{-\underline{\hat{\omega}}(t) \times \delta \underline{\hat{q}}(t)}{0} \right] + \left[-\frac{1}{2} \frac{\Delta \underline{b}(t) + \underline{n}_1(t)}{0} \right], \quad (3.145)$$

logo:

$$\frac{d}{dt} \delta \underline{\hat{q}}(t) = [\underline{\hat{\omega}}(t)] \delta \underline{\hat{q}}(t) - \frac{1}{2} (\Delta \underline{b}(t) + \underline{n}_1(t)), \quad (3.146)$$

$$\frac{d}{dt} \delta q_4 = 0, \quad (3.147)$$

onde:

$$[\underline{\hat{\omega}}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

As Equações 3.146 e 3.147 são as equações linearizadas do erro de estado. Considerando o estado definido na Equação 3.130, a Equação 3.146 pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \Delta \tilde{x}(t) = \tilde{F}(t) \Delta \tilde{x}(t) + \tilde{G}(t) \underline{n}(t), \quad (3.149)$$

onde:

$$\tilde{F}(t) = \begin{bmatrix} [\underline{\hat{\omega}}(t)] & | & -\frac{1}{2} I_{3 \times 3} \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & | & \bar{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6}, \quad (3.150)$$

$$\tilde{G}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} I_{3 \times 3} & | & \bar{0}_{3 \times 3} \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & | & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6}. \quad (3.151)$$

A matriz de transição de estado \tilde{c} é definida por (Lefferts et alii, 1982):

$$\tilde{\Phi}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t, t_0) & | & \tilde{\psi}(t, t_0) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & | & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6}, \quad (3.152)$$

onde:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\theta}(t, t_0) = [\underline{\tilde{\omega}}(t)] \cdot \tilde{\theta}(t, t_0), \quad (3.153)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(t, t_0) = [\underline{\tilde{\omega}}(t)] \cdot \tilde{\psi}(t, t_0) - \frac{1}{2} \cdot I_{3 \times 3}, \quad (3.154)$$

sujeito a $\tilde{\theta}(t_0, t_0) = I_{3 \times 3}$ e $\tilde{\psi}(t_0, t_0) = \bar{0}_{3 \times 3}$.

Desenvolvendo as Equações 3.153 e 3.154 da mesma forma ao apresentado no Apêndice A, verifica-se que:

$$\tilde{\theta}(t, t_0) = \Lambda(t, t_0), \quad (3.155)$$

$$\tilde{\psi}(t, t_0) = \Pi(t, t_0) = \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^t \Lambda(t, t') dt', \quad (3.156)$$

onde $\Lambda(t, t_0)$ e $\Pi(t, t_0)$ são as matrizes definidas, respectivamente pelas Equações 3.95 e 3.103. Assim, a matriz de transição de estado $\tilde{\Phi}$ é idêntica à desenvolvida no processo anterior, ou seja:

$$\bar{\Phi}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Lambda(t, t_0) & | & \Pi(t, t_0) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & | & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.157)$$

A matriz de covariâncias dos erros no estado \bar{e} é definida por:

$$\bar{P}(t) = E [\Delta \bar{x}(t) \cdot \Delta \bar{x}^T(t)] \quad (3.158)$$

Esta matriz satisfaz uma equação de Riccati cuja integração é dada por:

$$\bar{P}(t) = \bar{\Phi}(t, t_0) \bar{P}(t_0) \bar{\Phi}^T(t, t_0) + \bar{\Gamma}(t, t_0) Q(t) \bar{\Gamma}^T(t, t_0), \quad (3.159)$$

sendo $\bar{\Gamma}(t, t_0)$ a matriz de transição do ruído no estado determinado pela Equação 3.115.

A implementação desse algoritmo é idêntico ao da seção anterior, no que refere a propagação da matriz de covariâncias dos erros no estado e a determinação do ganho de Kalman. A equação do Filtro de Kalman para atualização das estimativas do estado aplicada no estado $\Delta \bar{x}(t)$, fica dada por:

$$\Delta \hat{\bar{x}}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \begin{bmatrix} \delta \hat{\bar{q}}(t_{k+1}/t_{k+1}) \\ \hline \Delta \hat{\bar{b}}(t_{k+1}/t_{k+1}) \end{bmatrix} = \bar{K}(\hat{\bar{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1}) \cdot [Y(t_{k+1}) - h(\hat{\bar{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})], \quad (3.160)$$

onde $\underline{h}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})$ é a matriz de dimensão 6×1 das observações (vide Apêndice C), $\underline{Y}(t_{k+1})$ é o vetor das observações e $\tilde{K}(\underline{\hat{x}}(t_{k+1}/t_k), t_{k+1})$ é a matriz ganho de kalman determinado pela Equação 3.120.

A estimação dos quatêrnions é obtida por (Lefferts et alii, 1982):

$$\underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \delta \underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_{k+1}) \otimes \underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_k), \quad (3.161)$$

onde:

$$\delta \underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \begin{bmatrix} \delta \underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_{k+1}) \\ \text{-----} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.162)$$

O vetor de estimativas das derivas é obtida por:

$$\underline{\hat{b}}(t_{k+1}/t_{k+1}) = \underline{\hat{b}}(t_{k+1}/t_k) + \Delta \underline{\hat{b}}(t_{k+1}/t_{k+1}). \quad (3.163)$$

Desenvolvendo a Equação 3.161, tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_k) + \Omega(\delta \underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_{k+1})) \cdot \\ &\quad \cdot \underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_{k+1}). \end{aligned} \quad (3.164)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_{k+1}) &= \underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_k) + Z(\underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_k)) \cdot \\ &\quad \cdot \delta \underline{\hat{q}}(t_{k+1}/t_{k+1}). \end{aligned} \quad (3.165)$$

O estado estimado de dimensão 7 é obtido pelas Equações 3.163 e 3.165. Note-se que a matriz de covariâncias dos erros no estado reduzido é não singular, já que para este novo estado inexistente o vínculo de norma unitária. A determinação desta matriz na dimensão 7x7 é feita através da Equação 3.118, sem que se perca a sua singularidade.

CAPÍTULO 4

DESCRIÇÃO DOS TESTES EFETUADOS E APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Serão descritos neste capítulo os testes efetuados para avaliação do desempenho dos procedimentos em análise. A seguir os resultados obtidos nestes testes serão apresentados graficamente e comentados. Os testes foram realizados por simulação numérica em computador digital, considerando-se um satélite artificial de baixa altitude.

4.2 - DESCRIÇÃO DO PROCEDIMENTO DE SIMULAÇÃO

O esquema de simulação adotado consta basicamente de dois modelos dinâmicos do sistema. O primeiro modelo (modelo de avaliação), utilizado para a simulação da atitude do satélite (que inclui os modelos matemáticos dos torques provenientes das influências da atmosfera, da radiação solar direta, do albedo terrestre, da radiação terrestre e do gradiente de gravidade) (Moro, 1983), é utilizado para a simulação das observações dos sensores inerciais e não-inerciais. O segundo, trata-se de um modelo cinemático que é utilizado no processo de estimação de atitude via Filtro Estendido de Kalman. Na Figura 4.1 é apresentada um diagrama esquemático do processo de simulação executada.

Os testes dos procedimentos foram efetuados a partir da simulação do satélite TD-1A (European Space Agency - ESA, 1977), cuja altitude média é de aproximadamente 550 km. A órbita deste satélite é caracterizada pelos seguintes elementos Replerianos iniciais:

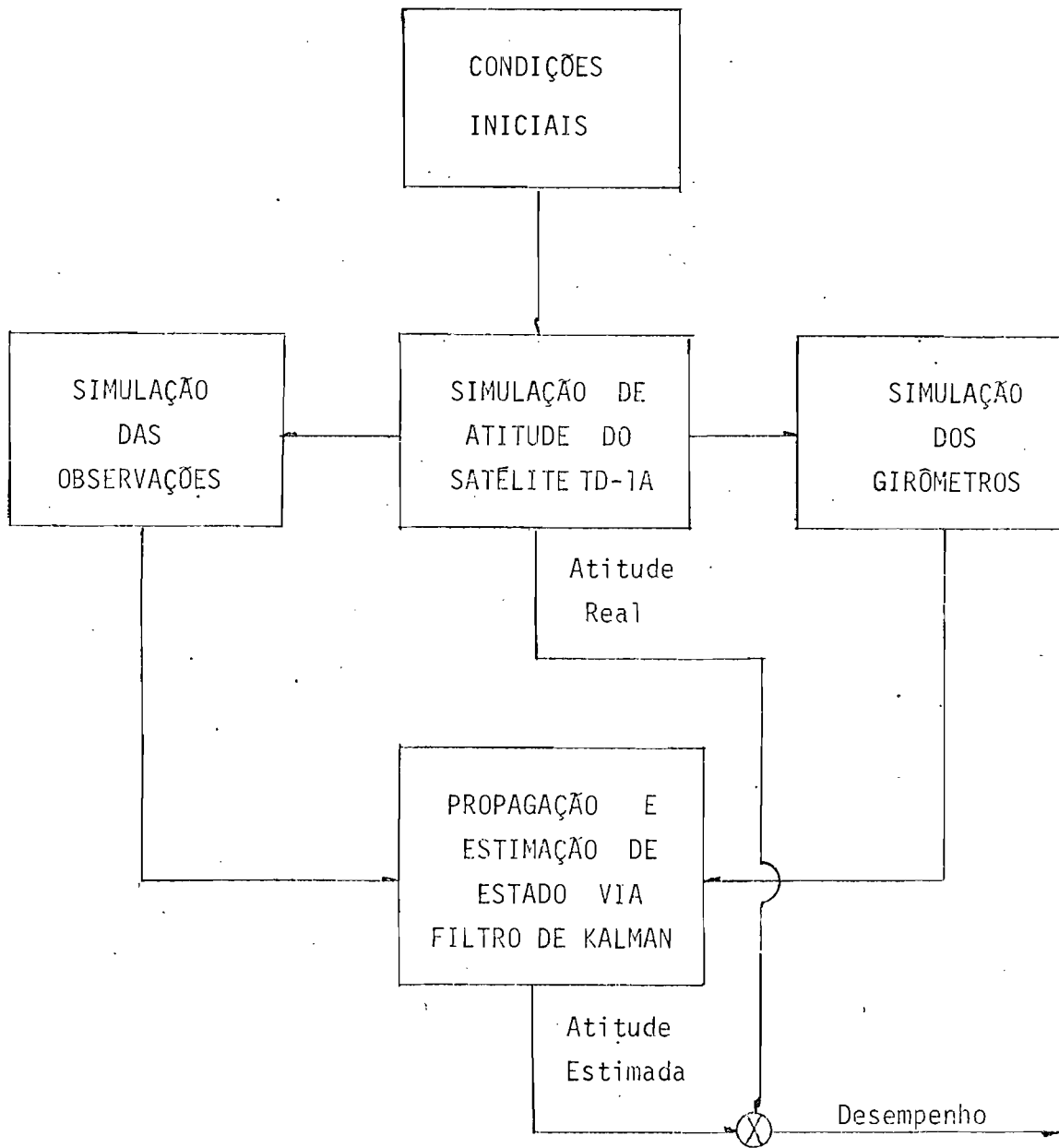


Fig. 4.1 - Esquema de Simulação.

a (semi-eixo maior)	- 6.910 km
e (excentricidade)	- 0,0027
i (inclinação)	- 97,6 graus
Ω (ascensão reta)	- 317,9 graus
ω (argumento do perigeu)	- 90,6 graus
M_0 (anomalia média)	- 15,3 graus

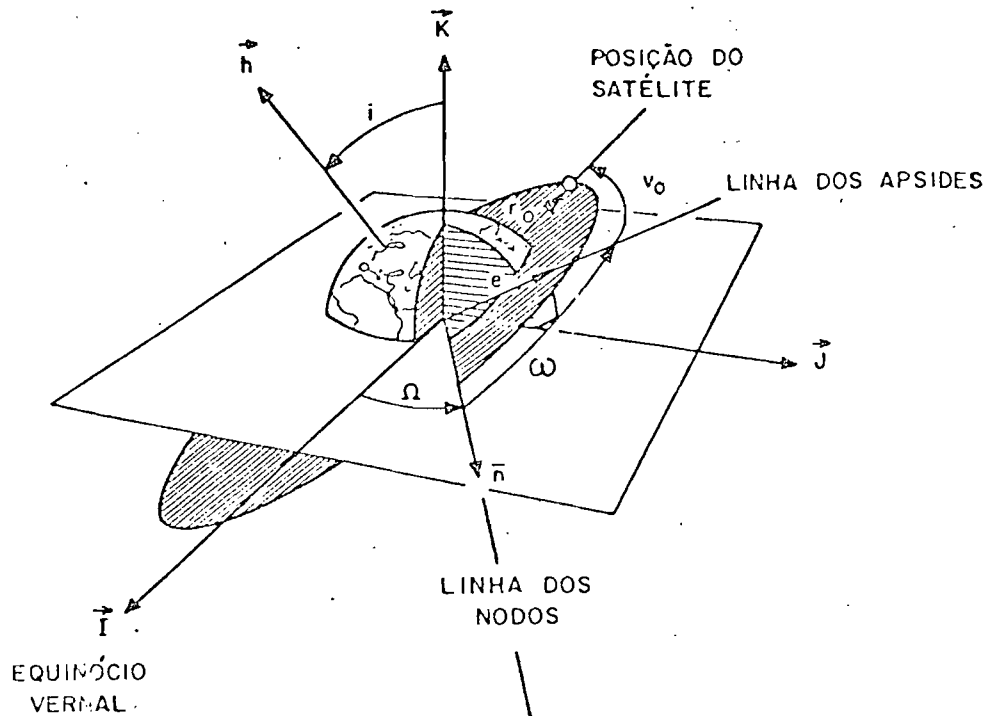


Fig. 4.2 - Elementos keplerianos da órbita.

Em relação à simulação da atitude do satélite, os valores iniciais adotados para as velocidades angulares e para os quatérnions foram:

$$\omega_x = 0,052 \text{ (rad/s)}$$

$$\omega_y = 0,052 \text{ (rad/s)}$$

$$\omega_z = 0,078 \text{ (rad/s)}$$

$$q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$$

$$q_4(0) = 1$$

As observações dos sensores não-inerciais (sensor solar e sensor de horizonte) foram calculadas a partir de atitude gerado com o modelo de avaliação (Moro, 1983) e, a seguir contaminadas por erros aleatórios com desvio padrão de 1×10^{-3} rad. (Wertz, 1978), compatível com os erros apresentados na prática por estes tipos de sensores. Com base no girômetro do tipo integrador, foi realizada a simulação de um sistema "strapdown" (Joos, 1978; Cardenuto, 1984) para obtenção de dados das velocidades angulares, considerando um erro aleatório com desvio padrão de 1×10^{-5} (rad/s), também compatível com girômetros empregados na prática neste tipo de aplicação. Os erros aleatórios foram obtidos a partir de uma subrotina geradora de números aleatórios gaussianos.

As condições iniciais para o estimador foram obtidas a partir das condições iniciais para a simulação adicionando um erro de 1×10^{-3} para os quatérnions e para as derivas. Os valores dos vários parâmetros necessários para a estimação de estado estão apresentados na Tabela 4.1.

TABELA 4.1

VALORES INICIAIS PARA ESTIMAÇÃO DE ESTADO

VARIÁVEIS	VALORES
PERÍODO DE SIMULAÇÃO (Seg.)	1200
INTERVALO DE PROPAGAÇÃO (Seg.) (Vide Figura 3.1)	0.2
INTERVALO DE ATUALIZAÇÃO (Seg.)	2
PRECISÃO NAS CONDIÇÕES INICIAIS DOS QUATÉRNIONS	$\sigma_q = 10^{-3}$
PRECISÃO NAS CONDIÇÕES INICIAIS DAS DERIVAS	$\sigma_b = 10^{-3}$
MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS ERROS NO ESTADO	$P = \text{diag. } \{10^{-6}\}$
MATRIZ DE COVARIÂNCIA DO RUÍDO NO ESTADO	$\begin{bmatrix} Q_q & & \bar{0} \\ \hline \bar{0} & & Q_b \end{bmatrix}, \quad Q_q = \text{diag. } \{10^{-10}\}$ $Q_b = \text{diag. } \{10^{-9}\}$
MATRIZ DE COVARIÂNCIA DO RUÍDO NAS OBSERVAÇÕES	$R = \text{diag. } \{10^{-6}\}$
MATRIZ DE COVARIÂNCIAS INICIAIS DO RUÍDO DINÂMICO (REFERENTE AO FILTRO ADAPTATIVO)	$\begin{bmatrix} P_{qk} & & \bar{0} \\ \hline \bar{0} & & P_{bk} \end{bmatrix}, \quad P_{qk} = \text{diag. } \{10^{-20}\}$ $P_{bk} = \text{diag. } \{10^{-12}\}$

4.3 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para a análise dos resultados obtidos são calculados a cada instante os erros reais e os erros estimados, em quatêrnions e deriva assim definidos:

- erro real em quatêrnion.

$$\Delta q = \left[\sum_{i=1}^4 (q_i - \bar{q}_i)^2 \right]^{1/2} \quad (4.1)$$

- erro estimado em quatêrnion

$$\Delta \bar{q} = \left[\sum_{i=1}^4 P(i,i) \right]^{1/2} \quad (4.2)$$

- erro real em deriva

$$\Delta b = \left[\sum_{i=1}^3 (b_i - \bar{b}_i)^2 \right]^{1/2} \quad (4.3)$$

- erro estimado em deriva

$$\Delta \bar{b} = \left[\sum_{i=5}^7 P(i,i) \right]^{1/2} \quad (4.4)$$

Define-se, ainda, o resíduo normalizado por:

$$r = \left[\sum_{i=1}^6 (Y_i - \bar{Y}_i) \right] / 6\sigma_0, \quad (4.5)$$

onde:

Y_i é o valor da observação;

\bar{Y}_i é o valor da observação relativo ao estado estimado e

σ_0 é o valor do desvio padrão considerado igual para ambas as observações (sensores solar e de horizonte).

Desta forma, o resíduo normalizado é expresso em termos de desvio-padrão, permitindo uma avaliação imediata do processo de estimação. É desejável que o resíduo permaneça no interior de uma faixa de ± 3 .

Com o intuito de se ter uma melhor visualização e interpretação física imediata em cada eixo do satélite, define-se o erro angular por:

$$\underline{\Delta\beta} = [\delta\beta_1, \delta\beta_2, \delta\beta_3]^T, \quad (4.6)$$

que é a rotação que leva o satélite da atitude estimada para a real. Assim, $\delta\beta_1, \delta\beta_2, \delta\beta_3$; admitidos pequenos, são ângulos de rotação ao redor dos eixos x, y e z do satélite, respectivamente, que representam os erros de atitude em cada eixo. As propriedades estatísticas de $\underline{\Delta\beta}$ são (Shuster, 1981):

$$E [\underline{\Delta\beta}] = 0, \quad (4.7)$$

$$E [\underline{\Delta\beta} \underline{\Delta\beta}^T] = P_\beta, \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} P_\beta & | & \bar{0}_{3 \times 1} \\ \hline \bar{0}_{1 \times 3} & | & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} = 4 [\hat{q}]^T \cdot P_q \cdot [\hat{q}], \quad (4.9)$$

onde:

P_q é a matriz de covariâncias dos erros referente à partição do estado relativo ao quatérnio,

P_β é a matriz de covariâncias dos erros angulares e

$$[\hat{q}] = \begin{bmatrix} \hat{q}_4 & \hat{q}_3 & -\hat{q}_2 & \hat{q}_1 \\ -\hat{q}_3 & \hat{q}_4 & \hat{q}_1 & \hat{q}_2 \\ \hat{q}_2 & -\hat{q}_1 & \hat{q}_4 & \hat{q}_3 \\ -\hat{q}_1 & -\hat{q}_2 & -\hat{q}_3 & \hat{q}_4 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Portanto, define-se o erro angular estimado em graus para cada eixo por:

$$\Delta\beta_i = [P_\beta(i,i)]^{1/2} \cdot \frac{180}{\pi}, \quad i = 1,2,3. \quad (4.11)$$

O erro angular real é determinado através da Equação 3.128 (Shuster, 1981), ou seja:

$$\begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \delta\beta_1 \\ \delta\beta_2 \\ \delta\beta_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Portanto, o erro real em graus é dado por:

$$\begin{bmatrix} \delta\beta_1 \\ \delta\beta_2 \\ \delta\beta_3 \end{bmatrix} = \frac{360}{\pi} \cdot \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Em todos os procedimentos apresentados foi analisada a precisão angular, com o objetivo de se ter melhor visualização e interpretação física do desempenho do processo de estimação em cada método.

4.4 - RESULTADOS E COMENTÁRIOS

Os resultados obtidos para os quatro procedimentos de determinação de atitude de satélites artificiais são apresentadas a seguir, de maneira gráfica, considerando-se para cada procedimento a simulação de sua aplicação durante um intervalo de 1.200 seg.

O objetivo do trabalho é, através da análise dos resultados dos testes efetuados, proceder-se a uma comparação entre os desempenhos dos procedimentos estudados, chamando-se atenção para as curvas sempre que necessário.

Nos resultados apresentados a seguir, não foi utilizada, durante o processo de estimação de estado, a técnica de estimação adaptativa do ruído dinâmico (Rios Neto e Kuga, 1982). No entanto, esta técnica foi utilizada, em um teste a parte, para se obter (calibrar) um valor médio da matriz de densidade espectral do ruído dinâmico, a ser utilizada em todo intervalo de teste.

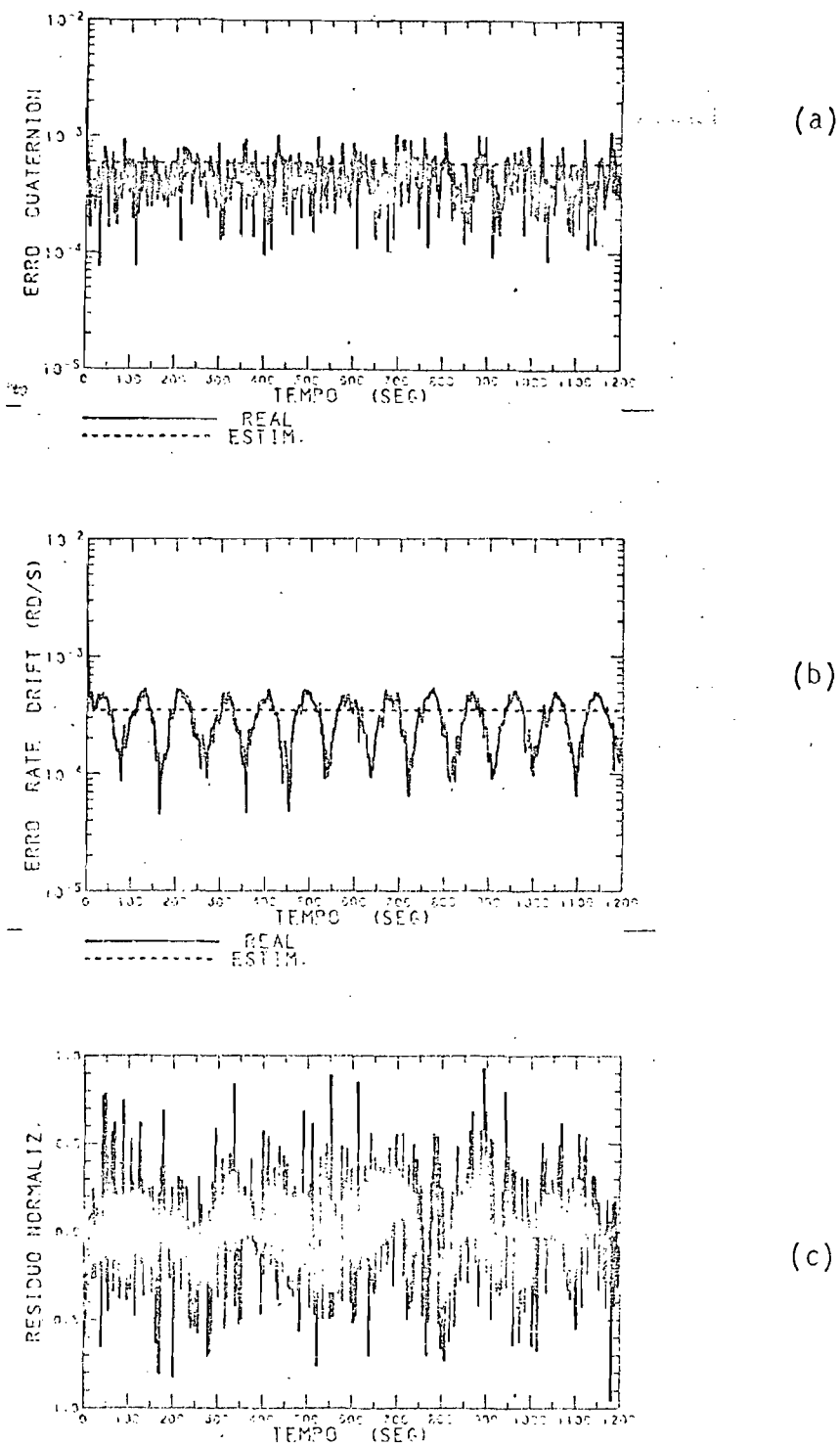
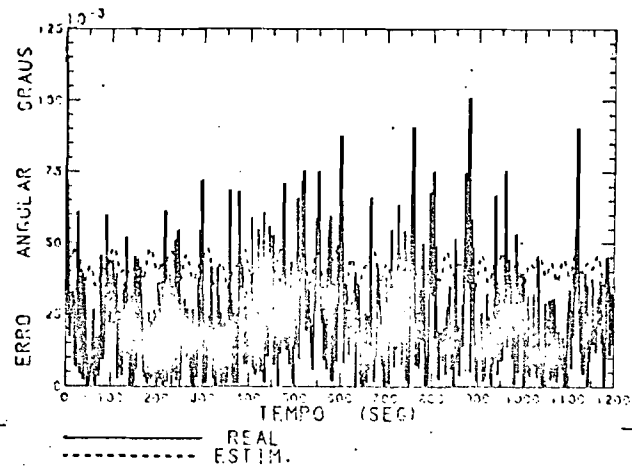
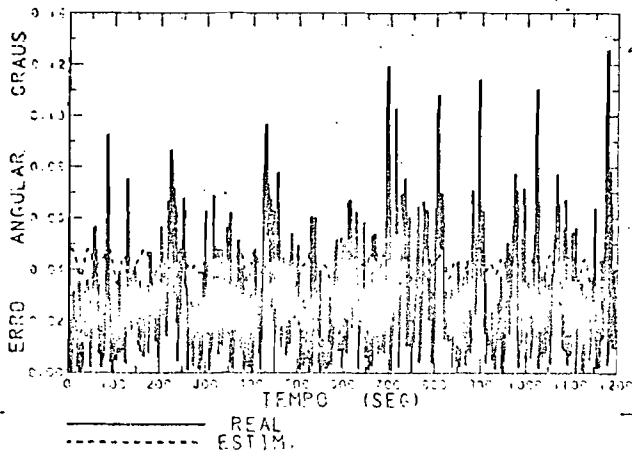


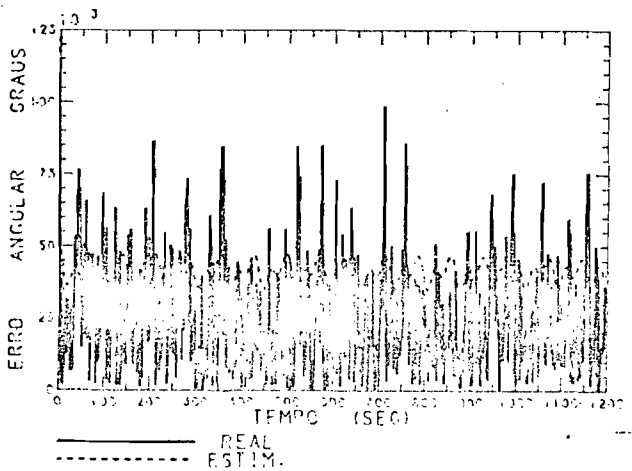
Fig. 4.3 - Resultado do procedimento usual com renormalização: a) erro em quatérnio; b) erro em deriva; c) resíduo normalizado.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.4 - Resultado do procedimento usual com renormalização: a) erro angular no eixo x; b) erro angular no eixo y; c) erro angular no eixo z.

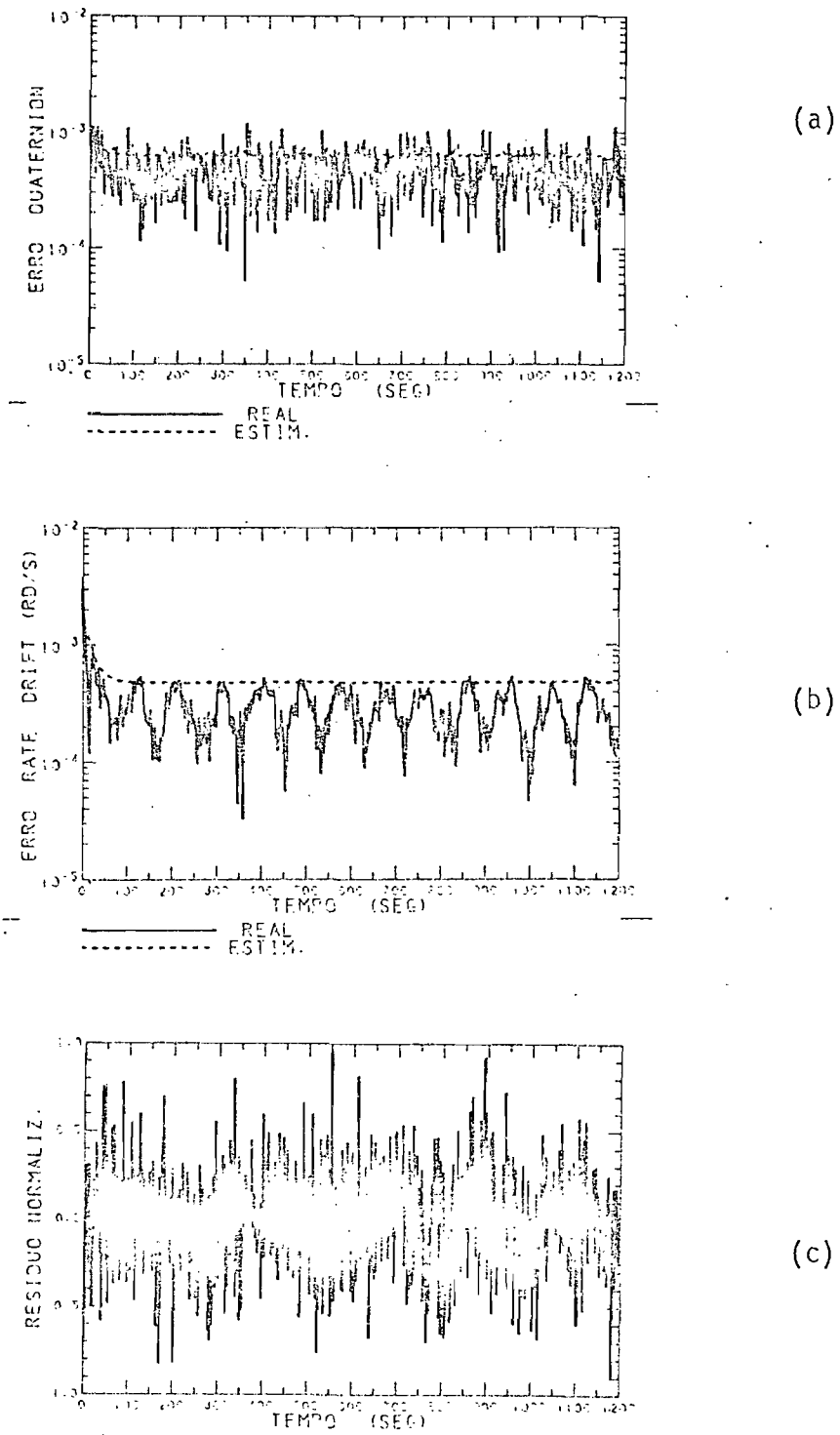


Fig. 4.5 - Resultado da representação truncada: a) erro em quaternion; b) erro em deriva; c) resíduo normalizado.

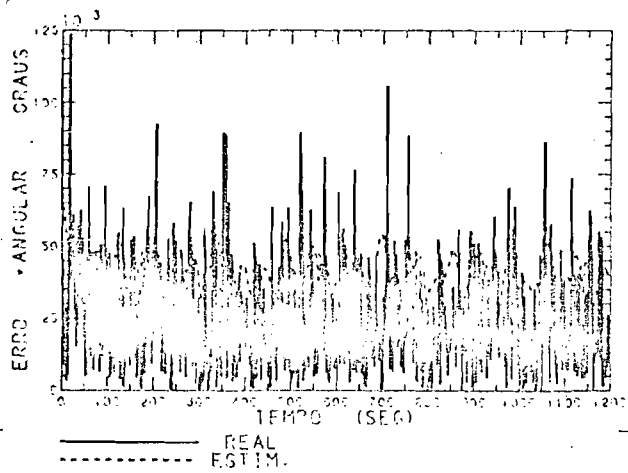
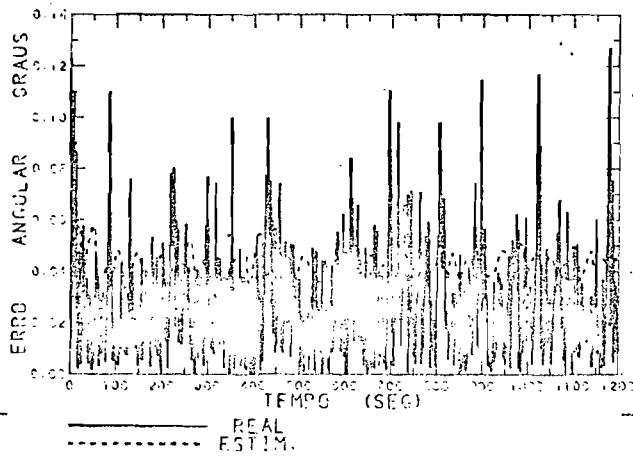
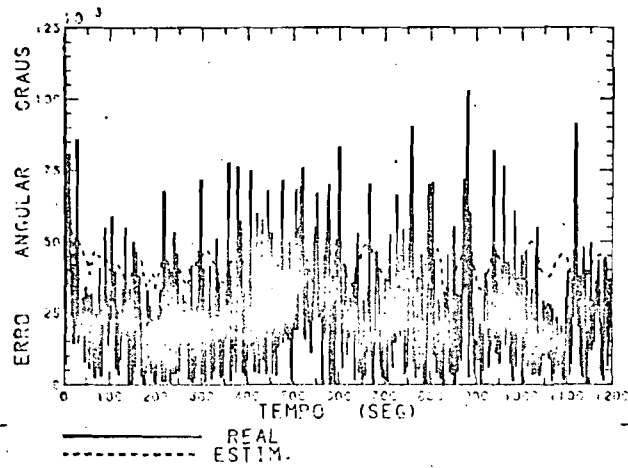


Fig. 4.6 - Resultado da representação truncada: a) erro angular no eixo x ; b) erro angular no eixo y ; c) erro angular no eixo z .

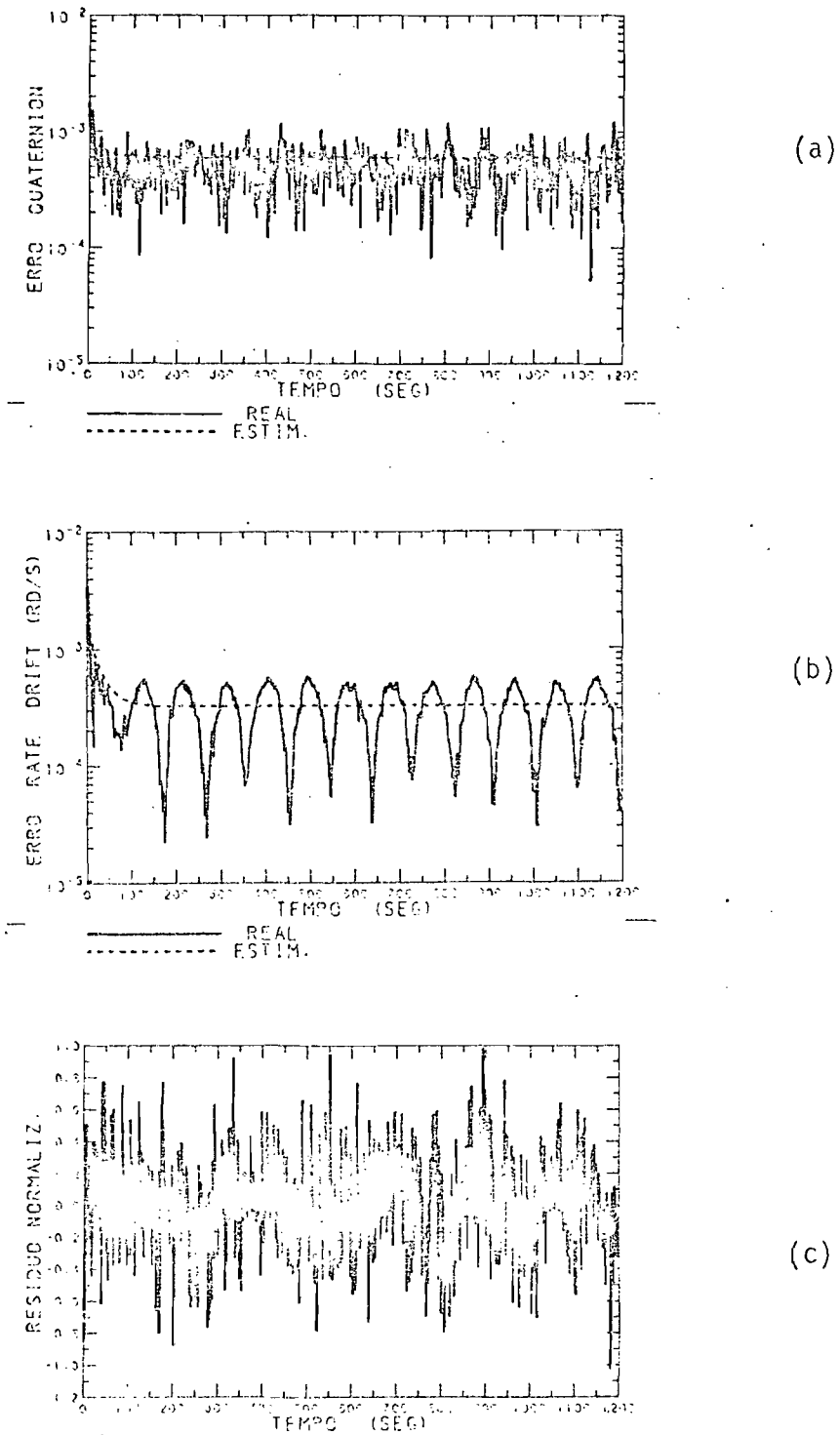


Fig. 4.7 - Resultado da representação reduzida empregando propriedades da matriz de rotação: a) erro em quatêrnion; b) erro em deriva; c) residuo normalizado.

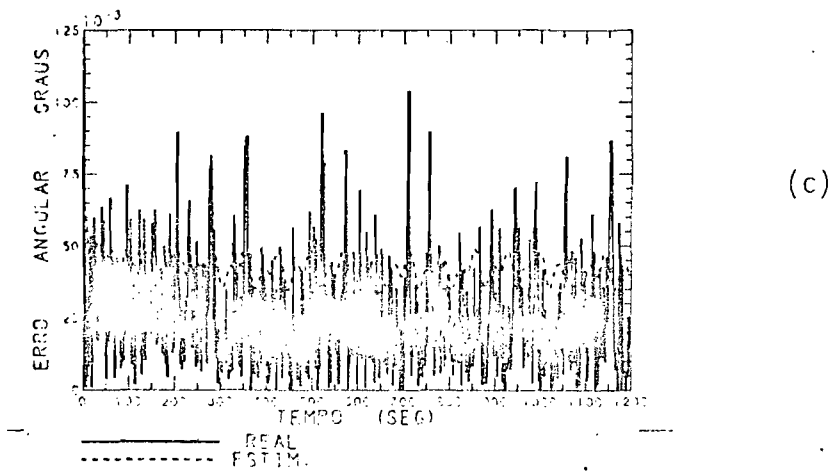
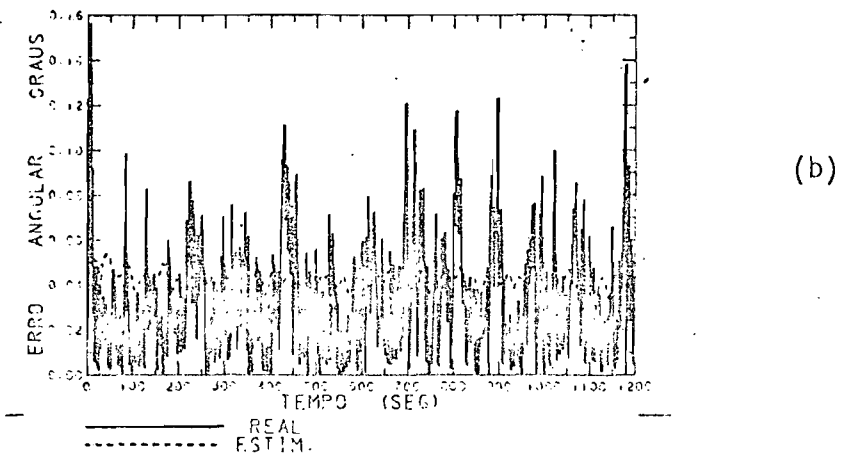
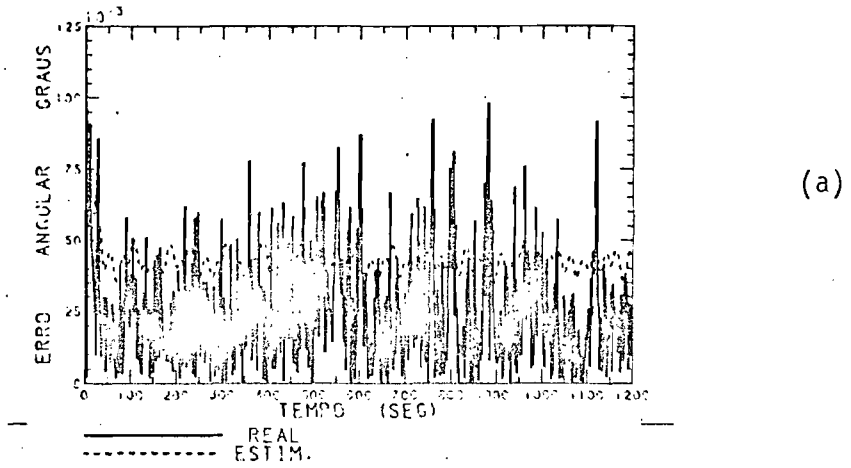
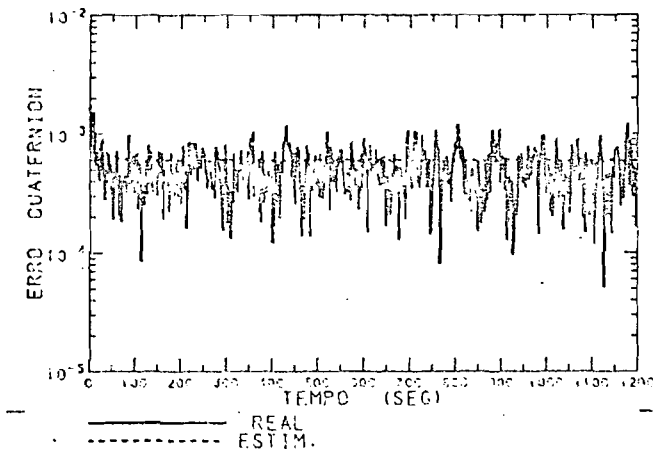
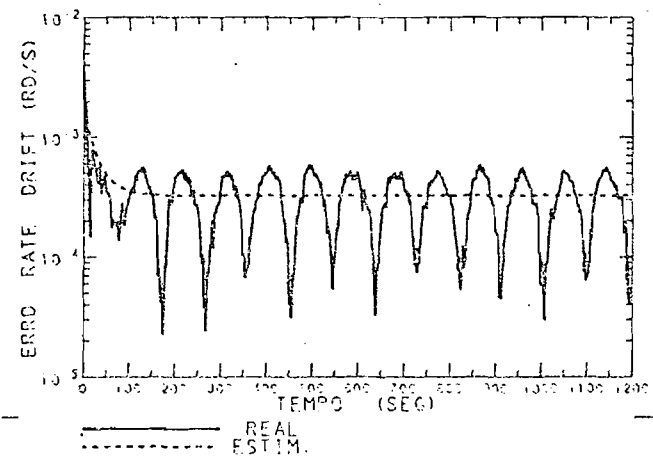


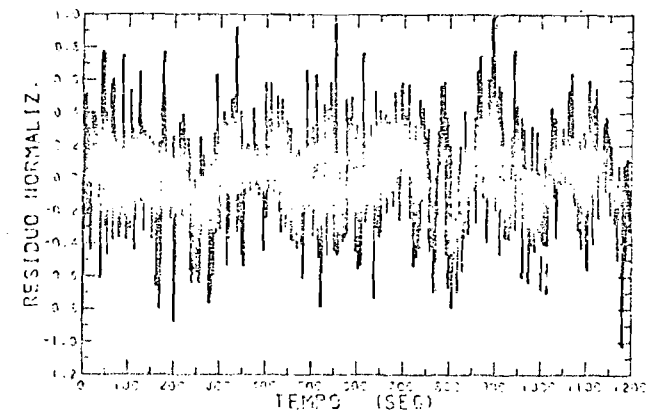
Fig. 4.8 - Resultado da representação reduzida empregando propriedades da matriz de rotação: a) erro angular no eixo x; b) erro angular no eixo y; c) erro angular no eixo z.



(a)

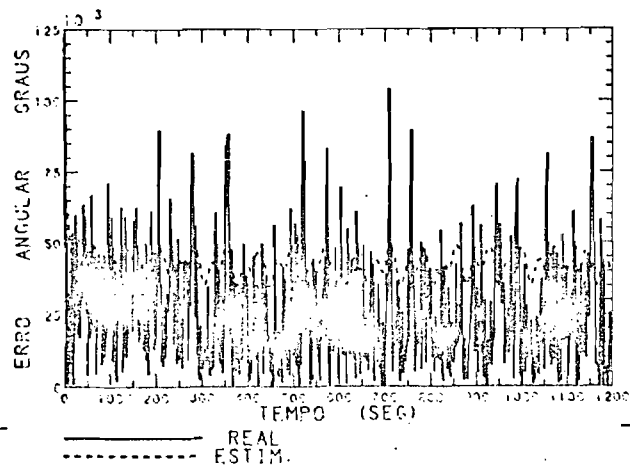


(b)

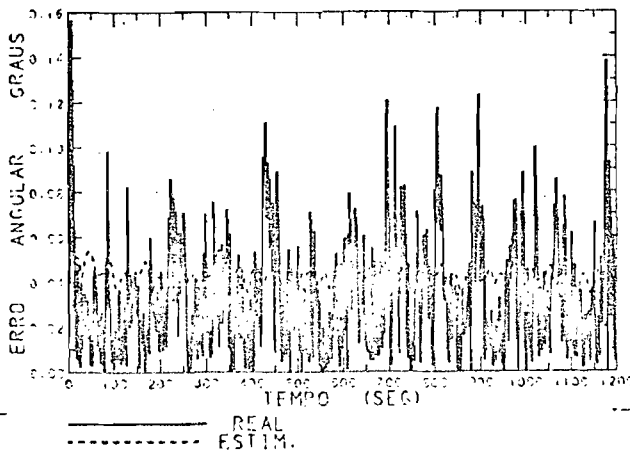


(c)

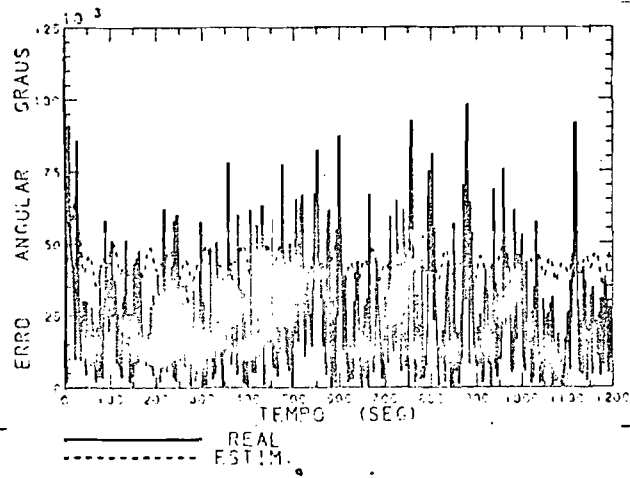
Fig. 4.9 - Resultado da representação reduzida através do vetor erro dos quatêrnions: a) erro em quatêrnion; b) erro em deriva; c) resíduo normalizado.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.10 - Resultado da representação reduzida através do vetor erro dos quatêrnions: a) erro angular no eixo x; b) erro angular no eixo y; c) erro angular no eixo z.

As Figuras 4.3-a, 4.5-a, 4.7-a e 4.9-a apresentam as curvas, sobrepostas em um único gráfico, dos erros estimados e reais nas estimativas dos quatérnions para cada um dos procedimentos em análise, respectivamente. Estes erros encontram-se definidos nas Equações 4.1 e 4.2. As Figuras 4.3-b, 4.5-b, 4.7-b e 4.9-b apresentam, analogamente as curvas sobrepostas dos erros estimados e reais nas estimativas das derivas giroscópicas para cada um dos métodos, respectivamente. Conforme pode ser observado nestas figuras, as curvas dos erros estimados tanto para as estimativas dos quatérnions quanto para as derivas, para todos os procedimentos em análise, partem de um valor inicial e decaem gradativamente, mantendo-se, após um certo intervalo de tempo, em um valor praticamente constante, permanecendo sempre superior ao valor médio do erro real das estimativas, o que atesta a convergência do estimador para todos os casos, dentro do intervalo considerado. As Figuras 4.3-c, 4.5-c, 4.7-c e 4.8-c apresentam as curvas dos resíduos normalizados das observações, definido na Equação 4.5, para cada um dos procedimentos. Observa-se nestas figuras que para todos os métodos a curva dos resíduos apresentam média nula e mantêm-se praticamente dentro de uma faixa de um desvio padrão do erro aleatório das observações, o que confirma a convergência do estimador.

Uma vez que a precisão em quatérnions possui difícil visualização e interpretação física, nas Figuras 4.4, 4.6, 4.8 e 4.10, são apresentadas, para cada um dos procedimentos, respectivamente, as curvas sobrepostas dos erros angulares estimados e reais, para cada um dos eixos principais do satélite. Verifica-se nestas curvas que, para todos os procedimentos, o comportamento do estimador foi praticamente equivalente. Em ambos os casos o erro estimado partiu de uma condição inicial da ordem de 0,12 graus e convergiu para valores em torno de 0.05 graus.

Com base nos resultados já apresentados, verifica-se que não houve diferenças relevantes entre o desempenho dos quatro procedimentos estudados na aplicação específica do teste e ainda que todos eles apresentaram características satisfatórias.

4.5 - VERIFICAÇÃO DA SINGULARIDADE DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS DOS ERROS NO ESTADO

Para a verificação da singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado, para todos os procedimentos em análise, os valores do produto $\hat{q}^T(t_k) P_q(t_k) \hat{q}(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$, o qual, conforme a Equação 3.69, deve ser nulo em virtude da singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado. Os valores calculados para este produto, para todos os procedimentos, foram plotados para a verificação da singularidade, analisando-se nestes gráficos se os valores calculados são da ordem de erros numéricos, o que atesta que a singularidade é mantida.

Estes valores foram plotados para dois casos distintos. No primeiro caso considera-se a aplicação direta do procedimento, sem a utilização da técnica citada de estimação adaptativa do nível de ruído no estado (Rios Neto e Kuga, 1982). A matriz de densidade espectral do ruído dinâmico é considerada, neste caso, constante em todo intervalo de teste. No segundo caso, a técnica de ruído adaptativo foi incluída.

Nas Figuras 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14 são apresentadas as curvas obtidas para o primeiro caso.

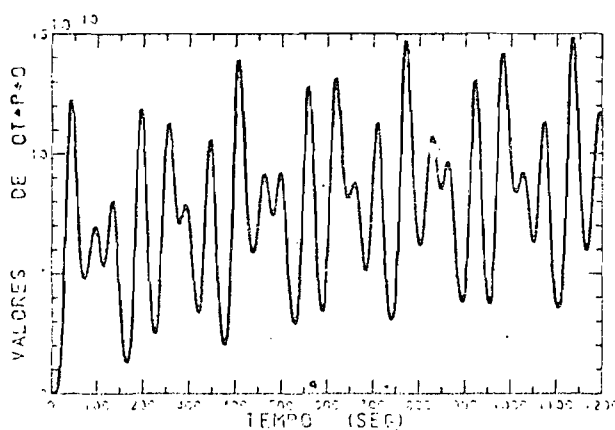


Fig. 4.11 - Valores de $\hat{q}^T(t) P_q(t) \hat{q}(t)$ do procedimento usual com normalização.

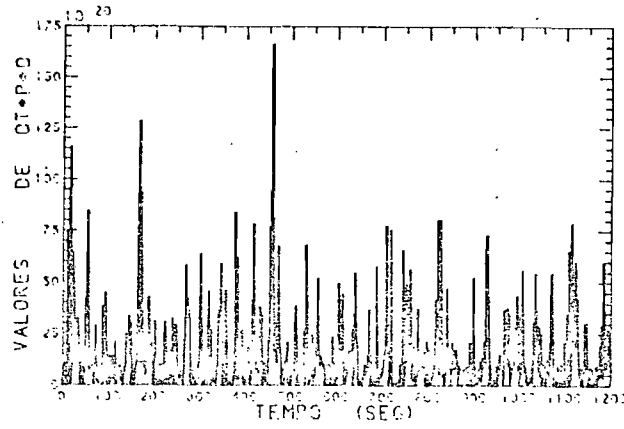


Fig. 4.12 - Valores de $\hat{q}^T(t) P_q(t) \hat{q}(t)$ da representação trun-
cada.

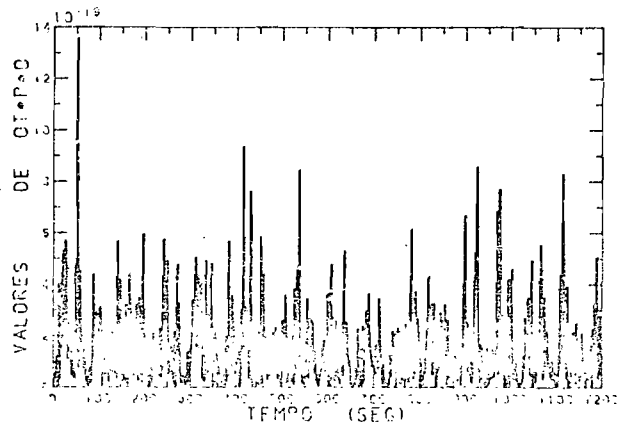


Fig. 4.13 - Valores de $\hat{q}^T(t) P_q(t) \hat{q}(t)$ da representação reduzida
empregando propriedades da matriz de rotação.

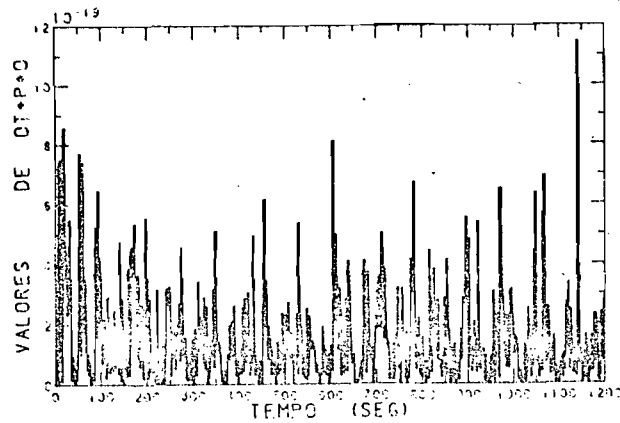


Fig. 4.14 - Valores de $\hat{q}^T(t) P_q(t) \hat{q}(t)$ da representação reduzida através do vetor erro dos quatêrnions.

Observa-se nessas figuras, que para os três procedimentos de redução da matriz de covariâncias (Figuras 4.12, 4.13 e 4.14) o produto $\hat{q}^T(t) P_q(t) \hat{q}(t)$ manteve-se em um nível praticamente constante e próximo de zero (1×10^{-19}). Isto era esperado, já que foi mantida a singularidade da matriz de covariâncias com a aplicação das técnicas de redução. Para o método em que só é efetuada a renormalização periódica dos quatêrnions estimados isto, porém, não ocorreu, conforme se observa na Figura 4.11. Embora o valor do citado produto permaneça próximo do zero numérico, percebe-se que existe uma componente crescente, de modo aproximadamente linear. Isto se deve ao acúmulo de erros numéricos que destroem gradativamente a singularidade da matriz de covariâncias. Isto provavelmente irá implicar em divergência do filtro ao se considerar longos períodos de tempo de aplicação do procedimento. Este teste porém não foi efetuado devido ao tempo excessivo de processamento que seria exigido para o processo de simulação.

Nas Figuras 4.15, 4.16, 4.17 e 4.18 são apresentadas as curvas obtidas para o produto $\hat{q}^T(t) P_q(t) \hat{q}(t)$ para o segundo caso citado, ou seja, com inclusão do procedimento de estimação adaptada

tiva do ruído no estado. O objetivo é a verificação de sua influência na manutenção da singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado.

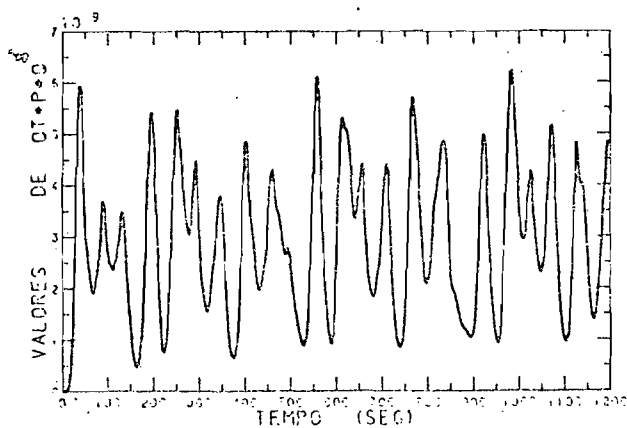


Fig. 4.15 - Valores de $\hat{\underline{q}}^T(t) P_q(t) \hat{\underline{q}}(t)$ do procedimento usual com re normalização e ruído adaptativo.

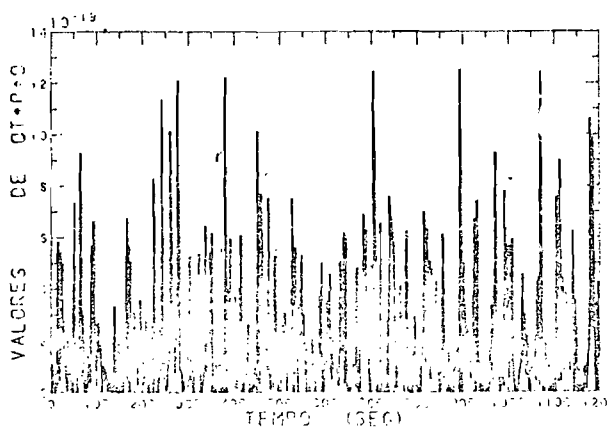


Fig. 4.16 - Valores de $\hat{\underline{q}}^T(t) P_q(t) \hat{\underline{q}}(t)$ da representação truncada com ruído adaptativo.

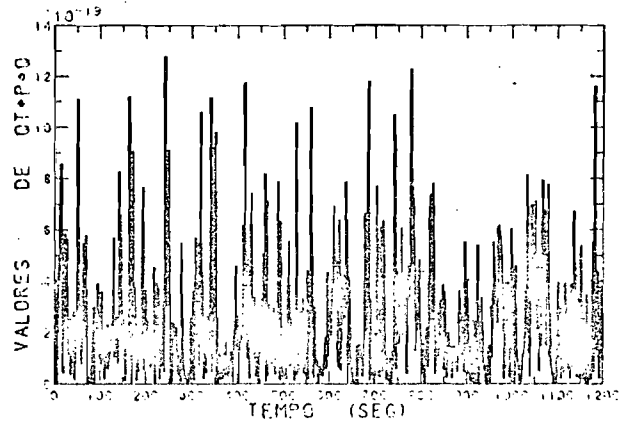


Fig. 4.17 - Valores de $\underline{\hat{q}}^T(t) P_{\underline{q}}(t) \underline{\hat{q}}(t)$ da representação reduzida em pregando propriedades da matriz de rotação com ruído adaptativo.

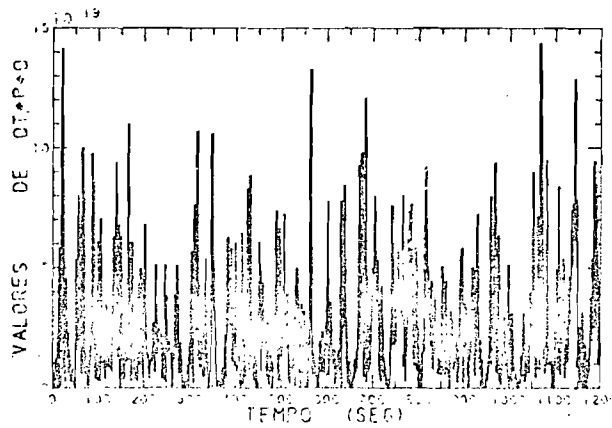


Fig. 4.18 - Valores de $\underline{\hat{q}}^T(t) P_{\underline{q}}(t) \underline{\hat{q}}(t)$ da representação reduzida através do vetor erro dos quatérnions com ruído adaptativo.

Comparando-se as curvas obtidas nos dois casos, verifica-se que não houve qualquer diferença relevante para os três procedimentos que empregam técnicas de redução da matriz de covariâncias. Para o procedimento com renormalização periódica dos quatérnions, porém, percebe-se que o valor médio da curva, para o caso da Figura 4.15 possui um valor inicial médio maior que o da Figura 4.11, ou seja: aproximadamente $3 \cdot 10^{-9}$ e $6 \cdot 10^{-10}$ respectivamente. Para o segundo caso (Figura 4.15), embora se parta de um valor médio inicial maior para o produto, este se mantém praticamente constante para todo o intervalo, não apresentando a tendência crescente do primeiro caso. Não se pode porém afirmar, com base neste fato que o produto não iria em um intervalo maior começar a apresentar um valor médio crescente. Também, por problemas de tempo de processamento necessários à simulação de intervalos muito grande, não foi possível a realização deste teste.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE CONTINUIDADE

5.1 - CONCLUSÃO

Considere-se que a proposta inicial deste trabalho, a implementação e comparação de métodos que evitam o problema da singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado, em procedimentos de determinação de atitude com parametrização em quatérnions, foi atendido.

A comparação do desempenho dos três procedimentos que utilizam técnicas de redução da matriz de covariâncias mostrou, para os casos testados um desempenho semelhante dos métodos. No intervalo considerado nos testes, também o procedimento que se utiliza apenas de renormalização periódica apresentou um desempenho sem quaisquer variações significativas em relação aos outros três. Quanto ao tempo de processamento, porém, a representação que utiliza a renormalização periódica dos quatérnions foi o procedimento que apresentou o maior consumo, conforme o esperado, já que os outros utilizam redução de dimensão, tanto de estado quanto da matriz de covariâncias dos erros.

A representação truncada da matriz de covariâncias dos erros no estado mantém as propriedades da característica desta matriz, mas não resulta em economia significativa de tempo de processamento em relação a representação com renormalização dos quatérnions, devido à necessidade de cálculo da matriz de transição de estado de dimensão 7×7 a cada instante, para em seguida se poder efetuar a transformação para a dimensão 6×6 . O tempo necessário para fazer esta redução cancela praticamente toda a economia computacional conseguida com o esquema de atualização utilizado num espaço de dimensão menor.

A representação reduzida da matriz de covariâncias dos erros no estado, para os dois procedimentos que empregam deste recurso,

preserva as propriedades da característica da matriz com simplificação computacional considerável, pois a matriz de transição de estado e a respectiva matriz de covariâncias dos erros são computadas somente na forma reduzida, não sendo necessário o retorno às matrizes de dimensão 7×7 . Outra vantagem destes dois procedimentos com relação ao que utiliza a representação truncada da matriz de covariâncias é a inexistência do problema numérico relacionado ao cálculo do erro do quatérnion eliminado via equação de vínculo.

Os procedimentos analisados também mostraram resultados semelhantes em termo de precisão na estimativa do estado, nas condições adotadas nos testes. Apresentaram porém diferenças com relação ao tempo de processamento e à manutenção da singularidade da matriz de covariâncias dos erros no estado. Desta forma, pode-se concluir que os dois procedimentos de representação reduzida da matriz de covariâncias são os mais indicados para o tipo de aplicação analisado, pois além de manterem a singularidade da matriz de covariâncias de dimensão 7×7 , permitem que se obtenha uma redução do tempo de processamento de aproximadamente 7% em relação aos outros dois procedimentos (representação truncada e procedimento usual com renormalização forçada dos quatérnions).

5.2 - PERSPECTIVAS DE CONTINUIDADE

Como perspectivas para desenvolvimentos futuros pode-se citar:

- a) Simulação de atitude por longos períodos de tempo de modo a permitir a avaliação da convergência do filtro a longo prazo.
- b) Revisão do esquema de integração numérica no cálculo da matriz de transição de estado visando avaliar os erros ocasionados na propagação dos quatérnions.
- c) Estudo qualitativo, quantitativo, teórico e experimental sobre a não-linearidade envolvida na dinâmica e na equação das ob

servações, a fim de minimizar seus efeitos e, conseqüentemente, aumentar o período de propagação.

- d) Analisar o desempenho dos procedimentos citados com intervalo de atualização maior que 2 seg., diminuindo o intervalo de discretização, utilizando de maneira periódica (com frequência menor que a atualização) a técnica de ruído adaptativo (Rios Neto e Kuga, 1982).
- e) Utilização desses procedimentos na malha de controle e verificação da possibilidade de utilizar apenas as observações dos sensores de horizonte para a estimação de estado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CARDENUTO, N.C. *Análise e simulação de um sistema inercial ("strapdown") de determinação de atitude auxiliado por estimação adaptativa da deriva*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos INPE, ago. 1984 (INPE-3257-TDL/177).
- CARDENUTO, N.C.; RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. *Determinação de atitude através de sensores inerciais acoplados ("strapdown") e estimação adaptativa*. São José dos Campos, INPE, jul. 1984 (INPE-3180-PRE/545).
- EUROPEAN SPACE AGENCY (ESA) TD-1A In: *6 Report presented by the European Space Agency to the 20th. COSPAR meeting*, Tel Aviv, Israel, June, 1977. Paris, 1977. p.44 (ESA SP-1002).
- GELB, A. *Applied optimal estimation* Cambridge, MIT, 1974.
- JAZWINSKI, A.H. *Stochastic process and filtering theory*. New York, NY. Academic, 1970.
- JOOS, D.K. Comparison of typical gyro errors for strapdown applications. In: SYMPOSIUM ON GYROSCOPE TECHNOLOGY, Stuttgart, West Germany, 1977. *Proceedings*. Dusseldorf, Deutsche Gessellschaft fur Ortung und Navigation, 1978, p.2.1-2.3.
- JUDE, R.J. System study of an inertial attitude measurement system for Earthpointing satellites. In: EUROPEAN SPACE AGENCY (ESA). *Attitude and Orbit Control Systems*, Proceedings of a Conference held in Noordwyk, 1977. Paris, 1977, p.131-144 (ESA SP-128).
- LEFFERTS, E.J.; MARKLEY, F.F.; SHUSTER, M.D. *Kalman filtering for spacecraft attitude estimation*. *AIAA Journal of Guidance and Control*, 5(5):417-429, Sept./Oct. 1982.

- LIEBELT, P.B. *An introduction to optimal estimation*. Menlo Park, CA, Addison-Wesley, 1967.
- LOPES, R.V.F. *Determinação de atitude de satélites artificiais através de estimadores de estado*. Dissertação de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1982 (INPE-2608-TDL/105).
- MAYBECK, P.S. *Stochastic models estimation and control*. New York, NY Academic, 1979.
- MORO, J. *Modelagem, análise e síntese preliminar de um sistema de controle de atitude ativo em três eixos para satélites artificiais*. Tese de Doutorado em Engenharia. São Paulo, USP, 1983.
- . *Simulação do movimento e de observações de atitude para satélites artificiais terrestres*. São José dos Campos, INPE, fev. 1983. (INPE-2649-RPI/076).
- ORLANDO, V. *Técnicas estocásticas aplicadas à suavização, tratamento de tendências e compressão de dados de rastreamento ou telemetria de satélites artificiais*. Tese de Doutorado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, 1978. (INPE-2909-TDL/148).
- RIOS NETO, A.; KUGA, H.K. *Estimação adaptativa do ruído no estado para estimadores sequenciais*. São José dos Campos, INPE, abr. 1982. (INPE-2385-RPI/069).
- RIOS NETO, A.; LOPES, R.V.F.; NEGREIROS DE PAIVA, R. *Estimação adaptativa de atitude de satélites artificiais via filtro de Kalman com compensação do modelo dinâmico*. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 4., Campinas, 1982. *Anais*. Campinas, Sociedade Brasileira de Automática, 1982, p.164-168.
- SHUSTER, M.D.; OH, S.D. *Three-axis attitude determination from vector observations*. *AIAA Journal of Guidance and Control*, 4(1):70-77, Jan./Fev. 1981.

SORENSEN, H.W. Kalman filtering techniques In: *Advances in Control Systems; Theory and Applications*. New York, NY. Academic, 1966, v.3, p.219-292.

TODMAN, D.; HUTECHESON, J.; EARDLEY, D.; CALLARD, L. *Study of strapdown inertial optical attitude measurement system; final report*. Filton, Bristol, British Aircraft Corporation, 1977. v.1 (Document Reference, n^o ESS/SS 738).

WERTZ, J.R. *Spacecraft attitude determination and control*. London, D. Reidel, 1978.

APÊNDICE A

A.1. DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO DE ESTADO

A matriz de transição de estado $\bar{\phi}$ é solução da equação:

$$\dot{\bar{\phi}}(t, t_0) = F(t) \bar{\phi}(t, t_0), \quad (A.1)$$

ou:

$$\left[\begin{array}{c|c} \dot{\phi}_{11}(t, t_0) & \dot{\phi}_{12}(t, t_0) \\ \hline \dot{\phi}_{21}(t, t_0) & \dot{\phi}_{22}(t, t_0) \end{array} \right]_{7 \times 7} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} \Omega(\hat{\omega}(t)) & -\frac{1}{2} Z(\hat{q}(t)) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 4} & \bar{0}_{3 \times 3} \end{array} \right]_{7 \times 7}.$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \phi_{11}(t, t_0) & \phi_{12}(t, t_0) \\ \hline \phi_{21}(t, t_0) & \phi_{22}(t, t_0) \end{array} \right]_{7 \times 7}, \quad (A.2)$$

sendo $\bar{\phi}(t, t_0) = I$, onde I é a matriz identidade e $\bar{0}$ a matriz nula, logo:

$$\dot{\phi}_{11}(t, t_0) = \frac{1}{2} \Omega(\hat{\omega}(t)) \phi_{11}(t, t_0) - \frac{1}{2} Z(\hat{q}(t)) \phi_{21}(t, t_0), \quad (A.3)$$

$$\dot{\phi}_{12}(t, t_0) = \frac{1}{2} \Omega(\hat{\omega}(t)) \phi_{12}(t, t_0) - \frac{1}{2} Z(\hat{q}(t)) \phi_{22}(t, t_0) \quad (A.4)$$

$$\dot{\phi}_{21}(t, t_0) = \bar{0}_{3 \times 4}, \quad (A.5)$$

$$\dot{\phi}_{22}(t, t_0) = \bar{0}_{3 \times 3}, \quad (A.6)$$

sendo $\phi_{11}(t_0, t_0) = \phi_{22}(t_0, t_0) = I$; $\phi_{12}(t_0, t_0) = \bar{0}_{4 \times 3}$ e $\phi_{21}(t_0, t_0) = \bar{0}_{3 \times 4}$ logo:

$$\dot{\phi}_{21}(t, t_0) = \bar{0}_{3 \times 4}, \quad (A.7)$$

$$\dot{\phi}_{22}(t, t_0) = I_{3 \times 3}. \quad (A.8)$$

A Equação A.3 fica:

$$\dot{\phi}_{11}(t, t_0) = \frac{1}{2} \Omega(\underline{\hat{\omega}}(t)) \phi_{11}(t, t_0), \quad (A.9)$$

cuja solução aproximada é (Wertz, 1978):

$$\begin{aligned} \phi_{11}(t, t_0) = I_{4 \times 4} \cdot \cos \left[\frac{|\underline{\hat{\omega}}(t)| \cdot \Delta t}{2} \right] + \left[\frac{\Omega(\underline{\hat{\omega}}(t))}{|\underline{\hat{\omega}}(t)|} \right] \\ \cdot \text{sen} \left[\frac{|\underline{\hat{\omega}}(t)| \cdot \Delta t}{2} \right], \end{aligned} \quad (A.10)$$

onde $\Delta t = t - t_0$ e $|\underline{\hat{\omega}}(t)| = (\hat{\omega}_x^2 + \hat{\omega}_y^2 + \hat{\omega}_z^2)^{1/2}$.

Portanto $\phi_{11}(t, t_0) = \theta(t, t_0)$, estando $\theta(t, t_0)$ definida na Equação 3.46. Da Equação A.4, tem-se:

$$\dot{\phi}_{12}(t, t_0) = \frac{1}{2} \Omega(\underline{\hat{\omega}}(t)) \phi_{12}(t, t_0) - \frac{1}{2} Z(\underline{\hat{q}}(t)) \phi_{22}(t, t_0),$$

com a condição inicial $\Phi_{12}(t_0, t_0) = \bar{0}_{4 \times 3}$ a solução fica:

$$\Phi_{12}(t, t_0) = - \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^t \theta(t, t') Z(\underline{q}(t')) dt'. \quad (\text{A.11})$$

Portanto $\Phi_{12}(t, t_0) = \psi(t, t_0)$, estando $\psi(t, t_0)$ definida pela Equação 3.53.

Resolvendo de forma aproximada a integração da Equação A.11 pela regra do trapézio, para vários pontos de integração, e aplicando a propriedade da matriz de transição dos quatêrnions dado pela Equação 3.47, tem-se:

$$\psi(t_n, t_0) = - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_n} \theta(t_n, t_0) \theta(t_0, t') Z(\underline{q}(t')) dt', \quad (\text{A.12})$$

$$\psi(t_n, t_0) = - \frac{1}{2} \theta(t_n, t_0) \int_{t_0}^{t_n} \theta(t_0, t') Z(\underline{q}(t')) dt'. \quad (\text{A.13})$$

Aplicando a regra do trapézio, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t_n, t_0) = & - \frac{\Delta t}{4} \theta(t_n, t_0) \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\theta(t_0, t_{i-1}) Z(\underline{q}(t_{i-1})) \right. \right. \\ & \left. \left. + \theta(t_0, t_i) Z(\underline{q}(t_i)) \right] \right\}. \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

Dessa forma a matriz de transição de estado fica:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \theta(t, t_0) & | & \psi(t, t_0) \\ \hline & & \\ & \bar{0}_{3 \times 4} & | & I_{3 \times 3} \\ & & & & \end{bmatrix}_{7 \times 7}. \quad (\text{A.15})$$

A.2. DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO DO RUÍDO

A matriz de transição do ruído é dada por:

$$r(t_n, t_0) = \int_{t_0}^{t_n} \Phi(t_n, t') G(t') dt'. \quad (\text{A.16})$$

A integração é feita aplicando as propriedades da matriz de transição de estado, obtendo-se:

$$\begin{aligned} r(t_n, t_0) &= \int_{t_n}^{t_0} \Phi(t_n, t_0) \Phi(t_0, t') G(t') dt' \\ &= \Phi(t_n, t_0) \int_{t_0}^{t_n} \Phi(t_0, t') G(t') dt' \\ &= \Phi(t_n, t_0) r'(t_0, t_n). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Substituindo as Equações A.15 e 3.40 em A.17 e reorganizando de forma a obter:

$$\Gamma'(t_0, t_n) = \int_{t_0}^{t_n} \left[\begin{array}{c|c} \theta(t_0, t') & \psi(t_0, t') \\ \hline \bar{0}_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} \end{array} \right]_{7 \times 7} \cdot \left[\begin{array}{c|c} -\frac{1}{2} Z(\underline{\hat{q}}(t')) & \bar{0}_{4 \times 3} \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{array} \right]_{7 \times 6} dt' \quad (A.18)$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \int_{t_0}^{t_n} -\frac{1}{2} \theta(t_0, t') Z(\underline{\hat{q}}(t')) dt' & \int_{t_0}^{t_n} \psi(t_0, t') dt' \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & \int_{t_0}^{t_n} I dt' \end{array} \right]_{7 \times 6}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \psi(t_0, t_n) & \Sigma(t_0, t_n) \\ \hline \bar{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} N \Delta t \end{array} \right]_{7 \times 6}, \quad (A.19)$$

onde N é o número de intervalos de integração considerado e:

$$\psi(t_0, t_n) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_n} \theta(t_0, t') Z(\underline{\hat{q}}(t')) dt', \quad (A.20)$$

$$\Sigma(t_0, t_n) = \int_{t_0}^{t_n} \psi(t_0, t') dt'. \quad (A.21)$$

Resolvendo as Equações A.20 e A.21 pela regra do trapézio, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(t_0, t_n) = & - \frac{\Delta t}{4} \cdot \sum_{i=1}^n \left[\theta(t_0, t_{i-1}) Z(\hat{q}(t_{i-1})) + \right. \\ & \left. + \theta(t_0, t_i) Z(\hat{q}(t_i)) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\Sigma(t_0, t_n) = \frac{\Delta t}{4} \cdot \sum_{i=1}^n \left[\psi(t_0, t_{i-1}) + \psi(t_0, t_i) \right]. \quad (\text{A.23})$$

APÊNDICE B

A MATRIZ $Z(\underline{q}(t))$

A matriz $Z(\underline{q}(t))$ definida pela Equação 3.32, apresenta algumas propriedades que simplificam a computação da matriz de transição de estado e a respectiva matriz de covariâncias dos erros:

$$\frac{d}{dt}(Z(\underline{q}(t))) = \frac{1}{2} \cdot \Omega(\underline{\omega}(t))Z(\underline{q}(t)) - Z(\underline{q}(t)) [\underline{\omega}], \quad (\text{B.1})$$

$$\theta(t, t_0)Z(\underline{q}(t_0)) = Z(\underline{q}(t)) \Lambda(t, t_0), \quad (\text{B.2})$$

$$\Lambda(t, t_0) = Z^T(\underline{q}(t))\theta(t, t_0) Z(\underline{q}(t_0)), \quad (\text{B.3})$$

$$\theta(t, t_0) = Z(\underline{q}(t))\Lambda(t, t_0)Z^T(\underline{q}(t_0)) + \underline{q}(t)q^T(t_0), \quad (\text{B.4})$$

onde:

$$[\underline{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\Lambda(t, t_0)$ é a matriz de rotação de dimensão 3x3, a qual transforma a matriz de atitude estimada do instante t' para o instante t e $\underline{\omega}(t) = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$.

Para provar a Equação B.1, tem-se que:

$$Z(\underline{q}(t))\underline{C}(t) = \Omega(\underline{C}(t))\underline{q}(t), \quad (B.5)$$

onde $\underline{C}(t) = [C_1, C_2, C_3]^T$, e

$$\Omega(\underline{C}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & C_3 & -C_2 & C_1 \\ -C_3 & 0 & C_1 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 & C_3 \\ -C_1 & -C_2 & -C_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Derivando a Equação B.5, chega-se a:

$$Z(\underline{q}(t)) \cdot \underline{C}(t) + Z(\underline{q}(t))\dot{\underline{C}}(t) = \Omega(\underline{C}(t))\underline{q}(t) + \Omega(\underline{C}(t))\dot{\underline{q}}(t). \quad (B.6)$$

O valor de $\underline{C}(t)$ no tempo t pode ser arbitrário e sua evolução do tempo $\underline{C}(t)$ é dado por:

$$\dot{\underline{C}}(t) = [\underline{\omega}] \underline{C}(t) = -\underline{\omega}(t) \times \underline{C}(t). \quad (B.7)$$

Para os quatérnions, tem-se:

$$\dot{\underline{q}}(t) = \frac{1}{2} \Omega(\underline{\omega}(t))\underline{q}(t), \quad (B.8)$$

$$\underline{q}(t) = \theta(t, t_0)\underline{q}(t_0). \quad (B.9)$$

Substituindo as Equações B.7 e B.8 em B.6, obtêm-se:

$$\dot{Z}(\underline{q}(t))\underline{C}(t) + Z(\underline{q}(t))[\underline{\omega}] \underline{C}(t) = -\Omega(\underline{\omega}(t) \times \underline{C}(t)) + \Omega(\underline{C}(t))\Omega(\underline{\omega}(t))\underline{q}(t). \quad (B.10)$$

Desenvolvendo $\Omega(\underline{\omega}(t) \times \underline{C}(t))$, resulta:

$$\underline{\omega}(t) \times \underline{C}(t) = \begin{bmatrix} \omega_2 C_3 - \omega_3 C_2 \\ \omega_1 C_3 - C_1 \omega_1 \\ \omega_1 C_2 - \omega_2 C_1 \end{bmatrix}, \quad (B.11)$$

$$\Omega(\underline{\omega}(t) \times \underline{C}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & (\omega_1 C_2 - \omega_2 C_1) & -(\omega_1 C_3 - C_1 \omega_3) & (\omega_2 C_3 - \omega_3 C_2) \\ -(\omega_1 C_2 - \omega_2 C_1) & 0 & (\omega_2 C_3 - \omega_3 C_2) & (\omega_1 C_3 - C_1 \omega_3) \\ (\omega_1 C_3 - C_1 \omega_3) & -(\omega_2 C_3 - \omega_3 C_2) & 0 & (\omega_1 C_2 - \omega_2 C_1) \\ -(\omega_2 C_3 - \omega_3 C_2) & -(\omega_1 C_3 - C_1 \omega_3) & -(\omega_1 C_2 - \omega_2 C_1) & 0 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\Omega(\underline{\omega}(t) \times \underline{C}(t)) = -\frac{1}{2} \cdot \left[\Omega(\underline{\omega}(t))\Omega(\underline{C}(t)) - \Omega(\underline{C}(t))\Omega(\underline{\omega}(t)) \right]. \quad (B.11)$$

Substituindo a Equação B.11 em B.10, obtêm-se:

$$\dot{Z}(\underline{q}(t))\underline{C}(t) + Z(\underline{q}(t))[\underline{\omega}] \underline{C}(t) = \frac{1}{2} \left[\Omega(\underline{\omega}(t))\Omega(\underline{C}(t)) \right].$$

$$\begin{aligned} & \underline{q}(t) - \frac{1}{2} \Omega(\underline{C}(t))\Omega(\underline{\omega}(t))\underline{q}(t) + \\ & + \frac{1}{2} \Omega(\underline{C}(t))\Omega(\underline{\omega}(t))\underline{q}(t). \end{aligned} \quad (B.12)$$

Sabendo-se que $Z(\underline{q}(t))\underline{C}(t) = \Omega(\underline{C}(t))\underline{q}(t)$, fica provado que:

$$\frac{d}{dt} Z(\underline{q}(t)) = \frac{1}{2} \Omega(\underline{\omega}(t))Z(\underline{q}(t)) - Z(\underline{q}(t))[\underline{\omega}]. \quad (B.13)$$

Para provar a Equação B.2, tem-se:

$$\underline{C}(t, t_0) \stackrel{\Delta}{=} \theta(t, t_0)Z(\underline{q}(t_0)) - Z(\underline{q}(t))\Lambda(t, t_0). \quad (B.14)$$

Derivando-se esta equação obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{C}}(t, t_0) &= \dot{\theta}(t, t_0)Z(\underline{q}(t_0)) - \dot{Z}(\underline{q}(t))\Lambda(t, t_0) - Z(\underline{q}(t)) \cdot \\ & \cdot \Lambda(\dot{t}, t_0) \end{aligned} \quad (B.15)$$

Sendo $\theta(t, t_0)$ e $\Lambda(t, t_0)$ matrizes de transição, as diferenciações dessas matrizes são dadas por:

$$\dot{\theta}(t, t_0) = \frac{1}{2} \Omega(\underline{\omega}(t))\theta(t, t_0), \quad (B.16)$$

$$\dot{\Lambda}(t, t_0) = [\underline{\omega}] \Lambda(t, t_0). \quad (B.17)$$

Substituindo as Equações B.1, B.16, B.17 em B.15, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{C}(t, t_0) &= \frac{1}{2} \Omega(\underline{\omega}(t)) \theta(t, t_0) Z(\underline{q}(t_0)) - \frac{1}{2} \Omega(\underline{\omega}(t)) \cdot \\ &\cdot Z(\underline{q}(t)) \Lambda(t, t_0) + Z(\underline{q}(t)) [\underline{\omega}] \Lambda(t, t_0) - Z(\underline{q}(t)) [\underline{\omega}] \Lambda(t, t_0), \end{aligned} \quad (B.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}(t, t_0) &= \frac{1}{2} \Omega(\underline{\omega}(t)) \left[\theta(t, t_0) Z(\underline{q}(t_0)) - \right. \\ &\left. - Z(\underline{q}(t)) \Lambda(t, t_0) \right] = \frac{1}{2} \Omega(\underline{\omega}(t)) C(t, t_0). \end{aligned} \quad (B.19)$$

Integrando a Equação B.19, tem-se:

$$C(t, t_0) = \theta(t, t_0) C(t_0, t_0), \quad (B.20)$$

mas da Equação B.14 $C(t_0, t_0) = \bar{0}$, logo fica provado a validade da Equação B.2.

A prova da Equação B.3, segue provando diretamente a relação:

$$Z^T(\underline{q}(t)) Z(\underline{q}(t)) = I_{3 \times 3}, \quad (B.21)$$

aplicando-se esta relação na Equação B.2.

Para obter a Equação B.4, note-se que a relação se inverte, ou seja:

$$Z(\underline{q}(t))Z^T(\underline{q}(t)) = I_{4 \times 4} - \underline{q}(t)\underline{q}^T(t). \quad (B.22)$$

Aplicando a Equação B.22 em B.2, obtêm-se:

$$\theta(t, t_0)(I_{4 \times 4} - \underline{q}(t_0)\underline{q}^T(t_0)) = Z(\underline{q}(t))\Lambda(t, t_0)Z^T(\underline{q}(t_0)), \quad (B.23)$$

$$\theta(t, t_0) = Z(\underline{q}(t))\Lambda(t, t_0)Z^T(\underline{q}(t_0)) - \theta(t, t_0)\underline{q}(t_0)\underline{q}^T(t_0), \quad (B.24)$$

note-se que:

$$\theta(t, t_0)\underline{q}(t_0)\underline{q}^T(t_0) = \underline{q}(t)\underline{q}^T(t). \quad (B.25)$$

Portanto prova-se assim a Equação B.4, dada por:

$$\theta(t, t_0) = Z(\underline{q}(t))\Lambda(t, t_0)Z^T(\underline{q}(t_0)) + \underline{q}(t)\underline{q}^T(t). \quad (B.26)$$

APÊNDICE C

C.1. MODELO DE AVALIAÇÃO DO GIRÔMETRO INTEGRADOR

O modelo de avaliação do girômetro desenvolvido por Joos (1977) é bastante realístico para este tipo de girômetro. O modelo proposto não leva em conta considerações a influência da temperatura, pois seu efeito sobre a deriva é de longo período face a taxa de atualização. Assim, os erros considerados são relativos à deriva dinâmica, isto devido a grande influência dos erros de montagem e da eletrônica associada, predominante na realização de um bloco girométrico.

A equação do torque será obtida em relação ao eixo de saída Q , uma vez que as medidas dos girômetros são tomadas neste eixo

O rotor gira acionado por um motor em torno do eixo de rotação S e é suspenso em um anel que gira em torno do eixo da saída Q ; i é o eixo de entrada do girômetro. Os símbolos "Ssym" e "Tsym" são respectivamente "syncros", sensor de deslocamento angular e motor de torque, onde "Ssym" mede o ângulo α_0 e "Tsym" mantém α_0 próximo do nulo a fim de minimizar a influência de erros por acoplamentos de eixos. Uma entrada de velocidade angular no eixo i , produz um torque no eixo Q , que por sua vez, desloca o anel com o ângulo α_0 ("pickoff"). Considerando que a montagem não é perfeita existem vários efeitos que geram torque no eixo de saída, tais como:

- aceleração angular
- dinâmica angular
- anisoinércia
- produto de inércia dos "gimbal"
- desalinhamento "case-gimbal"
- desalinhamento "gimbal" - rotor.
- desalinhamento do rotor
- anisoeelasticidade.

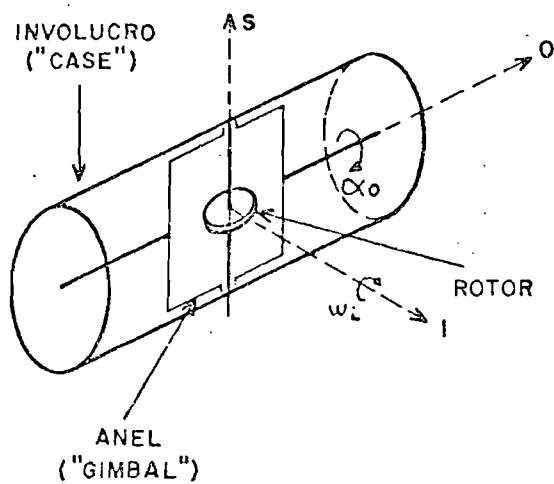


Fig. C.1 - Esquema b̄sico do giro integrador.

LEGENDA: \underline{i} - eixo de entrada nas coordenadas do inv̄olucro ("case").
 $\underline{0}$ - eixo de sāida nas coordenadas do inv̄olucro
 \underline{s} - Eixo de rotaç̄o do rotor ("spin") nas coorde_nadas do inv̄olucro.

Todos os efeitos citados acima estão detalhados no trabalho do Joos (1977) e Cardenuto (1984). A dinâmica sem torqueamento (malha aberta) é dada por:

$$I_{\infty} \ddot{\alpha}_0 + B \dot{\alpha}_0 + K(\underline{\omega}) \alpha_0 = H_r W_x - F(\underline{\omega}, \underline{A}), \quad (C.1)$$

onde:

- $I_{\infty} \ddot{\alpha}_0$ - representa a dinâmica angular
- I_{∞} - momento de inércia do giro
- B - viscosidade do fluido que engloba o rotor
- $K(\underline{\omega})$ - representa a elasticidade do giro
- α_0 - ângulo de "pickoff"
- H_r - momento angular do rotor
- $H_r W_x$ - representa o torque fundamental do giro
- $F(\underline{\omega}, \underline{A})$ - representa os termos restantes do torque
- $\underline{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ - velocidade angular
- $\underline{A} = (A_x, A_y, A_z)^T$ - aceleração linear.

Dependendo das características desejadas, tais como: precisão, constante de tempo, linearidade, e outros requisitos inerentes a um servoposicionador, vários esquemas de torqueamento podem ser implementados tais como os digitais (binário, ternário e modulado) e o analógico, sendo este último de implementação mais simples.

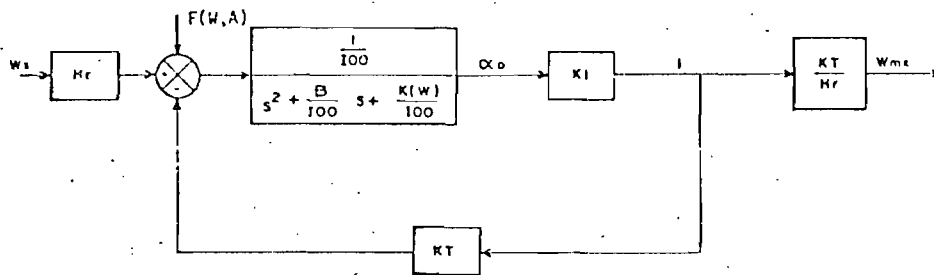


Fig. C.2 - Malha de torqueamento analógico.

Conforme a Figura C.2, k_1 é o ganho do sensor "Ssym" e K_T é o ganho do gerador de torque "Tsym"; I é a corrente proporcional ao "pickoff"; ω_m é a velocidade angular medida pelo girômetro, e os dados restantes estão relacionados com a Equação C.1.

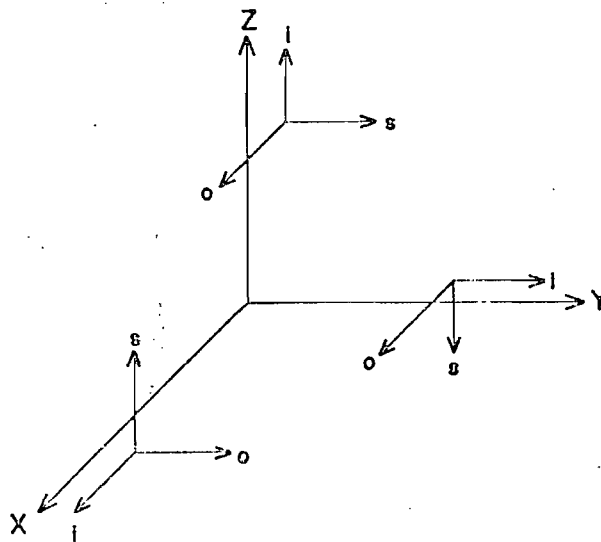


Fig. C.3 - Disposição dos eixos dos girômetros em relação aos eixos de veículos.

A Figura C.3 mostra a disposição dos girômetros em relação aos eixos do veículo para que possa ser medida a velocidade angular do satélite nos 3 eixos.

C.2. EQUAÇÃO DAS OBSERVAÇÕES

Existe a necessidade de sensores de atitude não-inerciais para obtenção de medidas externas (observações) necessárias ao Sistema de Navegação Inercial Auxiliado tornando possível a recalibração periódica dos sensores inerciais. Estas medidas são geralmente obtidas através dos sensores solares e sensores de horizonte, que após um pré-processamento fornecem as direções do Sol e do centro da Terra, nos eixos de referência do satélite.

Existem várias fontes de erros que influem na qualidade das medidas, sendo a maioria delas diretamente relacionadas ao equipamento utilizado. Assim, a cada sensor e a cada medida realizada está associada um erro devido ao equipamento. Admitindo que os erros tendenciosos tenham sido eliminado por calibração do equipamento, uma maneira simples de simular as medidas dos sensores (observações) é através da simulação das direções satélite-Sol e satélite-Terra corrompidas após com ruídos gaussianos de média nula e covariâncias unitária multiplicadas pelo desvio padrão correspondente à incerteza da observação relativa ao sensor que faria a medida (solar e de horizonte respectivamente). Com isto as observações simuladas para os sensores não-inerciais corresponderiam as observações após o processamento, prontas para alimentar procedimentos de estimação de estado cujas análises são o objetivo deste trabalho.

As observações constituir-se-ão, pois, de medidas de ângulos formados entre os eixos do referencial do satélite (x,y,z) e o versor relativo à direção satélite-Terra $(T_x, T_y, T_z)^T$ e analogamente para o versor da direção satélite-sol $(S_x, S_y, S_z)^T$ (Moro, 1983), como visto na Figura C.4.

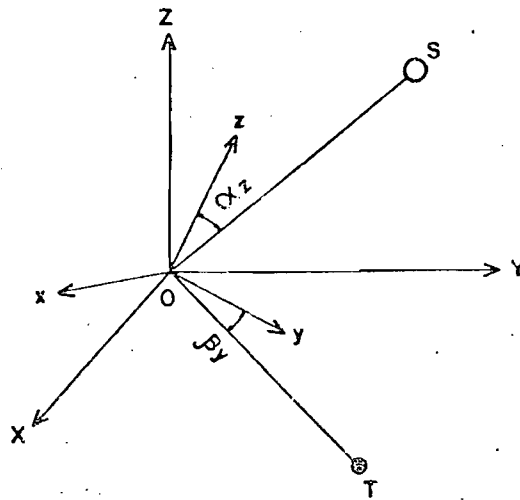


Fig. C.4 - Ângulos entre os versores de (x,y,z) com as direções OS e OT.

Os ângulos que definem a direção OT e OS são dados por:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_x \\ \cos\alpha_y \\ \cos\alpha_z \end{bmatrix} = \bar{B} \cdot \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}, \quad (C.2)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\beta_x \\ \cos\beta_y \\ \cos\beta_z \end{bmatrix} = \bar{B} \cdot \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix}, \quad (C.3)$$

onde \bar{B} é a matriz de rotação do referencial inercial para o referencial do satélite.

Observe-se a partir das Equações C.2 e C.3 que a equação das observações pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underline{Y}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t), t) + \underline{v}(t), \quad (C.4)$$

onde $\underline{x}(t)$ é o vetor de estado, $\underline{Y}(t)$ é o vetor de observações simulado, $\underline{h}(\underline{x}(t), t)$ é o vetor de observações determinístico obtido através do estado simulado a partir do modelo matemático das observações $\underline{v}(t)$ é um ruído branco gaussiano com média nula e covariâncias dada por:

$$E[\underline{v}(t)\underline{v}^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau). \quad (C.5)$$

Considerando a Equação C.4 verifica-se que:

$$\underline{Y}(t) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_x \\ \cos\alpha_y \\ \cos\alpha_z \\ \cos\beta_x \\ \cos\beta_y \\ \cos\beta_z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{h}(\underline{x}(t), t) = \begin{bmatrix} \underline{h}_i(\underline{x}(t), t) \\ \underline{h}_j(\underline{x}(t), t) \end{bmatrix},$$

onde:

$$\underline{h}_j(\underline{x}(t), t) = \bar{B} \cdot [T_x, T_y, T_z]^T, \quad (C.6)$$

$$\underline{h}_j(\underline{x}(t), t) = \bar{B} \left[S_x, S_y, S_z \right]^T \quad (C.7)$$

Como as observações são relacionadas de forma não-linear com o estado, a linearização torna-se necessária. É considerada uma aproximação de primeira ordem da forma:

$$\delta \underline{Y}(t) = H(\underline{x}(t), t) \delta \underline{x}(t) + \underline{v}(t), \quad (C.8)$$

onde a matriz $H(\underline{x}(t), t)$ é a matriz de derivadas parciais das observações em relação ao estado, ou seja:

$$H(\underline{x}(t), t) \triangleq \left[\frac{\partial \underline{h}(\underline{x}(t), t)}{\partial \underline{x}(t)} \right] \quad (C.9)$$

Como $\underline{h}(\underline{x}(t), t)$ é somente função dos quatérnions, tem-se $\partial \underline{h}_j(\underline{x}(t), t) / \partial x_j = 0$, para $j = 5, 6, 7$; portanto:

$$H(\underline{x}(t), t) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{h}(\underline{q}(t), t)}{\partial \underline{q}(t)} \\ \hline \bar{0}_{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad (C.10)$$

Resolvendo-se a Equação C.9, tem-se:

$$(F_1, F_2, F_3, F_4)^T \triangleq C(T_c, T_y, T_z)^T, \quad (C.11)$$

$$(F_5, F_6, F_7, F_8)^T \triangleq C(S_x, S_y, S_z)^T, \quad (C.12)$$

onde:

$$C = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_2 & q_1 & -q_4 \\ -q_3 & q_4 & q_1 \\ q_4 & q_3 & -q_2 \end{bmatrix} \quad (C.13)$$

Definindo-se as matrizes:

$$H_{11}(\underline{x}(t), t) = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ -F_2 & F_1 & -F_4 & F_3 \\ -F_3 & F_4 & F_1 & -F_2 \end{bmatrix}, \quad (C.14)$$

$$H_{21}(\underline{x}(t), t) = \begin{bmatrix} F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \\ -F_6 & F_5 & -F_8 & F_7 \\ -F_7 & F_8 & F_5 & -F_6 \end{bmatrix}, \quad (C.15)$$

tem-se a matriz de derivadas parciais das observações $H(\underline{x}(t), t)$ dada por:

$$H(\underline{x}(t), t) = \left[\begin{array}{c|c} H_{11}(\underline{x}(t), t) & \bar{0} \\ \hline H_{21}(\underline{x}(t), t) & \bar{0} \end{array} \right] \quad (C.16)$$

Sendo que a matriz de derivados parciais das observações é função somente dos quatérnions, pode-se reescrever a Equação C.8 na forma:

$$\delta \underline{Y}(t) = H(\underline{q}(t), t) \delta \underline{x}(t) + \underline{v}(t), \quad (C.17)$$

onde $\underline{q}(t)$ representa os quatérnions no instante t . A equação acima é a equação de observações a ser utilizada no filtro de Kalman.