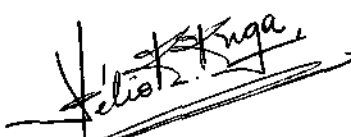

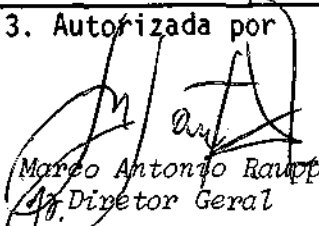


1. Publicação nº <i>INPE-4405-RPE/556</i>	2. Versão	3. Data <i>Out. 1987</i>	5. Distribuição <input type="checkbox"/> Interna <input checked="" type="checkbox"/> Externa <input type="checkbox"/> Restrita
4. Origem <i>DMC-6300</i>	Programa <i>A7651-510912</i>		
6. Palavras chaves - selecionadas pelo(s) autor(es) <i>PROPAGAÇÃO DE ÓRBITA TRANSFORMAÇÕES DE TEMPO</i>			
7. C.D.U.: <i>629.783</i>			
8. Título <i>INPE-4405-RPE/556 MÉTODOS NUMÉRICOS EM PROPAGAÇÃO DE ÓRBITA DE SATÉLITES ARTIFICIAIS TERRESTRES</i>			10. Páginas: <i>62</i>
9. Autoria <i>Hélio Koiti Kuga</i>			11. Última página: <i>53</i>
 Assinatura responsável			12. Revisada por  <i>Atair Rios Neto</i>
			13. Autorizada por  <i>Marco Antonio Raucci</i> <i>Dir. Diretor Geral</i>
14. Resumo/Notas  <i>O presente trabalho trata dos métodos numéricos para propagação de órbita de satélites artificiais terrestres. Resumem-se os principais tipos de perturbações orbitais. Abordam-se várias formulações das Equações Diferenciais do movimento, bem como os aspectos essenciais dos algoritmos de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias. Aspectos qualitativos dos métodos usuais de propagação de órbita também são revistos. Por fim incluem-se análises sobre a tendência das pesquisas segundo a literatura corrente.</i>			
15. Observações <i>Esta pesquisa está sendo publicada como resultado do exame integrado de doutorado em Ciência Espacial/Mecânica Orbital, realizado em 27 de Maio de 1986 pelo autor/candidato.</i>			

#### AGRADECIMENTOS

Aos professores Atair Rios Neto, José Antônio Menezes Felipe de Souza, Luis Danilo Damasceno Ferreira e Wilson Custódio Canesin da Silva, do curso de Ciência Espacial/Mecânica Orbital, pelas sugestões e discussões antes e durante a apresentação do trabalho, e após, no processo de revisão do trabalho.

•  
•

#### ABSTRACT

*This work describes the numerical orbit propagation methods for earth artificial satellites. The main orbital perturbations are summarized. Several formulations of the Differential Equations (DEs) of the motion as well as essential aspects of the Ordinary Differential Equations resolution algorithms are considered. Qualitative aspects of the usual orbit propagation methods are also reviewed. Finally an analysis of research tendencies as per the current literature is included.*



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE TABELAS .....	<i>vi</i>
<u>CAPÍTULO 1</u> .....	1
<u>CAPÍTULO 2</u> .....	3
2.1 - Atração gravitacional terrestre .....	5
2.2 - Arrasto atmosférico .....	7
2.3 - Pressão de radiação .....	8
2.4 - Atração gravitacional lunissolar .....	9
2.5 - Marés devidas à lua e ao sol .....	10
2.6 - Empuxos perturbadores .....	11
<u>CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS</u> .....	13
3.1 - Equações básicas .....	13
3.2 - Transformações de tempo .....	13
3.3 - Estabilização .....	17
3.4 - Regularização .....	18
3.5 - Formulação por elementos .....	20
3.5.1 - Elementos de tempo .....	21
3.5.2 - Elementos regulares .....	23
3.5.3 - Elementos regulares uniformes .....	23
3.5.4 - Elementos canônicos .....	24
3.6 - Comentários .....	24
<u>CAPÍTULO 4 - REVISÃO DOS MÉTODOS DE PROPAGAÇÃO DE ÓRBITA</u> .....	29
4.1 - Método Analítico .....	30
4.2 - Métodos semi-analíticos e estroboscópicos .....	31
4.3 - Método numérico .....	32
4.4 - Método de multirrevolução .....	35
<u>CAPÍTULO 5 - MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS</u> .....	37
5.1 - Métodos de Runge-Kutta .....	38

	<u>Pág.</u>
5.2 - Métodos de multipassos .....	39
5.3 - Métodos de extrapolação .....	41
<u>CAPÍTULO 6 - COMENTÁRIOS GERAIS</u> .....	45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	47

## LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 - Magnitude relativa das perturbações .....	5
3.1 - Transformações de tempo .....	14
3.2 - Comparações numéricas para as transformações de tempo .....	16
3.3 - Comparações para duas revoluções .....	19
3.4 - Compilação das formulações para os EDOS .....	26





## CAPÍTULO 1

O cálculo de trajetória de corpos sujeitos à ação de campos de força gravitacional, uma vez conhecidas a posição e a velocidade numa época de referência, é o principal objetivo dos métodos de propagação de órbita. Esta tarefa pode ser executada basicamente de duas formas: com o auxílio de teorias analíticas ou com a integração numérica das equações de movimento. Outras derivações têm surgido, as quais misturam as características de ambas para obter uma ponderação vantajosa nos requerimentos de precisão e velocidade de computação (métodos semi-analíticos).

O método analítico exige um laborioso e brilhante estudo teórico, que utiliza essencialmente transformações canônicas, aproximações, expansões em séries e integração analítica; e leva invariavelmente a resoluções por demais tediosas para ser efetuadas à mão. Suas principais qualidades são o gasto marginal de computador, propagação de órbita até a época desejada em um único passo, e a facilidade de interpretação física e visualização da tendência/evolução dos elementos orbitais.

Já o método numérico lança mão das linguagens algébricas dos computadores para efetuar uma quantidade incontável de operações aritméticas repetitivas. Sua principal característica é a de ser um método passo a passo no qual muitos valores intermediários devem ser calculados. A precisão e o tempo de processamento em computador são fortemente dependentes da formulação adotada para as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) do movimento e do método de resolução das EDOs.

Por algum tempo, dadas as EDOs do movimento orbital, o esforço maior estava direcionado para o estudo de algoritmos genéricos de resolução de EDOs (por exemplo, os Runge-Kuttas). A partir dos anos 70 começaram a se produzir análises sobre a maneira de formular as EDOs do movimento orbital de forma a melhorar o comportamento numérico. Stiefel e Scheifele (1971) afirmam: "Na era da computação automática de alta

velocidade, a quantidade de EDs não é tão importante quanto a estabilidade e o comportamento numérico do sistema diferencial em questão".

O presente trabalho enfatiza essencialmente os métodos numéricos na computação de órbitas de satélites artificiais terrestres. Tanto o aspecto de formulação quanto os algoritmos de resolução de EDOs foram pesquisados, com especial ênfase nos primeiros por serem de utilização menos difundida.

O Capítulo 2 descreve os principais tipos de perturbação agentes na órbita. O Capítulo 3 fornece os vários tipos de formulação das EDOs orbitais em conjunto com testes e conclusões obtidos na literatura. O Capítulo 4 revê os aspectos qualitativos dos vários métodos de propagação de órbita. O Capítulo 5 descreve a essência dos vários métodos de propagação de órbita. Finalmente, o Capítulo 6 comenta aspectos relevantes de caráter específico e aborda algumas pesquisas e tendências captadas nas referências correntes.

## CAPÍTULO 2

### PERTURBAÇÕES NA ÓRBITA DE SATÉLITES ARTIFICIAIS TERRESTRES

Como uma primeira aproximação, a órbita de um satélite artificial terrestre pode ser considerada kepleriana, i.e. resultante da força central devido ao problema dos dois corpos, o que em última análise significa que forças perturbadoras não agem sobre o satélite. Para muitos propósitos práticos esta aproximação é suficiente, principalmente quando dois pontos próximos da trajetória estão sendo analisados. Entretanto existem situações nas quais, ao ignorar o efeito cumulativo de perturbações sobre a órbita em longos intervalos de tempo, pode-se obter uma estimativa deteriorada da posição do satélite. Portanto, uma investigação melhor e mais precisa deve levar em consideração as perturbações que podem agir sobre a órbita do satélite, sem o que corre-se o risco de comprometer o sucesso da missão.

Para satélites terrestres, os principais efeitos perturbadores que causam desvios da órbita kepleriana são:

- atração gravitacional terrestre,
- arrasto atmosférico,
- pressão de radiação,
- atração gravitacional lunisolar,
- marés devidas à Lua e ao Sol,
- empuxos perturbadores (pequena magnitude).

A Figura 2.1, extraída de e reproduzida por Jensen et al. (1962), ilustra o efeito de várias perturbações que agem sobre um satélite de área e massa unitária. Perturbações devidos à pressão de radiação e marés não estão presentes.

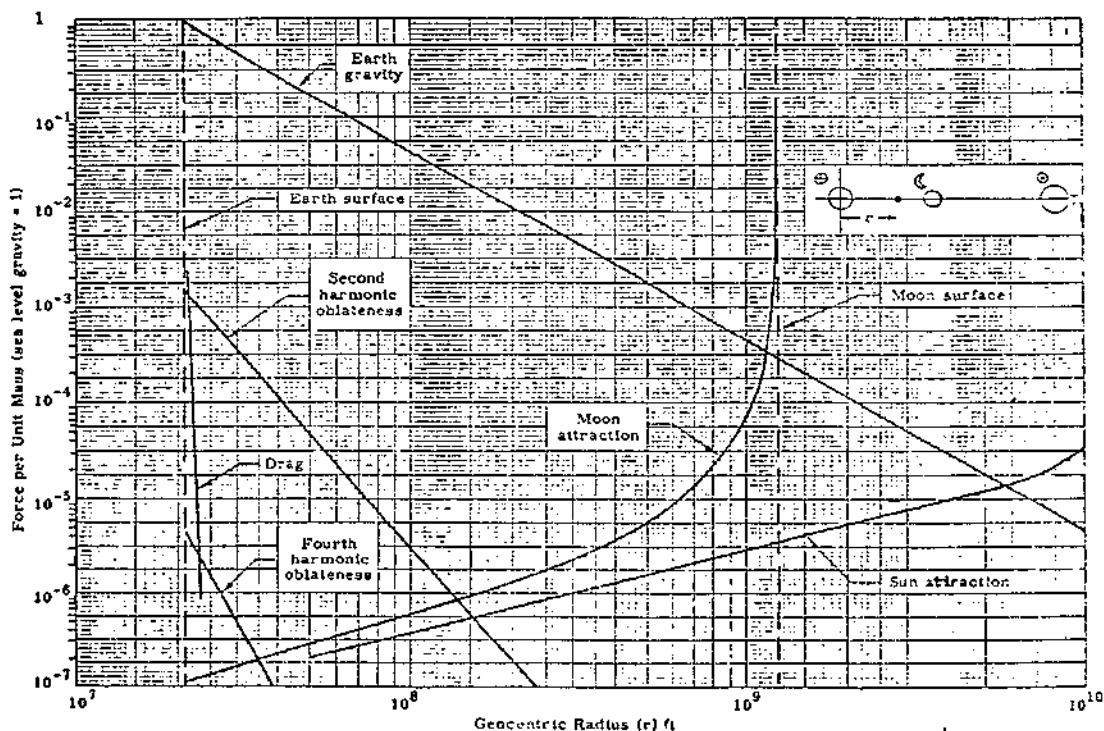


Fig. 2.1 - Magnitude das perturbações.

FONTE: Jensen et al.(1962), p. 163.

A partir desta figura foi elaborada a Tabela 2.1, que contém a magnitude dessas perturbações em relação à força de gravidade ao nível do mar, para permitir rápidas conclusões comparando os efeitos de cada uma a várias altitudes. Notar que os valores foram normalizados em relação à magnitude da força de gravidade kepleriana, tomada unitária. Na sequência cada uma das perturbações será brevemente descrita, juntamente com comentários sobre os efeitos provocados na órbita de satélites.

TABELA 2.1

MAGNITUDE RELATIVA DAS PERTURBAÇÕES

PERTURBAÇÃO	MAGNITUDE ACIMA DA SUPERFÍCIE EM KM					
	250	500	1000	5000	15000	36000
KEPLER	1	1	1	1	1	1
ACHATAMENTO	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$10^{-4}$	$0,5 \cdot 10^{-4}$
4º HARMÔNICO	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-6}$	$2,9 \cdot 10^{-6}$	$0,5 \cdot 10^{-6}$	-	-
ARRASTO ATMOSFÉRICO	$10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	-	-	-	-
SOL	-	-	-	-	$3,0 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$
LUA	$10^{-7}$	$10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$0,5 \cdot 10^{-7}$	$4,0 \cdot 10^{-6}$	$5,0 \cdot 10^{-5}$

2.1 - ATRAÇÃO GRAVITACIONAL TERRESTRE

Se a Terra fosse perfeitamente simétrica, esférica e homogênea com respeito à distribuição de massa, a única força gravitacional terrestre que age sobre satélites próximos produziria o chamado movimento kepleriano. Não obstante, os efeitos do achatamento dos pólos, ausência de simetria ao longo do equador e quaisquer outros tipos de assimetria da forma da Terra se manifestam como perturbações sobre a órbita do satélite. Portanto, para modelar o movimento gravitacional do satélite adota-se um modelo para o potencial. A distribuição irregular de massa é expressa pelos chamados coeficientes dos harmônicos esféricos, de modo que o potencial de um corpo em relação à Terra pode ser calculado de uma forma genérica por, e.g., Kaula (1966):

$$U = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \cdot P_n^m(\sin \theta), \quad (2.1)$$

onde:

- $\mu$  é a constante geogravitacional ( $3.986E + 14 \text{ m}^3/\text{s}^2$ );
- $r$  é a distância do corpo ao centro da Terra;
- $R$  é o raio equatorial da Terra (6.378,160 km);
- $\lambda$  é a longitude leste relativo à Greenwich;
- $\vartheta$  é a latitude geocêntrica;
- $P_n^m$  é o polinômio de Legendre de grau  $n$  e ordem  $m$ ; e
- $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  são os coeficientes dos harmônicos esféricos.

Os harmônicos zonais representam a simetria rotacional e correspondem a:

$$J_n \triangleq -C_{n0}, \quad m = 0. \quad (2.2)$$

O coeficiente  $J_2$  bem-conhecido é o termo de maior magnitude e representa o efeito do achatamento da Terra nos pólos sendo, não raras vezes, um termo à parte nas equações do movimento. Os harmônicos tesserais correspondem a  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  com  $m > 0$  e tentam representar outras anomalias além da simetria rotacional. Os valores dos coeficientes são obtidos experimentalmente através da redução e análise dos dados de satélites artificiais e a partir de métodos gravimétricos. Atualmente existem inúmeros conjuntos de coeficientes disponíveis na literatura que podem alcançar e até mesmo ir acima da ordem e grau 30,30 (e.g.: Lerch et al., 1979; NASA, 1977).

A avaliação do gradiente do potencial produz a aceleração gravitacional que age no satélite. Em termos de programação em computador, é conveniente a utilização de fórmulas recursivas como as utilizadas por Spier (1971) para conferir velocidade ao cálculo. Em termos de precisão, além da formulação recursiva, é conveniente a utilização de polinômios de Legendre completamente normalizados de modo a evitar o cálculo de fatoriais de alta ordem (Kuga et al., 1983).

## 2.2 - ARRASTO ATMOSFÉRICO

Em satélites próximos, a atmosfera perturba a órbita com uma força resistiva (atrito) devida ao arrasto. O meio não é um vácuo perfeito e exerce uma força oposta ao movimento, o qual tende a dissipar a energia do satélite. Porém, para altas altitudes (> 1000 km) o caminho livre médio através da atmosfera aumenta bastante; i.e., a concentração (ou, em outras palavras, a densidade) diminui e muito menos partículas colidem com o satélite, o que torna as forças resistivas quase desprezíveis (veja Tabela 2.1).

A força de arrasto atmosférico age em sentido oposto ao da velocidade relativa satélite-atmosfera e depende do quadrado dessa velocidade, da densidade da atmosfera local e da razão área/massa. A expressão da força (específica) de arrasto é:

$$\ddot{\vec{r}}_D = - \frac{1}{2} \rho C_D \frac{A}{m} V_r \vec{V}_r, \quad (2.3)$$

onde:

$\rho$  é a densidade atmosférica;

$C_D$  é o coeficiente de arrasto;

$A/m$  é a razão área de referência/massa do satélite; e

$\vec{V}_r$  é o vetor velocidade do satélite em relação à atmosfera.

As variáveis  $A$  e  $C_D$  dependem da atitude (orientação) do satélite, mas em casos de satélites com atitude controlada, elas podem ser avaliados a priori por ensaios em laboratório e modelagem através de teoria analítica sofisticada (teoria cinética dos gases; veja por exemplo, Carrara (1980, 1982)). Na maior parte das ocasiões elas são consideradas constantes para efeito de propagação de órbita. A densidade atmosférica, no entanto, é uma das variáveis mais relevantes na avaliação da Equação 2.3. Erros no modelo atmosférico podem redundar em significativo desvio na determinação e previsão da posição do satélite.



A densidade é função da altitude e temperatura exosférica que, por sua vez, depende do fluxo solar e da atividade geomagnética. Modelos sofisticados (e.g., Jacchia, 1970, 1971, 1977) para obter precisão nos cálculos, que incorporam melhorias de ordem computacional para agilizar a velocidade de processamento, estão atualmente sendo utilizados (Roberts, 1971; NASA, 1976; La Fontaine and Hughes, 1983; Kuga, 1985).

O arrasto atmosférico tende a circularizar a órbita e diminuir o semi-eixo maior da órbita. Em resumo, a órbita se torna circular enquanto perde altitude, até o satélite reentrar nas camadas inferiores da atmosfera onde, finalmente, devido à fricção com o ar mais denso, ele se queima.

### 2.3 - PRESSÃO DE RADIAÇÃO

Outra força de origem não-gravitacional que age sobre uma espaçonave é a pressão de radiação. A partir da relação de Einstein para a equivalência entre massa e energia (massa  $m$  equivalente à energia  $mc^2$ , onde  $c$  é a velocidade da luz) deduz-se que a densidade de fótons à velocidade da luz que incide numa superfície é portador de energia bem como quantidade de movimento. Quando os fótons colidem com a superfície, ocorre uma transferência de quantidade de movimento, o que produz a chamada pressão de radiação (na verdade trata-se de força mas, por tradição, conserva esta denominação). A medida da transferência de momento é expressa pelo coeficiente de refletividade da superfície, que define a porcentagem de fótons refletidos. Em última análise, conclui-se que esta perturbação depende da densidade de fótons no espaço, da refletividade da superfície e do posicionamento da superfície em relação à fonte de fótons. A equação para a perturbação devida à pressão de radiação do Sol é:

$$\ddot{\vec{r}}_{PR} = - P_r C_r \frac{A}{m} \hat{r}_s , \quad (2.4)$$

onde:

$P_r$  é a pressão de radiação sobre um quadrado unitário com superfície perfeitamente refletiva ( $4,51 \cdot 10^{-9}$  kg/ms<sup>2</sup>);

$C_r$  é o coeficiente de refletividade;

$A/m$  é a relação área/massa; e

$\hat{r}_s$  é o versor satélite-Sol.

No entanto, a radiação refletida pela Terra também exerce força sobre o satélite, que pode atingir de 20 a 40% da pressão de radiação solar. Esta radiação refletida (albedo) depende das propriedades refletoras da superfície terrestre, sendo portanto maior nos pólos e menor no Equador. Lautman (1977) modela um coeficiente de albedo  $C_a$  dependente da latitude, de forma que o albedo pode ser computado por (Kuga e Silva, 1984):

$$\ddot{\vec{r}}_a = P_r C_r \frac{A}{m} C_a \hat{r}, \quad (2.5)$$

onde  $\hat{r}$  é o versor Terra-satélite.

A pressão de radiação solar deverá ser calculada sempre que o satélite estiver na região iluminada pelo Sol. Para o cálculo do albedo as regiões são menores (Kuga e Silva, 1984). Acima de aproximadamente 1000 km, a pressão de radiação pode exercer um efeito maior sobre um dado satélite do que o arrasto atmosférico, embora esses efeitos sejam ao nível de perturbações. Tais efeitos aumentam significativamente para satélites com grande  $A/m$ , e.g., satélites do tipo balão ou com grandes painéis.

#### 2.4 - ATRAÇÃO GRAVITACIONAL LUNISSOLAR

Outra fonte de atração gravitacional pode vir de um terceiro corpo, desde que ele esteja próximo ou seja maciço o suficiente para afetar a órbita de um satélite. O Sol, porque sua massa influencia

todos os corpos celestes circundantes, e a Lua, devido à sua proximidade, são as maiores fontes de perturbação devida a um terceiro corpo. A perturbação de um terceiro corpo, no caso o Sol ou a Lua, pode ser estudada através do problema reduzido dos três corpos, onde um deles tem massa desprezível em relação aos outros dois. O potencial perturbador assim deduzido (Kovalevski, 1967) é:

$$R_i = GM_i \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r_i^3} \right), \quad (2.6)$$

onde:

- G é a constante gravitacional;
- $M_i$  é a massa do corpo perturbador;
- $\vec{r}$  é o vetor distância Terra-satélite; e
- $\vec{r}_i$  é o vetor distância Terra-corpo perturbador.

A força específica sobre o satélite causada pelo potencial da Expressão 2.6 é dada pelo gradiente do  $R_i$ , ou seja:

$$\vec{r}_i = \nabla R_i = -GM_i \left[ \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} + \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right]. \quad (2.7)$$

A taxa de variação dos elementos orbitais é essencialmente proporcional ao cubo do semi-eixo maior (e.g., Estes, 1974); conseqüentemente, em muito baixas altitudes tais perturbações podem ser desprezadas, mas a partir de certas altitudes é aconselhável levá-los em conta (ver Figura 2.1 e Tabela 2.1).

## 2.5 - MARÉS DEVIDAS À LUA E AO SOL

As forças gravitacionais do Sol e da Lua atuam na matéria da Terra, resultando numa deformação do tipo protuberância de sua forma (superfície) na direção do corpo perturbador (Sol e Lua). Essa redistribuição de massa causa um potencial gravitacional adicional (diferente do potencial natural da Terra) que perturba o espaço exterior à

Terra. A força deduzida desse potencial é chamada força de maré e afeta o movimento de um corpo qualquer externo à superfície. A expressão simplificada do potencial pode ser escrita como:

$$R_i = \frac{1}{2} k_2 \frac{GM_i}{r_i^3} \frac{R^5}{r^3} (3 (\hat{r}_e \cdot \hat{r}_i)^2 - 1), \quad (2.8)$$

onde:

$\hat{r}$ ,  $\hat{r}_i$  são os versores Terra-satélite e Terra-corpo perturbador, respectivamente; e

$k_2$  é o coeficiente de proporcionalidade mais significativo.

Os  $k_n$  são coeficientes de proporcionalidade que representam a elasticidade da superfície, denominados números de Love. Na Equação 2.8 considerou-se o coeficiente mais significativo. A expressão detalhada da força específica de marés pode ser encontrada em Kuga e Silva (1984).

## 2.6 - EMPUXOS PERTURBADORES

Efeitos causados por forças de empuxo podem ser considerados como uma perturbação unicamente quando eles são muito menores que o nível da força principal (movimento kepleriano) agente no satélite. O caso comum em que o empuxo é uma perturbação é quando um dos bocais de empuxo está vazando. Do contrário, como durante fases de impulso (mudança de órbita), o empuxo é uma força de intensa magnitude e não pode ser tratado como perturbação. A modelagem deve ser específica para cada caso e uma formulação geral não existe.



## CAPÍTULO 3

### FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

#### 3.1 - EQUAÇÕES BÁSICAS

As equações básicas que descrevem o movimento de uma espaçonave sujeito ao campo gravitacional terrestre são dadas por:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{P} \quad , \quad (3.1)$$

onde:

$\vec{r}$  é o vetor posição em coordenadas cartesianas;  
 $\mu$  é a constante geogravitacional; e  
 $\vec{P}$  é o vetor que representa as perturbações orbitais.

Normalmente a Equação 3.1 é denominada formulação newtoniana das Equações Diferenciais Ordinárias - EDOs - do movimento orbital. Quando a magnitude das perturbações é suficientemente forte para mudar consideravelmente o movimento kepleriano, ou as órbitas são acentuadamente não-circulares (preponderantemente elípticas), algumas peculiaridades tais como não-regularidade, instabilidade e descontinuidades ("lack of smoothness") podem tornar as equações difíceis de lidar. Afim de contornar tais situações, algumas formulações diferentes estão sendo utilizadas as quais, de acordo com a literatura, de alguma forma melhoraram significativamente a performance da integração de órbita. Na sequência estas novas ferramentas estão brevemente sumariadas em sua essência.

#### 3.2 - TRANSFORMAÇÕES DE TEMPO

Ao usar integração numérica, a utilização de tamanho fixo de passo ao longo dos sucessivos passos de integração pode produzir menor precisão, principalmente no caso de órbitas altamente excêntricas. Uma órbita elíptica experimenta maior velocidade próxima ao perigeu e

menor velocidade próxima ao apogeu. Deste modo, conclui-se que a escolha de comprimento fixo de passo não divide a órbita em comprimentos iguais de arco quando a variável independente é o tempo físico. Uma regulamentação analítica do comprimento de passo pode ser explorada, mudando a variável independente por meio da transformação:

$$dt = g(\vec{r}) ds, \quad (3.2)$$

onde  $s$  é a nova variável independente denominada tempo fictício, que tem por objetivo distribuir os intervalos de tempo convenientemente ao longo da órbita. Uma escolha usual para a função  $g(\vec{r})$  é a chamada transformação de Sundman (Szebehely, 1967; Nacozy, 1975, 1976a, 1976b; Janin, 1979):

$$g(\vec{r}) = c r^\alpha, \quad (3.3)$$

Para  $\alpha = 0$  a transformação 3.3 resulta no tempo físico. A Tabela 3.1 fornece as transformações de tempo mais comuns (Janin, 1979).

TABELA 3.1

TRANSFORMAÇÕES DE TEMPO

$\alpha$	$c$	$s$ corresponde a:
0	1	tempo físico
1	$(a/\mu)^{1/2}$	anomalia excêntrica
3/2	$\mu^{-1/2}/\pi \int_0^\pi (1-e \cos E)^{-1/2} dE$	anomalia intermediária
2	$1/[\mu a (1-e^2)]^{1/2}$	anomalia verdadeira

FONTE: Janin (1979).

Não obstante, o problema é complicado por esta transformação porque uma equação diferencial adicional, Equação 3.2, deve ser resolvida; a Equação 3.1 deve ser mudada para levar em conta esta nova variável independente, e procedimentos especiais para cessar a integração no tempo físico desejado devem ser aplicados. Entretanto, a despeito desses complicadores, tal transformação é recomendável quando se lida com órbitas razoavelmente elípticas. Janin (1974) produziu uma bateria de testes aplicada a órbitas altamente excêntricas (0,94) e comprovou a melhor precisão, a diminuição da quantidade de passos por revolução e conclui, para estes casos, um melhor desempenho para  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = 3/2$  usando o método de integração de multipassos (Henrici, 1962). A Tabela 3.2, extraída parcialmente de Janin (1974), mostra os resultados obtidos no computador IBM 370/155, em precisão dupla, para uma órbita excêntrica não-perturbada, após 50 revoluções. A nomenclatura utilizada é a seguinte:

- RK78 - Runge-Kutta 78 com controle automático de passo (Fehlberg, 1968);
- ADAMS 8 - multipasso de 8ª ordem (Henrici, 1962);
- NEQ - número de equações diferenciais;
- NAD/REV- número de avaliações das derivadas (lado direto da Equação 3.1) por revolução;
- CPU/REV- tempo de CPU ("Central Processor Unit") por revolução, em segundos;
- $\delta$  - erro em km no final das 50 revoluções.



TABELA 3.2

COMPARAÇÕES NUMÉRICAS PARA AS TRANSFORMAÇÕES DE TEMPO

TRANSFORMAÇÃO	INTEGRADOR	NEQ	NAD/REV	CPU/REV	$\delta$ (km)
$\alpha = 0$	RK78	6	720	1,5	1.0 E+3
$\alpha = 1$	RK78	7	470	0,9	1.6 E+2
	ADAMS8	7	300	1,4	1.4 E-2
$\alpha = 3/2$	RK78	7	540	1,2	1.8 E+3
	ADAMS8	7	300	1,4	3.6
$\alpha = 2$	RK78	7	650	1,3	1.8 E+4
	ADAMS8	7	300	1,4	1.0 E+6

FONTE: Janin (1974).

Nacozy (1976a) usou um Runge-Kutta de 7ª ordem com a órbita perturbada pelo segundo harmônico zonal para várias excentricidades. Sua conclusão textual foi:

"Solution with the time transformation reduced local truncated errors by 10 to 100 times compared with the equivalent integration step without the time transformation".

Em suma, a conclusão é que a transformação de tempo, além da regulação analítica de passo, reduz o efeito do erro local de truncamento, permitindo um comprimento de passo maior no processo de integração numérica.

### 3.3 - ESTABILIZAÇÃO

Baumgarte (1972) constata que as equações clássicas de Newton para o movimento não-perturbado (movimento kepleriano) são instáveis segundo Liapunov. Uma prova informal baseia-se no fato de que para, por exemplo, uma órbita circular de referência, tomando um raio levemente diferente do raio da órbita de referência, a diferença entre os ângulos polares formados pelos dois raios ao longo do tempo não se mantém limitada e tão pequena quanto se queria. De fato, pelas leis de Kepler sobre a proporcionalidade entre períodos e áreas percorridas, uma vez que os raios orbitais são diferentes é de esperar que em algum instante os ângulos polares difiram de  $180^\circ$ , ficando diametralmente opostos. Portanto não se mantém a diferença entre ângulos tão pequena quanto a desejada e em consequência, as equações são instáveis pelo conceito de Liapunov. Porém, neste caso a energia total é uma integral do movimento devido à natureza conservativa do potencial gravitacional. Assim, imagina-se que um efeito estabilizante poderia ser adicionado se a solução fosse vinculada para permanecer sobre a superfície de energia constante. Isto pode ser simplesmente obtido ao introduzir um termo de controle, em essência a energia, nas equações de movimento as quais, em consequência, tenderiam a manter a solução na vizinhança da integral do movimento. No mesmo artigo, Baumgarte retrata claramente os efeitos estabilizadores, principalmente ao se trabalhar com órbitas acentuadamente excêntricas ( $e > 0,8$ ). Em seus testes Baumgarte usa a transformação de tempo  $dt = r ds$  ( $\alpha = 1$ , veja Seção 3.2) em conjunto com o procedimento de estabilização.

Quando o movimento kepleriano é perturbado por outras fontes, incluindo as forças não-conservativas, as equações clássicas podem ser escritas como:

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} + \vec{P}, \quad (3.4)$$

onde as forças perturbadoras estão separadas em forças derivadas de um potencial perturbador  $V(\vec{r}, t)$  e outras forças  $\vec{P}$  (e.g., arrasto atmosférico, pressão de radiação). O termo de controle é então introduzido na Equação 3.4 usando o mais atual valor da energia, resultante de uma equação diferencial extra para a energia. As equações são (Baumgarte, 1972):

$$\begin{aligned} \vec{r}'' &= \frac{1}{r^2} (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r}' + \left( \frac{1}{2r^2} r'^2 + V + h \right) \vec{r} \\ &= r^2 \left( - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} + \vec{P} \right), \\ h' &= - r \frac{\partial V}{\partial t} - \vec{P} \cdot \vec{r} \\ t'' + 2 h t' &= \mu + r \left( \vec{P} \cdot \vec{r} - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{r} - 2V \right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde:

- ' representa a derivação em relação ao tempo fictício ( $t' = r$  ou  $dt/ds = r$ );
- $h$  é a energia total negativa; e
- $\cdot$  é o produto escalar entre os vetores.

A retenção do efeito estabilizador ainda permanece para órbitas perturbadas e tem sido confirmado por vários autores (e.g.: Janin, 1974; Baumgarte, 1972). O procedimento de estabilização deve normalmente ser aplicado com as equações de transformação de tempo. Quando uma órbita perturbada é integrada com menos de 150 passos/revolução, a estabilização permite um significativo ganho em precisão sobre as equações não-estabilizadas e envolve somente um pequeno aumento de carga computacional (Janin, 1974; 1979).

### 3.4 - REGULARIZAÇÃO

A regularização consiste geralmente em buscar formulações diferentes para linearizar as equações de movimento. Basicamente tenta-se

transformar as equações nas do oscilador harmônico cuja formulação é regular e se mantém válida mesmo para raios pequenos  $\vec{r}$  (colisão, ponto de singularidade). Desde que o conjunto de equações diferenciais do oscilador harmônico é Liapunov-estável (Baumgarte, 1972; Stiefel and Scheifele, 1971) e apresenta, portanto, propriedades de estabilidade e regularidade, algum tipo de transformação deve ser requerido para alcançar formulação semelhante.

Baumgarte (1972) mostra diversas comparações entre os resultados em integração de órbitas keplerianas excêntricas quando se usam as equações de Newton, Equações 3.1, em coordenadas cartesianas; as equações estabilizadas (ver Seção 3.3); e as modificadas para as equações do oscilador. Tanto em experimentos de curto tempo (2 revoluções) como de longo tempo (50 revoluções), a forma do oscilador mostrou melhor performance, seguida de perto pelas equações estabilizadas; as equações newtonianas tiveram o pior desempenho. A Tabela 3.3, mostra os resultados do experimento de curto tempo para variáveis normalizadas (semi-eixo = 1 e  $\mu = 1$ ), usando um Runge-Kutta de 4ª ordem de passo fixo e 100 passos por revolução.

TABELA 3.3

COMPARAÇÕES PARA DUAS REVOLUÇÕES

EXCENTRICIDADE	ERRO NORMALIZADO		
	NEWTON	ESTABILIZADO	OSCILADOR
0	7.7 E-6	1.6 E-6	1.7 E-7
0,2	2.2 E-5	1.2 E-5	2.1 E-7
0,6	1.2 E-2	3.3 E-6	3.4 E-7
0,8	1.6	4.9 E-6	5.1 E-7

FONTE: Baumgarte (1972).

Um método de regularização bastante popular foi proposto por Kustaanheimo e Stiefel (Stiefel and Scheifele, 1971) chamado transformação KS. Tal transformação modifica o estado de dimensão 6 para um espaço de fase de 8 dimensões (espaço  $u$ ), juntamente com a variável independente  $s$  definida por  $dt = rds$ , um tipo de anomalia excêntrica (veja Tabela 3.1 e Seção 3.2). Stiefel e Scheifele (1971) mostraram que quando perturbações são adicionadas, a eficiência numérica e a precisão do novo método são consideravelmente maiores do que a integração das equações de Newton, seja por integração numérica direta (Cowell), seja pelo método de Encke.

Outra transformação proposta leva ao oscilador focal de Burdet (Janin, 1979; Flury and Janin, 1975) com a variável independente modificada para a anomalia verdadeira ( $\alpha = 2$  na Tabela 3.1).

De qualquer forma, é necessário ponderar as vantagens/desvantagens a fim de avaliar adequadamente a necessidade de tais transformações em face do tradicional e bem-conhecido fato: quanto mais estabilidade e regularidade é requerida, mais aumenta o número de equações e redundâncias, o que sobrecarrega o montante de cálculos no computador. Para órbitas excêntricas é reconhecida e aconselhável usar a regularização que possibilita melhor comportamento numérico e maiores comprimentos de passo. Velez (1974, 1975) fornece resultados de testes digitais efetuados para diversas formulações e recomenda uma escolha cuidadosa da formulação e do método de integração numérica, de forma a atender requisitos de precisão ponderado com o custo computacional ("overhead") envolvido. Hoje em dia, esquemas de regularização têm sido usados em conjunto com procedimentos de estabilização e transformações de tempo.

### 3.5 - FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS

No problema clássico dos dois corpos (movimento kepleriano) uma órbita de um satélite terrestre pode ser definida por:

- a = semi-eixo maior,
- e = excentricidade,
- I = inclinação,
- $\Omega$  = longitude do nodo ascendente,
- $\omega$  = argumento do perigeu
- M = anomalia média.

Os primeiros cinco elementos são constantes durante o movimento kepleriano e o sexto elemento varia linearmente no tempo, definindo a posição do satélite ao longo da órbita. Mesmo que um movimento perturbado ocorra, os primeiros cinco elementos variam muito mais vagarosamente do que o sexto. Então surge a idéia de formular as equações selecionando as variáveis de forma a obter elementos constantes ou lineares para o movimento não-perturbado.

A definição de elemento segundo Stiefel e Scheifele (1971) é a seguinte:

Elemento é qualquer quantidade  $\sigma$  tal que, durante um movimento kepleriano puro, ele é uma função linear da variável independente. Em particular um elemento pode permanecer constante, como por exemplo o semi-eixo maior ou a excentricidade da órbita kepleriana. Se o tempo físico  $t$  é a variável independente, a anomalia média é um elemento porque varia linearmente com  $t$ . Analogamente, com o tempo fictício  $s$  como variável independente, a anomalia excêntrica pode ser considerada um elemento no caso da transformação  $dt = r ds$ .

Muitas formulações por elementos têm sido propostas na literatura. No que se segue algumas dessas formulações são brevemente revistas.

### 3.5.1 - ELEMENTOS DE TEMPO

Conforme discutido na Seção 3.2, a mudança da variável independente (transformação de tempo) obedece a:

$$dt = g(\vec{r}) ds, \quad (3.6)$$

onde  $g(\vec{r})$  é uma função usualmente escolhida como  $g(r) = c r^\alpha$ . Os elementos de tempo usados em conjunto com transformações de tempo foram introduzidos e discutidos por Stiefel e Scheifele (1971). A motivação para a introdução dos elementos baseia-se no fato de que a instabilidade dinâmica removida das equações diferenciais necessita da equação diferencial para obter o tempo, Equação 3.6. Se as equações diferenciais forem autônomas, então a instabilidade nas equações de tempo não será realimentada para as coordenadas, mas a determinação do tempo (físico) será, ao menos em parte, ainda afetada pela instabilidade (Nacozy, 1981). A extensão da definição de elementos (Seção 3.5), que para o caso não-perturbado variam linearmente, sugere a introdução da variável  $\tau$  (Stiefel and Scheifele, 1971):

$$t = c_0 + c_1 s - \vec{r} \cdot \vec{r}' / 2 h_r; \text{ se } \tau \triangleq c_0 + c_1 s \text{ vem}$$

$$\tau = t + \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} / 2h = t + \vec{r} \cdot \vec{r}' / 2hr, \quad (3.7)$$

onde  $\tau$  é o elemento de tempo. A equação diferencial em termos do tempo fictício torna-se (Janin, 1974, 1979):

$$\tau' = \frac{g(\vec{r})}{2h} \left[ \frac{\mu}{r} + \vec{r} \cdot \left( \frac{\vec{r}' h'}{\mu^2 h} + \vec{p} - \frac{\alpha V}{\alpha \vec{r}} \right) - 2V \right], \quad (3.8)$$

Este elemento pode ser inserido com vantagens nas equações de estabilização (Seção 3.3), já que a integral de energia está inclusa no conjunto de equações. Outros elementos de tempo e várias discussões estão descritas em Nacozy (1975, 1976b, 1981), Kwok e Nacozy (1981), Janin e Bond (1981) e Zare (1983).

### 3.5.2 - ELEMENTOS REGULARES

A partir da discussão na Seção 3.4, conclui-se que um conjunto de equações regularizadas pode ser criado, dependendo do esquema de regularização adotado. Então o conjunto de elementos derivado da regularização é chamado elementos regulares. O mais popular deles são os elementos KS, exaustivamente discutidos por Stiefel e Scheifele (1971).

### 3.5.3 - ELEMENTOS REGULARES UNIFORMES

Na Seção 3.4 os elementos focais de Burdet foram citados junto com os elementos KS como um dos métodos de regularização. No entanto, os elementos focais de Burdet são distinguidos dos elementos KS porque eles contêm certas propriedades diferentes, embora recaiam novamente na equação do oscilador harmônico. De fato, os elementos de Burdet têm o espaço de validade estendido até orbitas hiperbólicas, além das elípticas. Esses elementos focais são bem definidos para pequenas excentricidades e inclinações, e nenhuma singularidade ocorre nas equações diferenciais. A transição através dos movimentos elípticos para parabólicos e para hiperbólicos é suave. Portanto os elementos focais representam um conjunto de elementos orbitais uniformes. Flury e Janin (1975) produziram comparações de resultados utilizando os elementos focais de Burdet, os elementos KS e integração em coordenadas cartesianas para a integração de órbitas geostacionárias, que inclui perturbações dos coeficientes zonais até 5ª ordem e tesserais até 8ª ordem, atração gravitacional lunisolar e pressão de radiação solar. Lá os elementos de Burdet alcançaram as melhores precisões, seguidos pelos elementos KS e pela formulação em coordenadas cartesianas. Em termos de tempo de processamento, as duas formulações regulares têm desempenho semelhante.

Uma tentativa para desenvolver elementos regulares uniformes na estrutura KS, com auxílio das funções de Stumpff, está apresentada em Stiefel e Scheifele (1971). Na mesma linha de raciocínio Bond (1974) desenvolveu dois conjuntos de elementos KS uniformemente regulares: um com 10 e outro com 12 elementos. o último conjunto oferece melhor precisão numérica para propagação de órbita de longo tempo.



#### 3.5.4 - ELEMENTOS CANÔNICOS

Os elementos canônicos se originam da mecânica hamiltoniana e foram descobertos como uma alternativa ao buscar elementos analíticos e numéricos convenientes para a integração de órbitas. Ultimamente as teorias já incluem o tempo transformado (tal como aquele originário das Equações 3.2 e 3.3) como coordenada, obedecendo também às regras de transformação canônica. Dentre elas destacam-se os elementos DS (Delaunay-Similar), que não são nada além dos elementos de Delaunay  $L, G, H, l, g, h$  (ver Brouwer e Clemente, 1961, Capítulo XVII), levando em conta o tempo transformado e as versões em anomalia excêntrica ou anomalia verdadeira. De acordo com Janin (1979), estes elementos foram apresentados em Scheifele e Graf (1974) e a vantagem de usá-los estão extensivamente apresentados em Penās (1973). Bond e Janin (1981) apresentam as equações para uma variável independente arbitrária. Existem também os elementos PS (Poincaré-Similar), que não apresentam problemas de singularidade na inclinação e excentricidade. Tais elementos, comparados com os elementos KS, requerem mais 15 a 20% de tempo de processamento (Bond, 1976) e apresentam desempenho semelhante em precisão e estabilidade. Por fim, os elementos OB (Oblateness) usam o efeito do coeficiente  $J_2$  na órbita perturbada para gerar uma órbita intermediária e integram somente as perturbações adicionais (Scheifele, 1973). Segundo Janin (1979) eles são extremamente dispendiosos em termos de tempo de CPU ("Central Processor Unit"), de forma que uma precisão similar com menor custo poderia ser obtido escolhendo outro conjunto de elementos e usando um menor comprimento de passo de integração.

#### 3.6 - COMENTÁRIOS

Esta seção destina-se a tecer alguns comentários com base na compilação feita sobre os diversos tipos de formulação existentes. O universo de artigos é bastante amplo a ponto de causar certa confusão para entender e aplicar os métodos. Entretanto, no intuito de esclarecer as capacidades das várias formulações, algumas conclusões foram tiradas com base nas referências consultadas. Muitos analistas e potenciais usuários

podem estar menos interessados nos fundamentos teóricos para construir o programa do que em obter rápidas e razoáveis precisões aliadas à facilidade de manuseio. Então a questão essencial que se apresenta é: - Quando usar uma ou outra dessas formulações? Isto implica um Universo de questões como:

- Qual formulação é mais veloz?
- Qual é a mais precisa?
- Qual consome menos memória?

Como um auxílio para responder estas questões, foi preparada a Tabela 3.4, que contém as formulações descritas bem como as recomendações e restrições conforme as respectivas referências. A Seção 4.3 fornece sugestões adicionais, para um melhor uso dessas formulações, combinado com o método de integração numérica.

TABELA 3.4

COMPILAÇÃO DAS FORMULAÇÕES PARA AS EDOS

FORMULAÇÃO	COMENTÁRIOS SOBRE AS EDOS	NÚMERO DE EDOS	COMENTÁRIOS	REFERÊNCIAS
NEWTON	EQUAÇÕES BÁSICAS	6	SÓ PARA ÓRBITAS SUAVES E CIRCULARES	-
TRANSFORMAÇÃO DE TEMPO	$dt = r ds$ ou $dt = r^{3/2} ds$ ou $dt = r^2 ds$	7	REGULAGEM DO COMPRIMENTO DE PASSO	Janin(1974)
ESTABILIZAÇÃO	INSERE EQUAÇÃO DE ENERGIA + $dt=rds$ ou ELEMENTO DE TEMPO CORRESPONDENTE	8	ESTABILIDADE NÚMERICA ATÉ $e \approx 0,95$	Baumgarte (1972)
KS <sup>o</sup>	INSERE EQUAÇÃO DE ENERGIA + $dt=rds$ ou ELEMENTO DE TEMPO CORRESPONDENTE	10	REGULARIZAÇÃO (OSCILADOR HARMÔNICO)	Stiefel e Scheifele (1971)
KS UNIFORME (ELÍPTICO, PARABÓLICO, PERBÓLICO)	USANDO FUNÇÕES DE STUMPPF + EQUAÇÕES DE ENERGIA + ELEMENTO DE TEMPO CORRESPONDENTE A $dt = rds$	10	REGULARIZAÇÃO (OSCILADOR HARMÔNICO)	Stiefel e Scheifele (1971)
KS UNIFORME MODIFICADO (ELÍPTICO, PARABÓLICO, HI PERBÓLICO)	FUNÇÕES DE STUMPPF + EQUAÇÃO DE ENERGIA + $dt=rds$ ou ELEMENTO DE TEMPO CORRESPONDENTE	10 ou 12	CONJUNTO DE 12 EQUAÇÕES PRODUZ MELHORES ESTABILIDADE EM INTEGRAÇÕES DE LONGO PERÍODO	Bond (1974)

(continua)

Tabela 3.4 - Conclusão

FORMULAÇÃO	COMENTÁRIOS SOBRE AS EDOS	NÚMERO DE EDOS	COMENTÁRIOS	REFERÊNCIAS
ELEMENTOS FOCAIS DE BURDET	$dt = \frac{r^2}{(\mu p)^{1/2}} ds$	10	MENOR TEMPO DE CPU QUE KS PARA PEQUENO TAMANHO DE PASSO	Flury e Janin (1975)
DS	VERSÕES EM ANOMALIA EXCÊNTRICA E VERDADEIRA COMO VARIÁVEIS INDEPENDENTES	8	SINGULAR EM EXCENTRICIDADE E INCLINAÇÃO	Scheifele e Graf (1974), Penãs (1973), Bond e Janin (1981)
PS	VERSÃO EM ANOMALIA EXCÊNTRICA COMO VARIÁVEL INDEPENDENTE	8	MAIS 15 a 20% DE TEMPO DE CPU QUE KS; NÃO SINGULAR	Bond (1976)
OB	COM ÓRBITA INTERMEDIÁRIA ( $J_2$ ) INTEGRAM-SE SOMENTE PERTURBAÇÕES ADICIONAIS	8	PODE USAR MAIOR TAMANHO DE PASSO, MAS GASTA MAIS TEMPO DE CPU	Scheifele (1973)

•  
•

## CAPÍTULO 4

### REVISÃO DOS MÉTODOS DE PROPAGAÇÃO DE ÓRBITA

Dependendo da natureza das restrições, um entre os vários métodos de propagação de órbita deve ser escolhido de forma a preencher os requerimentos exigidos. Por exemplo, se a melhor precisão é desejada sem ponderação dos custos de tempo de processamento em computador, a escolha naturalmente recai sobre o método numérico. Por outro lado, se razoável precisão é desejada para utilização para longos intervalos de propagação de órbita, com uma relativa preocupação sobre o consumo de tempo de processamento, os métodos semi-analíticos se adaptam razoavelmente. Já o método analítico encontra valiosa aplicação para o planejamento da missão quando muitas variáveis necessitam um primeiro chute e serão iterados posteriormente; portanto, exige um relativo grau de precisão em conjunto com o mínimo custo computacional. Deve ser entendido que estas regras não são uma orientação geral e podem ser facilmente modificadas em concordância com o problema específico a ser abordado. Em particular, Janin (1979) classifica os métodos de propagação de órbita em:

- analíticos,
- semi-analíticos,
- numéricos,
- de multirrevolução.

Esta parece ser a classificação mais abrangente e geralmente aceita. Um bom levantamento bibliográfico dos três primeiros métodos pode ser encontrado em Kondapalli (1986). Cada um desses 4 métodos será descrito resumidamente a seguir.

#### 4.1 - MÉTODO ANALÍTICO

O método analítico, também denominado método geral de perturbação, é o método mais rápido de propagação de órbita; porém, em contrapartida, oferece poucas opções que possam torná-la mais genérico. Uma teoria analítica cuja modelagem pudesse incluir a perturbação do arrasto atmosférico, por exemplo, produziria uma solução complicada e extensa em virtude de o sistema dinâmico para o problema acoplado com o arrasto ser não-linear, não-conservativo, complexo na forma e de a integração do sistema ser, em geral, analiticamente intratável. Para contornar o problema, muitos dos autores analisados por Liu (1983) adotam um modelo exponencial simples para a densidade atmosférica (veja, por exemplo, Brouwer and Hori (1961) e Hoots (1981)), que torna o problema tratável por meios analíticos, não obstante as imprecisões inerentes resultantes dessa hipótese simplificadora.

No método analítico a derivação da teoria envolve o uso de aproximações, expansões em séries e integração analítica. Brouwer (1959), Kozai (1959, 1962) e Garfinkel (1959) são alguns dos precursores mais festejados pelos adeptos da teoria analítica. Algumas características apontadas para os métodos analíticos são (Kondapalli, 1986):

- manipulação algébrica laboriosa na dedução;
- modelos simples de forças perturbadoras;
- fácil visualização dos efeitos perturbadores, o que permite a compreensão da tendência de evolução dos elementos orbitais;
- pouco gasto de tempo computacional;
- órbita propagada num único passo indiferente ao intervalo de propagação.

#### 4.2 - MÉTODOS SEMI-ANALÍTICOS E ESTROBOSCÓPICOS

Métodos semi-analíticos normalmente tentam fazer uso da rapidez computacional da teoria analítica em conjunto com a precisão e flexibilidade de modelagem no método numérico. Já que uma formulação analítica universal quase nunca é possível para exprimir os vários efeitos na órbita, uma boa idéia seria a assistência de métodos numéricos (ou métodos especiais de perturbação) para, de algum modo, realizar e melhorar a propagação de órbitas.

Entre os métodos considerados semi-analíticos existem duas correntes cujas nomenclaturas são objeto de alguma confusão. Roth (1977) distingue os métodos provenientes da aplicação da técnica de médias numéricas (Uphoff, 1973; Liu, 1974) do método estroboscópico (Roth, 1973). Muitos autores consideram os métodos derivados das médias como os verdadeiros métodos semi-analíticos (e.g.: Liu and Alford, 1980; Liu et al, 1983). Para efeito de eliminação da confusa classificação, os métodos estroboscópicos serão considerados à parte.

Os métodos estroboscópicos (Roth, 1973; 1977) consistem em restringir a validade da teoria analítica por uma revolução. Ao integrar analiticamente por uma revolução e atualizar os elementos orbitais após cada revolução, obtém-se a solução pelo chamado método estroboscópico. Por essa metodologia os termos de curto período são cancelados (Roth, 1977). O procedimento continua sendo atualizado após cada revolução. Em computador a realização da propagação se torna extremamente fácil e os elementos são obtidos sempre no mesmo ponto (por exemplo, no perigeu), motivando o nome de estroboscópico ao método. O tempo de passagem pelo ponto (e.g., perigeu) também é atualizado a cada revolução levando em conta todas as perturbações consideradas no modelo. As perturbações podem ser mais facilmente incluídas quando se considera a validade da teoria analítica por uma revolução (integração analítica). Roth (1977) fornece exemplos de modelagem de algumas perturbações. O gasto de tempo de processamento chega a 1% da integração numérica (Roth, 1973).



Nos métodos semi-analíticos propriamente ditos separa-se o movimento periódico longo e secular pela técnica de médias; ou seja, os elementos orbitais osciladores são convertidos em elementos médios (Liu, 1974) após a retirada dos termos de curto período (não são os elementos médios de Brower!). Então, a integração das equações com elementos médios pode ser feita numericamente e com passo de integração sensivelmente maior, devido à retirada dos elementos de variação rápida das equações. A média numérica dos termos de curto período das perturbações normalmente é efetuada por quadratura mecânica e todos os tipos de combinação de pequenas forças podem ser incluídos (Uphoff, 1973). Um aspecto importante diz respeito à inicialização dos elementos médios. Uphoff (1973) e Liu (1974) fornecem algumas maneiras de inicializá-lo. Breakwell e Vagners (1970) recomendam calibrar o movimento médio com o auxílio da integral da energia ou ajustar a teoria para dados correspondentes a muitas revoluções, a fim de manter a imprecisão na direção transversal ("in-track") até segunda ordem. Liu (1983) e Liu et al (1983) preferem ajustar os dados orbitais de muitas revoluções por mínimos quadrados, para determinar os elementos orbitais médios iniciais. O gasto de tempo de processamento é de 10 a 20 vezes menor que a integração numérica direta (Roth, 1973).

#### 4.3 - MÉTODO NUMÉRICO

O método numérico de propagação de órbita, também chamado de método de perturbação especial, tem a capacidade de lidar com qualquer tipo de situação com uma precisão arbitrária, utilizando procedimentos de cálculo passo a passo. Este método é bastante utilizado quando se requer precisão ou o número de revoluções da órbita a ser integrada é limitado, porque sua maior desvantagem reside na lentidão do método devido à sequência de cálculos passo a passo. Basicamente tais métodos tentam fazer aproximações polinomiais da trajetória e, portanto, integram exatamente um polinômio de certo grau a menos de erros de discretização (metodologias de integração serão descritas na Seção 5). Dois fatores devem ser cuidadosamente analisados:

- o método de integração (resolução das EDOs, Seção 5),
- a formulação das EDOs (Seção 3).

Além disso, o método de integração deve estabelecer os seguintes pontos (Balmino, 1975; Hull et al, 1972):

- algoritmo para permitir o cálculo para a aproximação consequente;
- um formalismo de estimação dos erros de truncamento por passo para cada aproximação;
- critérios de decisão para o momento de aceitação do resultado, respeitando a precisão exigida;
- estratégia para definir a mudança e o melhor valor do passo em função dos segundos membros do sistema diferencial à luz dos resultados de passos precedentes.

Geralmente os integradores utilizados são baseados nos procedimentos de passo simples, passo múltiplo e de extrapolação (Capítulo 5). Segundo Janin (1979), para o cálculo de orbitais, uma fórmula clássica de passo múltiplo, de passo e ordem fixos, é suficiente na maioria das ocasiões, eliminando a necessidade de analisar alguns dos pontos acima citados. Entretanto, para curtos arcos de órbita, para manobras e e vôos interplanetários, Janin (1979) recomenda o uso das formulas de Runge-Kutta de Fehlberg (1968), de alta ordem e com controle de passo.

Com relação à escolha da formulação das EDs (Capítulo 3), além das informações contidas na Tabela 3.4, colhidas nas várias referências, Janin (1979) fornece algumas sugestões adicionais:

- Para excentricidade maior que 0,1 usar-se no mínimo uma transformação de tempo;

- Para computadores com 15 a 17 dígitos significativos é permitida a integração em coordenadas retangulares (equação básica de Newton) somente quando o número de passos por revolução é maior que 150. De outro modo, no mínimo é sugerida a estabilização das equações (Seção 3.3).
- Para menores passos/revolução (~50) recomenda-se enfaticamente o uso de elementos (KS, DS, Burdet, etc) para qualquer tipo de órbita.
- Selecionar a formulação por comparação de uma órbita de referência gerada por qualquer método adequado (com no mínimo 150 passos/revolução) a várias outras com número de passos/revolução não maiores que metade dos passos/revolução da órbita de referência. A de melhor desempenho entre elas deve ser escolhida, e sua comparação deve ser efetuada no instante correspondente ao perigeu da órbita de referência.
- Uma vez que a formulação esteja definida, proceder à estimativa do número de passos/revolução (escolha do comprimento de passo). Fixar um período de tempo suficientemente longo, por exemplo uma revolução, e então incrementar sucessivamente o número de passos/revolução. Ao examinar uma das coordenadas no instante final de integração, pode-se determinar em qual faixa de passos/revolução ocorreu o maior número comum de dígitos e, portanto, a precisão máxima exequível. Estas figuras podem variar de uma formulação para outra e de um tipo de órbita para outra.

Existem também duas metodologias consagradas entre os métodos numéricos: o método de Encke e o método de Cowell (Brouwer and Clemence, 1961). No método de Encke a integração produz a diferença entre as coordenadas reais e as coordenadas da órbita osculadora (Kepleriana); em outras palavras, somente as perturbações são integradas. Porém, com o decorrer do tempo, a influência acumulada das perturbações aumenta, de forma que são requeridas retificações das coordenadas reais. Além

disso, para obter a órbita integrada a intervalos regulares, é necessária a retificação nesses instantes e, em consequência, demandam-se soluções da equação de Kepler e integração da órbita Kepleriana (normalmente por meios analíticos) frequentemente. O método de Cowell integra diretamente as EDs em coordenadas retangulares usando diferenças finitas e, portanto, não usa explicitamente as equações da cônica da órbita ou qualquer conhecimento prévio sobre a órbita.

Com os modernos computadores de cálculos em larga escala, onde a integração pode ser levada a cabo por operadores que tenham pouco conhecimento da arte de computação e a integração pode ser totalmente automática, o método de Cowell é claramente superior (Brouwer and Clemence, 1961). Atualmente a tendência é pela utilização do método de Cowell, mas as EDs devem ser formuladas de diversas maneiras e em diversas coordenadas (vide Capítulo 3), numa tentativa de melhorar as características de estabilidade, rapidez e precisão ao utilizar o computador.

#### 4.4 - MÉTODO DE MULTIRREVOLUÇÃO

Os métodos analíticos provêem fórmulas gerais que produzem a solução em termos de condições iniciais para qualquer valor do tempo físico. No entanto é exigido muito trabalho prévio para obter a solução.

Os métodos numéricos requerem que muitos valores intermediários da solução sejam computados, além de não fornecer nenhuma informação qualitativa. O cálculo passo a passo resulta em trajetórias muito precisas, porém às custas de muito maior esforço computacional.

Os métodos de multirrevolução essencialmente possuem a mesma forma dos métodos numéricos clássicos; entretanto, devido à natureza periódica do movimento orbital, consegue-se extrapolar muitas revoluções no processo de integração (Graf, 1973). Assim, são conhecidos menor quantidade de valores intermediários. Isto implica um compromisso entre os métodos numéricos clássicos, onde muitos valores intermediários são

conhecidos, e entre os métodos analíticos, onde nenhum valor intermediário necessita ser conhecido. Basicamente, o método faz uso da filosofia do método estroboscópico (Seção 4.2), onde os elementos orbitais são conhecidos somente num ponto específico, e.g., perigeu. Uma vez que uma estimativa da variação dos elementos durante uma revolução esteja disponível, deve ser possível, aplicando estas variações, extrapolar os elementos orbitais muitas revoluções à frente. Diferente do método estroboscópico, que avalia as perturbações e atualiza os elementos orbitais a cada revolução, este método propaga revoluções inteiras para frente usando um esquema semelhante ao integrador de multipassos preditor corretor (Graf, 1974). Esta avaliação da taxa de variação dos elementos orbitais por revolução, que tem sido denominada integração interior (Graf, 1973, 1974), pode ser realizada tanto pelo método estroboscópico quanto pelo método numérico. Portanto, o método de multirrevolução consiste num algoritmo de 2 estágios de extrapolação externa (muitas revoluções) e integração interior (uma revolução). Janin (1979) enfatiza que na integração interior qualquer perturbação pode ser incluída, particularmente as perturbações do terceiro corpo, que podem causar instabilidades que limitam o passo do algoritmo de multirrevolução, dependendo do período orbital do satélite. Detalhes sobre o cálculo dos coeficientes do preditor-corretor de multirrevolução, do passo, do procedimento de inicialização, e exemplos de aplicação podem ser encontrados em Graf (1973). Normalmente os métodos de multirrevolução são baseados em aproximações polinomiais e, conseqüentemente, funções polinomiais da variável independente discreta são integradas exatamente, a menos dos erros de truncamento/arredondamento. Uma modificação foi proposta por Graf e Bettis (1975), cujo algoritmo integra exatamente produtos de funções lineares e periódicas. De acordo com os autores, este novo método melhora a precisão para certos problemas de órbita de satélites.

## CAPÍTULO 5

### MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

O método de integração numérica é um dos mais poderosos métodos conhecidos em mecânica celeste para calcular o movimento de qualquer corpo no sistema solar em torno do corpo primário. Em particular, forças agentes em satélites artificiais terrestres são descritos por equações diferenciais de 2ª ordem. Uma simples introdução de novas variáveis transforma as EDs em um sistema de equações de 1ª ordem. É assim que métodos numéricos discretos baseados em diferenças finitas e interpolações podem ser utilizados para solucionar as EDs. A equação newtoniana básica a ser integrada é (Seção 3.1):

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \vec{r} / r^3 + \vec{P} , \quad (5.1)$$

que pode ser transformada em:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{v} , \\ \dot{\vec{v}} &= -\mu \vec{r} / r^3 + \vec{P} . \end{aligned}$$

Formulações alternativas para essas EDs também foram propostas na Seção 3. Uma vez decidido o conjunto de EDs a ser integrado, torna-se importante considerar os métodos de resolução. O objetivo maior é a propagação de um estado inicial (órbita inicial) até um estado final afim de criar dados para diversas utilizações, tais como previsão de passagens, tempos de sombra, determinação do tempo de cruzamento com o equador, análise de missão, cálculos auxiliares, etc. Descrever-se-á na sequência a filosofia principal dos três métodos mais utilizados, a saber:

- métodos de Runge-Kutta,
- métodos de multi-passos,
- métodos de extrapolação.

O equacionamento completo e a descrição minuciosa dos métodos, bem como as listagens dos programas, podem ser encontrados em Kondapalli (1984).

### 5.1 - MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Quando o passo de integração é pequeno, a primeira estratégia normalmente tentada é fazer expansão em série de Taylor de modo a avaliar o valor da função para o passo seguinte. Em problemas de mecânica celeste torna-se tedioso e laborioso o cálculo das derivadas parciais de alta ordem necessárias para atingir a precisão desejada. Runge foi o primeiro a observar a possibilidade de evitar a sucessiva diferenciação na série de Taylor, embora preservando a precisão. Em outras palavras, a avaliação das derivadas da série de Taylor podem ser contornadas ao requerer que a função do lado direito da Equação 5.1 seja avaliada uma quantidade adicional de vezes dentro desse intervalo de integração. Seja  $f(x,y)$  o membro direito da Equação 5.1, com  $y = (\vec{r} : \vec{v})$  e  $x$  a variável independente. A equação geral para um passo simples é:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^R \omega_i k_i, \quad (5.2)$$

onde  $\omega_i$  são coeficientes de peso a serem determinados,  $R$  é o número de avaliações de  $f$ , e  $k_i$  satisfaz a sequência:

$$k_i = h f(x_n + c_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \quad (5.3)$$

$$c_1 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, R$$

ou então, explicitamente:

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1), \\ k_3 &= h f(x_n + c_3 h, y_n + a_{31} k_1 + a_{32} k_2), \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde  $h$  é o tamanho do passo simples.

Para obter valores específicos para os parâmetros desconhecidos, expande-se  $y_{n+1}$  em potências de  $h$  de forma a concordar com a solução das EDs até um número específico da série de Taylor. Em assim procedendo, nota-se que o número de equações (não-lineares) de condição é menor que o número de parâmetros desconhecidos. Esta é a razão pela qual existem vários conjuntos de diferentes parâmetros para um Runge-Kutta de mesma ordem. Em suma, os métodos de Runge-Kutta fornecem a EDO integrada em um passo, sem conhecimento prévio do tipo de problema e com avaliações sucessivas da função  $f$  dentro do passo de integração. O número de avaliações depende da ordem do método; em geral, ordens maiores implicam maior precisão às custas de maior tempo de processamento. Dentre os Runge-Kutta utilizados em problemas de órbita destacam-se os de Fehlberg (1968) e Shanks (1966). Janin (1979) descreve alguns critérios para avaliação do erro de truncamento e controle automático de passo, caso desejado.

## 5.2 - MÉTODOS DE MULTIPASSOS

Os métodos de multipassos usam informações de intervalos anteriores  $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots$  para calcular  $y_{k+1}$  em  $x_k + h$ . A interpolação polinomial de Lagrange é utilizada para ajustar os pontos aos valores correspondentes da função  $f$ , e o polinômio resultante é integrado exatamente (a menos de erros de truncamento/arredondamento). A resolução de EDOs por métodos de multipassos de ordem variável e passo variável pelas fórmulas clássicas de Adams parece ser de longe mais efetivas que qualquer outro método de propósito geral, quando a avaliação das funções de derivadas  $f$  são dispendiosas (Shampine and Gordon, 1975). Para problemas cujas avaliações das funções sejam maiores que 50 operações aritméticas por componente, os métodos de multipasso de ordem variável baseados nas fórmulas de Adams são os melhores (Hull et al, 1972).

As fórmulas de Adams-Bashfort de ordem  $k$  em  $x_n$  usam o polinômio  $P_{k,n}(x)$  de grau  $k-1$ , que interpola as funções  $f$  calculadas nos  $k$  pontos precedentes. A forma geral é dada por (Henrici, 1962):



$$Y_{n+1} = Y_n + h \sum_{k=0}^q \beta_{qk} f_{n-k} \quad (5.4)$$

e os coeficientes  $\beta$  podem ser encontrados na literatura, por exemplo, em Henrici (1962). Os valores numericamente grandes e os sinais alternantes dos  $\beta$  são desvantagens do método, pois contribuem para uma estimativa maior do limite de erros.

Já as fórmulas de Adams-Moulton de ordem  $k$  em  $x_n$  usam o polinômio  $P_{k,n}^*(x)$  de grau  $k-1$ , que interpola até a  $k$ -ésima derivada. A forma geral é:

$$Y_{n+1} = Y_n + \sum_{k=0}^q \beta_{qk}^* f_{n+1-k} \quad (5.5)$$

Nota-se que é necessário uma estimativa de  $Y_{n+1}$  para poder calcular o polinômio interpolante, uma vez que  $f_{n+1}$  é também função de  $Y_{n+1}$ . Poder-se-ia então iterar  $Y_{n+1}$  sucessivamente até obter a convergência desta equação não-linear. A maior complexidade computacional é tolerada porque estas fórmulas levam a resultados mais precisos devido ao uso de um polinômio interpolante mais adequado (Henrici, 1962).

Uma fórmula que fornece a primeira aproximação para  $Y_{n+1}$  é chamada preditor. A Fórmula 5.5 faz o papel do corretor. Se o preditor é suficientemente acurado, pode ser desnecessária a correção mais de uma vez. Por essa razão a Fórmula de Adams-Bashfort (5.4) (com  $q$  decrementado de 1) é recomendada para a composição de um preditor-corretor em conexão com o método de Adams-Moulton. Atualmente os preditores-corretores são bastante populares e constantemente utilizados (ver, e.g.: Shampine and Gordon, 1975; Gear, 1971; Krogh, 1971).

Uma complicação evidente no método de múltipasso é a inicialização; a dificuldade da obtenção dos valores iniciais é típica para todos os métodos baseados em múltipassos. Para tanto, métodos de passo simples como os de Runge-Kutta são frequentemente utilizados para produzir o "starting". Desse modo, para métodos de múltipassos de ordem  $q$ , requer-se uma tabela de  $q+1$  avaliações das derivadas. Para manter consistência, aplicam-se métodos de passo simples de ordem maior que

ou igual à ordem  $q$ , de modo que, se  $h$  é o passo, o erro local por passo  $O(h^{q+1})$  é o mesmo em ambos os métodos (Janin, 1979).

Uma multiplicidade de critérios para mudança de passo, de erros, inicialização e variação de ordem podem ser encontrados na literatura (e.g.: Janin, 1979; Shampine and Gordon, 1975; Krogh, 1971; Gear, 1971; Lambert, 1979).

### 5.3 - MÉTODOS DE EXTRAPOLAÇÃO

Os métodos de extrapolação usam primeiramente um método de passo simples com vários comprimentos de passo para obter uma primeira aproximação e, em seguida, através de uma extrapolação polinomial ou racional desses valores, calculam o estado integrado. A essência do método é baseada na extrapolação de Richardson. Suponha que se queira avaliar um número  $A_0$ , mas se é capaz de calcular somente uma aproximação  $A(h)$ , onde  $h$  é um comprimento de passo. Se a expansão assintótica para  $A(h)$  tiver a forma:

$$A(h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \dots$$

então ter-se-á

$$\begin{aligned} a_s^0 &= A(h_s) \quad , \quad e \\ a_s^m &= a_{s+1}^{m-1} + \frac{a_{s+1}^{m-1} - a_s^{m-1}}{h_s/h_{m+s} - 1} \quad , \quad \begin{matrix} m = 1, 2, \dots \\ s = 0, 1, \dots \end{matrix} \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde  $a$  é o valor extrapolado, o índice  $s$  se refere ao passo, e o índice superior  $m$  se refere à extrapolação. Um exemplo simples seria (Kondapalli, 1984):

$$\begin{aligned} a_0^0 &= A(h_0) = A_0 + A_1 h_0 + O(h_0^2) \quad , \\ a_1^0 &= A(h_1) = A(h_0/2) = A_0 + A_1 h_0/2 + O(h_0^2) \quad . \end{aligned}$$

Notar que  $A(h_0)$  e  $A(h_1)$  contêm o erro de 1ª ordem em  $h_0$ . É possível reduzi-lo a um erro de 2ª ordem simplesmente aplicando a Equação 5.5:

$$\begin{aligned} a_0^0 &= A(h_0) \\ a_0^1 &= a_1^0 + \frac{a_1^0 - a_0^0}{h_0/h_1 - 1} = 2 a_1^0 - a_0^0 \\ &= 2(A_0 + A_1 h_0/2 + 0(h_0^2)) - A_0 - A_1 h_0 - 0(h_0^2) , \\ &= A_0 + 0(h_0^2) , \end{aligned}$$

ou seja,  $a_s^m = A_0 + 0(h_s^{m+1})$ . Aplicando sucessivamente a Fórmula 5.5 às várias sequências de passos  $h_s$ , os termos principais de erro vão sendo sucessivamente eliminados. Este método é denominado extrapolação polinomial.

Bulirsch e Stoer (1966) desenvolveram um método de extrapolação por funções racionais da forma  $P(h)/Q(h)$ , onde  $P$  e  $Q$  são polinômios. Neste caso, supõe-se que a expansão assintótica contém somente potências pares em  $h$ :

$$A(h) = A_0 + A_2 h^2 + A_4 h^4 + \dots ,$$

e a fórmula para a extrapolação racional é:

$$\begin{aligned} a_s^0 &= A(h_s) , \quad a_s^{-1} = 0 , \\ a_s^m &= a_{s+1}^{m-1} + \frac{a_{s+1}^{m-1} - a_s^{m-1}}{(h_s/h_{m+s})^2 (1 - (a_{s+1}^{m-1} - a_s^{m-1}) / (a_{s+1}^{m-1} - a_{s+1}^{m-2})) - 1} , \end{aligned}$$

$$m = 1, 2, \dots ; \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Na maioria dos casos práticos, o método de extrapolação racional converge para a solução mais rapidamente que a extrapolação polinomial (Lapidus and Seinfeld, 1971). Sugestões sobre a sequência de passos, correção automática do comprimento do passo e avaliação do erro, bem como a listagem de programa em ALGOL, estão contidos em Bulirsh e Stoer (1966).

Hull et al. (1972) concluem que quando a avaliação das funções (derivadas) não é muito dispensiosa, o melhor método entre os testados é o de Bulirsh e Stoer (1966). Os custos de computação são menores para este método, porém o método preditor-corretor (Seção 5.2) requer consideravelmente menor número de avaliação das funções. Para problemas de dinâmica de órbita, desde que o número de operações elementares para o cálculo da função não seja muito elevado (inferior a 50 operações aritméticas por componente), o método de Bulirsh-Stoer é o mais eficaz (Balmino, 1975).

•  
• •

## CAPÍTULO 6

### COMENTÁRIOS GERAIS

A natureza computacional dos métodos numéricos de propagação de órbita (implementação, diferentes modelagens, algoritmos, etc.) dificultam a inserção, num contexto teórico, das várias facetas do tema. Não obstante, são dignos de nota os comentários que se seguem, sobre alguns tópicos não totalmente cobertos, com o objetivo de alargar a margem ao analista na escolha da metodologia e obtenção da performance desejável para o problema a ser abordado.

Para o cálculo das perturbações devidas ao geopotencial (Seção 2.1), existem vários modelos dos coeficientes dos harmônicos esféricos (e.g., GEM 9 e GEM10 de Lerch et al, 1970). Ao usar métodos analíticos ou semi-analíticos, normalmente são considerados os termos zonais até 6ª ordem. Ao empregar métodos numéricos é aconselhável o uso de ordens menores para os coeficientes, uma vez que os custos computacionais (quantidade de operações aritméticas) aumentam quase exponencialmente com a ordem, principalmente quando os coeficientes tesserais são considerados. Altas ordens devem ser utilizados somente quando são necessárias estreitas precisões. Para análise de missão, os primeiros 4 coeficientes zonais, sem inclusão dos coeficientes tesserais, normalmente são suficientes. Para propósitos de determinação de órbita e rastreamento, são necessários estudos cuidadosos para especificar adequadamente a mínima ordem/grau que satisfaz os requisitos de precisão.

No cálculo dos efeitos do arrasto atmosférico, os modelos de densidade atmosférica a serem adotados devem ser objeto de cuidadosa análise. Se rapidez é o requisito primordial podem ser utilizados modelos exponenciais simples e aproximados, ou mesmo o modelo de Harris e Priester (1965). Para maior sofisticação podem ser utilizados os modelos de Jacchia (1970, 1971, 1977) em versões computacionais melhoradas (Roberts, 1971; Rios Neto, 1973; NASA, 1976; La Fontaine and Hughes, 1983; Kuga, 1985). Dowd e Tapley (1979) e Shanklin Jr. et al.

1984) comparam os diversos modelos de densidade atmosférica para problemas de dinâmica de órbitas, que podem ser pontos de referência para a escolha do modelo adequado.

Alguns autores estão considerando uma nova filosofia na implementação do procedimento de resolução de EDOs, adaptados exclusivamente para problemas de integração numérica de órbita. A filosofia é a de que se os termos perturbadores são "desligados" num dado instante da variável independente, então o método numérico a mão deve integrar exatamente, sem erro de discretização, a equação não-perturbada; i.e., o problema dos dois corpos. Como fenômenos de dinâmica espacial são periódicos, a integração exata de uma função periódica é de particular interesse. Tal método foi derivado por Bettis (1970) e é discutido em Stiefel e Scheifele (1971), que propõem um conjunto de coeficientes para o preditor-corretor de Adams-Bashfort-Moulton.

Como último comentário, além das variáveis normalmente utilizadas para exprimir o estado orbital (Capítulo 3), Altman (1972, 1975) propõe um modelo de estado unificado para cálculos de trajetória orbital e dinâmica de atitude de satélites. As variáveis de estado são momentos (uma forma geral para a atitude) e formas paramétricas para o movimento orbital. Neste caso, os parâmetros orbitais são as características de velocidade do hodógrafo orbital. Segundo uma pesquisa efetuada por Raol e Sinha (1985), para problemas de determinação de órbita estas coordenadas não estão sendo extensivamente utilizadas por ora, de modo que conclusões definitivas devem ser postergadas. Para abordar o problema conjunto de determinação e integração numérica de órbita e atitude, esta formulação pode vir a ser uma possível ferramenta, devido ao tratamento simultâneo e unificado das variáveis orbitais e de atitude de satélites.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALTMAN, S.P., A unified state model of orbital trajectory and attitude dynamics. *Celestial Mechanics*, 6:425-446, 1972.
- Velocity-space maps and transforms of tracking observations for orbital trajectory state analysis. *Celestial Mechanics*, 11:405-428, 1975.
- BALMINO, G. Numerical methods of orbital dynamics. In: COSPAR-IAU-IUTAM. *Satellite Dynamics*, Symposium held in São Paulo, June 19-21 1974. *Proceedings*. New York, Springer Verlag, 1975, p. 50-97.
- BAUMGARTE, J. Numerical stabilization of the differential equations of keplerian motion. *Celestial Mechanics*, 5:490-501, 1972.
- BETTIS, D.G. Stabilization of finite difference methods of numerical integration. *Celestial Mechanics*, 2:282, 1970.
- BOND, V.R. The uniform, regular differential equations of the KS transformed perturbed two-body problem. *Celestial Mechanics*, 10:303-318, 1974.
- The development of the Poincaré-Similar elements with eccentric anomaly as the independent variable. *Celestial Mechanics*, 13:287-311, 1976.
- BOND, V.R.; JANIN, G., Canonical orbital elements in terms of an arbitrary independent variable. *Celestial Mechanics*, 23:159-172, 1981.
- BREAKWELL, J.V.; VAGNERS, J. On error bounds and initialization in satellite orbit theories. *Celestial Mechanics*, 2:253-264, 1970.
- BROUWER, D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *The Astronomical Journal*, 64:378-397, Nov. 1959.
- BROUWER, D.; CLEMENCE, G.M. *Methods of Celestial Mechanics*. New York, Academic, 1961.



- BROUWER, D.; HORI, G. Theoretical evaluation of atmospheric drag effects in the motion of an artificial satellite. *The Astronomical Journal*, 66(5):193-225, June 1961.
- BULIRSCH, R.; STOER, J. Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods. *Numerische Mathematik*, 8:1-13, 1966.
- CARRARA, V. *Estimatição das forças aerodinâmicas em satélites terrestres. Aplicação a um satélite experimental*. São José dos Campos INPE, Nov. 1980 (INPE-1944-RPE/262).
- *Modelagem das forças e torques atuantes em satélites*. Tese de Mestrado em Ciência Espacial. São José dos Campos, INPE, Junho 1982 (INPE-2454-TDL/094).
- DOWD, D.L.; TAPLEY, B.D. Density models for the upper atmosphere. *Celestial Mechanics*, 20(3):271-295, Oct. 1979.
- ESTES, R.H. On the analytic lunar and solar perturbation of a near earth satellite. *Celestial Mechanics*, 10(3):253-276, 1974.
- FEHLBERG, E. *Classical fifth, sixth, seventh, and eighth-order Runge-Kutta formulas with step size control*. Washington, DC, NASA 1968 (NASA Technical Report R-287).
- FLURY, W.; JANIN, G. Accurate integration of geostationary orbits with Burdet's focal elements. *Astrophysics and Space Science*, 36:495-503, 1975.
- GARFINKEL, B. The orbit of a satellite of an oblate planet. *The Astronomical Journal*, 64(9):353-367, Nov. 1959.
- GEAR, C.W. *Numerical initial value problem in ordinary differential equations*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1971.
- GRAF, O.F. *Methods of orbit computation with multirevolution steps*. Austin, TX, The University of Texas at Austin, 1973 (Applied Mechanics Research Laboratory - AMRL Report nº 1063).
- *Multirevolution method for orbit computation*. *Lecture Notes in Mathematics*, nº 362, New York, Springer-Verlag, 1974.

- GRAF, O.F.; BETTIS, D.G. Modified Multirevolution integration methods for satellite orbit computation. *Celestial Mechanics*, 11:433-448, 1975.
- HARRIS, I.; PRIESTER, W. Atmospheric structure and its variations in the region from 120 to 800 km. In: Committee On Space-Research COSPAR, *CIRA 1965*, Amsterdam, North Holland Publishing, 1965.
- HENRICI, P. *Discrete variable methods in ordinary differential equations*. New York, John Wiley, 1962.
- HOOTS, F.R. Theory of the motion of an artificial satellite. *Celestial Mechanics*, 23:307, 1981.
- HULL T.E.; ENRIGHT, W.H.; FELLEN, B.M.; SEDGWICK, A.E. Comparing numerical methods for ordinary differential equations. *SIAM Journal On Numerical Analysis*, 9(4):603-637, Dec. 1972.
- JACCHIA, L.G. *New static models of the thermosphere and exosphere with empirical temperature profiles*. Cambridge, MA, SAO, May 1970 (SAO Special Report n° 313).
- *Revised static models of the thermosphere and exosphere with empirical temperature profiles*. Cambridge, MA, SAO, May, 1971 (SAO Special Report n° 332).
- *Thermospheric temperature, density and composition: new models*. Cambridge, MA, SAO, March 1977 (SAO Special Report n° 375).
- JANIN, G. Accurate computation of highly eccentric satellite orbits. *Celestial Mechanics*, 10:451-467, 1974.
- *Mission analysis for terrestrial satellites and planetary orbiters: software design and algorithm description*. Paris, ESA, Aug. 1979 (ESA STM-208).
- JANIN, G.; BOND, V.R. A general time element for orbit integration in cartesian coordinates. *Advances in Space Research*, 1:69-78, 1981.
- JENSEN, J.; TOWNSEND, G.E.; KORK, J.; KRAFT, J.D. *Design guide to orbital flight*. New York, Mcgraw, 1962.

- KAULA, W.M. *Theory of satellite geodesy*. Waltham, MA, Blaisdell, 1966.
- KONDAPALLI, R.R. *A review on numerical methods for initial value problems*. São José dos Campos, INPE, Feb. 1984 (INPE-3011-RPI/088).
- *Um estudo dos métodos de perturbação na determinação de órbitas de satélites artificiais de baixa altitude*. São José dos Campos, INPE, Jan. 1986 (INPE-3781-RPI/151).
- KOVALESVSKI, J. *Introduction to celestial mechanics*. New York, Springer-Verlag, 1967.
- KOZAI, Y. The motion of a close earth satellite. *The Astronomical Journal*, 64(9):367-377, Nov. 1959.
- Second order solution of artificial satellite theory without air drag. *The Astronomical Journal*, 67(7):446-461, Sept. 1962.
- KROGH, F.T. *Algorithms for changing the step size used by a multistep method*. Pasadena, CA, JPL, May, 1971 (Technical Memorandum nº 275).
- KUGA, H.K. *Reformulação computacional do modelo atmosférico de Jacchia-Roberts 1971*. São José dos Campos, INPE, Out. 1985 (INPE-3691-RPE/493).
- KUGA, H.K.; MEDEIROS, V.M.; CARRARA, V. *Cálculo recursivo da aceleração do geopotencial*. São José dos Campos, INPE, Maio 1983 (INPE-2735-RPE/433).
- KUGA, H.K.; SILVA, W.C.C. *Gerador numérico de órbitas de satélites artificiais terrestres*. São José dos Campos, INPE, Abril 1984 (INPE-3050-RPE/455).
- KWOK, J.H.; NACOZY, P. Time elements in rectangular coordinates. *Celestial Mechanics*, 24:269-287, 1981.
- LA FONTAINE, J.; HUGHES, P. An analytic version of Jacchia's 1977 model atmosphere. *Celestial Mechanics*. 29:3-26, 1983.
- LAMBERT, J.D. *Computational methods in ordinary differential equations*. New York, John Wiley, 1979.
- LAPIDUS, L.; SEINFELD, J.H. *Numerical solution of ordinary differential equations*. London, Academic, 1971.

- LAUTMAN, D.A. Perturbations of a close-earth satellite due to sunlight diffusely reflected from the earth. *Celestial Mechanics*, 16(1):3-25, 1977.
- LERCH, F.J.; KLOSKO, S.M.; LAUBSCHER, R.E.; WAGNER, C.A. Gravity model improvement using Geos 3 (GEM 9 and 10). *Journal of Geophysical Research*, 84(B8):3897-3916, July, 1979.
- LIU, J.J.F. Satellite motion about an oblate earth. *AIAA Journal* 12(11): 1511-1516, Nov. 1974.
- Advances in orbit theory for an artificial satellite with drag. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 31(2):165-188, April-June, 1983.
- LIU, J.J.F.; ALFORD, R.L. Semianalytic theory for a close-earth artificial satellite. *J. Guidance and Control*, 3(4):304-311, July-Aug., 1980.
- LIU, J.J.F.; FRANCE, R.G.; HUJSAK, R.S. Application of a semianalytic orbit theory using observed data. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 31(1):49-61, Jan-March 1983.
- NACOZY, P.E. Time elements. In; COSPAR IAU-IUTAM. *Satellite Dynamics*, Symposium held in São Paulo, June 19-21, 1974. *Proceedings*. New York, Springer-Verlag, 1975, p. 16-26.
- A discussion of time transformations and local truncation error. *Celestial Mechanics*, 13:495-501, 1976a.
- Numerical aspects of time elements. *Celestial Mechanics*, 14:129-132, 1976b.
- Time elements in keplerian orbital elements. *Celestial Mechanics*, 23:173-198, 1981.
- NASA. *Mathematical theory of the Goddard Trajectory Determination System*. Greenbelt, Maryland, GSFC, April 1976 (NASA Technical Memorandum X-71106).
- *National geodetic satellite program*. Washington, 1977 (NASA Special Publication - 365).

- PENAS, A. *Accurate integration of orbits using Delaunay-Similar elements*. ESRO. 1973 (ESRO CR(P)-533).
- RAOL, J.R.; SINHA, N.K. On the orbit determination system. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES21(3):274-290, May 1985.
- RIOS NETO, A. *The estimation of the state and the unmodeled atmospheric drag for near satellites*. Ph.D. Dissertation. Austin, TX, The University of Texas at Austin, 1973.
- ROBERTS, Jr., C.E. An Analytical model for upper atmospheric densities based upon Jachia's 1970 models. *Celestial Mechanics*, 4:368-377, 1971.
- ROTH, E.A. Fast computation of high eccentricity orbits by the stroboscopic method. *Celestial Mechanics*, 8:245-249, 1973.
- Mission analysis for terrestrial satellite and planetary orbiters, with special emphasis on highly eccentric orbits. 1. The mathematical background. *ESA Journal*, 1(3):245-268, 1977.
- SCHEIFELE, G. *Numerical orbit computation based on a canonical intermediate orbit*. ESRO, 1973 (ESRO CR(P)-318).
- SCHEIFELE, G.; GRAF, O.F. *Analytical satellite theories based on a new set of canonical elements*. AIAA Paper n<sup>o</sup> 74-838, 1974.
- SHAMPINE, L.F.; GORDON, M.K. *Computer solution of ordinary differential equations*. San Francisco, CA, W.H. Freeman, 1975.
- SHANKLIN, Jr., R.E.; LEE, T.; SAMII, M; MALLICK, M.K.; CAPELLARI, Jr., J.O., Comparative studies of atmospheric density models used for earth satellite orbit estimation. *J. Guidance and Control*, 7(2):235-237, Mar-April, 1984.
- SHANKS, E.B. Solutions of differential equations by evaluation of functions. *Mathematics of Computation*, 20(93):21-38, 1966.
- SPIER, G.W. *Design and implementation of models for the double precision trajectory program (DPTRAJ)*. Pasadena, CA, JPL, 1971 (Technical Memorandum 33451).

STIEFEL, E.L.; SCHEIFELE, G. *Linear and regular celestial mechanics*.  
Berlin, Springer-Verlag, 1971.

SZEBEHELY, V.; *Theory of orbits*. N.Y., Academic, 1967.

UPHOFF, C. Numerical averaging in orbit prediction. *AIAA Journal*,  
11(11):1512-1516, Nov. 1973.

VELEZ, C.E. Notions of analytic vs numerical stability as applied to  
the numerical calculation of orbits. *Celestial Mechanics*, 10:405-  
422, 1974.

—— Stabilization and real world satellite problem. *Satellite  
Dynamics*, Symposium held in São Paulo, June, 19-21, 1974. *Proceedings*.  
New York, Springer-Verlag, 1975, p. 136-153.



ZARE, K. Time element for a general anomaly. *The Journal of  
Astronautical Sciences*, 31(4):561-567, Oct-Dec. 1983.

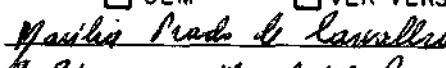


PROPOSTA PARA PUBLICAÇÃO

DATA 10.06.86

IDENTIFICAÇÃO	TÍTULO	
	Métodos numéricos em propagação de órbita de satélites artificiais terrestres	
	AUTORIA	PROJETO/PROGRAMA
	Hélio Koiti Kuga	A7651
		DIVISÃO
		DDO
		DEPARTAMENTO
		DMC
DIVULGAÇÃO <input checked="" type="checkbox"/> EXTERNA <input type="checkbox"/> INTERNA MEIO: RPE		

REVISÃO TÉCNICA	REVISOR TÉCNICO	APROVADO: <input checked="" type="checkbox"/> SIM <input type="checkbox"/> NÃO <input type="checkbox"/> VER VERSO		APROVAÇÕES
	Atair Rios Neto	 DATA _____ CHEFE DIVISÃO _____		
	RECEBI EM: 10/06/86 REVISADO EM: 10/06/86	APROVADO: <input type="checkbox"/> SIM <input type="checkbox"/> NÃO <input type="checkbox"/> VER VERSO		
	OBSERVAÇÕES: <input checked="" type="checkbox"/> NÃO HÁ <input type="checkbox"/> VER VERSO	 DATA _____ CHEFE DEPARTAMENTO _____		
	DEVOLVI EM: 10/06/86	ASSINATURA		

REVISÃO DE LINGUAGEM	Nº: 269	PRIORIDADE: 2	O(S) AUTOR(ES) DEVE(M) MENCIONAR NO VERSO, OU ANEXAR NORMAS E/OU INSTRUÇÕES ESPECIAIS		DATILOGRAFIA
	DATA: 10.06.86	RECEBIDO EM: _____			
	REVISADO <input type="checkbox"/> COM <input type="checkbox"/> SEM	CORREÇÕES <input type="checkbox"/> VER VERSO			
	POR:  19.09.86	CONCLUÍDO EM: _____			
	DATA	ASSINATURA	DATILÓGRAFA: _____		
			ASSINATURA		

PARECER		DATA	RESPONSÁVEL/PROGRAMA
FAVORÁVEL: <input type="checkbox"/> SIM <input type="checkbox"/> NÃO	<input type="checkbox"/> VER <input type="checkbox"/> VERSO		

EM CONDIÇÕES DE PUBLICAÇÃO EM: _____	AUTOR RESPONSÁVEL
--------------------------------------	-------------------

AUTORIZO A PUBLICAÇÃO: <input type="checkbox"/> SIM <input type="checkbox"/> NÃO	MEIO: _____
DIVULGAÇÃO <input type="checkbox"/> INTERNA <input type="checkbox"/> EXTERNA	
OBSERVAÇÕES: _____	
DATA	DIRETOR

SEC	PUBLICAÇÃO: _____ PÁGINAS: _____ ÚLTIMA PÁGINA: _____
	CÓPIAS: _____ TIPO: _____ PREÇO: _____